**Случайная величина. Закон распределения случайной величины. Функция распределения**

**Виды случайных величин**

***Случайной*** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестноеи зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

**Пример 1.** Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, …, 100.

**Пример 2.** Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направление ветра, температуры и т.д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (*а, b*).

Обозначаются случайные величины прописными буквами *X, Y, Z,* а их возможные значения – соответствующими строчными буквами *x, y, z.* Например, если случайная величина *X* имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: *x1, x2, x3.*

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина *X* могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, …, 100. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений *X*. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка (*a, b*). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

В зависимости от множества значений, принимаемых случайной величиной, выделяют дискретные и непрерывные случайные величины.

***Дискретной*** случайной величиной (ДСВ) называется случайная величина, множество значений которой конечно или бесконечно, но счетно.

***Непрерывной*** случайной величиной (НСВ) называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

**Закон распределения случайной величины**

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечнивозможных значений, а вероятности их – различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

***Законом распределения*** случайной величины называется соответствие между ее возможными значениями и вероятностями, с которыми она их принимает.

Закон распределения можно задавать тремя способами.

1. Табличный.

Табличным способом можно задать только дискретную случайную величину. В этом случае первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* |  |  |  |  |
| *P* |  |  |  |  |

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события  образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

.

Если множество возможных значений *X* бесконечно (счетно), то ряд  сходится и его сумма равна единице.

1. Графический.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки , а затем соединяют их отрезками. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения*** (рис. 2.1).

Pi

р2

р3

р1

р4

р5

 0 x1  x2 x3 x4 x5 xi

Рис. 2.1.

Для непрерывной случайной величины данный график будет представлять собой ***кривую*** ***распределения*** вероятностей.

1. Аналитический.

Закон распределения случайной величины можно задавать также формулой. Приведем пример случайной величины, распределенной по биномиальному закону, тогда вероятность того, что в *n* испытаниях случайная величина примет значение, равное *m,* вычисляется по формуле Бернулли:

.

**Основные законы распределения дискретных случайных величин**

1. ***Равномерный*** закон распределения.

Дискретная случайная величина *X* называется распределенной по равномерному закону, если она принимает свои возможные значения с постоянной вероятностью

, 

Запишем равномерный закон в виде таблицы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. ***Биномиальный*** закон распределения.

Для этого закона дискретная случайная величина *X* – число появлений события *А* при проведении испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли.

Вероятности ее возможных значений вычисляются по формуле

.

Запишем биномиальный закон в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |  |  |  |  |
| *Р* |  |  |  |  |  |  |

1. Закон распределения ***Пуассона***.

Для этого закона дискретная случайная величина *X* – число появлений события *А* при проведении испытаний, удовлетворяющих теореме Пуассона.

Тогда вероятность того, что в *n* испытаниях случайная величина *X* примет значение равное *m* вычисляется по формуле

; , где 

Запишем закон Пуассона в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

1. ***Геометрический*** закон распределения.

Для этого закона дискретная случайная величина *X* – число проведенных испытаний до первого появления события *А*, если испытания удовлетворяют схеме Бернулли.

Тогда вероятность того, что в *n* испытаниях случайная величина *X* примет значение равное *m* вычисляется по формуле

.

Запишем геометрический закон в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 |  |  |  |
| *Р* |  |  |  |  |  |  |

1. ***Гипергеометрический*** закон распределения.

Пусть имеется множество из *n* элементов, из которых *s* элементов обладают фиксированным свойством. Пусть из этого множества осуществляется выборка из *r* элементов.

Тогда дискретная случайная величина *X* – число элементов с фиксированным свойством, оказавшихся в выборке, а вероятности ее возможных значений определяются по формуле

.

**Функция распределения, ее свойства и график**

Пусть *x* – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что *X* примет значение меньше *x*, т.е. вероятность события *X<x*, обозначим через *F(x)*. Если *x* изменяется, то изменяется и *F(x)*, т.е. *F(x)* – функция от *x*.

***Функцией распределения*** называют функцию *F(x)*, определяющую вероятность того, что случайная величина *X* в результате испытания примет значение меньшее *x*, т.е.



Функция распределения представляет собой общий способ задания любых типов случайных величин.

**Свойства функции распределения**

С в о й с т в о 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку :

.

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

С в о й с т в о 2.  - неубывающая функция, т.е.

 .

Доказательство. Пусть . Событие, состоящее в том, что *X* примет значение меньшее , можно подразделять на следующие два несовместных события: 1) *X* примет значение, меньшие , с вероятностью ; 2) *X* примет значение, удовлетворяющее неравенству , с вероятностью . По теореме сложения имеем

.

Отсюда

,

или

. (\*)

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то , или , что и требовалось доказать.

**Следствие 1.** Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале , равна приращению функции распределения на этом

интервале:

.

Это важное следствие вытекает из формулы (\*), если положить .

**Пример.** Случайная величина *X* задана функцией распределения



Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, принадлежащее интервалу (0, 2):

.

Решение. Так как на интервале (0, 2) по условию,

,

то

.

Итак,

.

**Следствие 2.** Вероятность того, что непрерывная случайная величина *X* примет одно определенное значение, равна нулю.

С в о й с т в о 3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (а, b), то: 1)  при ; 2)  при .

