

שדות וגלים אלקטרו מגנטיים – מטלה 1

אסעד סלימאן 322514365

שקד לובין 208728139

חלק א' – הכנה

סעיף א'

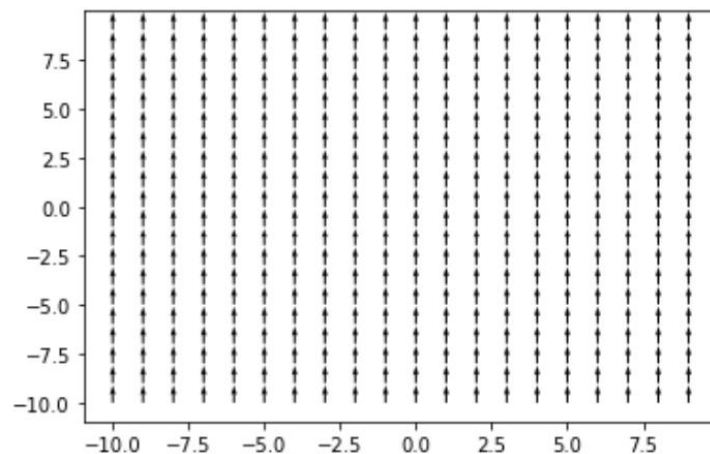
$$\vec{E}(x, y) = 10\hat{y} \left[\frac{V}{m} \right]$$

סעיף ב'

```
def electricFieldConstant():  
    x, y = np.meshgrid(np.arange(-10, 10, 1), np.arange(-10, 10, 1))  
    u, v = 0, 10  
  
    fig, ax = plt.subplots()  
    ax.quiver(x, y, u, v)  
    plt.show()
```

קיבלנו כי השדה קבוע במרחב ולכן אין לו תלות בקלט ובפרט גם בנקודה (0,0) השדה יהיה $10\hat{y}$.

סעיף ג'



התרשים מתאר שדה אשר קבוע בכל נקודה במרחב. ניתן לקבל שדה כזה על ידי הצבת שני לוחות אינסופיים טעונים במישור $x-z$. נשים לוח טעון שלילית ב $y = \infty$ ולוח טעון חיובי ב $y = -\infty$. שני הלוחות הללו יצרו שדה חשמלי בגודל $\frac{\epsilon}{\sigma}\hat{y}$ ולכן נדרוש כי $\sigma = \frac{\epsilon}{10}$.

סעיף ד'

$$q = 2 \cdot 8 = 16[nC]$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\vec{E}(x, y) = \frac{Kq}{r^2} \hat{r} = \frac{16 \cdot 10^{-9} K}{x^2 + y^2} \hat{r} = \frac{16 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{x^2 + y^2} \hat{r} = \frac{144}{x^2 + y^2} (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \left[\frac{V}{m} \right]$$

סעיף ה'

```
def elctricFieldOfPointCharge(x, y, a=0, b=0):
    x = x - a
    y = y - b
    theta = np.arctan2(y, x)

    try:
        baseVal = 144 / (x ** 2 + y ** 2)
    except ZeroDivisionError:
        baseVal = 0

    xVal = baseVal * np.cos(theta)
    yVal = baseVal * np.sin(theta)

    return [xVal, yVal]
```

בנקודה (0,0) נחזיר 0, הסיבה לכך היא שלמרות שככל ומתקרבים לנקודה עצמה השדה הולך וגדל, הנקודה עצמה היא כמו מוליך מאוד קטן וידוע כי השדה בתוך מוליך הינו 0.

