Estadística: estadística

Grado en Relaciones Laborales | Curso 2019-2020

Tema 5. Introducción al cálculo de probabilidades

Alejandro Saavedra Nieves

Introducción

A Estatística en caricaturas. Larry Gonick, Woollcott Smith

Vinculada inicialmente a los juegos de azar, la probabilidad aparece siempre que queremos saber si algo va a ocurrir o no:

- ¿Cuál es la probabilidad de que salga un seis en una tirada de dado?
- ¿Cuál es la probabilidad de acertar los seis números de la lotería primitiva?
- ¿Cuál es la probabilidad de que me caiga en el examen un tema de los que tengo preparados?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado se reincorpore de una baja laboral antes de 15 días?
- Y si se reincorpora, ¿cuál es la probabilidad de que solicite una nueva baja en los meses siguientes?

Introducción

La mayoría de la gente tiene una noción de lo que significa la probabilidad de que algo ocurra:

- Las probabilidades son números comprendidos entre 0 y 1 que reflejan las expectativas de que un suceso ocurra.
- Probabilidades próximas a 1 indican que cabe esperar que ocurran los sucesos en cuestión.
- Probabilidades próximas a 0 indican que no cabe esperar que ocurran los sucesos en cuestión.
- Probabilidades próximas a 0.5 indican que es tan verosímil que ocurra el suceso como que no.

Conceptos básicos

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral
- Suceso

Conceptos básicos

- Cuando de un experimento podemos averiguar de alguna forma cuál va a ser su resultado **antes** de que se realice, decimos que el experimento es **determinístico**.
- Nosotros queremos estudiar experimentos que no son determinísticos, pero no estamos interesados en todos ellos. Por ejemplo, no podremos estudiar un experimento del que, por no saber, ni siquiera sabemos por anticipado los resultados que puede dar. No realizaremos tareas de adivinación. Por ello definiremos **experimento aleatorio** como aquel que verifique ciertas condiciones que nos permitan un estudio riguroso del mismo.

Llamamos **experimento aleatorio** al que satisface los siguientes requisitos:

- Todos sus posibles resultados son conocidos de antemano.
- El resultado particular de cada realización del experimento es imprevisible.
- El experimento se puede repetir indefinidamente en condiciones idénticas.

Ejemplos de experimentos aleatorios son:

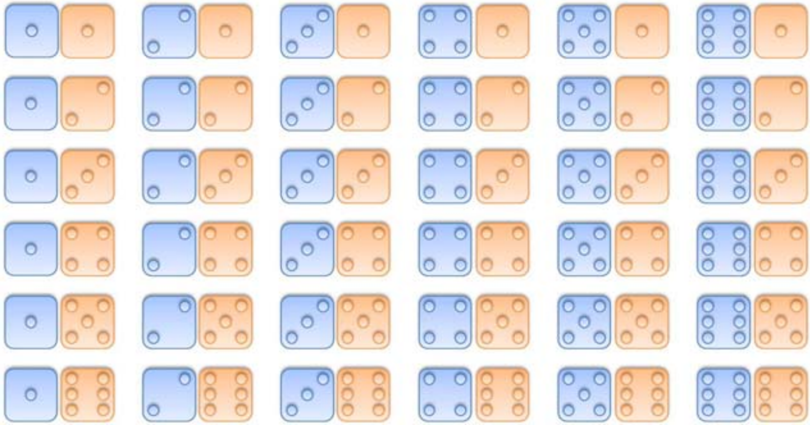
- $\mathcal{E}_1 =$*Lanzar una moneda al aire*
- $\mathcal{E}_2 =$*Lanzar dos veces una moneda*
- $\mathcal{E}_3 =$*Determinar la temperatura corporal*

Conceptos básicos

- Llamamos **espacio muestral** al conjunto formado por todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Lo denotamos por Ω.
- **Suceso elemental:** Un suceso elemental es cada uno de los posibles resultados $\omega \in \Omega$ del experimento aleatorio.

Conceptos básicos

Consideremos ahora el experimento $\mathcal{E}$ =*Lanzar un par de dados*
Este espacio muestral tiene 36 (6×6) sucesos elementales.



