✅ الحل النموذجي — الفرض الأول — الفصل الأول

المؤسسة: منصة الرياضيات — الأستاذ عدلي أسعد | **السنة الدراسية:** 2026/2027

المستوى: علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي | **المدة:** ساعتان | **عدد التمارين:** 3

حل التمرين الأول — صحيح أو خطأ

1) خطأ. $(x - \ln(1 = (^3x - \ln(1 - \ln((1 = ((^2x + x + x)(1 + |x - \ln|1 = (^2x + x + \ln(1 \geq 2(x - \ln(1$. ليس بالضرورة. مثلًا عند $x = 0$: $\ln 1 = 0$ و $\ln 1 2 = 0$ — متساويان. عند $x = -1$: $\ln 2 = \ln 2$ و $\ln 2 2 = \ln 4 > \ln 2$. إذن العبارة خاطئة.

2) خطأ. $f(x) = \frac{^4x}{^xe} = ^{x-}x^4e$. عند $x \to 0$: $f(0) = 0$. ليست النهاية 3. (النهاية الحقيقية هي 0.)

3) صحيح. نضع $X = ^xe$: $0 = 2 + 3X - ^2X \Rightarrow 0 = (2 - X)(1 - X) \Rightarrow X = 1$ أو $X = 2$. أي $x = 0$ أو $x = \ln 2$. حلّان متمايزان ✓.

4) صحيح. $f'(x) = ^{x-}2xe - ^{x-}x^2e = (2 - xe^{x-})(x$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$ أو $x = 2$. عند $x = 2$: f تغيّر إشارتها من + إلى −، إذن قيمة حدّية عظمى ✓.

حل التمرين الثاني — دراسة الدالة g و f

1) عند $+\infty$: $x^2-1 \to -\infty$ و $(x-x)\ln(1-1) \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$. بدراسة أعمق: x^2 يتفوق، إذن $g(x) \to -\infty$.

عند $-\infty$: $x^2-1 \to -\infty$ و $(x-x)\ln(1-1) \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$. لكن الأساسي: $(x-x)\ln(1-x(1+x^2-$, $(x-\ln(1 \to +\infty$ ببطء، إذن $g(x) \to -\infty$.

2) نحسب $g'(x)$: $g'(x) = (x-\ln(1-2x) - (x-1)\cdot\frac{1-}{x-1} = (x-\ln(1-2x) + 1$. إذن $g'(x) = 1 - \ln(1-2x)$.

$g''(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$. $g''(x) = 0 \iff x-1 = 1/2 \iff x = 1/2$. $g''(x) > 0$ لـ $x > 1/2$, $g''(x) < 0$ لـ $x < 1/2$. إشارة g' تتغير حسب x.

جدول التغيرات: g يبدأ من $-\infty$, يرتفع, ثم ينخفض إلى $-\infty$. نقطة قصوى عند تقريب $x = 0$.

3) g تزايد ثم تناقص (حسب جدول التغيرات).

4) $g(0,2) = 96,0 + 96,0 \approx \ln 0,8 \cdot 8,0 + 96,0 \approx (-0,223) \cdot 8,0 + 96,0 - 96,0 = 178,0 = 782,0 > 0$. $g(0,3) = 91,0 + 91,0 \approx \ln 0,7 \cdot 7,0 + 91,0 \approx (-0,357) \cdot 7,0 + 91,0 - 91,0 = 25,0 = 66,0 > 0$.

بعد إعادة الفحص: نحتاج قيمًا أكبر. $g(0,9) = (0,81 - 1) + 1,0 \ln 0,1 = 19,0 - 23,0 = -04,0 < 0$. $g(0,8) = 36,0 + 36,0 - \ln 0,2 = 36,0 - 32,0 = 04,0 > 0$. إذن $\alpha \in (0,8, 0,9)$. [ملاحظة: السؤال الأصلي يحتاج تعديل في القيم]

5) $g(x) < 0$ على $(-\infty, \alpha)$ و $g(x) > 0$ على $(\alpha, +\infty)$. (مع $\alpha \approx 0,84$)

6) نهايات f على $]-1, 1[$: عند -1^+: $(x+\ln(1 \to -\infty$, إذن $f(x) \to 0^-$. عند 0^-: $(x+\ln(1 \to 0^-$, إذن $f(x) \to -\infty$.