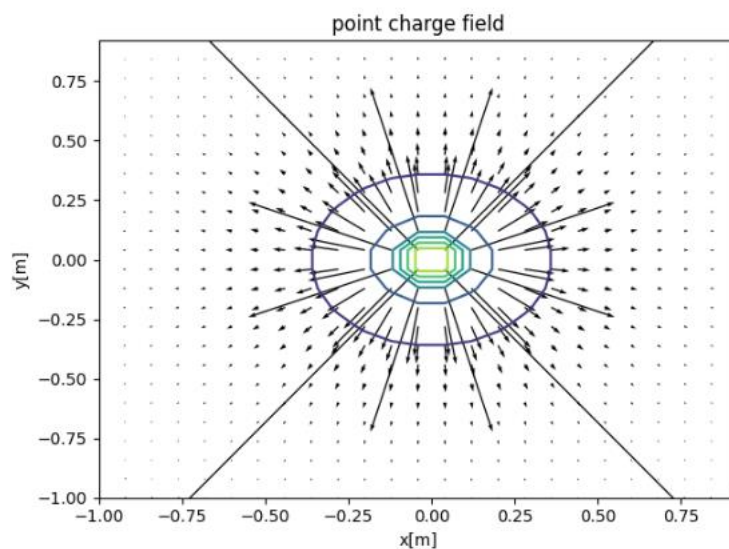
סעיף ו'

```
def electricFieldQuiverForPointCharge(a=0, b=0):
    x, y = np.meshgrid(np.arange(a-1, a+1, 0.08), np.arange(b-1, b+1, 0.08))
    u, v = elctricFieldOfPointCharge(x, y, a, b)
    fig, ax = plt.subplots()
    ax.quiver(x, y, u, v)

    pot = 144 / (((x-a) ** 2 + (y-b) ** 2) ** 0.5)
    ax.contour(x, y, pot)

    plt.show()
```

סעיף ז'



סעיף ה'

כעת המטען הנקודתי לא יושב בראשית הצירים אלא בנקודה (2,8).

סעיף ד' –

$$q = 2 \cdot 8 = 16[nC]$$

$$\theta = \arctan \frac{y-8}{x-2}$$

$$\vec{E}(x,y) = \frac{144}{(x-2)^2 + (y-2)^2} (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \left[\frac{V}{m} \right]$$

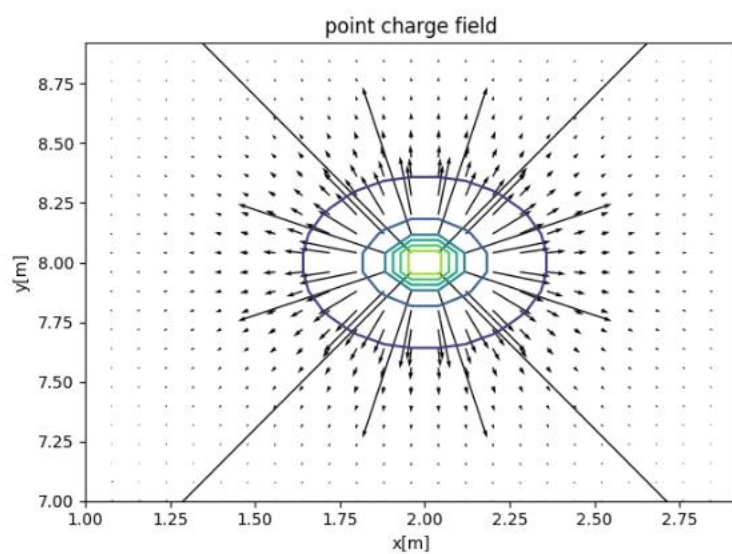
סעיף ה' –

```
def elctricFieldOfPointCharge(x, y, a=0, b=0):  
    x = x - a  
    y = y - b  
    theta = np.arctan2(y, x)  
  
    try:  
        baseVal = 144 / (x ** 2 + y ** 2)  
    except ZeroDivisionError:  
        baseVal = 0  
  
    xVal = baseVal * np.cos(theta)  
    yVal = baseVal * np.sin(theta)  
  
    return [xVal, yVal]
```

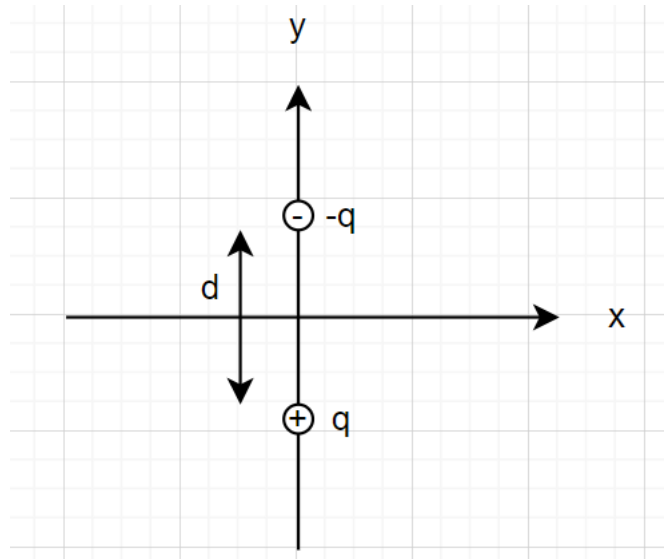
כאשר מתקבלת הנקודה (0,0) כקלט, נחזיר את ערך השדה החשמלי המקורי בנקודה (-2,-8).