Conceptos básicos

Ejercicio Vamos a considerar el siguiente experimento:

$$\mathcal{E} = \textit{Lanzar un par de dados y sumar sus resultados}$$

El resultado lo expresaremos por el par (a, b), donde a es el resultado del Dado 1 y b el resultado del Dado 2.
Identifica tres sucesos elementales diferentes:

- $\omega_0 =$ *Lanzar un par de dados y que sus resultados sumen más de 1*

$$\omega_0 = \{\text{''}\textit{Todos los lanzamientos}\text{''}\} \quad \text{SUCESO SEGURO}$$

- $\omega_1 =$ *Lanzar un par de dados y que sus resultados sumen 2*

$$\omega_1 = \{(1, 1)\}$$

- $\omega_2 =$ *Lanzar un par de dados y que sus resultados sumen 12*

$$\omega_2 = \{(6, 6)\}$$

- $\omega_3 =$ *Lanzar un par de dados y que sus resultados sumen 11*

$$\omega_3 = \{(6, 5)\} \textit{ ó } w_3 = \{(5, 6)\}$$

- **Suceso:** Cualquier subconjunto del espacio muestral.
- Decimos que **ha ocurrido** un suceso cuando se ha obtenido alguno de los resultados que lo forman.
- El objetivo de la Teoría de la Probabilidad es estudiar con rigor los sucesos, asignarles probabilidades y efectuar cálculos sobre dichas probabilidades.
- Observamos que los sucesos no son otra cosa que conjuntos y por tanto, serán tratados desde la **Teoría de Conjuntos**.

Ejercicio Vamos a identificar en el ejemplo del lanzamiento de dos dados los siguientes sucesos

- $P =$ *Lanzar un par de dados y que sus resultados sumen par*

$$P = \{(1,1),(1,3),(1,5),...,(1,11),(2,2),(2,4),...,(5,1),(5,3),...,(5,5),(6,6)\}$$

- $Q =$ *Lanzar un par de dados y que sus resultados sumen impar*

$$Q = \{(1,2),(1,3),(1,4),...,(2,1),(2,3),...,(6,1),...,(6,5)\}$$

- $R =$ *Lanzar un par de dados y que sumen igual o más de 10*

$$R = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Sucesos

- **Suceso seguro:** Es el que siempre ocurre y, por tanto, es el espacio muestral, Ω.
- **Suceso imposible:** Es el que nunca ocurre y, por tanto, es el vacío, $\emptyset$.
- **Unión:** Ocurre $A \cup B$ si ocurre al menos uno de los sucesos A o B.
- **Intersección:** Ocurre $A \cap B$ si ocurren los dos sucesos A y B a la vez.
- **Complementario:** Ocurre A^c si y sólo si no ocurre A. Es denotado también por $\bar{A}$.
- **Diferencia de sucesos:** Ocurre $A \backslash B$ si ocurre A, pero no ocurre B. Por tanto, $A \backslash B = A \cap B^c$.
- **Sucesos incompatibles:** Dos sucesos A y B se dicen incompatibles si no pueden ocurrir a la vez. Dicho de otro modo, que ocurra A y B es imposible. Escrito en notación conjuntista, resulta $A \cap B = \emptyset$.
- **Suceso contenido en otro:** Diremos que A está contenido en B, y lo denotamos por $A \subset B$, si siempre que ocurra A también sucede B.

Ejemplo

Considérese el experimento aleatorio “resultado de lanzar un único dado”. El espacio muestral Ω es

$$\Omega = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$$

Sean los sucesos:

- A: sacar número par, $A = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}$.
- B: sacar "3" o más, $B = \{\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

Se obtienen los siguientes sucesos:

- $A \cup B = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.
- $A \cap B = \{\{4\}, \{6\}\}$.
- $\bar{A} = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}$.
- $\bar{B} = \{\{1\}, \{2\}\}$.
- $A \setminus B = \{\{2\}\}$.
- $B \setminus A = \{\{3\}, \{5\}\}$.

Ejemplo

Considérese el experimento aleatorio "tiempo de ejecución de un programa". Los sucesos elementales son ω_t = "la ejecución ha durado t segundos", con $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Son sucesos C = "el tiempo de ejecución es superior a 10 segundos" y D = "el tiempo de ejecución está entre 5 y 15 segundos".

Se obtienen los siguientes sucesos:

- $C \cup D$ = "el tiempo de ejecución es superior a 5 segundos".
- $C \cap D$ = "el tiempo de ejecución está entre 10 y 15 segundos".
- $\bar{C}$ = "el tiempo de ejecución es inferior o igual a 10 segundos".
- $\bar{D}$ = "el tiempo de ejecución es menor o igual que 5 segundos o mayor o igual que 15 segundos".
- $C \setminus D$ = "el tiempo de ejecución es mayor o igual que 15 segundos".
- $D \setminus C$ = "el tiempo de ejecución es superior a 5 segundos y menor o igual que 10 segundos".

