Основные понятия теории вероятностей

Событие. Классификация событий

***Теория вероятностей* –** раздел математики, который изучает закономерности, имеющие место в однородных массовых испытаниях.

***Испытание* –** комплекс, каких-либо условий, действий. Например: стрелок стреляет по мишени; подбрасывается монета; из колоды карт наугад извлекается карта и т. д.

***Массовые однородные испытания*** – такие испытания, которые теоретически могут быть продолжены до бесконечности.

Теория вероятностей интересуется только одной стороной явления: произошло оно в серии массовых однородных испытании или нет.

***Исход испытания*** – возможный результат испытания.

Исходя из этого возникает основное неопределяемое понятие теории вероятностей – событие.

***Событие*** – абстракция исхода, испытания (произошло явление в массовых однородных испытаниях или нет). Приведем примеры событий:

- стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие;

- в урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета – событие.

Обозначаются события большими буквами латинского алфавита: А, В, С и т.д.

В необходимых случаях применяются индексы. Все события можно подразделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

***Достоверным*** называется событие, которое происходит при любом исходе испытания.

***Невозможное*** – такое событие, которое не происходит ни при каком исходе испытания.

***Случайным*** называется событие, которое при испытании может произойти или не произойти.

Поясним данные определения примерами. Появление 10 очков при однократном подбрасывании игральной кости есть событие невозможное. Выпадение не более шести очков при однократном подбрасывании игральной кости – событие достоверное. Появление 5 очков при одном бросании игральной кости есть событие случайное. Игральной костью называют кубик, сделанный из однородного материала, на гранях которого обозначено число очков от 1 до 6.

Среди случайных событий можно выделить:

- ***равновозможные***события, это такие события, для которых существует равноправие отдельных исходов испытания;

- ***единственно возможные*** события, это такие события, если при испытании обязательно поступит хотя бы одно из них.

Примером единственновозможных и равновозможных событий можно считать появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

**Классическое определение вероятности**

Вероятность − одно из основных понятий теории вероятностей. Оно выражает меру объективной возможности наступления события. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим.

***Вероятностью события*** *А* называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Итак, вероятность события А определяется формулой

,

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих *А*; *n* – число всех возможных элементарных исходов испытания.

**Пример.** Из полной колоды в 36 карт наудачу извлекается одна. Какова вероятность, что это туз?

Решение:

1. Испытание: из 36 карт извлекается 1.

2. Событие *А*: появился туз.

3. *n* = 36 (общее число возможных элементов исходов).

4. *m* = 4 (число исходов благоприятствует событию *A*).

5. .

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

С в о й с т в о 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае , следовательно

.

С в о й с т в о 2.Вероятность невозможного события равна нулю.

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае , следовательно

.

С в о й с т в о 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае  значит, ,



Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству



**Основные формулы комбинаторики**

***Комбинаторика***– наука о комбинациях. Она изучает количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

***Перестановками* **из  элементов называют соединения, состоящие из одних и тех же  различных элементов и отличающихся только порядком их расположения:

,

где  Причем по определению .

**Пример.** Скольким числом способов можно расставить на полке восьмитомник?

Решение. Искомое число перестановок

.

***Размещениями***  из элементов по  называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо их порядком.

 .

**Пример.** Сколько различных двузначных чисел можно составить из множества цифр , причем так, чтобы цифры числа были различны?

Решение. Искомое число чисел

.

***Сочетаниями* ** элементов по *m* называются такие соединения, которые отличаются друг от друга только составом элементов, порядок соединения элементов не важен.

.

**Пример.** Скольким числом способов можно в группе из 30 человек распределить три бесплатные путевки?

Решение. Искомое число способов 

.

Следует отметить, что число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством



При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

П р а в и л о с у м м ы. Если некоторый объект ***а*** может быть выбран из совокупности объектов ***r*** способами, а другой объект ***в*** может быть выбран ***s***способами, то выбрать либо ***а***, либо ***в*** можно ***r* + *s*** способами.

П р а в и л о п р о и з в е д е н и я. Если объект ***а*** можно выбрать из совокупности объектов ***r*** способами и после каждого такого выбора объект ***в*** можно выбрать ***s***  способами, то пара объектов **(а, *в*)** в указанном порядке может быть выбрана ***rs*** способами.

**Относительная частота. Статистические определения вероятности**

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

***Относительной частотой*** события называют отношение числа испытаний, в которых событие произошло, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная чистота события  определяется формулой



где - число появлений события, - общее число испытаний.

