الفرض الأول — الفصل الثالث

المؤسسة: منصة الرياضيات — الأستاذ عدلي أسعد

السنة الدراسية: 2026/2027

المستوى: علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

المدة: ساعتان

التاريخ: أفريل 2027

التمرين الأول (5 نقاط) — هندسة في الفضاء

المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. النقاط $A(1;2;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(3;0;-1)$, $D(0;1;4)$. احسب $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

احسب الجداء السلمي $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$.

احسب الجداء الشعاعي $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$.

استنتج معادلة المستوي (ABC) على الشكل $ax+by+cz+d=0$.

احسب المسافة من D إلى المستوي (ABC).

احسب الجداء المختلط $[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]$ و استنتج حجم الرباعي $ABCD$.

بيّن أن النقاط A,B,C ليست مستقيمية.

أوجد مساحة المثلث ABC.

التمرين الثاني (5 نقاط) — دالة + تكامل

لتكن $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ معرفة على $(0,+\infty)$. احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

احسب $f'(x)$ و ادرس إشارها.

بيّن أن f تقبل قيمة عظمى, عيّن النقطة و القيمة.

ادرس تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع المحور السيني.

احسب $\int_1^e f(x)\,dx$.

لتكن $u_n=f(n)=\frac{\ln n}{n}$. ادرس رتابة (u_n).

احسب $\lim_n u_n$.

بيّن أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2e}$ يقبل حلّين على $(0,+\infty)$.

التمرين الثالث (5 نقاط) — متتالية عودية + برهنة بالتراجع

برهن بالتراجع أن $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ لـ $n \geq 1$.

استنتج $\sum_{k=1}^{n} (k + k^2)$.

لتكن (u_n) معرفة بـ $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. ادرس رتابة (u_n).

احسب $\lim_{n} u_n$.

برهن أن $u_n \geq 1$ لكل n.

احسب $\lim_{n} n(u_n - 1)$.

لتكن $v_n = nu_n$. احسب $\lim_{n} v_n$.

بيّن أن (u_n) متقاربة برتبة 1.

التمرين الرابع (5 نقاط) — احسب التكاملات:

$\int_0^1 (1 - 2x + 3x^2)\, dx$

$\int_0^1 xe^x\, dx$ (بالتجزئة)

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ (بالتجزئة)

$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$

$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$ (تغيير متغير)

$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$ (بالتجزئة)

$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$ (تكامل غير منتظم)

$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx$ (شهيرة)