Universida de Vigo
Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Asignatura: ESTADÍSTICA. 1º RELACIONES LABORALES. CURSO 2019-2020

BOLETÍN: TEMA 7

1. Tenemos una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{2n}$ de tamaño $2n$ de una variable aleatoria X con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$.

   Sea $\bar{X}_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$ y $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ dos estimadores de μ. Razonar cuál es el mejor.

2. Supongamos que $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ son estimadores de un parámetro desconocido θ, tales que $E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$, $E(\hat{\theta}_3) \neq \theta$, $Var(\hat{\theta}_1) = 12$, $Var(\hat{\theta}_1) = 10$ y $E((\hat{\theta}_3 - \theta)^2) = 6$.

   Comparar los tres estimadores, explicando cuál debería elegirse como estimador de θ.

3. Consideremos la $X =$ "altura de los alumnos$''$ $\in N(\mu, \sigma^2)$. Determinar:

   a) La distribución en el muestreo del estadístico para estudiar la altura media.
   b) Comprobar que la esperanza de la media muestral es la media de la población.
   c) Comprobar que la varianza de la media muestral es igual a la varianza de la población dividida por el tamaño muestral.

4. El número de clientes que acuden a una estación de servicio a lo largo del día sigue una distribución de Poisson de media λ desconocida. Con el fin de mejorar el servicio, se quiere estimar λ. Para ello se extrae una m.a.s. $X_1, ..., X_n$, con $n \geq 2$, y se proponen los siguientes estimadores:

$$T_1 = \bar{X}, T_2 = \frac{\bar{X} + \lambda}{2}, T_3 = \frac{X_1 - X_n}{2} \text{ y } T_4 = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

   ¿Cuáles pueden utilizarse como estimadores de λ? ¿Cuál es el mejor?

5. El tiempo de espera en minutos de un bus urbano en una determinada parada sigue una distribución uniformemente distribuida entre 0 y un máximo θ desconocido. Para estimar este valor máximo se obtiene una muestra aleatoria simple de n mediciones de tiempo de espera, $X_1, X_2, ..., X_n$ y se desean probar los siguientes estadísticos como posibles estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X}; \hat{\theta}_2 = X_1 + X_n; \hat{\theta}_3 = X_1 - X_n$$

   a) ¿Pueden utilizarse los tres estad ??sticos como posibles estimadores de ?? Justifica tu respuesta.
   b) Estudia si los posibles estimadores son insesgados y consistentes.
   c) Calcula sus errores cuadráticos medios. ¿Cuál es el mejor estimador? ¿Por qué?
   d) En base a todo lo estudiado, ¿es alguno de ellos realmente buen estimador para el par ?ametro θ? ¿Por qué? Propón un estimador adecuado para θ a partir de la media muestral.

6. El consumo de un cierto producto en una familia de cuatro miembros durante los meses de verano, es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(\alpha, \alpha+1)$. Dada una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ de consumos de distintas familias.

   - Demostrar que la media muestral es un estimador sesgado de α.
   - Calcular el error cuadrático medio de X.
   - Obtener un estimador insesgado de α (a partir de X).

   (Nota: dada $X \sim U(a, b)$, $E(X) = (a + b)/2$ y $Var(X) = (b - a)^2/12$.)

7. En la oficina de control de pesas y medidas se presentó una denuncia de que las botellas de "un litro" de cierta marca de leche no tenían la capacidad real de un litro. Los expendedores se defendieron alegando que era muy difícil que una botella en particular tuviera la capacidad de un litro, pero que la media de la población sí era un litro. Para atender la denuncia, se midieron 25 botellas elegidas al azar y se obtuvo una media muestral de $\bar{X} = 995cm^3$.

   a) Supuesto que la capacidad de las botellas es normal con desviación típica 19, obtener una estimación por intervalo de confianza al 99 % para la capacidad media.

   b) ¿Cuál es el número mínimo de botellas que deberían haberse medido para, con un valor de la media muestral de $995cm^3$ y con una confianza del 99 %, poder afirmar que el denunciante tenía razón?

8. Una empresa cervecera sabe que las cantidades de cerveza que contienen sus latas sigue una distribución normal con desviación típica poblacional 0.03 litros.

   a) A partir de una muestra aleatoria de 25 latas se construye un intervalo de confianza para la media poblacional del contenido en litros de las latas que resulta ser (0.32,0.34). ¿Cuál es el nivel de confianza de este intervalo?

   b) Un gerente de esta empresa exige un intervalo de confianza del 99 % que tenga una amplitud máxima de 0.03 litros a cada lado de la media muestral. ¿Cuántas observaciones son necesarias, como mínimo, para alcanzar este objetivo?

9. El gerente de operaciones del periódico de una gran ciudad quiere determinar la proporción de periódicos impresos con defectos. Para ello, decide tomar una muestra aleatoria de 100 periódicos y encuentra que 35 contienen algún tipo de defecto.

   a) Construye un intervalo de confianza para la verdadera proporción de periódicos impresos con defectos a un nivel de confianza del 90 %.

   b) Si suponemos que la proporción muestral se mantiene como en el enunciado. ¿Cuál debería ser el tamaño muestral necesario para obtener un intervalo con una amplitud como mucho de 0.1?

