✅ الحل النموذجي — الموضوع الشامل — الفصل الأول (الدوال + النهايات + الاشتقاقية + المتتاليات)

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة العلوم التجريبية | **المدة:** 3 ساعات

التمرين الأول (5 نقاط) — دراسة شاملة لدالة + مقارب مائل + مركز تناظر

السؤال 1) 1 نقطة

عند 2^+: $\lim x^2 + 1 = 5$, $\lim(x - 2) = 0^+$, إذن $\lim f = +\infty$.

عند 2^-: $\lim(x - 2) = 0^-$, إذن $\lim f = -\infty$.

عند $\pm\infty$:

- نحسب $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x(x-2)} = \frac{x^2+1}{x^2-2x} \to 1$ (نسبة الحدود الأعلى)
- إذن $f(x) - x = \frac{x^2+1-x(x-2)}{x-2} = \frac{2x+1}{x-2} \to 2$
- إذن $(\Delta) : y = x + 2$ مقارب مائل
- $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

السؤال 2) 0.5 نقطة

المقاربات:

- $x = 2$ مقارب عمودي (نهايتان لا نهائيتان متعاكستان)
- $y = x + 2$ مقارب مائل عند $+\infty$ و $-\infty$

السؤال 3) 1.25 نقطة

الاشتقاق:

$$\frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} = f'(x)$$

جذور البسط: $x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$

- $\alpha_1 = 2 - \sqrt{5} \approx -0,24$
- $\alpha_2 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24$

إشارة f': $(x-2)^2 > 0$ دائمًا, إذن إشارة f' = إشارة $x^2 - 4x - 1$:

- موجبة على $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty)$
- سالبة على $(\alpha_1, 2) \cup (2, \alpha_2)$

جدول التغيّرات:

- f تزايد على $(-\infty, \alpha_1]$, تناقص على $[\alpha_1, 2)$, تناقص على $[2, \alpha_2]$, تزايد على $[\alpha_2, +\infty)$
- عظمى محلية عند α_1: $f(\alpha_1) \approx -1,24$
- صغرى محلية عند α_2: $f(\alpha_2) \approx 8,24$

السؤال 4) 1 نقطة

الطريقة: نتحقق أنّ $\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = 4$ لكل $h \neq 0$.

$$\frac{h^2+4h+5}{h} = \frac{1+{}^2(h+2)}{h} = (h+f(2$$

$$\frac{h^2+4h-5-}{h} = \frac{h^2-4h+5}{h-} = \frac{1+{}^2(h-2)}{h-} = (h-f(2$$

$$8 = \frac{8h}{h} = \frac{h^2+4h+5-h^2+4h-5}{h} = (h-f(2+(h+f(2$$

إذن $\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = 4$ ✓

الخلاصة: $\Omega(2,4)$ مركز تناظر.

السؤال 5) 1.25 نقطة

الحساب:

على $[3,4]$: $\frac{2x+1}{x-2} = (2+x) - f(x)$

بما أنّ $2 < 3 \leq x$, $\frac{2x+1}{x-2} > 0$, إذن $(\mathcal{C})$ فوق (Δ) على $[3,4]$.

$$\mathcal{S} = \int_3^4 \frac{2x+1}{x-2}\,dx$$

نحوّل: $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{5}{x-2} + 2$ (قسمة مطوّلة)

$$\mathcal{S} = \int_3^4 \left(\frac{5}{x-2}+2\right)dx = [2 - \ln|x\,5 + 2x|]_3^4$$

$$= \ln 2\,5 + 2 = (\ln 1\,5 + 6) - (\ln 2\,5 + 8)$$

النتيجة: $\mathcal{S} = \ln 2\,5 + 2 \approx 47{,}5$ unit^2.

التمرين الثاني (5 نقاط) — متتالية عودية + متتالية مساعدة + برهنة بالتراجع

السؤال 1) 0.5 نقطة

الحسابات:

- $u_1 = \frac{2+1\cdot 3}{2+3} = \frac{7}{5}$
- $u_2 = \frac{1+\frac{7}{5}3}{3+\frac{7}{5}} = \frac{\frac{5}{5}+\frac{21}{5}}{\frac{15}{5}+\frac{7}{5}} = \frac{\frac{26}{5}}{\frac{22}{5}} = \frac{26}{22} = \frac{13}{11}$
- $u_3 = \frac{1+\frac{13}{11}3}{3+\frac{13}{11}} = \frac{\frac{11}{11}+\frac{39}{11}}{\frac{33}{11}+\frac{13}{11}} = \frac{\frac{50}{11}}{\frac{46}{11}} = \frac{50}{46} = \frac{25}{23}$

السؤال 2) 1.25 نقطة

التهيئة ($n = 1$): $u_1 = \frac{7}{5}$ ... لكن $\frac{7}{5} > 1$!

ملاحظة: $u_0 = 2$, $u_1 = 7/5 = 1,4$, $u_2 = 13/11 \approx 1,18$, $u_3 = 25/23 \approx 1,087$. المتتالية تقترب من 1 من فوق.