סעיף ו' –

```
def electricFieldQuiverForPointCharge(a=0, b=0):  
    x, y = np.meshgrid(np.arange(a-1, a+1, 0.08), np.arange(b-1, b+1, 0.08))  
    u, v = elctricFieldOfPointCharge(x, y, a, b)  
    fig, ax = plt.subplots()  
    ax.quiver(x, y, u, v)  
  
    pot = 144 / (((x-a) ** 2 + (y-b) ** 2) ** 0.5)  
    ax.contour(x, y, pot)  
  
    plt.show()
```



חלק ב' – דיפול
סעיף א'



נחשב בעזרת סופרפוזיציה של המטענים :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{kq}{r_1^2} \hat{r}_1 - \frac{kq}{r_2^2} \hat{r}_2 = kq \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} \hat{r}_1 - \frac{1}{r_2^2} \hat{r}_2 \right) = kq \cdot \left(\frac{1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{1}{r_2^3} \vec{r}_2 \right) \\ &= kq \cdot \left(\frac{1}{\left(x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \vec{r}_1 - \frac{1}{\left(x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \vec{r}_2 \right) \\ &= kq \cdot \left(\frac{x \cdot \hat{x} + \left(y + \frac{d}{2} \right) \cdot \hat{y}}{\left(x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x \cdot \hat{x} + \left(y - \frac{d}{2} \right) \cdot \hat{y}}{\left(x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ \vec{E} &= kq \cdot \left(\left(\frac{x}{\left(x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{\left(x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{x} + \left(\frac{y + \frac{d}{2}}{\left(x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y - \frac{d}{2}}{\left(x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{y} \right)\end{aligned}$$

כאשר $q = 16nC, d = 2\mu m, k = 9 \cdot \frac{10^9(N \cdot m^2)}{C^2}$

סעיף ב'

```
def electricFieldOfDipole(x, y, a1, b1, a2, b2):
    v1 = electricFieldOfPointCharge(x,y,a1,b1)
    v2 = electricFieldOfPointCharge(x,y,a2,b2)
    v3 = [[0 for i in range(len(v1[0]))] for j in range(len(v1))]

    for i in range(len(v1)):
        for j in range(len(v1[i])):
            v3[i][j] = v1[i][j]-v2[i][j]

    return v3
```

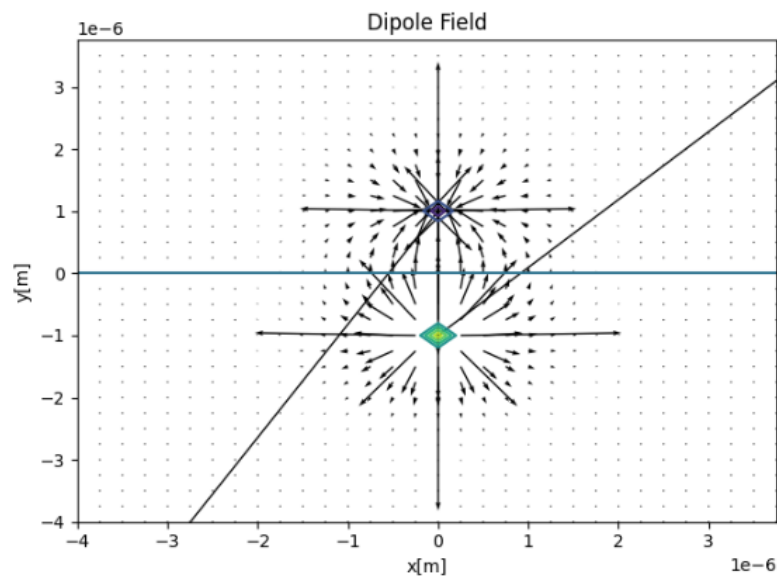
בדומה להסבר בחלק א', בנקודות בהן הצבנו את המטענים ייווצר שדה 0 מהמטען עצמו ונחזיר רק את ערך השדה בנקודה עבור המטען השני.

