Review

فى البداية سنقوم بعمل مراجعة على خواص بعض الدوال التم تم دراستها فيما سبق و كذالك مراجعه على بعض قواعد التفاضل و التكامل:

Exponential functions (الدوال الاسية)

الصورة العامه لها

$$\boldsymbol{y = a^{f(x)}} \ \textbf{where } \boldsymbol{a} \textbf{ is constant } \boldsymbol{a \neq 0}$$

حالة خاصة

$$y = e^{f(x)} \ where \ e \approx 2.718$$

بعض خواص الدوال الاسية

1) $e^a * e^b = e^{a+b}$ 2) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ 3) $(e^a)^b = e^{ab}$

Derivatives of exponential functions

القانون العام لتفاضل الدوال الاسية:

$$\boldsymbol{if \ \ y = a^{f(x)}} \longrightarrow \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = a^{f(x)} * f'(x) * \ln(a)}$$

تفاضل الدالة الاسية = الداله الاسية نفسها * تفاضل الاس * (للاساس) $\ln$

1) $if \ y = 7^{\tan(x)} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{\tan(x)} * sec^2(x) * \ln(7)$

2) $if \ y = e^{tan^{-1}(x)} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{tan^{-1}(x)} * \frac{1}{1+x^2}$ where $lne = 1$

2) $if \ y = e^{x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$

Logarithmic function

الصورة العامة للدوال اللوغارتمية:

$$\boldsymbol{y = log_a\big(f(x)\big)}$$

العلاقة بين دالة log و دالة ln

$$\boldsymbol{log_a\big(f(x)\big) = \frac{\ln(f(x))}{\ln(a)}}, \qquad \boldsymbol{and \ \ log_e(x) = \ln(x)}$$

Properties of the logarithmic function

1) $\ln(a*b*c) = lna + lnb + lnc$, 2) $\ln\left(\frac{a}{b*c}\right) = lna - lnb - lnc$

3) $\ln x^5 = 5lnx$, 4) $-5lnx = lnx^{-5} = ln\frac{1}{x^5}$

5) $\ln e^5 = 5lne = 5$, 6) $e^{lnx} = x$

7) $e^{-3lnx} = e^{ln\,x^{-3}} = x^{-3}$,

8) $\ln e = 1$, $ln1 = 0$, $ln0 = -\infty$, $ln\infty = \infty$

Note $\ln(a \pm b) \neq lna \pm lnb$, $\frac{\boldsymbol{lna}}{\boldsymbol{lnb}} \neq \boldsymbol{ln}\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$

Derivatives of the logarithmic function

$$\boldsymbol{if} \quad \boldsymbol{y = lnf(x)} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{f(x)}}$$

Examples

1) $if \quad y = lnx \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

2) $if \quad y = lncos(x) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

3) $if \quad y = ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \longrightarrow y = \frac{1}{2}\{ln(1-x) - ln(1+x)\} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right\}$

Note also

$$Sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

مراجعة على بعض قواعد التكامل المهمة:

$$\boldsymbol{I)} \int \left(\boldsymbol{f(x)}\right)^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f'(x)dx} = \frac{\left(\boldsymbol{f(x)}\right)^{\boldsymbol{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c} \quad , \quad \boldsymbol{n \neq -1}$$

الدالة لو كانت مرفوعة لاس n ومضروبة في تفاضلها يكون الناتج اننا نزود للاس واحد (n+1) ونقسم على الاس الجديد بشرط ان n هنا لا تساوى -1

1) $\int \frac{(lnx)^5}{x}dx = \int (lnx)^5 \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{(lnx)^6}{6} + c$

2) $\int \frac{(secx)^2}{(tanx)^3}dx = \int (tanx)^{-3}\,(sec^2x)dx = \frac{(tanx)^{-2}}{-2} + c$

$$\boldsymbol{II)\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = lnf(x) + c}$$

البسط لو تفاضل المقام يكون الناتج مباشرة هو ln للمقام

1) $\int \frac{1}{xlnx}dx = \int \frac{1/x}{lnx}dx = lnlnx + c$

2) $\int cot(x)dx = \int \frac{cos(x)}{sin(x)}dx = lnsin(x) + c$

$$\boldsymbol{III)\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c}$$

تكامل الجذر التربيعى لو كان في المقام لازم يكون البسط تفاضل ما بداخل الجذر التربيعى

1) $\int \frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx = \int \frac{1/x}{\sqrt{lnx}}dx = 2\sqrt{lnx} + c$

2) $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+5}}dx = -\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+5}}dx = -2\sqrt{e^{-x}+5} + c$

$$\boldsymbol{IV)\ \int a^{f(x)}f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{lna} + c}$$