لِنُعدّل السؤال: برهن بالتراجع أنّ $1 < u_n \leq 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

التهيئة ($n = 0$): $u_0 = 2 \in (1, 2]$ ✓

الفرضية: نفرض $1 < u_n \leq 2$.

النتيجة ($n + 1$): ندرس $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3}$.

- **إيجابية:** $0 < u_n \Rightarrow 0 < 3u_n + 1$ و $0 < u_n + 3$, إذن $0 < u_{n+1}$ ✓
- **$1 < u_{n+1}$:**

$$1 < u_n \iff 2 < 2u_n \iff 3 + u_n < 1 + 3u_n \iff 1 < u_{n+1}$$

✓

- **$u_{n+1} \leq 2$:**

$$5 \geq u_n \iff 6 + 2u_n \geq 1 + 3u_n \iff (3 + u_n)2 \geq 1 + 3u_n \iff 2 \geq u_{n+1}$$

✓

إذن $1 < u_{n+1} \leq 2$ ✓.

الخلاصة: بالتراجع, $1 < u_n \leq 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

السؤال 3) 1 نقطة

الحساب:

$$\frac{(1 + u_n)(u_n - 1)}{u_n + 3} = \frac{u_n^2 - 1}{u_n + 3} = \frac{3u_n + 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{3u_n + 1 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = u_n - u_{n+1}$$

من السؤال 2, $1 < u_n$:

- $u_n - 1 > 0$
- $u_n + 1 > 0$
- $u_n + 3 > 0$
- إذن $u_n - u_{n+1} > 0$

النتيجة: (u_n) **متناقصة**.

السؤال 4) 0.75 نقطة

التقارب:

- (u_n) متناقصة (من السؤال 3)
- محدودة سفلًا بـ 1 (من السؤال 2)
- إذن متقاربة حسب مبرهنة الرتابة المحدودة

حساب ℓ:

نأخذ النهاية في $\frac{3u_n+1}{u_n+3} = u_{n+1}$:

$$\frac{3\ell+1}{\ell+3} = \ell \Rightarrow (3+\ell)\ell = 3\ell+1 \Rightarrow \ell^2 = 3\ell+1 \Rightarrow \ell^2 = 1$$

$$\ell = \pm 1$$

بما أنّ $u_n > 1$, $1 \leq \ell$, إذن $\ell = 1$.

السؤال 5) 1.5 نقطة

أ) الطبيعة الهندسية:

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{2u_n-2}{4u_n+4} = \frac{3u_n+1-(u_n+3)}{3u_n+1+(u_n+3)} = \frac{1-\frac{3u_n+1}{u_n+3}}{1+\frac{3u_n+1}{u_n+3}} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = v_{n+1}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

الحد الأول: $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

ب) الصيغ الصريحة:

$$v_n = v_0 \cdot q^n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3 \cdot 2^n}$$

من $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$, نحل:

$$u_n = \frac{v_n+1}{v_n-1} = \frac{\frac{1}{3\cdot 2^n}+1}{\frac{1}{3\cdot 2^n}-1} = \frac{1+3\cdot 2^n}{1-3\cdot 2^n}$$

ج) المجموع والنهاية:

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1/2)^{n+1}-1}{1/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)$$

النهاية: $\lim \sum v_k = \frac{2}{3}$ (لأن $(1/2)^{n+1} \to 0$).

التمرين الثالث (5 نقاط) — نهايات + استمرارية + IVT + مبرهنة لاغرنج

السؤال 1) 1.5 نقطة

أ) $\lim \frac{3x^2-5x+1}{x^2-4x+7} = \frac{3}{1} = 3$ (نسبة الحدود الأعلى)

ب) عند $x = 2$: شكل غير معرّف $\frac{0}{0}$. نبسّط:

$$\frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{(x^2+2x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^3-8}{x^2-4}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4} = \lim_{x\to 2}$$

ج) بالضرب بالمرافق:

$$\frac{3x}{x+\sqrt{x^2+3x}} = \frac{{}^2x - {}^2(\sqrt{x^2+3x})}{x+\sqrt{x^2+3x}} = x - \sqrt{x^2+3x}$$

$$\frac{3}{2} \to \frac{3}{1+\sqrt{x/3+1}} =$$

د) نستعمل $\sin^2(x/2)\,2 = \cos x - 1$:

$$\frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = {}^2\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right) \cdot \frac{2}{4} = \frac{\sin^2(x/2)\,2}{{}^2x} = \frac{\cos x - 1}{{}^2x}$$

السؤال 2) 1.5 نقطة

أ) قيمة a للاتصال:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (شهيرة)}$$

للاتصال: $1 = a = g(0)$, إذن $\boxed{a = 1}$.

ب) القابلية للاشتقاق:

$$\lim \frac{\sin x - x}{{}^2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$$

باستعمال تaylor: $\sin x = x - x/6 + O(x^5)$, إذن $\sin x - x = -x/6 + O(x^5)$.

$$\frac{\sin x - x}{{}^2x} = \frac{-x^3/6}{{}^2x} = -\frac{x}{6} + O(x^3) \to 0 + O(x^3)$$

إذن $g'(0) = 0$ — g قابلة للاشتقاق عند 0 ✓.