סעיף ג'

```
def ElectricFieldQuiverForDipole():
    d = 2*pow(10,-6)
    jump = d/8

    x, y = np.meshgrid(np.arange(-2*d, 2*d, jump), np.arange(-2*d, 2*d, jump))
    u, v = electricFieldOfDipole(x, y, 0, -d/2, 0, d/2)
    fig, ax = plt.subplots()
    ax.quiver(x, y, u, v, scale=pow(10,16))
    plt.show()
```

סעיף ד' + ה'



סעיף ז'

נחשב בעזרת סופרפוזיציה של פוטנציאלי המטענים (באופן דומה לחישוב השדה החשמלי) :

$$\vec{\phi} = \frac{kq}{r_1} - \frac{kq}{r_2}$$

$$\vec{\phi} = kq \cdot \left(\frac{1}{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} \right)$$

סעיף ז'

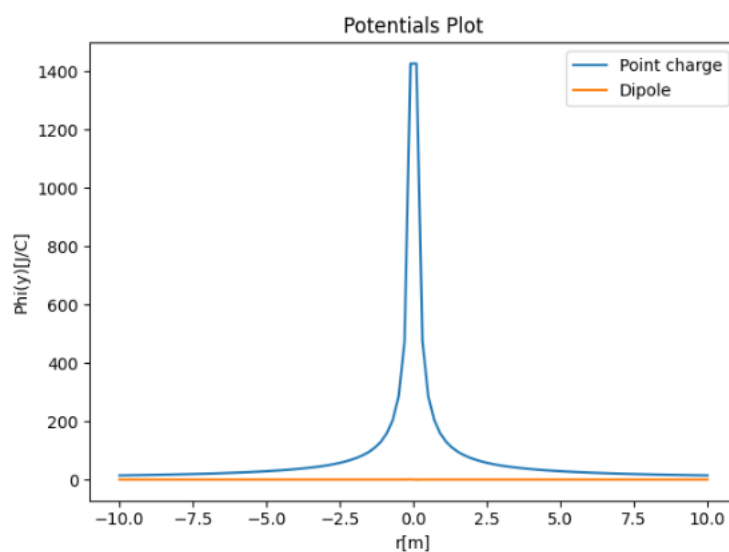
```
def ElectricPotentialOfDipole(r, x=0):  
    d = 2*pow(10,-6)  
    w1 = 1/(x**2+(r+d/2)**2)  
    w2 = 1/(x**2+(r-d/2)**2)  
    w = w1-w2  
    return 144*w
```

זהו בעצם הביטוי לפוטנציאל כאשר r הינו המרחק על ציר y ומכיוון ואנו מחפשים רק בכיוון המשיק לדיפול, הצבנו $x = 0$.

סעיף ח'

```
def ElectricPotentialOfPointCharge(r):  
    try:  
        return (144.0 / np.abs(r))  
  
    except ZeroDivisionError():  
        return 1000
```

סעיף ט'

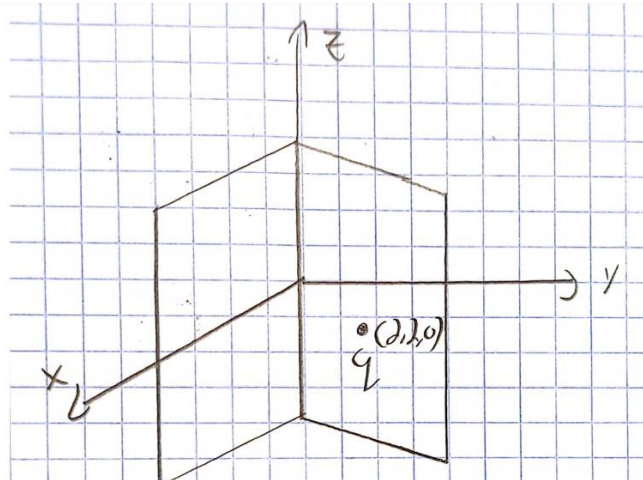


סעיף י'

הפוטנציאל שנובע מהמטען הנקודתי הולך כמו $\frac{1}{r}$ בהתאם לגרף הכחול. הפוטנציאל של הדיפול (הגרף הכתום) כאשר $d \gg r$ הוא כמו של מטען נקודתי עם מטען $q + (-q) = 0$.

