Плотность распределения вероятностей и числовые

характеристики непрерывных случайных величин

**Плотность распределения вероятностей, ее свойства**

Непрерывную случайную величину наряду с функцией распределения можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

***Плотностью распределения*** вероятностей непрерывной случайной величины *X* называют функцию  - первую производную от функции распределения :



Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Пусть  - функция распределения непрерывной случайной величины *X*. По определению плотности распределения  или в иной форме:



Как известно, разность  определяет вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу  Таким образом, предел отношения вероятности того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу, к длине этого интервала  равен значению плотности распределения в точке *x*.

**Замечание.** Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

**Свойства плотности распределения**

С в о й с т в о 1. Плотность распределения – неотрицательная функция:

.

Доказательство. Функция распределения – неубывающая функция, следовательно, ее производная ′ - функция неотрицательная.

Геометрически это свойство означает, что точки, принадлежащие графику плотности распределения, расположены либо над осью *Оx*, либо на этой оси.

График плотности распределения называют ***кривой распределения.***

С в о й с т в о 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина *X* примет значение, принадлежащее интервалу (*a,b*), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от *а* до *b*:

 

Доказательство. Из свойств функции распределения известно, что



По формуле Ньютона – Лейбница,

′

Таким образом,



Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (*а,b*), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью *Оx*, кривой распределения  и прямыми *x*=*a* и *x=b* (рис.2.4).



Рис. 2.4.

**Пример.** Задана плотность вероятности случайной величины *X*



Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Решение. Искомая вероятность



С в о й с т в о 3. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от  до  равен единице:



Доказательство. Несобственный интеграл выражает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу . Очевидно, такое событие достоверно, следовательно, вероятность его равна единице.

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью *Оx* и кривой распределения, равна единице.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу , то



**Теорема.** Функция распределения непрерывной случайной величины связана с плотностью распределения следующим равенством:

.

Доказательство. Действительно мы обозначили через *F*(*x*) вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее *x*, т.е.

.

Очевидно, неравенство *X<x* можно записать в виде двойного неравенства , следовательно,

.

Полагая в данной формуле , имеем согласно свойству 2

.

Наконец, заменив , окончательно получим

.

Таким образом, зная плотность распределения, можно найти функцию распределения. Разумеется, по известной функции распределения может быть найдена плотность распределения, а именно:

′.

**Числовые характеристики непрерывных случайных величин**

Распространим определения числовых характеристик дискретных величин на величины непрерывные. Начнем с математического ожидания.

Пусть непрерывная случайная величина *X* задана плотностью распределения *f*(*x*). Допустим, что все возможные значения *X* принадлежат отрезку . Разобьем этот отрезок на *n* частичных отрезков длиной  и выберем в каждом из них произвольную точку . Нам надо определить математическое ожидание непрерывной величины по аналогии с дискретной; составим сумму произведения возможных значений на вероятности попадания их в интервал  (напомним, что произведение  приближенно равно вероятности попадания *X* в интервал ):

.

Перейдя к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего из частных отрезков, получим определенный интеграл .

***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины*** *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку , называют определенный интеграл

.

Если возможные значения принадлежат всей оси *Оx*, то

.

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

***Дисперсией непрерывной случайной величины*** называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения *X* принадлежат отрезку , то

;

если возможные значения принадлежат всей оси *x*, то

.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

.

**Замечание 1.** Можно доказать, что свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непрерывных величин.

**Замечание 2.** Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы:



**Решение типовых задач**

**Задача 1.** Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

.

Требуется:

а) найти функцию плотности распределения ;

б) найти математическое ожидание , дисперсию  и среднее квадратическое отклонение ;

в) построить графики функций  и ;

г) найти .

Решение:

а) по определению функции плотности вероятности ′

.

б) Для непрерывной случайной величины



в)



г) для вычисления вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал  можно применить одну из формул:

.

Применим первую формулу

.

**Задача 2.** Случайная величина задана плотностью распределения:



Требуется:

а) найти коэффициент *C*;

б) функцию распределения ;

в) построить графики функций  и .

Решение:

а) Плотность распределения  должна удовлетворять условиям:

;, тогда



Так как , то 

Таким образом,



б) для нахождения функции распределения  воспользуемся формулой

.

При    .

При , 

При , 

Итак,



в)



**Задачи (51 – 60**)

**51.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**52.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).



.

**53.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**54.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**55.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**56.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**57.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**58.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**59.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).





**60.** Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*).

Требуется:

1. Найти функцию плотности распределения *f*(*x*).
2. Найти *M*(*X*).
3. Найти вероятность .
4. Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).



