ملخص شامل: خواص وإشارات الدالة الأسية

أولاً: تعريف الدالة الأسية النيبيرية

الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق: $f' = f$ و $f(0) = 1$ تسمى **الدالة الأسية النيبيرية** ونرمز لها بـ: $\exp(x)$ أو e^x.

ثانياً: الخواص الجبرية الأساسية

من أجل كل عددين حقيقيين x و y، ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n:

1. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
2. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ و $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $(e^x)^n = e^{nx}$
4. $e^x > 0$ دائماً على $\mathbb{R}$
5. $e^x = e^y \iff x = y$
6. $e^x < e^y \iff x < y$
7. $e^0 = 1$ و $e^1 = e \approx 2.718$
8. $e^x > 1 \iff x > 0$

ثالثاً: دراسة إشارة العبارات الأسية

1) العبارة $f(x) \cdot e^{u(x)}$: إشارة الجداء من إشارة $f(x)$ لأن $e^{u(x)} > 0$ دوماً.

2) العبارة $ae^{\alpha x+\beta} + b$ $(a \neq 0$ و $\alpha \neq 0)$:

- إذا كان a و b من نفس الإشارة: تكون العبارة من إشارة a دوماً على $\mathbb{R}$.
- إذا اختلف a و b في الإشارة: تنعدم عند $x_0 = \dfrac{\ln(-b/a) - \beta}{\alpha}$ وإشارتها:

x	$-\infty$ $\qquad$ x_0 $\qquad$ $+\infty$
$ae^{\alpha x+\beta} + b$	نفس إشارة $a\alpha$ $\qquad$ 0 $\qquad$ عكس إشارة $a\alpha$

3) العبارة $ae^{2x} + be^x + c$: نضع $X = e^x$ مع الشرط $X > 0$.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

النهايات، التزايد المقارن والاشتقاق

النهايات الشهيرة والتزايد المقارن

الحالة البسيطة $(n=1)$	mainDark!10 الحالة العامة $(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
$\lim\limits_{u(x)\to0} \dfrac{e^{u(x)}-1}{u(x)} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

مشتقة الدالة الأسية المركبة

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I، فإن الدالة $f(x) = e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I ومشتقّتها:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

جدول تغيرات الدالة الأسية الأساسية

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

سلسلة التمارين: الحساب والمعادلات

التمرين رقم 01 : (التبسيط والخواص الجبرية)

بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

1. $e^{-x} - e^{2x} = \dfrac{1 - e^{3x}}{e^x}$
2. $\dfrac{e^x}{2 + e^x} = \dfrac{1}{2e^{-x} + 1}$
2. $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \dfrac{8}{e^x + 2}$

التمرين رقم 02 : (حل المعادلات الأسية)

حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1. $e^{2x} = 1$
2. $2e^x + 6 = 0$
3. $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0$
4. $e^{|x-1|} - e^2 = 0$
5. $e^{x^2+3x-3} = e^{2x-1}$
6. $(2e^{-x} - 6)(-e^x + 2) = 0$
7. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
8. $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$

التمرين رقم 03 : (حل المتراجحات الأسية)

حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1. $e^{3x} \leq 1$
2. $e^x + 6 > 0$
3. $(-e^x + 3)(e^x - e^2) \geq 0$
4. $(e^{-x} - 2)(e^x - 1) \geq 0$

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

تعيين المجاهيل، المماسات والقراءات البيانية

التمرين رقم 04 : (تعيين الثوابت)

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ حيث a, b, c أعداد حقيقية.
عيّن الأعداد a, b, c بحيث يقبل منحني الدالة $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة $A(0; -3)$ مماساً معامل توجيهه 3، وتكون المعادلة $f(x) = 0$ تقبل $3\sqrt{3}$ حلاً لها.

التمرين رقم 05 : (المماسات ونقط التقاطع)

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$.
عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تنتمي النقطة $A(-1; 1)$ إلى $(\mathcal{C}_f)$، ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

التمرين رقم 06 : (المقاربات المائلة)

لتكن الدالة $f(x) = ax + b + e^{-x}$. (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ يمر بالنقطتين $A(2; 0)$ و $B(0; -2)$. والمماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $x = -1$ معامل توجيهه $e - 1$.

1. اكتب معادلة المستقيم (Δ)، ثم استنتج قيمة كل من a و b.
2. اكتب معادلة المماس (T).

التمرين رقم 07 : (قراءة بيانية)

نعتبر الدالة $f(x) = (ax + b)e^x + c$. تمثيلها البياني $(\mathcal{C}_f)$ يمر بالمبدأ $O(0; 0)$، ويقبل مستقيماً مقارباً أفقياً $y = -1$ عند $-\infty$، ومماساً أفقياً عند $x = -1$.

1. بقراءة بيانية: عيّن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$، ثم عيّن $f(0)$ و $f'(0)$.
2. عيّن قيم الأعداد الحقيقية a, b, c.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

دراسة الدوال: نقط الانعطاف والمناقشة البيانية

التمرين رقم 08 : (مسألة متكاملة من جزأين)

الجزء الأول: لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
2. استنتج أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$.

