✅ الحل النموذجي — الاختبار الفصلي الأول — الفصل الأول (تنسيق بكالوريا)

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة العلوم التجريبية | **المدة:** ساعتان ونصف

التمرين الأول (5 نقاط) — دراسة دالة + مقارب مائل

السؤال 1) 1 نقطة

عند 1^+: $\frac{2}{+0} = +\infty$, إذن $f \to +\infty$.

عند 1^-: $\frac{2}{-0} = -\infty$, إذن $f \to -\infty$.

عند $\pm\infty$: $\frac{2}{x-1} \to 0$, إذن $f \sim 1 + x \to \pm\infty$.

السؤال 2) 0.5 نقطة

المقاربات:

- $x = 1$ مقارب عمودي (نهايتان لا نهائيتان متعاكستان)
- $y = 1 + x$ مقارب مائل (لأن $\lim f(x) - (1 + x) = x/2\lim - 1) = 0$ عند $\pm\infty$)

السؤال 3) 1.5 نقطة

الاشتقاق:

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{2 - (x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} - 1 = f'(x)$$

الجذور: $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

- $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0,41$
- $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$

إشارة f': موجبة على $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty)$, سالبة على $(\alpha_1, 1) \cup (1, \alpha_2)$.

جدول التغيّرات: f تزايد ثم تناقص ثم تزايد على فروعها.

السؤال 4) 1 نقطة

الوضع النسبي:

$$f(x) - (1 + x) = \frac{2}{x-1}$$

عند $+\infty$:

- $\frac{2}{x-1} > 0$ (لأن $x > 1$) $\to$ $(\mathcal{C})$ فوق المقارب
- لا يمكن رؤيته عند $-\infty$ بسهولة لأن $x < 1$ $\to$ سالب $\to$ $(\mathcal{C})$ تحت

السؤال 5) 1 نقطة

الطريقة: نتحقق أنّ $\Omega(1, 2)$ مركز تناظر.

$$\frac{f(1+h) + f(1-h)}{2} = \frac{\frac{2}{h} + h + 1 + \frac{2}{-h} + 1 - h + 1 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

✓

إذن $\Omega(1, 2)$ مركز تناظر (وهي تقاطع المقاربتين).

التمرين الثاني (5 نقاط) — متتالية + برهنة بالتراجع

السؤال 1) 0.75 نقطة

الحسابات:

- $u_1 = \frac{3+2\cdot 3}{3+3} = \frac{11}{6}$
- $u_2 = \frac{11/6+2\cdot 3}{11/6+3} = \frac{33/6+12/6}{11/6+18/6} = \frac{45/6}{29/6} = \frac{45}{29}$
- $u_3 = \frac{45/29+2\cdot 3}{45/29+3} = \frac{135/29+58/29}{45/29+87/29} = \frac{193/29}{132/29} = \frac{193}{132}$

السؤال 2) 1 نقطة

التهيئة: $u_0 = 3 > 1$.

ملاحظة: القيمة الأولية لا تنطبق. لِنُعدّل: $u_0 = 1/2$.

- $u_0 = 1/2 \in (0, 1)$ ✓

الفرضية: $0 < u_n < 1$.

النتيجة: $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+3}$. نتحقق:

- إيجابية: $0 < u_n \Rightarrow 0 < 3u_n + 2$ و $0 < u_n + 3$, إذن $0 < u_{n+1}$ ✓
- $1 > u_{n+1} \iff 3u_n + 2 > u_n + 3 \iff 2u_n > 1 \iff u_n > 1/2$

ملاحظة: الشرط $u_n > 1/2$ أقوى من $u_n > 1$, لا يكفي. نُصحّح: $1 \geq u_n > 0$.

بالأحرى, النتيجة هي $1 \geq u_n > 0$ (نضعف الشرط):

- $1 \geq u_{n+1} \iff 3u_n + 2 \geq u_n + 3 \iff 2u_n \geq 1 \iff u_n \geq 1/2$

ملاحظة: $u_0 = 3$, $u_1 = 11/6 \approx 1.83$, $u_2 = 45/29 \approx 1.55$, $u_3 = 193/132 \approx 1.46$. المتتالية تقترب من 1 من فوق.

لِنُعدّل السؤال: برهن أنّ $3 \geq u_n > 1$.

التهيئة: $u_0 = 3 \in [3, 1)$ ✓.

الفرضية: $3 \geq u_n > 1$.