חלק ג' – מטעני דמות:

סעיף א'



סעיף ב'

הוספנו 3 מטעני דמות כדי להחליף את הלוחות המוארקים במערכת הנתונה, להלן :

$$q_2 = +q, (-d, -d)$$

$$q_3 = -q, (-d, d)$$

$$q_4 = -q, (d, -d)$$

לכן השדה החשמלי במרחב לפי עקרון הסופרפוזיציה הינו :

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{kq}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{kq}{r_2^2} \hat{r}_2 + \frac{kq}{r_3^2} \hat{r}_3 + \frac{kq}{r_4^2} \hat{r}_4 \\ &= kq \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{\vec{r}_3}{r_3^3} + \frac{\vec{r}_4}{r_4^3} \right) \\ &= kq \left(\frac{(x-d)\hat{x} + (y-d)\hat{y}}{((x-d)^2 + (y-d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x-d)\hat{x} + (y+d)\hat{y}}{((x-d)^2 + (y+d)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x+d)\hat{x} + (y+d)\hat{y}}{((x+d)^2 + (y+d)^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x+d)\hat{x} + (y-d)\hat{y}}{((x+d)^2 + (y-d)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

```

def ElectricFieldForMirrorCharges(x,y):
    w1 = x-d
    w2 = y-d
    w3 = x+d
    w4 = y+d

    r1 = pow((w1**2)+(w2**2),3/2)
    r2 = pow((w1**2)+(w4**2),3/2)
    r3 = pow((w3**2)+(w4**2),3/2)
    r4 = pow((w3**2)+(w2**2),3/2)

    sizeX = (w1/r1)-(w1/r2)+(w3/r3)-(w3/r4)
    sizeY = (w2/r1)-(w4/r2)+(w4/r3)-(w2/r4)

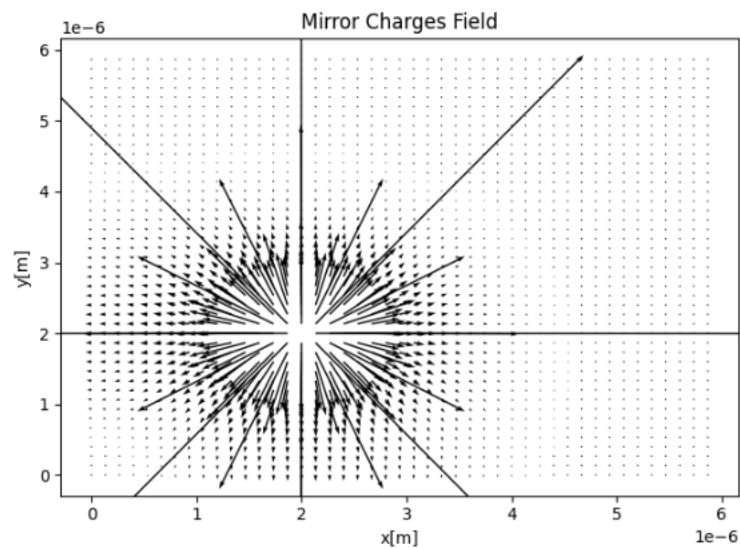
    return (kq*sizeX,kq*sizeY)

def ElectricFieldQuiverForMirrorCharges():
    jump = d/15

    x, y = np.meshgrid(np.arange(0, 3*d, jump), np.arange(0, 3*d, jump))
    u, v = ElectricFieldForMirrorCharges(x, y)
    fig, ax = plt.subplots()
    ax.quiver(x, y, u, v)

    plt.show()

```



סעיף ה'

נרצה לחלץ את צפיפות המטען בעזרת תנאי שפה. נסתכל על שפת הלוח המוליך, כלומר, על $x = 0, y \geq 0$ ונקבל את תנאי השפה הבא:

$$(\vec{E}_{out} - \vec{E}_{in}) \cdot \hat{x} = \rho = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

