Lösningarna till tentamen 2023-10-02

① a) $2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$$2y\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\cancel{2}\,\frac{y^2}{\cancel{2}} = 3\,\frac{x^3}{3} + C$$

$$y^2 = x^3 + C$$

$$y = \pm\sqrt{x^3 + C}$$

$x = 1 \quad y = 2$

$$4 = 1 + C$$

$$\boxed{C = 3}$$

Svar: $y = \pm\sqrt{x^3 + 3}$

b) $3y^2\frac{dy}{dx} = 2x$

$$3y^2\,dy = 2x\,dx$$

$$\cancel{3}\,\frac{y^3}{\cancel{3}} = 2\,\frac{x^2}{2} + C$$

$$y^3 = x^2 + C$$

$$8 = 1 + C$$

$$\boxed{C = 7}$$

Svar: $y = \sqrt[3]{x^2 + 7}$

② $\int_1^4 6\sqrt{x}\,dx = \int_1^4 6x^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$= \left[6\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[4x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 =$

$= 4\cdot(2^2)^{\frac{3}{2}} - 4\cdot 1^{\frac{3}{2}} =$

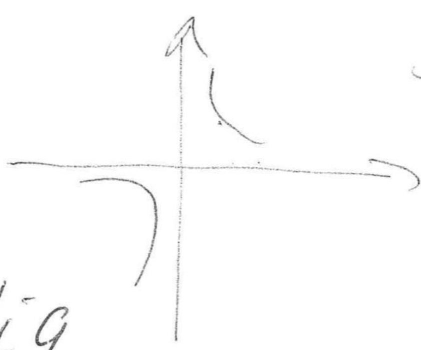
$= 32 - 4 = 28$

⑦ $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

$x \neq 0$

så man skall rakna

$\frac{1}{x^2}$ är inte kontinuerlig



på intervallet $-1 \le x \le 1$

svaret är negativt -2, men $\int$ av en positiv funktion kan ej bli negativ!

(3)

Lös DE $y'' - 4y' + 4y = 0$ med $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

1) $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = 2 \pm \sqrt{0} = 2 \pm 0$

$\Rightarrow r_1 = r_2 = 2$

2.1) $r_1 = r_2 \Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

3) Nu bestämmer vi C_1 och C_2.

product

$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \Rightarrow y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$y'(0) = 3 \Rightarrow 2C_1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 1$

Slutsats:

Svar: $y = e^{2x} + xe^{2x}$

59

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' u$

4. (a) Ja, Ali har beräknat integralen korrekt då $3x^4$ är en primitiv funktion till $12x^3$.

~~(b) Nej, Anders har inte beräknat integralen korrekt då integralen är generaliserad~~

5 (a) Enligt kedjeregeln gäller att:

$$F'(x) = 5(2x^3+1)^4 \cdot 6x^2 = 30x^2(2x^3+1)^4 = f(x).$$

Svaret är därför ja.

(b) Enligt definition av bestämd integral gäller att:

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_{-2}^{3} = F(3) - F(-2) = 4\cdot 3 + 1 - (4\cdot(-2)+1) = 20$$

c) $$\int_0^1 6x^2 - 4x^3\,dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{4x^4}{4}\right]_0^1 = [\,2x^3 - x^4\,]_0^1 = 2\cdot 1^3 - 1^4 - (2\cdot 0^3 - 0^4) = 1$$

6 . ~~(a)~~ Lukes längd då han var 15 år:

$$150 + \int_0^3 2x + e^{-x}\,dx = 150 + [\,x^2 - e^{-x}\,]_0^3 =$$

$$150 + 3^2 - e^{-3} - (0^2 - e^0) = 160 - e^{-3} \approx 160$$

Luke var alltså ungefär 160 cm då han var 15 år.

8. Den karakteristiska ekvationen:

$$r^2 + 8r + 16 = 0 \Leftrightarrow r = -4 \pm \sqrt{4^2 - 16} = -4 \pm 0 = -4$$

har $r = -4$ som dubbelrot. Därmed är $y_h = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$. Vi gör ansättningen $y_p = Ax + B$ så att $y_p' = A$ och därmed $y_p'' = 0$. Insättning av detta i DE ger att:

$$0 + 8A + 16(Ax+B) = 16x + 24 \Leftrightarrow 16Ax + 8A + 16B = 16x + 24 \Leftrightarrow A = 1,\ B = 1$$

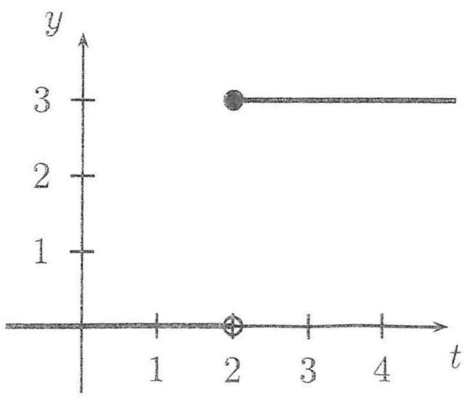
Därmed är $y_p = x + 1$ så att $y = y_h + y_p = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x} + x + 1$. Villkoret $y(0) = 2$ ger att $C_1 + 1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 1$ så att $y = e^{-4x} + C_2xe^{-4x} + x + 1$. Derivering ger att:

$$y' = -4e^{-4x} + C_2e^{-4x} - 4C_2xe^{-4x} + 1$$

som med villkoret $y'(0) = -4$ ger att $-4 + C_2 + 1 = -4 \Leftrightarrow C_2 = -1$. Därmed är $y = e^{-4x} - xe^{-4x} + x + 1$.

10 Värdetabell:

t	0	1	2	3	4
$y = 3u(t-2)$	0	0	3	3	3



Notera.

$$3u(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 3, & t \geq 2 \end{cases}$$

(9) $y_i(t) = Ce^{-at}$

8

$$y'' + 8y' + 16y = 16x + 24$$

$$y(0) = 2 \quad y'(0) = -4$$

1) $r^2 + 8r + 16 = 0$, $r = -4$

$$y_h = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$$

2) $y_p = Ax + B$, $y_p' = A$, $y_p'' = 0$

$$8A + 16Ax + 16B = 16x + 24$$

$$8A + 16B = 24$$

$$16A = 16 \Rightarrow A = 1,\ B = 1$$

$$y_p = x + 1$$

3) $y = y_p + y_h = C_1 e^{-4x} + C_2 x \cdot e^{-4x} + x + 1$

$$y_p' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} + C_2 x(-4e^{-4x}) + 1 = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - C_2 x e^{-4x} + 1$$

$y(0) = 2$ ger: $2 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$y'(0) = -4$ ger: $-4 = -4C_1 + C_2 + 1$

$$-5 = -4 + C_2 \Rightarrow C_2 = -1$$

Svar: $\boxed{y = e^{-4x} - xe^{-4x} + x + 1}$