Сопоставляя определение вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительности частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

**Пример.** Отдел технического контроля обнаружил три нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Относительная частота появления нестандартных деталей

.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойства устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа**.** Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

***Статистической вероятностью*** события  называется число, около которого группируются относительные чистоты этого события, причем при неизменных условиях и неограниченном возрастании числа испытаний относительная частота незначительно отличается от этого числа.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

**Пример.** По данным государственной статистики РФ, относительная частота рождения девочек за последние десять лет характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования начиная с 1990 г.): 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,490; 0,482.

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Заметим, что статистические данные различных стран дают примерно то же значение относительной частоты.

**Решение типовых задач**

**Задача 1.** Имеется 100 одинаковых деталей, среди которых 3 бракованных. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь без брака.

Решение. В этой задаче производится испытание – извлекается одна деталь. Число всех исходов испытания равно 100, т. к. может быть взята любая деталь из 100. Эти исходы несовместны, равновозможны, единственно возможны. Таким образом, Событие - появилась деталь без брака. Всего в партии 97 деталей без брака, следовательно, число исходов, благоприятных появлению события  равно 97 . Итак,  Тогда 

**Задача 2.** Код банковского сейфа состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что наудачу выбранный код содержит различные цифры?

Решение. Так как на каждом из шести мест в шестизначном шифре может стоять любая из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то всех различных шестизначных номеров по правилу произведения будет . Номера, в которых все цифры различны, - это размещения из 10 элементов (10 цифр) по 6. Поэтому число благоприятствующих исходов . Искомая вероятность равна



**Задача 3.** Между шестью фирмами (А, Б, В, Г, Д, Е), занимающимися продажей компьютерной техники, проводится жеребьевка на предмет очередности предъявления своей продукции на выставке потенциальным потребителям. Какова вероятность того, что очередь будет выстроена по порядку, т. е. А, Б, В, Г, Д, Е?

Решение. Исход испытания − случайное расположение фирм в очереди. Число всех возможных исходов равно числу всех перестановок из шести элементов (фирм), т.е.Число исходов, благоприятствующих событию : *m=*1, если очередь выстроена по порядку. Тогда 

**Задача 4.** В компании 10 акционеров, из них трое имеют привилегированные акции. На собрание акционеров явилось 6 человек. Найти вероятность того, что среди явившихся акционеров:

а) все трое акционеров с привилегированными акциями отсутствуют;

б) двое присутствуют и один не явился.

Решение

а) испытанием является отбор 6 человек из 10 акционеров. Число всех исходов испытания равно числу сочетаний из 10 по 6, т. е.



Пусть событие  - среди шести человек нет ни одного с привилегированными акциями. Исход, благоприятствующий событию ,- отбор шести человек среди семи акционеров, не имеющих привилегированных акций. Число всех исходов, благоприятствующих событию *А*, будет 

Искомая вероятность



б) пусть событие - среди шести явившихся акционеров двое с привилегированными акциями, а остальные четыре – с общими акциями. Число всех исходов,  Число способов выбора двух человек из необходимых трех  Число способов выбора оставшихся четырех акционеров среди семи с общими акциями Тогда число всех способов отбора по правилу произведения 

Искомая вероятность равна



**Задачи (1 – 10)**

1. В двух из 14 составленных кассиром счетов имеются ошибки. Ревизор решил проверить наудачу 5 счетов. Какова вероятность, что а) ошибки не будут обнаружены; б) будет обнаружена хотя бы одна ошибка.
2. Магазин получает товар партиями по 100 штук. Если пять взятых наудачу образцов соответствуют стандартам, партия товара поступает на реализацию. В очередной партии 8 единиц товара с дефектом. Найти вероятность того, что товар поступит на реализацию.
3. В ящике 20 деталей, 5 из них с дефектом. Наудачу извлекают три детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) две дефектных; б) хотя бы одна с дефектом.
4. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
5. На курсах повышения квалификации бухгалтеров учат определять правильность оформления накладной. Для проверки преподаватель предлагает проверить 12 накладных, 5 из которых содержат ошибки. Наудачу выбирают три накладных. Найти вероятность того, что а) из трех накладных одна с ошибками; б) хотя бы одна с ошибками.
6. Данное предприятие в среднем выпускает 20 % продукции высшего сорта и 70% первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта.
7. Совет директоров состоит из 3 бухгалтеров, 3 менеджеров и 2 инженеров. Планируется создать подкомитет из трех его членов. Найти вероятность того, что в подкомитет войдут: а) два бухгалтера и менеджер; б) бухгалтер, менеджер и инженер; в) хотя бы один бухгалтер.
8. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
9. Среди 20 компьютеров, поступивших в ремонт в мастерскую, 12 на гарантийном обслуживании. Мастер наудачу берет 2 компьютера для ремонта. Найти вероятность того, что а) оба компьютера находятся на гарантийном обслуживании; б) хотя бы один на гарантии.
10. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найтивероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.