10. En dos ciudades se llevó a cabo una encuesta sobre el coste de la vida, para obtener el gasto promedio en alimentación en familias constituidas por cuatro personas. De cada ciudad se seleccionó aleatoriamente una muestra de 16 familias y se observaron sus gastos semanales en alimentación (en euros). Las medias y cuasidesviaciones típicas muestrales fueron las siguientes:

$$\bar{X}_1 = 135, S_1 = 15, \bar{X}_2 = 122, S_2 = 10.$$

    Si se supone que se muestrearon dos poblaciones independientes con distribución normal y varianzas iguales, calcula:

    a) Intervalos de confianza del 95 % para la media y la varianza del gasto en la primera población.

    b) Intervalo de confianza del 90 % para la diferencia en el gasto medio de las dos ciudades. A la vista del intervalo obtenido, ¿se puede concluir que el gasto medio en alimentación es igual en ambas ciudades?

    c) Intervalo de confianza del 90 % para la razón de varianzas entre las dos poblaciones. A la vista del intervalo obtenido, ¿está justificado el supuesto inicial de igualdad de varianzas?

11. Se ha realizado un estudio para conocer la proporción de usuarios del Aeropuerto de Peinador que son fumadores. De los 5367 individuos observados, resultó que 714 eran fumadores. ¿Hay evidencia estadística de que la proporción de fumadores es inferior al 15 % (realícese un contraste a nivel 0.05). Calcula el p-valor e interprétalo.

12. Una empresa de comunicación asegura en su publicidad que, una vez contratados sus servicios, por término medio realiza una instalación estándar en una casa en menos de 15 días. Se seleccionan un total de 20 instalaciones realizadas por dicha empresa, resultando un tiempo medio de 14.5 días. Suponemos que el tiempo que se tarda en realizar la instalación sigue una distribución normal con una desviación típica conocida de 2 días. Considerando $\alpha = 0{,}05$:

    a) Contrastar si la publicidad de la empresa es cierta o cabe la posibilidad de denunciarla a consumo por publicidad engañosa. Calcula el p-valor e interprétalo.

    b) Obtén un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en realizar una instalación.

    c) En cuanto un cliente dispone del servicio, se realiza una encuesta para saber si ha quedado satisfecho. En una muestra de 100 hogares 84 de ellos quedaron satisfechos. ¿Podemos suponer que el porcentaje de clientes contentos con el servicio es del 90 %?

13. Una asociación de Odontólogos acaba de publicar un informe sobre las caries infantiles. En un apartado de dicho informe se afirma que, por término medio, los niños menores de 15 años consumen 46 gr. de golosinas con azúcar al día. Una madre preocupada por la salud dental de sus hijos decide estudiar el consumo de golosinas en 10 niños del colegio de sus hijos. Los resultados que obtienen indican que han consumido un promedio de 42 gr. al día, con una cuasidesviación típica muestral de 11.9 gr. al día. Suponemos que el consumo de azúcar sigue una distribución normal.

    a) Obtén un intervalo de confianza para el consumo medio de golosinas al 95 %.
    b) ¿Existen evidencias estadísticas de que la varianza del consumo de golosinas no es superior a $144gr^2$? Considera $\alpha = 0{,}05$.
    c) ¿Se podría afirmar, con una significación del 5 % que el consumo promedio es a lo sumo lo que afirma el informe de los Odontólogos? Indica las hipótesis, el estadístico de contraste y las regiones de aceptación y rechazo. Además, calcula el p-valor e interprétalo.

14. Una empresa de refrescos dispone de dos máquinas embotelladoras. Para comparar su funcionamiento se ha medido, de modo independiente, el contenido de las latas de 33 cl. en dos muestras aleatorias simples de tamaño 12 para la primera máquina y de tamaño 10 para la segunda, obteniéndose unas medias muestrales de 32.8 cl. y 33 cl. respectivamente. Suponiendo que el contenido de las latas rellenadas por la primera y segunda máquinas siguen distribuciones normales con desviaciones típicas conocidas 0.18 y 0.22 respectivamente:

    a) Se ha calculado un intervalo de confianza para el contenido medio de las latas rellenadas en la segunda máquina que ha resultado ser: (32.87, 33.13). ¿Cuál es el nivel de confianza de dicho intervalo?
    b) ¿puede considerarse, tomando $\alpha = 0{,}02$ que la cantidad media de refresco que contienen las latas llenadas por la primera máquina es inferior al de las latas llenadas por la segunda?
    c) La empresa tiene intención de lanzar al mercado un nuevo refresco de cereza. Para ello hace un estudio de mercado y pregunta a 250 personas de las cuales 165 dicen que les gusta su sabor. ¿Podemos suponer que el porcentaje de personas a las que les gusta este nuevo refresco es del 70 %? Considera $\alpha = 0{,}05$.