**Числовые характеристики дискретных случайных величин**

Наиболее полно описывает случайную величину описывает ее закон распределения, который задает все возможные ее значения и соответствующие вероятности. Однако зачастую нет необходимости характеризовать случайную величину так досконально. Бывает достаточно указать несколько параметров случайной величины.

Такие параметры, выражающие наиболее важные особенности случайной величины, называются ***числовыми характеристиками*** случайной величины.

Первой группой таких характеристик являются характеристики положения случайной величины на числовой оси. К ним относятся: математическое ожидание, мода, медиана – это некоторые числа, вокруг которых группируются все возможные значения случайной величины.

К другой группе числовых характеристик относятся характеристики, оценивающие меру рассеяния (разброса) случайной величины. Таковыми прежде всего, являются дисперсия и среднее квадратичное отклонение. Это некоторые числа, которые показывают, сколь больших отклонений значений случайной величины от ее среднего значения можно ожидать.

**Математическое ожидание дискретной случайной величины**

***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина *X* может принимать только значения  вероятности которых соответственно равны Тогда математическое ожидание *M(X)* случайной величины *X* определяется равенством 

.

Выясним вероятностный смысл математического ожидания.

Пусть произведено *n* испытаний, в которых случайная величина *X* приняла раз значение 

Тогда сумма всех значений, принятых *X*, равна

.

Найдем среднее арифметическое  всех значений, принятых случайной величиной, для чего разделим найденную сумму на общее число испытаний:



или

.

Заметив, что отношение  - относительная частота  - относительная частота 

.

Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда, как известно, относительная частота приближенно равна вероятности появления события.

.

Заменив относительные частоты соответствующими вероятностями, получим

.

Правая часть этого приближенного равенства есть *M(X)*.

Итак,

.

Вероятностный смысл полученного результата таков: математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

**Математические операции над случайными величинами**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* |  |  |  |  |
| *P* |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y* |  |  |  |  |
| *P′* | *p′* | *p′* |  | *p′* |

Пусть случайные величины *X* и *Y* заданы следующими законами распределения

Две случайные величины называют ***незвисимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины ***зависимы***. Несколько случайных величин называют ***взаимно независимыми***, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

***Произведением*** постоянной *С* на случайную величину *X* называется новая случайная величина , которая принимает свои значения  с вероятностями .

***Суммой*** двух случайных величин *X* и *Y* называется случайная величина  для которой

1) возможные значения равны всевозможным суммам возможных значений случайных величин *X* и *Y*, т.е.

**;

1. соответствующие ей вероятности находятся из условия:



в случае, если случайные величины *X* и *Y* независимы и по формуле

,

если случайные величины *X* и *Y* зависимы.

**Замечание.** Аналогично определяется разность случайных величин.

***Произведением*** двух случайных величин *X* и *Y* называется случайная величина , для которой

1) возможные значения равны всевозможным произведениям возможных значений

случайных величин *X* и *Y*, т.е.

;

1. соответствующие ей вероятности находятся из условия



в случае, если случайные величины *X* и *Y* независимы и по формуле

,

если случайные величины *X* и *Y* зависимы.

**Свойства математического ожидания**

С в о й с т в о 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

.

Доказательство. Будем рассматривать постоянную *С* как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение *С* и принимает его с вероятностью *p=*1. Следовательно,

.

С в о й с т в о 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

.

Доказательство. Пусть случайная величина *X* задана законом распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Запишем закон распределения случайной величины *CX*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| *Р* |  |  |  |  |

Математическое ожидание случайной величины *CX*:

.

Итак,

.

С в о й с т в о 3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых:

.

Доказательство. 1. Докажем равенство . Согласно определению математического ожидания и определению суммы двух случайных величин будем иметь



2. Доказательство равенства  предлагается провести самостоятельно.

**Следствие.** Математическое ожидание суммы (разности) нескольких случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых.

С в о й с т в о 4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

.

Доказательство. Из определений математического ожидания и произведения случайных величин имеем

.

Так как по условию случайные величины *X* и *Y* независимы, то

.

Тогда .

**Следствие.** Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

С в о й с т в о 5. Если все значения случайной величины *X* уменьшить (увеличить) на одно и то же число *С*, то ее математическое ожидание уменьшится (увеличится) на то же число *С*:

.

Доказательство. Воспользуемся свойствами1 и 3.

Тогда .

С в о й с т в о 6. Математическое ожидание отклонения случайной величины *X* от ее математического ожидания равно нулю:



Доказательство. Так как *M(X)* – число постоянное, то *M(M(X))=M(X)*.

Тогда .