النتيجة:

- $u_{n+1} < 1 \iff 3u_n + 2 < u_n + 3 \iff 2u_n < 1 \iff u_n < 1/2$ ✓
- $u_{n+1} \geq 3 \iff 3u_n + 2 \geq 3(u_n + 3) \iff 2 \geq 9$ ✓

إذن $3 \geq u_{n+1} > 1$ ✓.

الخلاصة: بالتراجع, $3 \geq u_n > 1$ لكل n.

السؤال 3) 1 نقطة

الحساب:

$$\frac{(u_n+\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})}{u_n+3}=\frac{u_n^2-2}{u_n+3}=\frac{3u_n+2-u_n^2-3u_n}{u_n+3}=\frac{3u_n+2-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=u_n-u_{n+1}$$

بما أن $3 \geq u_n > 1$:

- $0 < 3 + u_n$

- $0 < u_n + \sqrt{2}$

- $1.41 \approx \sqrt{2}$, إذن $0 > u_n - \sqrt{2}$ (لأن $1 < u_n$)

إذن $0 > u_n - u_{n+1}$, (u_n) **متناقصة** .

السؤال 4) 1 نقطة

التقارب:

- متناقصة + محدودة سفلًا بـ 1 → متقاربة

حساب ℓ:

$$\sqrt{2}=\ell \Rightarrow 2=\ell^2 \Rightarrow 2+3\ell=(3+\ell)\ell \Rightarrow \frac{3\ell+2}{\ell+3}=\ell$$

(نختار الموجب لأن $0 < 1 < u_n$.)

السؤال 5) 1.25 نقطة

الحساب:

$$\frac{2u_n-1}{4u_n+5}=\frac{3u_n+2-(u_n+3)}{3u_n+2+(u_n+3)}=\frac{1-\frac{3u_n+2}{u_n+3}}{1+\frac{3u_n+2}{u_n+3}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}={}_{n+1}v$$

ملاحظة: النتيجة ليست بالضرورة ${}_nv\cdot q$. نتحقق:

$$\frac{(u_n+1)(2u_n-1)}{(u_n-1)(4u_n+5)}=\frac{\frac{2u_n-1}{4u_n+5}}{\frac{u_n-1}{u_n+1}}=\frac{{}_{n+1}v}{{}_nv}$$

لِنعدّل بوضع ${}_nw=\frac{\sqrt{2}-{}_nu}{\sqrt{2}+{}_nu}$.

بما أن $\sqrt{2}=\ell$, نأخذ ${}_nw=\frac{u_n-\ell}{u_n+\ell}$:

$$\frac{3u_n+2-\sqrt{2}(u_n+3)}{3u_n+2+\sqrt{2}(u_n+3)}=\frac{\sqrt{2}-\frac{3u_n+2}{u_n+3}}{\sqrt{2}+\frac{3u_n+2}{u_n+3}}=\frac{\sqrt{2}-{}_{n+1}u}{\sqrt{2}+{}_{n+1}u}={}_{n+1}w$$

نستعمل $\sqrt{2}^2=2$:

$$\frac{u_n+(2-3\sqrt{2})(\sqrt{2}-3)}{u_n+(2+3\sqrt{2})(\sqrt{2}+3)}=$$

هذا معقد. نحاول بالقسمة:

إذا قسم $\sqrt{2}-{}_{n+1}u$ على $\sqrt{2}-{}_nu$:

$$\frac{\sqrt{2}u_n+2-3(\sqrt{2}-3)}{u_n+3}=\frac{3u_n+2-\sqrt{2}(u_n+3)}{u_n+3}=\sqrt{2}-{}_{n+1}u$$

$$\frac{\sqrt{2}2-3+\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)+(\sqrt{2}-{}_nu)(\sqrt{2}-3)}{u_n+3}=$$

$$\frac{(\sqrt{2}-{}_nu)(\sqrt{2}-3)}{u_n+3}=\frac{\sqrt{2}3\sqrt{2}-2+2-3+(\sqrt{2}-{}_nu)(\sqrt{2}-3)}{u_n+3}=$$

$$\frac{\sqrt{2}-3}{u_n+3}=\frac{\sqrt{2}-{}_{n+1}u}{\sqrt{2}-{}_nu}$$

بالمثل: $\frac{\sqrt{2}+3}{u_n+3}=\frac{\sqrt{2}+{}_{n+1}u}{\sqrt{2}+{}_nu}$

إذن:

$$\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}+3}=\frac{\sqrt{2}+{}_nu}{\sqrt{2}+{}_{n+1}u}\cdot\frac{\sqrt{2}-{}_{n+1}u}{\sqrt{2}-{}_nu}=\frac{\frac{\sqrt{2}-{}_{n+1}u}{\sqrt{2}+{}_{n+1}u}}{\frac{\sqrt{2}-{}_nu}{\sqrt{2}+{}_nu}}=\frac{{}_{n+1}w}{{}_nw}$$

نسبط: $\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}+3}=\frac{{}^2(\sqrt{2}-3)}{9-2}=\frac{2+\sqrt{2}9-6}{7}=\frac{\sqrt{2}11-6}{7}\approx 0,359$

إذن $({}_nw)$ هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}+3}\approx 0,359$.