Propiedades

Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Neutro	$\emptyset$ para la unión	$A \cup \emptyset = A$
	Ω para la intersección	$A \cap \Omega = A$
Complementario	$A \cup A^c = \Omega$	$A \cap A^c = \emptyset$
Leyes de de Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Definición de probabilidad

Una vez definido un experimento aleatorio, se trata de asignar un **peso numérico** o **probabilidad** a cada suceso que mida su grado de ocurrencia.

Definición clásica o de Laplace

Cuando, siendo el espacio muestral Ω finito, todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, diremos que son **equiprobables** y podremos utilizar la conocida **Regla de Laplace**

$$P(A) = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles}$$

La Teoría de la Probabilidad no es, en el fondo, más que sentido común reducido a cálculo.
(Laplace, Théorie Analytique des Probabilités)

Un ejemplo

1. Una clase de primaria está formada por 60 niñas y 40 niños. Se observa que 26 niñas y 14 niños usan gafas. Si un estudiante es elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que use gafas?

Sea Ω el espacio muestral, y sea $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto formado por todos los sucesos. Se define la **probabilidad** como una aplicación $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes condiciones:

- $P(\Omega) = 1$
  La probabilidad del suceso seguro es 1.
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  Si A y B son sucesos **incompatibles**, entonces la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades.

A partir de la definición anterior se pueden sacar una serie de consecuencias:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos **incompatibles dos a dos**, se cumple
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
5. Si A y B son dos sucesos cualesquiera (ya no necesariamente incompatibles) se cumple
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Un ejemplo

La probabilidad de que el estudiante A apruebe un examen es 0.5, la probabilidad de que apruebe B es 0.3 y la probabilidad de que aprueben los dos es 0.2.

- La probabilidad de que al menos uno de los dos apruebe es

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.3 - 0.2 = 0.6.$$

- La probabilidad de que no apruebe ni A ni B es

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4.$$

- La probabilidad de que apruebe A pero no B es

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3.$$

Un ejemplo

Una tabla de contingencia clásica es la presentada por Sir Ronald Fisher en 1940, que presenta la clasificación de 5387 escolares escoceses según su color de pelo y color de ojos.

$X \backslash Y$	rubio	pelirrojo	castaño	oscuro	negro	
claros	688	116	584	188	4	1580
azules	326	38	241	110	3	718
castaños	343	84	909	412	26	1774
oscuros	98	48	403	681	85	1315
total	1455	286	2137	1391	118	5387

Table: Color de ojos y el color del pelo (Fisher, 1940)

Se elige una persona de la clase al azar

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga ojos castaños?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga pelo rubio?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga ojos castaños o pelo rubio?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga ojos castaños y pelo rubio?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga pelo castaño o pelo rubio?

Probabilidad condicionada

- El concepto de probabilidad condicionada es uno de los más importantes en Teoría de la Probabilidad.
- La probabilidad condicionada pone de manifiesto el hecho de que las probabilidades cambian cuando la información disponible cambia. Por ejemplo, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 1 al lanzar un dado? ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 1 al lanzar un dado si sabemos que el resultado ha sido un número impar?

Probabilidad condicionada

La probabilidad del suceso A **condicionada** al suceso B se define:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{siendo} \quad P(B) \neq 0$$

Probabilidad condicionada

La probabilidad del suceso A **condicionada** al suceso B se define:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{siendo} \quad P(B) \neq 0$$

También se deduce de manera inmediata que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Un ejemplo

En un curso de Estadística de 80 estudiantes aprobaron 50, de los que 35 eran chicas.

- La probabilidad de que haya aprobado un alumno elegido al azar es:

$$P(\text{``aprobar''}) = \frac{50}{80} = 0.625$$

- Pero si el número de chicas que participaron en el curso fue de 45, entonces la probabilidad de que haya aprobado un alumno elegido al azar sabiendo que es una chica, es:

$$P(\text{``aprobar''}/\text{``ser chica''}) = \frac{P(\text{``aprobar y ser chica''})}{P(\text{``ser chica''})} = \frac{35/80}{45/80} = 0.777$$

Un ejemplo

Consideremos al ejemplo de Fisher de clasificación de 5387 escolares escoceses según su color de pelo y color de ojos.