Доказательство. 1. Пусть . Тогда событие  невозможно (так как значений, меньших , величина *X* по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2. Пусть . Тогда событие  достоверно (так как все возможные значения *X* меньше ) и, следовательно, вероятность его равна единице.

**Следствие.** Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси *x*, то справедливы следующие предельные соотношения:



Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График расположен в полосе, ограниченной прямыми (первое свойство).

При возрастании *x* в интервале (а, b), в котором заключены все возможные значения случайной величины функция возрастает (второе свойство).

При  ординаты графика равны нулю; при  ординаты графика равны единице (третье свойство).

График функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис. 2.2.

***F(x)***

**1**

***a* 0  *b x***

Рис. 2.2.

**Замечание.** График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. Убедимся в этом на примере.

**Пример.** Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 4 | 8 |
| *Р* | 0,3 | 0,1 | 0,6 |

Найти функцию распределения и построить ее график.

Решение. Если , то (третье свойство).

Если , то . Действительно, *X* может принять значение 1 с вероятностью 0,3.

Если , то . Действительно, если удовлетворяет неравенству

, то  равно вероятности события , которое может быть осуществлено, когда *X* примет значение 1 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 4 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события  равна сумме вероятностей 0,3 + 0,1=0,4. Если , то . Действительно, событие  достоверно, следовательно, его вероятность равна единице. Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:



График этой функции приведен на рис. 2.3.

***F(x)***   **1**  **0,4**  **0,3** **0 1 4 8  *x***

Рис. 2.3.

**Решение типовых задач**

**Задача 1.** В магазине куплено 3 электроприбора: чайник, утюг и пылесос. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока для каждого из них соответственно равны   . Составить закон распределения случайной величины *X* – числа приборов, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

Решение. *X* – число приборов, вышедших из строя, имеет следующие возможные значения:

 − все три прибора не выйдут из строя в течении гарантийного срока;

 − один прибор выйдет из строя;

 − два прибора выйдут из строя;

 − три прибора выйдут из строя.

Найдем соответствующие этим значениям вероятности. По условию, вероятности выхода из строя приборов равны: тогда вероятности того, что приборы будут рабочими в течение гарантийного срока равны:





Закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,684 | 0,283 | 0,032 | 0,001 |

Проверка: 1.

**Задача 2.** Предприятие выпускает 90 % изделий высшего сорта. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа изделий высшего сорта из трех, взятых наудачу изделий.

Решение. Случайная величина *X* – число изделий высшего сорта среди трех отобранных изделий может принимать одно из значений: 0, 1, 2, 3. Вероятности этих значений вычисляются по формуле Бернулли:

,



Закон распределения случайной величины *X*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,001 | 0,027 | 0,243 | 0,729 |

Проверка: = 0,001 + 0,027 + 0,243 +

+ 0,729 = 1.

**Задача 3.** На сборку поступило 30 деталей, из них 25 стандартных. Сборщик берет наудачу три детали. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа стандартных деталей среди трех взятых.

Решение. Случайная величина *X* – число стандартных деталей среди отобранных, подчиняется гипергеометрическому закону распределения

. Воспользуемся формулой: 





Закон распределения случайной величины *X*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

Проверка:=

**Задача 4.** Дискретная случайная величина задана законом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 4 | 5 | 7 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 |

Составить функцию распределения  и построить ее график. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, принадлежащие интервалу (3;6).

Решение. 1) По определению  есть вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньше, чем *x*.



Таким образом функция распределения примет вид:



Построим график *F(x)*:



2) Найдем вероятность  по формуле , тогда

**Задачи (31 – 40)**

1. Известно, что 20 % хабаровчан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, среди отобранных. Составить функцию распределения, построить ее график.
2. В некотором цехе брак составляет 5 % всех изделий. Составить закон распределения числа бракованных изделий в случайно отобранной партии из трех изделий. Составить функцию распределения и построить ее график.
3. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету – 0,1. Составить закон распределения случайного числа выигрышных билетов среди пяти купленных. Составить функцию распределения, построить ее график.
4. Торговый агент в среднем контактирует с 6 потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1. Составить закон распределения ежедневного числа продаж для агента. Составить функцию распределения, построить ее график.
5. Практика показывает, что 7 % накладных, проходящих проверку в бухгалтерии, оказываются неправильно оформленными. Наугад отобраны пять накладных. Составить закон распределения случайного числа накладных, не содержащих ошибки. Составить функцию распределения, построить ее график.
6. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок счетов. Известно, что служащие компании при обработке входящих счетов допускают 5 % ошибок. Аудитор случайно отбирает 3 входящих документа. Составить закон распределения числа ошибок, выявленных аудитором. Составить функцию распределения, построить ее график.
7. Предприятие в среднем выпускает 90 % изделий высшего сорта. Составить закон распределения случайного числа изделий высшего сорта из взятых наугад четырех изделий. Составить функцию распределения, построить ее график.
8. Контролер проверяет на соответствие стандарту 5 изделий. Вероятность того, что каждое из изделий будет признано годным, равна 0,9. Составить закон распределения числа стандартных изделий среди проверенных. Составить функцию распределения, построить ее график.
9. В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает 5 счетов. Известно, что 3 % счетов содержат ошибки. Составить закон распределения правильных счетов. Составить функцию распределения, построить ее график.
10. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа в одном опыте для каждого элемента равна 0,1. Составить закон распределения случайного числа отказавших элементов в одном опыте. Составить функцию распределения, построить ее график.