تفسير هندسي: $\mathcal{C}_f$ يقبل مقاربة أفقية $y = 0$ عند -1^+ و مقاربة عمودية $x = 0$ عند 0^-.

7) $f'(x) = \frac{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x+1}x^2 - 1\cdot 2x(1+x)\ln^2(1+x)\,(x+1)}{x^4(1+x)^2\ln^2(1+x)} = \frac{x(1+x)\ln(1+x) - 2x(1+x)\ln^2(1+x)}{x^4(1+x)^2\ln^2(1+x)}$

بعد التبسيط: $f'(x) = \frac{\ln(1+x)\,1 - 2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$ ... (التفصيل في الاشتقاق).

بالأحرى من العلاقة $f'(x) = \frac{g(x)-}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$ نستعمل إشارة g: $f' < 0$ حيث $g > 0$ و $f' > 0$ حيث $g < 0$.

جدول تغيرات f: تناقص على $(-1, 0]$ (لأن $g < 0$ هناك $\to f' > 0$).

8 أ) المقارب المائل: $f(x) - (1+x) = -x - \frac{1}{\ln(1+x)} \to 1$ عند $x \to -1^+$ (إذ $(x+\ln(1 \to -\infty$ فـ $1/\ln \to 0$ و $1 + x \to 0$).
إذن (Δ) مقارب مائل (في الحقيقة مقاربة أفقية $y = 1$ عند الفحص).

8 ب) $f(x) - (1+x)$ إشارته تعتمد على $\frac{\ln(1+x)\,(x+1)-1}{\ln(1+x)}$. عند -1^+: موجب (لأن $1 - 0 = 1 > 0$ و $\ln > 0$) $\to$ سالب. إذن $\mathcal{C}_f$ تحت (Δ).

حل التمرين الثالث — المتتالية العودية

1) $u_1 = 1 + (3)\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. $u_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$. $u_3 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$.

2) $v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 2 - 1 + u_n\frac{1}{2} = (2 - u_n)\frac{1}{2} = v_n\frac{1}{2}$. (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = 1$.

3) $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. $u_n = 2 + v_n = 2 + \frac{1}{2^n}$.

4) $\lim_n u = 2$ (لأن $\frac{1}{2^n} \to 0$).

5) $S_n = v_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1 \cdot \frac{(1/2)^{n+1}-1}{1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$.

6) **التهيئة:** $u_0 = 3 \in [2,3)$ ✓. **الفرضية:** $2 < u_n \leq 3$. **النتيجة:** $u_{n+1} = 1 + u_n\frac{1}{2} \in \left(1 + 2\cdot\frac{1}{2}, 1 + 3\cdot\frac{1}{2}\right] = [2,5/2) \subset [2,3)$ ✓.

7) **أ) مباشرة:** $u_n - u_{n+1} = u_n - 1 + u_n\frac{1}{2} = \frac{u_n}{2} - 1$. بما أن $2 < u_n$, $u_n/2 - 1 > 0$. إذن (u_n) متناقصة.

ب) عبر (v_n): $v_{n+1} = v_n\frac{1}{2} < v_n$ (لأن $v_n > 0$), إذن (v_n) متناقصة, و بالتالي $u_n = 2 + v_n$ متناقصة.

8) $w_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. $\ln w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln u_k$. بما أن $1 < 2 < u_k$, $\ln u_k > 0$, إذن $\ln w_n \to +\infty$, إذن $w_n \to +\infty$. المتتالية (w_n) غير متقاربة.