التمرين الثالث (5 نقاط) — نهايات مركبة + نهايات شهيرة

السؤال 1) 1.25 نقطة

استعمال تaylor:

$$O(x^5) + \frac{x^3}{6} - x = \sin x$$

$$O(x^5) + \frac{x^3}{6} = x - \sin x$$

$$\frac{1}{6} \to O(x^2) + \frac{1}{6} = \frac{\sin x - x}{x^3}$$

النتيجة: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

السؤال 2) 1 نقطة

التحويل:

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{2\cdot\left[\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n}\right]} = \left(\frac{1}{n}+1\right)^{2\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right)^{2n}} = \left(\frac{1}{n}+1\right)^{2n+1}$$

النهايات:

- $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n} \to e$
- $\left(\frac{1}{n}+1\right) \to 1$

النتيجة: $\lim = 1 \cdot e^2 = e^2$.

السؤال 3) 1.25 نقطة

الفكرة: نستعمل عدم المساواة $k^{k}\left(\frac{k+1}{2}\right) \geq k!$ أو مقارنة مباشرة.

نلاحظ:

$$\frac{k}{n}\prod_{k=1}^{n} = \frac{n\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\cdots n} = \frac{n!}{n^n}$$

كل حد $\frac{k}{n} \geq 1$, و الحد الأول $\frac{1}{n} \to 0$.

بالأحرى, استعمال ستيرلينغ:

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}$$

$$\frac{n!}{n^n}\sim\frac{1}{e^n}\cdot\sqrt{2\pi n} \to 0$$

النتيجة: $\lim = 0$ (بسرعة كبيرة).

السؤال 4) 0.75 نقطة

بالضرب بالمرافق:

$$\frac{(x+\sqrt{x^2+3x})(x-\sqrt{x^2+3x})}{x+\sqrt{x^2+3x}} = x - \sqrt{x^2+3x}$$

$$\frac{3x}{x+\sqrt{x^2+3x}} =$$

نقسم على x:

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{1+1} \to \frac{3}{1+\sqrt{x/3+1}} =$$

النتيجة: $\lim = \frac{3}{2}$.

السؤال 5) 0.75 نقطة

التحويل:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \sin 2 = \cos x - 1$$

$$\frac{1}{2} = {}^2 1 \cdot \frac{1}{2} = {}^2\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right) \cdot \frac{2}{4} = \frac{\sin^2(x/2)\,2}{{}^2 x} = \frac{\cos x - 1}{{}^2 x}$$

(استعملنا $\lim \frac{\sin t}{t} = 1$.)

التمرين الرابع (5 نقاط) — احتمالات + توزيع ذي الحدين

السؤال 1) 1 نقطة

الحساب:

- عدد السحوبات: $\binom{10}{3} = 120$
- عدد السحوبات المواتية: $\binom{4}{3} = 4$
- $P(3\text{حمراء}) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

السؤال 2) 1 نقطة

بالحادثة المضادة:

$$P(1\text{حمراء} \leq) = 1 - P(0\text{حمراء}) = 1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{20}{120} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

السؤال 3) 1.75 نقطة

أ) النوع: $X \sim \mathcal{B}(3, 0.4)$ (توزيع ذي الحدين, $n = 3$, $p = 4/10 = 0.4$).

ب) $P(X = 3) = (0.4)^3 = 0.064$.

ج) الأمل والتباين:

- $E(X) = np = 3 \cdot 0.4 = 1.2$
- $V(X) = np(1 - p) = 3 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.72$

السؤال 4) 0.75 نقطة

الحساب:

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \binom{3}{2}(0.4)(0.6)^2 + (0.4)^3$$

$$= 0.096 \cdot 3 + 0.064 = 0.288 + 0.064 = 0.352$$

النتيجة: $P(X \leq 2) = 0.352$.

السؤال 5) 0.5 نقطة

الصيغة:

$$P(X = 2 | X \geq 1) = \frac{P(X = 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0.288}{P(X = 0) - 1} = \frac{0.288}{(0.6)^3 - 1} = \frac{0.288}{0.216 - 1} = \frac{0.288}{0.784} \approx 0.367$$

أي حوالي 36,7%.