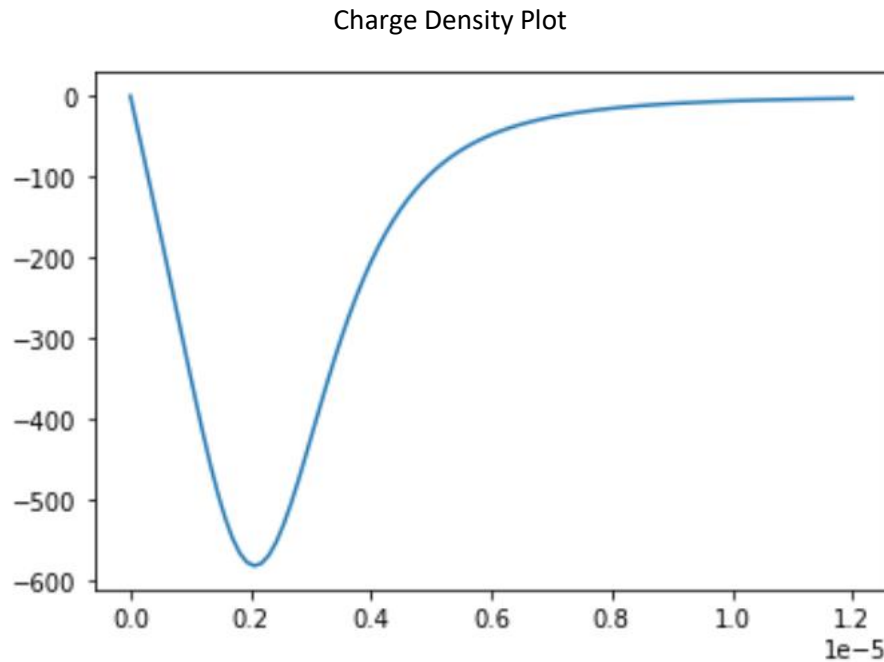
נשים לב כי בתוך מוליך השדה 0 ולכן $\vec{E}_{in} = 0$, בנוסף, השדה שנמצא מחוץ ללוח הולך לכיוון $-\hat{x}$ (מכיוון ובמערכת עם מטעני הדמות יש במינוס x מטען שלילי ובפלוס x מטען חיובי) ולכן $\vec{E}_{out} = -E \cdot \hat{x}$ קיבלנו:

$$(-E \cdot \hat{x} - 0) \cdot \hat{x} = -E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ומך נוכל לחשב את צפיפות המטען המשטחית על פני הלוח:

$$\sigma = -\epsilon_0 \cdot E$$

```
def ElectricPotentialCalculator(y):  
    eps0 = 8.845e-12  
    u, v = ElectricFieldForMirrorCharges(0, y)  
    sizeE = []  
    for i in range(len(u)):  
        size = -np.sqrt((u[i]**2)+(v[i]**2))*eps0  
        sizeE.append(size)  
  
    return sizeE  
  
def ElectricFieldPlotForDensity():  
    x = np.linspace(0,6*d,100) #Values for y  
    y = ElectricPotentialCalculator(x)  
    plt.plot(x, y)  
  
    plt.show()
```



Horizontal axis: y[m]

Vertical axis: $\sigma [C * m^{-3}]$

נשים לב כי התוצאות שקיבלנו מסתדרות עם חוק גאוס. מחוק גאוס נקבל את הקשר:

$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = Q$$

$$\epsilon_0 \cdot \oint (-E \cdot \hat{x}) \cdot (ds \cdot \hat{x}) = \epsilon_0 \cdot \oint -E \cdot ds = Q$$

אם נסתכל על מעטפת גאוס צלינדרית קטנה מספיק נקבל כי השדה וצפיפות המטען יהיו אחידים על פני המשטח, כלומר, אם נסמן את שטח מעטפת הצלינדר כ A נקבל את הקשר הבא:

$$-\epsilon_0 \cdot E \cdot A = \sigma \cdot A$$

ושוב נקבל את הקשר הבא בין השדה לצפיפות המטען המשטחית:

$$\sigma = -\epsilon_0 \cdot E$$

קיבלנו צפיפות מטען משטחית שלילית, זה הגיוני מכיוון ואם נסתכל על קווי השדה לאורך ציר y החיובי נראה כי הם מאונכים לציר וכיוונם ל $-\hat{x}$, כלומר, הם נוצרים ממטען שלילי.