**Дисперсия дискретной случайной величины**

Легко указать такие случайные величины, которые имеют одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения. Рассмотрим, например, дискретные случайные величины *X* и *Y*, заданные следующими законами распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | -0,01 | 0,01 |  |  |  |  | *Y* | -100 | 0,01 |
| *Р* | 0,5 | 0,5 |  |  |  |  | *Р* | 0,5 | 0,5 |

Найдем математические ожидания этих величин:



Здесь математические ожидания обеих величин одинаковы, а возможные значения различны, причем *X* имеет возможные значения, близкие к математическому ожиданию, а *Y* – далекие от своего математического ожидания. Таким образом, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, ни о том, как они рассеяны вокруг математического ожидания. Другими словами, математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует.

По этой причине наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики. Так, например, для того, чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются, в частности, числовой характеристикой, которую называют дисперсией.

На первый взгляд может показаться, что для оценки рассеяния проще всего вычислить все возможные значения отклонения случайной величины и затем найти их среднее значение. Однако такой путь ничего не даст, так как среднее значение отклонения, т.е. , для любой случайной величины равно нулю. Это свойство уже было доказано выше и объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, а другие – отрицательны; в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю. Эти соображения говорят о целесообразности заменить возможные отклонения их абсолютными значениями или их квадратами. Правда, в случае, когда возможные отклонения заменяют их абсолютными значениями, приходится оперировать с абсолютными величинами, что приводит иногда к серьезным затруднениям. Поэтому чаще всего идут по другому пути, т.е. вычисляют среднее значение квадрата отклонения, которое и называют дисперсией.

***Дисперсией*** (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:



Пусть случайная величина задана законом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| *Р* |  |  |  |  |

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| *Р* |  |  |  |  |

По определению математического ожидания



.

Таким образом, для того чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности. Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

**Теорема.** Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины *X* и квадратом ее математического ожидания

.

Доказательство. Математическое ожидание *M(X)* есть постоянная величина, следовательно, есть также постоянные величины. Приняв это во внимание и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:



Итак,



**Свойства дисперсии**

С в о й с т в о 1. Дисперсия постоянной величины *С* равна нулю:

*D(C)=*0.

Доказательство. По определению дисперсии,



Пользуясь первым свойством математического ожидания, получим



Итак,



С в о й с т в о 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:



Доказательство. По определению дисперсии имеем

.

Пользуясь вторым свойством математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания), получим



Итак,



С в о й с т в о 3. Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсии этих величин:



Доказательство. 1. Докажем равенство  По формуле для вычисления дисперсии имеем



Раскрыв скобки и пользуясь свойствами математического ожидания суммы нескольких величин и произведения двух независимых случайных величин, получим



Итак,



2. Доказательство равенства  предлагается провести самостоятельно.

**Следствие 1.** Дисперсия суммы (разности) нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

**Следствие 2.** Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:



Доказательство. Величины *С* и *X* независимы, поэтому, по третьему свойству



В силу первого свойства *D(C)*=0. Следовательно,



С в о й с т в о 4. Дисперсия произведения двух независимых случайных величин *X* и *Y* вычисляется по формуле 

Доказательство. Предлагается провести самостоятельно.

**Среднее квадратическое отклонение**

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения, кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

***Среднем квадратическим отклонением*** случайной величины *X* называют квадратный корень из дисперсии



Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность  совпадает с размерностью *X*. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если *X* выражается в линейных метрах, то будет выражаться также в линейных метрах, а *D(X)* – в квадратных метрах.

**Числовые характеристики основных дискретных случайных величин**

В параграфе 2.1 нами были изучены пять основных законов распределения дискретных случайных величин: равномерный, биноминальный, закон распределения Пуассона, геометрический и гипергеометрический.

Приведем ряд теорем, позволяющих находить числовые характеристики случайных величин, распределенных по одному из этих законов.

**Теорема.** Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной дискретной случайной величины вычисляются по формулам

.

Доказательство. Пусть случайная величина *X* распределения равномерно, тогда ее закон распределения имеет вид

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* |  |  |  |  |
| *P* |  |  |  |  |

Найдем числовые характеристики этой случайной величины.



**Теорема.** Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределения по биноминальному закону вычисляется по формулам



Доказательство. Пусть случайная величина - число появления события *А* в *i-*том испытании,  Тогда случайная величина  - число появлений события *А* во всех *n* испытаниях.

Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии



Каждая из случайных величин имеет один и тот же закон распределения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 1 |
|  | *q* | *p* |

Тогда ;



Таким образом искомые числовые характеристики



**Теорема.** Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона вычисляются по формуле

.

Доказательство. Согласно определениям распределения Пуассона, и математического ожидания имеем, что



Равенство  предлагается доказать самостоятельно.

**Замечание.** Из курса высшей математики известно, что ряд вида



представляет собой сходящийся на всей числовой оси ряд Маклорена.