تكامل الدوال الاسية (الاساس لها اي رقم a) لازم تكون مضروبة في تفاضل الاس

1) $\int x10^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 10^{x^2}(2x)dx = \frac{1}{2}\frac{10^{x^2}}{ln10} + c$

2) $\int \frac{7^{lnx}}{x}dx = \int 7^{lnx}\,(\frac{1}{x})dx = \frac{7^{lnx}}{ln7} + c$

<u>Special case if a=e</u>

$$\boldsymbol{V)\ \int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c}$$

تكامل الدوال الاسية (الاساس لها هو e=2.718) لازم تكون مضروبة في تفاضل الاس

1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$

2) $\int \frac{e^{tan^{-1}(x)}}{1+x^2}dx = \int e^{tan^{-1}(x)} * \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = e^{tan^{-1}(x)} + c$

$$\boldsymbol{VI)\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + c}$$

1) $\int e^{-3x}dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

2) $\int e^{\pi x}\,dx = \frac{e^{\pi x}}{\pi} + c$

$$\boldsymbol{VII)\int cos(f(x))f'(x)dx = sin(f(x)) + c}$$

تكامل الدوال المثلثية لازم تكون مضروبة في تفاضل الزاوية

1) $\int xsin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int sin(x^2)(2x)\,dx = -\frac{1}{2}cos(x^2) + c$

2) $\int \frac{cos(lnx)}{x}dx = \int cos(lnx)(\frac{1}{x})\,dx = sin(lnx) + c$

$$\boldsymbol{VIII)\int cos(ax)dx = \frac{sin(ax)}{a} + c}$$

1) $\int cos(n\pi x)dx = \frac{sin(n\pi x)}{n\pi} + c$

2) $\int csc^2(5x)dx = -\frac{cot(5x)}{5} + c$

<u>Integration by parts (التكامل بالتجزئ)</u>

هو تكامل حاصل ضرب دالتين وفيه دالة نسميها $\boldsymbol{u}$ و الاخري نسميها $\boldsymbol{dv}$

$$\boldsymbol{\int u * dv = u * v - \int v * du}$$

1) $\int x * cos(2x)dx = x * \frac{sin(2x)}{2} - \int 1 * \frac{sin(2x)}{2}dx$

$= \frac{1}{2}xsin(2x) + \frac{cos(2x)}{4} + c$

$$2)\ \int x^2 e^{-5x} dx = x^2 * \frac{e^{-5x}}{-5} - \int 2x * \frac{e^{-5x}}{-5} dx = \tfrac{1}{-5} x^2 e^{-5x} + \tfrac{2}{5}\int x\, e^{-5x} dx$$

$$= \tfrac{1}{-5} x^2 e^{-5x} + \tfrac{2}{5}\left[x\frac{e^{-5x}}{-5} - \int \frac{e^{-5x}}{-5} dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{-5} x^2 e^{-5x} - \tfrac{2}{25} x e^{-5x} - \tfrac{2}{125} e^{-5x} + c$$

3) *Evaluate* $\boldsymbol{\int e^x \cos(x) dx}$

sol.

$$let\ I = \int e^x \cos(x) dx \ \rightarrow I = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

$$= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

$$= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - I \qquad \rightarrow 2I = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

$$\therefore I = \int e^x \cos(x) dx = \tfrac{1}{2}[e^x \sin(x) + e^x \cos(x)] + c$$

بعض القوانين التي تستخدم في التكامل:

$$\boldsymbol{\cos^2(x) = \tfrac{1}{2}[1 + \cos(2x)], \qquad \sin^2(x) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(2x)]}$$
$$\boldsymbol{\tan^2(x) = \sec^2 x - 1, \qquad \cot^2(x) = \csc^2 x - 1}$$

$$Ex.\ \int \cos^2(3x) dx = \tfrac{1}{2}\int [1 + \cos(6x)] dx = \tfrac{1}{2}\left[x + \tfrac{\sin(6x)}{6}\right] + c$$

$$Ex.\ \int \tan^2(x) dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan(x) - x + c$$

$$\cos(a)\cos(b) = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$
$$\sin(a)\sin(b) = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin(a)\cos(b) = \tfrac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$Ex.\int \sin(3\pi x) * \sin(5\pi x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int [\cos(5\pi x - 3\pi x) - \cos(5\pi x + 3\pi x)]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} - \frac{\sin(8\pi x)}{8\pi}\right] + c$$

$$Ex.\int \sin(\pi x) * \cos(3\pi x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int [\sin(\pi x - 3\pi x) + \sin(\pi x + 3\pi x)]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int [\sin(-2\pi x) + \sin(4\pi x)]\, dx = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} - \frac{\cos(4\pi x)}{4\pi}\right] + c$$

<u>Note</u> $\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$

لمعرفة كل القوانين وجداول التكامل و التفاضل ارجع الي نهاية الكتاب في Appendix A