**Классические теоремы теории вероятностей**

**Теоремы сложения вероятностей**

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Например,еслииз колоды карт наудачу извлекается одна, то событие *А -* появился король; событие *В -*  появилась дама; событие *С -*  появился туз − несовместны.

Два события называются ***противоположными***, если они несовместны и одно из них обязательно должно произойти в испытании.

Например, если брошена монета, то событие *А -* появился «герб» и противоположное ему событие  - появилось «число».

События образуют ***полную группу***, если они являются единственно возможными и несовместными.

**Пример.** Приобретены два лотерейных билета. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

***Суммой*** несовместных событий называется такое событие, которое состоит в наступлении какого-либо одного из событий .

**Пример.** Испытание: Подбрасываем игральную кость.

Событие − выпала «пятерка»

Событие − выпало четное число

Событие −выпала «пятерка» или четное число.

**Теорема.** Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

.

Доказательство:

1. Докажем теорему для случая двух событий, т.е. . Введем обозначения: - общие число возможных элементарных исходов испытания;  - число исходов, благоприятствующих событию  - число исходов, благоприятствующих события  Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события  либо события равно  Следовательно,



Приняв во внимание, что окончательно получим



2. Методом математической индукции докажем теорему для любого конечного числа событий. Предположим, что для *n* событий утверждение верно, т.е.

,

и докажем для события. Тогда



С учетом нашего предположения, имеем



**Следствие 1.** Сумма вероятностей событий *A1, A2,…, An,* образующих полную группу, равна единице**:**

****

**Следствие 2.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

****

**Замечание.** Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена черезто вероятность другого события обозначают через Таким образом, следствие 2 примет вид:



**Пример.** Вероятность того, что день будет дождливым,  Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» - противоположные, поэтому искомая вероятность



События *А1*, *А2*, *…*, *Аn* называются***совместными***, если появление одного из них не исключает появление других событий в одном и том же испытании.

**Пример.** Испытание: Выполняется метеорологический прогноз.

Событие *А* − ожидается дождь.

Событие *В* − ожидается ветер.

События *А* и *В* совместны.

***Суммой*** *n* совместных событий *А1*, *А2*, *…*, *An* называется такое событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий *А1*, *А2*, *…*, *Аn.*

**Теорема.** Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:



Доказательство.Поскольку события *А* и *В,* по условию совместны, то событие (*А+В*)наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий:  По теореме сложения вероятностей несовместных событий,

. (\*)

Событие *А* произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем



Отсюда

. (\*\*)

Аналогично имеем

.

Отсюда

. (\*\*\*)

Подставив (\*\*) и (\*\*\*) в (\*), окончательно получим

.

**Замечание.** При использовании полученной формулы следует иметь в виду, что события *А* и *В* могут быть как независимыми, так и независимы.

Для независимых событий

;

для зависимых событий

.

**Следствие.** Вероятность суммы конечного числа совместных событий вычисляется по формуле



+.

**Теоремы умножения вероятностей**

***Зависимыми*** называются такие два события, при появлении одного из которых вероятность появления другого изменяется.

Классическим примером зависимых событий является выборка без возвращения.

**Пример.** В урне имеется 5 шаров, из которых три белых. Извлекается сначала один шар, а затем не возвращая его в урну, второй. Какова вероятность появления белого шара при первом испытании и при втором?

Испытание: Сначала извлекается один шар, затем не возвращая его в урну второй.

Событие *А –*  первый шар белый.

Событие *В –*  второй шар белый.

.

После первого этапа испытания в урне осталось четыре шара, причем белых из них только два. Поэтому .

Вероятность *PA(B)* называется ***условной* –** вероятность появления события *В,* при условии, что событие *А* уже произошло.

***Произведением*** событий *A1*, *A2*, *…*, *An* называется такое событие, которое предполагает совместное появления всех этих событий *A1*, *A2*, *…*, *An.*

Например,если *А, В, С –* появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то *АВС* – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

**Теорема.** Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

.

Доказательство.Пусть событию *А* из *n* испытаний благоприятствует *m* исходов. Тогда при появлении *А*, событию *В* будет благоприятствовать  исходов. Поэтому совместному появлению событии *А* и *В* будет благоприятствовать только *k* исходов.