$X \backslash Y$	rubio	pelirrojo	castaño	oscuro	negro	
claros	688	116	584	188	4	1580
azules	326	38	241	110	3	718
castaños	343	84	909	412	26	1774
oscuros	98	48	403	681	85	1315
total	1455	286	2137	1391	118	5387

Table: Color de ojos y el color del pelo (Fisher, 1940)

Se elige una persona de la clase al azar

1. ¿Cual es la probabilidad de que una persona con ojos castaños tenga pelo rubio?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona con ojos oscuros tenga pelo rubio?

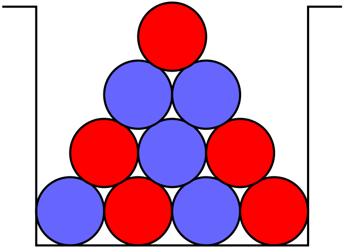
Resultados importantes en Teoría de la Probabilidad

- Regla del producto.
- Ley de las probabilidades totales
- Regla de Bayes

La regla del producto

La regla del producto es muy útil en experimentos aleatorios que tienen varias etapas. Las diversas etapas y alternativas se suelen representar en un diagrama de árbol tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

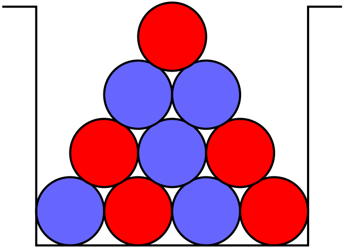
Ejemplo: En la urna de la figura se extraen (sin reemplazamiento) dos bolas. Calcula la probabilidad de que las dos sean rojas

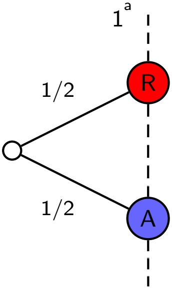


La regla del producto

La regla del producto es muy útil en experimentos aleatorios que tienen varias etapas. Las diversas etapas y alternativas se suelen representar en un diagrama de árbol tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: En la urna de la figura se extraen (sin reemplazamiento) dos bolas. Calcula la probabilidad de que las dos sean rojas

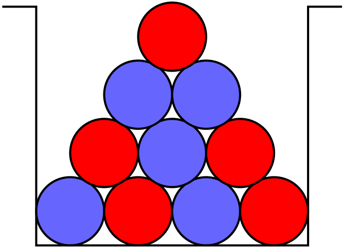


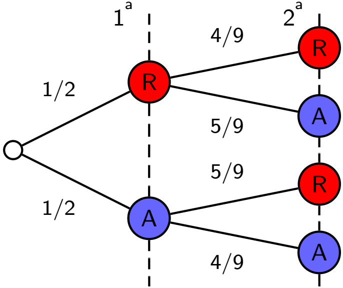


La regla del producto

La regla del producto es muy útil en experimentos aleatorios que tienen varias etapas. Las diversas etapas y alternativas se suelen representar en un diagrama de árbol tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: En la urna de la figura se extraen (sin reemplazamiento) dos bolas. Calcula la probabilidad de que las dos sean rojas





La regla del producto. Si tenemos los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$, entonces se cumple

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B son **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

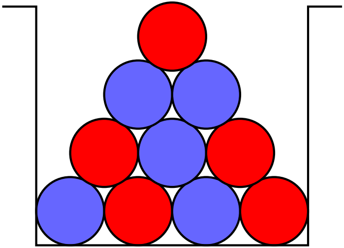
Comentarios:

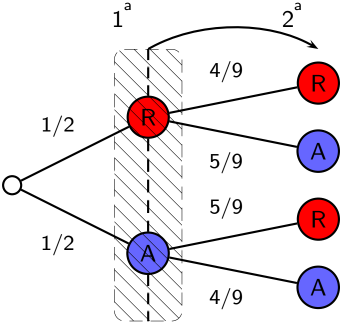
- Si $P(B) > 0$, A y B son independientes si y sólo si $P(A/B) = P(A)$, esto es, el conocimiento de la ocurrencia de B no modifica la probabilidad de ocurrencia de A.
- Si $P(A) > 0$, A y B son independientes si y sólo si $P(B/A) = P(B)$, esto es, el conocimiento de la ocurrencia de A no modifica la probabilidad de ocurrencia de B.
- No debemos confundir sucesos **independientes** con sucesos **incompatibles**

La ley de las probabilidades totales

La ley de las probabilidades totales considera todas las ramas que llegan al resultado final observado.

