✅ الحل النموذجي — الفرض الثاني — الفصل الثالث (تنسيق بكالوريا)

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة التقني رياضي | **المدة:** ساعتان

التمرين الأول (5 نقاط) — جداء سلمي في الفضاء

السؤال 1) 0.75 نقطة

الإحداثيات:

- $\vec{AB} = (1-2 ;0-1 ;1-0) = (1 ;1 ;1-)$
- $\vec{AC} = (1-0 ;0-2 ;1-1) = (0 ;2 ;1-)$

السؤال 2) 1.25 نقطة

الجداء السلمي:

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0 \cdot (1-) + 2 \cdot 1 + (1-) \cdot 1 = 0 + 2 + 1- = 1$$

طبيعة المثلث:

- $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \not{1} = 0$, إذن A ليس قائمة
- نتحقق من B أو C: $\vec{BA} = (1 ;1- ;1-)$, $\vec{BC} = (1 ;1 ;2-)$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 + 1 - 2 = \not{2} = 0$
- نتحقق من C: $\vec{CA} = (0 ;2- ;1)$, $\vec{CB} = (1- ;1- ;2)$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 + 2 + 2 = \not{4} = 0$

المثلث ليس قائمًا في أي رأس.

ملاحظة: نحسب الزوايا: $\cos \widehat{A} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\,\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \approx 0.258$, $\widehat{A} \approx 75^\circ$.

السؤال 3) 1.5 نقطة

الحساب:

$$\vec{AC} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{k} & \vec{j} & \vec{i} \\ 1- & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1- \end{vmatrix}$$

$$= (2 \cdot (1-) - 0 \cdot 1)\vec{i} - ((1-) \cdot (1-) - 0 \cdot 1)\vec{j} + ((1-) \cdot 1 - 2 \cdot 1)\vec{k}$$

$$= (0 + 2)\vec{i} - (1 - 0)\vec{j} + (1 + 2)\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (2 ;1 ;3)$$

النتيجة: $\vec{AC} \wedge \vec{AB} = (2 ;1 ;3)$.

السؤال 4) 0.75 نقطة

الصيغة:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AC} \wedge \vec{AB}| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

النتيجة: $\mathcal{S} = \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1,87$.

السؤال 5)

0.75 نقطة

المتجه العادي: $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (2;1;3)$

المعادلة: $2x + y + 3z + d = 0$, نحدد d بـ $A(1;0;1)$:

$$2(1) + 0 + 3(1) + d = 0 \Rightarrow d = -5$$

النتيجة: $2x + y + 3z - 5 = 0$.

التمرين الثاني (5 نقاط) — المسافة من نقطة + الحجم

السؤال 1) 1.25 نقطة

الصيغة:

$$\frac{\sqrt{14}2}{7} = \frac{\sqrt{14}4}{14} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{|5-6+1+2|}{\sqrt{14}} = \frac{|5-2\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{9+1+4}} = d(D,(ABC))$$

النتيجة: $d(D,(ABC)) = \frac{\sqrt{14}2}{7} \approx 1,07$.

السؤال 2) 1.25 نقطة

الحساب:

$$(1\,;1\,;0) = (1-2\,;0-1\,;1-1) = \vec{A}D$$

$$4 = 1\cdot 3+1\cdot 1+0\cdot 2 = (1\,;1\,;0)\cdot(3\,;1\,;2) = \vec{A}D\cdot(\vec{A}C\wedge\vec{A}B) = [\vec{A}D\,,\vec{A}C\,,\vec{A}B]$$

النتيجة: $[\vec{A}D\,,\vec{A}C\,,\vec{A}B] = 4$.

السؤال 3) 0.75 نقطة

الصيغة:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{|[\vec{A}D\,,\vec{A}C\,,\vec{A}B]|}{6} = {}_{ABCD}V$$

النتيجة: $V = \frac{2}{3}$ وحدة حجم.

السؤال 4) 1 نقطة

الحساب: الجداء المختلط = 4 ≠ 0.

إذن النقاط الأربعة ليست في نفس المستوي (متجهات $\vec{A}B$, $\vec{A}C$, $\vec{A}D$ غير مستوية المستوي).

السؤال 5) 0.75 نقطة

الحساب:

- $AB = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$
- $AC = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$
- $AD = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

النتيجة: الأضلاع مختلفة ($\sqrt{2} \neq \sqrt{5} \neq \sqrt{3}$), إذن $ABCD$ رباعي غير منتظم.

التمرين الثالث (5 نقاط) — احتمالات + توزيع

السؤال 1) 0.5 نقطة

النوع: $X \sim \mathcal{B}(3, 0.3)$ (توزيع ذي الحدين, $n = 3$, $p = 3/10 = 0.3$).

السؤال 2) 1 نقطة

$P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = (0.7)^3 = 0.343$$

$P(X = 3)$:

$$P(X = 3) = (0.3)^3 = 0.027$$

السؤال 3) 1 نقطة

الأمل: $E(X) = 3 \cdot 0.3 = 0.9$

التباين: $V(X) = 3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.63$

السؤال 4) 0.75 نقطة

بالحادثة المضادة:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.343 = 0.657$$

النتيجة: 0.657 (65,7%).

السؤال 5) 1.75 نقطة

الحساب:

$$P(Y \geq 1) = 1 - (0.7)^n \geq 0.95 \iff (0.7)^n \leq 0.05$$

$$\iff n \ln 0.7 \leq \ln 0.05$$

$$\iff n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.7} \approx \frac{-2.996}{-0.357} \approx 8.40$$

النتيجة: $n_{\min} = 9$.

التمرين الرابع (5 نقاط) — معادلة تفاضلية

السؤال 1) 0.75 نقطة

المعادلة الموافقة: $y' = -2y$ (درجة 1, معامل ثابت)

الحل العام: $y(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

السؤال 2) 2 نقطة

نضع $y(x) = C(x)e^{-2x}$**:**

- $y' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$
- نعوّض في (E'): $C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = e^{-x}$
- $C'(x)e^{-2x} = e^{-x}$
- $C'(x) = e^{x}$
- $C(x) = e^{x} + K$

الحل العام: $y(x) = (e^{x} + K)e^{-2x} = e^{-x} + Ke^{-2x}$

السؤال 3) 1 نقطة

تطبيق الشرط:

- $f(0) = e^{0} + K = 1 + K = 2 \Rightarrow K = 1$

الحل الوحيد: $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}$

السؤال 4) 0.75 نقطة

النهاية: $e^{-x} \to 0$ و $e^{-2x} \to 0$, إذن $\lim f(x) = 0$.

الإيجابية: $e^{-x} > 0$ و $e^{-2x} > 0$, إذن $f(x) > 0$ على $\mathbb{R}$.

السؤال 5) 0.5 نقطة

الحساب:

$$\int_0^1 (e^{-x} + e^{-2x})\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 + \left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1$$

$$= (1 + e^{-1}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\right) = 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^{2}}$$

النتيجة: $\frac{3}{2} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^{2}}$.