.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

**Следствие.** Вероятность совместного появления *n* событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

.

***Независимыми*** называются такие два события, при появлении одного из которых, вероятность появления другого не меняется.

Примером независимых событий может служить выборка с возвращением.

Несколько событий называют ***независимыми в совокупности*** (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события *А1, А2, А3* независимы в совокупности, то независимы события *А1 и А2, А1 и А3, А2 и А3; А1 и А2А3, А2 и А1А3, А3 и А1А2.*

**Теорема.** Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

.

Доказательство.Так как события *А* и *В* - независимы, то . Тогда по теореме о вероятности произведения зависимых событий

.

Таким образом, .

**Следствие.** Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

.

**Вероятность появления хотя бы одного события**

Пусть в результате испытания могут появиться *n* событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из событий *А1, А2, …, Аn,* независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий :

.

Доказательство.Обозначим через *А* событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий *А1*, *А2, …, Аn*. События *А* и  (ни одного из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

.

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим



или

.

**Следствие.** Если события *А1, А2, …, Аn* имеют одинаковую вероятность, равную , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:

.

**Формулы полной вероятности и Бейеса**

Пусть событие *А* может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) *Н1, Н2, …, Нn,* которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности  события *А*. Как найти вероятность события *А*? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность события *А*,которое может наступить лишь при условии появления одной из несовместных гипотез  образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующую условную вероятность события *А*:



где = 1. Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Доказательство.По условию, событие *А* может наступить, если наступит одна из несовместных гипотез  Другими словами, появление события *А* означает осуществление одного, безразлично какого, из несовместных событий Пользуясь для вычисления вероятности события *А* теоремой сложения, получим

**** (\*)

Остается вычислить каждое из слагаемых. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем



Подставим правые части этих равенств в соотношение (\*), получим формулу полной вероятности



Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие *А*. Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что событие *А* уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные

вероятности:



Найдем условную вероятность  По теореме умножения имеем



Отсюда



Заменив здесь  по формуле полной вероятности, получим



 

Полученную формулу называют формулой Бейеса. Формула Бейеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие *А*.

**Решение типовых задач**

**Задача 1.** Стрелок производит два выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,8. Составить полную группу событий и найти их вероятности.

Решение.

Испытание − Производится два выстрела по мишени.

Событие *А* − оба раза промахнулся.

Событие *В* − попал один раз.

Событие *С* − оба раза попал.

.



Контроль: *P(A) + P(B) + P(C) =* 1.

**Задача 2.** Согласно прогнозу метеорологов Р(дождь)=0,4; Р(ветер)=0,7; Р(дождь и ветер)=0,2. Какова вероятность того, что будет дождь или ветер?

Решение. По теореме сложения вероятностей и в силу совместности предложенных событий имеем:

Р(дождь или ветер или то и другое)=Р(дождь)+Р(ветер)–Р(дождь и ветер)=0,4+0,7-0,2=0,9.

**Задача 3.** На станции отправления имеется 8 заказов на отправку товара: пять – внутри страны, а три – на экспорт. Какова вероятность того, что два выбранных наугад заказа окажутся предназначенными для потребления внутри страны?

Решение. Событие *А* – первый взятый наугад заказ – внутри страны. Событие *В* – второй тоже предназначен для внутреннего потребления. Нам необходимо найти вероятность  Тогда по теореме об умножении вероятностей зависимых событий имеем

.

**Задача 4.** Из партии изделий товаровед наудачу отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что выбранная вещь окажется высшего сорта равна, 0,8; первого сорта – 0,7; второго сорта – 0,5. Найти вероятность того, что из трех наудачу отобранных изделий будут:

а) только два высшего сорта;

б) все разные.

Решение. Пусть событие  - изделие высшего сорта; событие - изделие первого сорта; событие - изделие второго сорта.

По условию задачи ; ;  События - независимы.

а) Событие *А* – только два изделия высшего сорта будет выглядеть так  тогда



б) Событие *В* – все три изделия различны − выразим так:, тогда .

**Задача 5.** Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: *p1=*0,8; *p2*=0,7; *p3*=0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие *А*) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события  (попадание первого орудия),  (попадание второго орудия) и  (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям  (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:



Искомая вероятность



**Задача 6.** В типографии имеется 4 печатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие *А*).

Решение. События «машина работает» и «машина не работает» (в данный момент) – противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

.

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

.

Искомая вероятность

.

**Задача 7.** Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы *А,В,С.* На долю фирмы *А* приходится 50 % общего объема поставок, *В* – 30 % и *С* – 20 %. Из практики известно, что 10 % поставляемых фирмой *А* деталей – бракованные, фирмой *В* – 5 % и *С* – 6 %. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь будет бракованной.

Решение. Производится испытание – извлекается одна деталь.

Событие *А* – появилась бракованная деталь.

Гипотеза *Н1* – деталь фирмы *А*.

Гипотеза *Н2* – деталь фирмы *В*.

Гипотеза *Н3* – деталь фирмы *С.*

Тогда, согласно формуле полной вероятности, искомая вероятность равна:



**Задача 8.** В центральную бухгалтерию корпорации поступили пачки накладных для проверки и обработки. 90 % пачек были признаны удовлетворительными: они содержали только 1 % неправильно заполненных накладных. Остальные 10 % пачек были признаны неудовлетворительными, так как содержали 5 % неверно оформленных накладных. Взятая наугад из пачки накладная оказалась оформленной неверно. Учитывая это, какова вероятность того, что вся пачка накладных будет признана несоответствующей стандарту?

Решение. Испытание – проверяется пачка накладных.

Событие *А* – взятая наугад накладная оказалась неверной.

Гипотеза *Н1* – пачка не соответствует стандарту.

Гипотеза *Н2* – пачка соответствует стандарту.

Необходимо узнать вероятность гипотезы *Н1* при условии, что событие *А* произошло. Согласно формуле Бейеса имеем:



**Задачи (11 – 20)**

1. Два бухгалтера обрабатывают равное количество счетов. Вероятность того, что первый бухгалтер допустит ошибку, равна 0,005, для второго эта вероятность равна 0,01. При проверке счетов была найдена ошибка. Найти вероятность того, что ее допустил первый бухгалтер.
2. Вероятности получения прибыли с акций компаний *А*, *В* и *С* для акционера соответственно равны 0,6; 0,7; 0,5. Найти вероятность того, что а) только один вид акций составит прибыль акционера, б) хотя бы один вид акций принесет доход их обладателю.
3. Надежность первого банка – 0,95; для второго – 0,8; для третьего – 0,85. Предприниматель совершил вклад во все три банка. Найти вероятность того, что предпринимателю вернут вклад: а) два банка; б) хотя бы один банк.
4. Станок работает при условии одновременного функционирования узлов *А*, *В*, *С*, которые работают независимо друг от друга. Вероятность поломки этих узлов 0,2; 0,3; 0,1 соответственно. Какова вероятность того, что станок выйдет из строя?
5. Вероятность того, что в определенный день торговой базе потребуется двух- тонная машина, равна 0,9, пятитонная – 0,7. Определить вероятность того, что торговой базе потребуется хотя бы одна автомашина.
6. Вероятность своевременного возвращения кредитов каждым из трех заемщиков банку независимы и соответственно равны: 0,6; 0,9; 0,7. Найти вероятность следующих событий:

а) только два заемщика возвратят кредит своевременно;

б) хотя бы один из заемщиков возвратит кредит своевременно.

1. Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы.

Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй –

0,95, на третьей – 0,8, на четвертой – 0,6. Найти вероятность того, что только на

одной базе не окажется нужного материала.

1. Вероятность того, что налоговая инспекция предъявит штраф первому предприятию – 0,2, второму – 0,3, третьему – 0,15. Найти вероятность того, что будут оштрафованы: а) три предприятия; б) два предприятия.
2. Технологический процесс состоит из нескольких операций. Вероятность того, что во время первой операции изделие получит повреждение, равна 0,1, а во время второй операции – 0,05. Какова вероятность того, что после двух операций изделие окажется поврежденным?
3. Банк может выдать кредит одному из трех клиентов с вероятностью  соответственно. Найти вероятность того, что кредит получит только один клиент.