السؤال 3) 1 نقطة

الدراسة:

- $h'(x) = 3x^2 - 3 = (1-x^2)3 = (1+x)(1-x)3$

- النقاط الحرجة: $x = -1$ و $x = 1$

- $h(+\infty) = +\infty$, $h(-\infty) = -\infty$

- $h(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ (عظمى محلية)

- $h(1) = 1 + 3 - 1 = -1$ (صغرى محلية)

التطبيق (IVT على كل مجال):

- على $(-\infty, -1)$: h تزايد من $-\infty$ إلى 3, يقطع 0 مرة واحدة ← حل $\alpha_1 < -1$

- على $(-1, 1)$: h تناقص من 3 إلى -1, يقطع 0 مرة واحدة ← حل $\alpha_2 \in (-1, 1)$

- على $(1, +\infty)$: h تزايد من -1 إلى $+\infty$, يقطع 0 مرة واحدة ← حل $\alpha_3 > 1$

النتيجة: 3 حلول على $\mathbb{R}$ ✓.

السؤال 4) 0.5 نقطة

شروط لاغرنج:

- φ متصلة على $[1, e]$ ✓

- φ قابلة للاشتقاق على $(1, e)$ ✓

التطبيق:

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(e) - \varphi(1)}{e - 1}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{0 - 1}{e - 1}$$

$$c = e - 1 \approx 1,718$$

$c = e - 1 \in (1, e)$ ✓.

السؤال 5) **0.5 نقطة**

نطبّق لاغرنج على $f(t) = \ln(t+1)$ على $[0,x]$:

- $f'(t) = \frac{1}{t+1}$
- يوجد $c \in (0,x)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$
- $\frac{1}{c+1} = \frac{\ln(x+1)-0}{x}$
- $\frac{x}{c+1} = \ln(x+1)$

الترتيب: $1 > \frac{1}{c+1} > \frac{1}{x+1} \Rightarrow 1+x > 1+c > 1 \Rightarrow x > c > 0$

$$x > \ln(x+1) > \frac{x}{x+1} \Rightarrow x > \frac{x}{c+1} > \frac{x}{x+1}$$

✓

التمرين الرابع (5 نقاط) — احتمالات + توزيع ذي الحدين + احتمال شرطي

السؤال 1) 1.25 نقطة

أ) عدد السحوبات: $\binom{10}{3} = 120$

ب) $P(3\text{حمراء})$:

- عدد الحالات المواتية: $\binom{4}{3} = 4$
- $P = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

ج) $P(\text{نفس اللون}) = P(3\text{حمراء}) + P(3\text{بيضاء})$:

- $P(3\text{بيضاء}) = \frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$
- $P(\text{نفس اللون}) = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1+5}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

السؤال 2) 0.75 نقطة

بالحادثة المضادة:

$$P(1\text{حمراء} \leq) = 1 - P(0\text{حمراء}) = 1 - \frac{\binom{6}{3}}{120} = 1 - \frac{20}{120} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

أي $\approx 83,3\%$.

السؤال 3) 1.75 نقطة

أ) النوع: $X \sim \mathcal{B}(3, 0.4)$ — توزيع ذي الحدين, $n = 3$, $p = 4/10 = 0.4$.

ب) قانون التوزيع:

$$P(X = k) = \binom{3}{k}(0.4)^k(0.6)^{3-k}$$

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.216	0.432	0.288	0.064

- $P(X = 0) = (0.6)^3 = 0.216$
- $P(X = 1) = 3 \cdot 0.4 \cdot 0.36 = 0.432$
- $P(X = 2) = 3 \cdot 0.16 \cdot 0.6 = 0.288$
- $P(X = 3) = (0.4)^3 = 0.064$

التحقق: $0.216 + 0.432 + 0.288 + 0.064 = 1$ ✓

ج) الأمل والتباين:

- $E(X) = np = 3 \cdot 0.4 = 1.2$
- $V(X) = np(1 - p) = 3 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.72$

السؤال 4) 0.75 نقطة

:$(2 \leq P(X$

$$0.352 = 0.064 + 0.288 = (3 = P(X + (2 = P(X = (2 \leq P(X$$

:$(1 \leq X|2 = P(X$

$$0.784 = 0.216 - 1 = (0 = P(X - 1 = (1 \leq P(X$$

$$0.367 \approx \frac{0.288}{0.784} = \frac{P(X=2)}{P(X \geq 1)} = (1 \leq X|2 = P(X$$

أي حوالي $36,7\%$.

السؤال 5) 0.5 نقطة

ليكن $Y \sim \mathcal{B}(n, 0.4)$ عدد الكرات الحمراء في n سحبة.

$$0.95 \leq {}^{n}(0.6) - 1 = (1 \leq P(Y$$

$$0.05 \geq {}^{n}(0.6)$$

$$\ln 0.05 \geq n \ln 0.6$$

$$5.86 \approx \frac{2.996-}{0.511-} \approx \frac{\ln 0.05}{\ln 0.6} \leq n$$

النتيجة: $n_{\min} = 6$.