**Теорема.** Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по геометрическому закону, вычисляются по формулам



Доказательство. По определению геометрического закона случайная величина имеет следующий закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 |  | *m* |
| *P* | *p* | *pq* |  |  |  |

Тогда

;



Из теории рядов известно, что

.

Тогда

.

**Теорема.** Если случайная величина *X* имеет гипергеометрический закон распределения, то

.

Примем данную теорему без доказательства.

**Решение типовых задач**

**Задача 1.** Дискретная случайная величина задана законом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 2 | 4 | 5 | 7 |
| *Р* | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 |

Найти: математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение .

Решение. По формуле  находим математическое ожидание *X*:



По формулам  и  найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 3 | 4 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 0 | 2 | 3 |
| *P* | 0,1 | ? | 0,6 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,2 | 0,4 | ? |

**Задача 2.** Независимые случайные величины *X* и *Y* заданы законами распределения:

а) найти 

б) составить закон распределения случайной величины  Найти *M(Z), D(Z)* и проверить выполняемость свойств  в) составить закон распределения . Найти *M(V)* и проверить выполняемость свойства 

Решение: а) Так как



Запишем закон распределения случайных величин *X* и *Y* с учетом их вероятности:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 3 | 4 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 0 | 2 | 3 |
| *P* | 0,1 | 0,3 | 0,6 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,2 | 0,4 | 0,4 |

б) Суммой случайных величин *X* и *Y* называется случайная величина  возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения величины *X* с каждым возможным значением величины *Y*. Если *X* и *Y* независимы, то вероятности возможных значений  равны произведениям вероятностей слагаемых:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1+0=1 | 1+2=3 | 1+3=4 | 3+0=3 |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3+2=5 | 3+3=6 | 4+0=4 | 4+2=6 | 4+3=7 |
|  |  |  |  |  |

Одинаковые значения величины *Z* объединяем, складывая их вероятности. Закон распределения случайной величины *Z* будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 0,02 | 0,1 | 0,16 | 0,12 | 0,36 | 0,24 |







в) Составим закон распределения . Произведением случайных величин *X* и *Y* называется случайная величина , возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения *X* на каждое возможное значение *Y*. Если *X* и *Y* независимы, то вероятности возможных значений  равны произведениям вероятностей сомножителей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 |  |
|  | 0,02 | 0,04 | 0,04 | 0,06 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0,12 | 0,12 | 0,12 | 0,24 | 0,24 |

Одинаковые значения величины  объединяем, складывая их вероятности.

Закон распределения  записываем так:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 3 | 6 | 8 | 9 | 12 |
|  | 0,2 | 0,04 | 0,04 | 0,12 | 0,24 | 0,12 | 0,24 |

Найдем



Таким образом, 

**Задачи (41 – 50)**

**41.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 3 | 6 | 9 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 5 | 15 | 25 |
| *P* | 0,6 | 0,3 | 0,1 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,9 | 0,05 | 0,05 |

1. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

.

**42.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y* .

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.
2. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 10 | 20 | 30 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 20 | 25 | 30 |
| *P* | 0,1 | 0,5 | 0,4 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,5 | 0,4 | 0,1 |

.

**43.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.
2. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 1 | 2 | 3 |
| *P* | 0,1 | 0,3 | 0,6 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,8 | 0,1 | 0,1 |

.

44. Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 2 | 5 | 8 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 2 | 4 | 6 |
| *P* | 0,7 | 0,1 | 0,2 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,35 | 0,4 | 0,25 |

1. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

.

**45.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.
2. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | −2 | 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | −1 | 1 | 2 |
| *P* | 0,3 | 0,2 | 0,5 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,1 | 0,7 | 0,2 |

.

**46.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.
2. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 2 | 4 | 6 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | −1 | 0 | 2 |
| *P* | 0,6 | 0,2 | 0,2 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,15 | 0,25 | 0,6 |

.

**47.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.
2. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 3 | 5 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 7 | 8 | 9 |
| *P* | 0,3 | 0,5 | 0,2 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,4 | 0,3 | 0,3 |

.

**48.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 4 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 0 | 3 | 4 |
| *P* | 0,1 | 0,6 | 0,3 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

1. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

.

**49.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.
2. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 3 | 4 | 6 |  |  |  |  |  |  | *Y* | 1 | 2 | 5 |
| *P* | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,15 | 0,55 | 0,3 |

.

**50.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

1. Составить закон распределения случайной величины *Z*.
2. Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | −1 | 0 | 2 |  |  |  |  |  |  |  | *Y* | 2 | 6 | 10 |
| *P* | 0,6 | 0,3 | 0,1 |  |  |  |  |  |  |  | *Р* | 0,5 | 0,4 | 0,1 |

.