Ejemplo: Calcula la probabilidad de que al extraer dos bolas de la urna, sin reemplazamiento, la segunda sea roja





Ley de las probabilidades totales

A menudo, la probabilidad de ocurrencia de un suceso B se calcula más facilmente en términos de probabilidades condicionadas. La idea es encontrar una sucesion de sucesos mutuamente excluyentes como se indica a continuación.

Sistema completo de sucesos. Es una partición del espacio muestral, esto es, es una colección de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (subconjuntos del espacio muestral) verificando

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ (son exhaustivos, cubren todo el espacio muestral)
- son incompatibles dos a dos (si se verifica uno de ellos, no puede a la vez ocurrir ninguno de los otros).

Ley de las probabilidades totales. Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos. Entonces se cumple que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Un ejemplo

En una escuela técnica el 50% de los alumnos es de primer curso, el 30% es de segundo y el 20% de tercero. De la encuesta de evaluación de profesorado se sabe que el 60% de los alumnos de primero tiene buena opinión del profesorado, al igual que el 70% de los de segundo y el 75% de los de tercero.

Elegido un alumno al azar ¿cuál es la probabilidad de que tenga una buena opinión del profesorado?

Respuesta Si consideramos el suceso $B =$ "tener buena opinión del profesorado" y el sistema completo de sucesos formado por $I =$ "ser de primero", $S =$ "ser de segundo" y $T =$ "ser de tercero", la probabilidad pedida es:

$$P(B) = P(B \cap I) + P(B \cap S) + P(B \cap T)$$

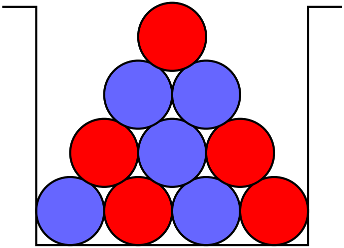
$$= P(B/I)P(I) + P(B/S)P(S) + P(B/T)P(T)$$

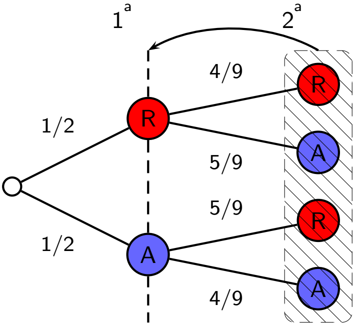
$$= 0.6 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.3 + 0.75 \cdot 0.2 = 0.66$$

Teorema de Bayes

Los resultados de un experimento dan información sobre lo que ocurrió en las etapas intermedias.

Ejemplo: Si la segunda bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también sea roja?





Teorema de Bayes

Consideremos un experimento que se realiza en dos etapas:

- en la primera, tenemos un sistema completo de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ con probabilidades $P(A_i)$ que denominamos **probabilidades a priori.**
- En una segunda etapa, ha ocurrido el suceso B y se conocen las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$ de obtener en la segunda etapa el suceso B cuando en la primera etapa se obtuvo el suceso $A_i, \quad i = 1, \dots, n$.

En estas condiciones el teorema de Bayes permite calcular las probabilidades $P(A_i/B)$, que son probabilidades condicionadas en sentido inverso. Reciben el nombre de **probabilidades a posteriori**, pues se calculan después de haber observado el suceso B.

Teorema de Bayes. En las condiciones anteriores,

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

Además, aplicando en el denominador la ley de probabilidades totales:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Este teorema resulta de aplicar en el numerador la regla del producto y en el denominador la ley de probabilidades totales.

Un ejemplo

En un examen tipo test con cinco posibles respuestas, la probabilidad de que Juan sepa la respuesta es 0.6, la probabilidad de que responda al azar es 0.2 y la probabilidad de que no responda es 0.2. Si el estudiante respondió correctamente ¿cuál es la probabilidad de que realmente sepa la respuesta?

Respuesta Sean los sucesos $S =$ "Juan sabe la respuesta", $A =$ "Juan responde al azar" y $N =$ "Juan no responde", con probabilidades: $P(S) = 0.6$, $P(A) = 0.2$ y $P(N) = 0.2$. Sea C el suceso "Juan respondió correctamente", se verifica que $P(C/S) = 1$, $P(C/A) = 1/5 = 0.2$ y $P(C/N) = 0$. Por el teorema de Bayes se obtiene:

$$P(S/C) = \frac{0.6 \cdot 1}{0.6 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0} = \frac{0.6}{0.64} = 0.9375.$$

Análogamente $P(A/C) = 0.0625$ y $P(N/C) = 0$.