الجزء الثاني: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x - xe^{2-x}$.

1. احسب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -e^{2-x}g(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات f.
3. بيّن أن المستقيم $(\Delta) : y = 1 - x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي.
4. أثبت أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.
5. بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0.1 < \alpha < 0.2$.
6. ارسم (Δ) والمماس عند نقطة الانعطاف والمنحني $(\mathcal{C}_f)$.
7. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $\frac{x}{e^{x-2}} = 1 - m$.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

الدوال المساعدة وحصر القيم الحدية

التمرين رقم 09 : (دوال مساعدة وحصر $f(\alpha)$)

الجزء الأول: لتكن $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. ادرس تغيرات g، واستنتج أن $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر $\alpha \in]-1.6; -1.5[$.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: نعتبر $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1. احسب نهايات f وبيّن أن $f'(x) = e^x g(x)$ وشكّل جدول تغيراتها.
2. بيّن أن $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha(\alpha+2)}{4}$ ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.
3. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = e^m$.

التمرين رقم 10 : (مناقشات بالقيمة المطلقة)

الجزء الأول: نعتبر الدالة $g(x) = (-x-2)e^{-x} + 2$.

1. بيّن أن $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر $\alpha \in]-1.75; -1.5[$، واستنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة $f(x) = (x+3)e^{-x} + 2x$.

1. احسب نهايات f وبيّن أن $f'(x) = g(x)$ ثم شكّل جدول تغيراتها.
2. بيّن أن المستقيم $(D) : y = 2x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.
3. بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
4. بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\beta \in]-2.7; -2.6[$.
5. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(-|x|) = |m|$.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

مراكز التناظر والمناقشات المتقدمة

التمرين رقم 11 : (مبرهنة القيم المتوسطة)

الجزء الأول: لتكن $g(x) = 1 - (1+2x)e^{2x}$. ادرس اتجاه تغير g ثم استنتج إشارتها على $\mathbb{R}$.
الجزء الثاني: لتكن $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.

1. احسب نهايات f، وبيّن أن $(\Delta) : y = x + 3$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$.
2. بيّن أن $f'(x) = g(x)$ وشكّل جدول تغيرات f.
3. بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين α و β حيث $-3.05 < \alpha < -3$ و $0.75 < \beta < 0.8$.
4. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

التمرين رقم 12 : (مراكز التناظر والدوال اللوغاريتمية)

نعتبر الدالة $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$.

1. احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. بيّن أن $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$ ثم استنتج اتجاه تغير f وشكّل جدول تغيراتها.
3. بيّن أن المستقيمين $(\Delta_1) : y = x + 2$ و $(\Delta_2) : y = x - 2$ مقاربان مائلان لـ $(\mathcal{C}_f)$.
4. أثبت أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.
5. بيّن أن $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha \in]-1.8; -1.7[$.
6. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط $m \neq 0$ عدد حلول: $x + 2 - f(-|x|) = \ln(|m|)$.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

تمرين شامل مقترح مع التمثيل البياني

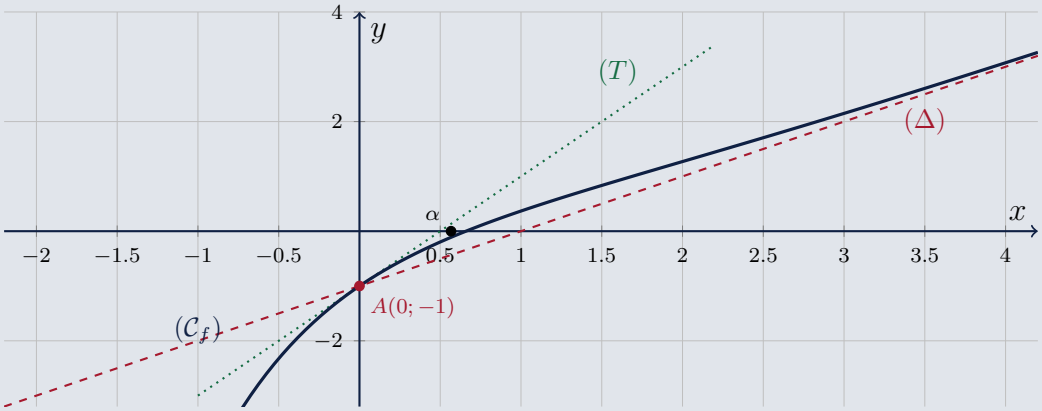
التمرين رقم 13 : (المسألة الشاملة لشهادة البكالوريا)

الجزء الأول: نعتبر الدالة $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) > 0$.

الجزء الثاني: لتكن $f(x) = xe^{-x} + x - 1$.

1. احسب نهايات f وبيّن أن $f'(x) = g(x)$ ثم شكّل جدول تغيراتها.
2. أثبت أن $(\Delta) : y = x - 1$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$، وادرس الوضع النسبي.
3. اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
4. بيّن أن $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0.5 < \alpha < 0.6$.
5. أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في معلم متعامد ومتجانس.



بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد