**Повторные независимые испытания**

**Схема и формула Бернулли**

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события *А* в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют ***независимыми*** относительно события *А*.

В независимых испытаниях событие *А* может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие *А* имеет одну и ту же вероятность.

Классическая схема таких испытаний носит название схемы Бернулли, она подразумевает выполнение трех основных требований:

1. Все *n* испытаний независимы друг от друга.

2. Каждое испытание имеет два исхода (событие *А* произошло или не произошло).

1. Вероятность события *А* в каждом испытании постоянна , тогда вероятность ненаступления события *А* в каждом испытании также постоянна и равна .

Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что в *n* испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие *А* произойдет ровно *m* раз. Искомую вероятность обозначим .

Поставленную задачу можно решить с помощью теоремы Бернулли.

**Теорема.** Если проводится *n* испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, то вероятность того, что событие *А* произойдет в них ровно *m* раз вычисляется по формуле

.

Доказательство. Пусть событие *А* в *n* испытаниях произошло *m* раз, тогда наступило событие: . Вероятность этого события по теореме умножения вероятностей независимых событий равна .

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из *n* элементов по *m* элементов, т.е. .

Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих событий одинаковы, то искомая вероятность (появления *m* раз события *А* в *n* испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:



или

.

Полученную формулу называют ***формулой Бернулли***.

**Следствие 1.** Вероятность того, что в *n* испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие *А* пройдет хотя бы один раз, вычисляется по формуле

.

**Следствие 2.** Вероятность того, что в *n* испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие *А* произойдет от *m1* до *m2* раз, вычисляется по формуле

.

**Локальная теорема Лапласа**

При большом числе испытаний применение формулы Бернулли к нахождению вероятности того, что в *n* испытаниях событие появится ровно *m* раз, довольно затруднительно. Поэтому к решению подобных задач применяют ***локальную теорему Лапласа***, которая позволяет приближенно найти искомую вероятность.

**Теорема.** Если в схеме испытаний Бернулли число испытаний достаточно велико, а вероятность появления события *А* в каждом испытании фиксирована, то

,

где .

**Свойства функции **

1. Область определения функции: .
2. Область значений функции: .
3. Функция четная, т. е. .
4. График функции имеет горизонтальную асимптоту , так как .
5. Максимальное значение функции .
6. График функции имеет две точки перегиба .
7. .

График функции  называется кривой Гаусса (рис. 1.1).



Рис. 1.1.

Функция  табулирована. Таблица ее значений приведена в приложении 1. Для значений аргумента  функцию принято считать равной нулю. Например значение функции 

**Теорема Пуассона**

Если при большом числе испытаний вероятность появления события близка к нулю, то для нахождения вероятности того, что в *n* испытаниях событие произойдет ровно *m* раз, используют теорему Пуассона.

**Теорема.** Если в условиях схемы Бернулли число испытаний неограниченно возрастает, а вероятность появления события *А* в каждом испытании уменьшается так, что остается постоянной величиной, то

.

Формула Пуассона тем точнее для расчетов, чем больше *n* и меньше *p*. Обычно ею пользуются при  или при условии .

**Следствие 1.** В условиях теоремы Пуассона вероятность того, что событие *А* произойдет хотя бы один раз, вычисляется по формуле

.

**Следствие 2.** В условиях теоремы Пуассона вероятность того, что событие *А* произойдет от *m1* до *m2* раз, вычисляется по формуле

.

Для облегчения вычислений по формуле Пуассона существуют таблицы для нахождения значений выражения  в зависимости от параметров m и λ (приложение 2).

**Интегральная теорема Лапласа**

Вновь предположим, что производится *n* испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *А* постоянна и равна . Предположим, что необходимо найти вероятность того, что в этих испытаниях событие *А* произойдет не менее *m1* и не более *m2* раз (от *m1* до *m2* раз).

Если число слагаемых на отрезке  невелико, то для решения данной задачи можно использовать теорему о вероятности суммы попарно несовместных событий и тогда

.

Каждую из вероятностей  в этой формуле можно вычислять по одной из формул (Бернулли, Пуассона, локальная Лапласа), удовлетворяющих условию задачи.

В случае если число испытаний велико, а также число слагаемых на отрезке  велико, к решению применяют интегральную теорему Лапласа.

**Теорема.** Если выполняется схема испытаний Бернулли, то при большом числе испытаний справедлива формула

 ,

где ;.

**Свойства функции **

1. Область определения функции: .
2. Область значений функции: .
3. Функция нечетная, т.е. .
4. Функция монотонно возрастает на всей области определения.
5. График функции имеет две горизонтальные асимптоты , так как 

График функции  имеет вид (рис. 1.2).



Рис. 1.2.

Функция  табулирована. Таблица ее значений приведена в приложении 3. Для значений аргумента  функцию принято считать равной 0,5. Например значение функции .

**Следствие 1.** Вероятность абсолютной величины отклонения числа появлений события *А* от произведения *np* не более чем на  находится по формуле

.

Доказательство. Заменим неравенство  ему равносильными:

 или .

По интегральной теореме Лапласа искомая вероятность



**Следствие 2.** Вероятность того, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события *А* от его вероятности не превысит , находится по формуле

.

Доказательство проводится аналогично.

**Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях**

Число *m0* (наступления события в *n* испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли) называют ***наивероятнейшим***, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях *m0* раз, будет максимальной.

Наивероятнейшее число *m0* определяют из двойного неравенства

**,**

причем:

1) если число *np - q* – дробное, то существует одно наивероятнейшее число *m0*;

2) если число *np - q* – целое, то существуют два наивероятнейших числа, а именно

*m0* и *m0+*1;

1. если число *np* – целое, то наивероятнейшее число *m0*=*np*.

**Решение типовых задач**

**Задача 1.** Вероятность выигрыша по одному любому лотерейному билету равна 0,02. Чему равна вероятность выигрыша: а) по трем билетам; б) не более двух билетов; в) хотя бы по одному билету; для владельца четырех билетов.

Решение: *n=*4; *p=*0,02; *q=*0,98.

Так как число испытаний мало, применяем формулу Бернулли .

а); б)

;

в) .

**Задача 2.** Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 90 %. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 100 изделий высшего сорта окажется 84 изделия.

Решение: *n*=100; *p*=0,9; *m*=84; *np*=90.

Так как число испытаний *n*=100 – велико, а произведение *np*==90>10, применяем к решению локальную формулу Лапласа:

.

Так как функция - четная, имеем: .

По таблице приложения 1 находим .

Искомая вероятность

.

**Задача 3.** Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получил разбитых бутылок: а) ровно две; б) меньше двух; в) больше одной; г) хотя бы одну.

Решение: *n*=1000; *p*=0,003; .

Так как число испытаний *n=*1000 – велико, *p* – мало, а , применяем формулу Пуассона:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

**Задача 4.** Доля изделий высшего сорта продукции составляет 80 %. Найти вероятность того, что в партии из 900 изделий высшего сорта будет: а) заключено между 700 и 750; б) не меньше 750; в) не больше 600.

Решение: *n*=900, *p*=0,8, *q*=0,2, *np*=720. .

Согласно интегральной теореме Лапласа

а) .

Функция  - нечетная, поэтому .

По таблице приложения 3 находим .

Искомая вероятность 

б) 

;

в) 

.

**Задача 5.** Предприятие поставляет свою продукцию 15 магазинам, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,6, независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок.

Решение: *n*=15; *p*=0,6; *q*=0,4. Найдем наивероятнейшее число заявок из двойного неравенства:

.

Подставив данные задачи, получим



Так как *m0* – целое число, то наивероятнейшее число *m0*=9.

**Задачи (21 – 30)**

1. Вероятность того, что фирма, проведя рекламную кампанию, продаст единицу

своей продукции, составляет 0,8. Найти вероятность того, что из 100 изделий фирма реализует не менее 75.

1. Вероятность своевременной поставки продукции для каждого из пяти поставщиков постоянна и равна 0,7. Найти вероятность того, что своевременно поставят продукцию от двух до четырех поставщиков.
2. На 150 предприятиях края была произведена аудиторская проверка хозяйственой деятельности. Найти вероятность того, что у 50 предприятий были выявлены серьезные нарушения, если вероятность подобных нарушений для каждого объекта составляет 0,3.
3. Вероятность производственной травмы в течение года равна 0,000 5. Какова вероятность того, что из 10 000 рабочих пострадает 3 человека? Каково наивероятнейшее число пострадавших?
4. Вероятность того, что случайно выбранный лицевой счет клиента отделения сбербанка содержит ошибки равна 0,05. Если при выборочной проверке счетов обнаружится, что не менее 6 % отобранных счетов содержат ошибки, то оператор увольняется с работы. Найти вероятность того, что оператор будет уволен, если ревизор проверит 500 счетов.
5. Необходимо перевезти 500 единиц товара грузовым автомобилем, но определенное количество товара может получить в дороге повреждение. Вероятность повреждения единицы товара равна 0,2. Необходимо найти наивероятнейшее число поврежденного товара, чтобы отправить сразу такое количество товара, которое могло бы гарантировать, что необходимую партию товара довезут.
6. В автобусном парке имеется 100 машин. Вероятность выхода автобуса на линию

равна 0,9. Для обеспечения нормальной работы маршрутов необходимо иметь на линиях не менее 90 машин. Определить вероятность нормального функционирования автобусных маршрутов.

1. Фотолаборатория взяла на себя обязательство выполнить 130 заказов для клиента, с вероятностью выполнения одного заказа 0,9. Найти вероятность того, что фотолаборатория выполнит 110 заказов.
2. Вероятность того, что посетитель магазина совершит покупку, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 8 посетителей покупку сделает: а) не более двух человек, б) не менее двух человек.
3. 90 % изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Найти вероятность того, что из 600 приобретенных Вами изделии первого сорта будет от 500 до 550.