Основные законы распределения непрерывных

случайных величин

**Равномерное распределение**

Непрерывная случайная величина *X* называется ***равномерно распределенной*** на отрезке , если плотность вероятности постоянна на этом отрезке и равна нулю вне этого отрезка



Из свойств функции плотности известно, что . Тогда .

Следовательно,  и .

Таким образом, плотность *f*(*x*) равномерного распределения имеет вид



Восстановим функцию распределения *F*(*x*) равномерно распределенной случайной величины. Для этого воспользуемся формулой

.

Тогда:

− при , ;

− при , ;

− при , .

Таким образом, функция распределения примет вид:



Изобразим графики обеих функций (рис.2.5).



Рис. 2.5.

**Теорема.** Для вычисления *M(X)* и *D(X)* равномерно распределенной случайной величины имеют место равенства



Доказательство. Согласно определению .Тогда

.

Согласно определению . Тогда



Очевидно, что 

**Теорема.** Пусть непрерывная случайная величина распределена равномерно на отрезке , и отрезок ⊂, тогда



Доказательство. Согласно свойствам функции распределения



Таким образом, для того, чтобы полностью описать непрерывную случайную величину, имеющую равномерное распределение, достаточно знать концы отрезка, которому принадлежат все возможные значения этой случайной величины.

Показательное распределение

***Показательным (экспоненциальным)*** называют распределение вероятностей случайной величины *X*, которое описывается плотностью



где - постоянная положительная величина.

Показательное распределение определяется одним параметром . Эта особенность показательного распределения указывает на его преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от большего числа параметров. Обычно параметры неизвестны и приходится находить их оценки (приближенные значения); разумеется, проще оценить один параметр, чем два или три и т.д.

Найдем функцию распределения показательного закона. Воспользуемся формулой . Тогда:

- при ;

- при .

Итак,



Графики плотности и функции распределения показательного закона изображены на рис. 2.6.



Рис. 2.6.



**Теорема.** Для *M(X)* и *D(X)* показательного распределения справедливы равенства



Доказательство. Согласно определению . Тогда,



Соотношение  предлагается доказать самостоятельно.

Очевидно, что , т.е. математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

**Теорема.** Вероятность попадания в интервал  показательно распределенной случайной величины вычисляется по формуле

.

Доказательство. Используем формулу

.

Учитывая, что  получим



Нормальное распределение

***Нормальным*** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

.

Данное распределение определяется двумя параметрами: *а* и , достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой (кривой Гаусса)***.

Исследуем и построим график функции



1. Очевидно, функция определена на всей оси абсцисс.
2. При всех значениях *x* функция принимает положительные значения, т.е. нор- мальная кривая расположена над осью *Оx*.
3. Предел функции при неограниченном возрастании *x* (по абсолютной величине) равен нулю: , т.е. ось *Оx* служит горизонтальной асимптотой графика.
4. Исследуем функцию на экстремум. Найдем первую производную:

′

Очевидно, что:

− при ′

− при ′

− при ′

Следовательно:

− при  - возрастает;

− при  - убывает;

− при () функция имеет максимум 

1. Разность () содержится в аналитическом выражении функции в квадрате, т.е. график функции симметричен относительно прямой 
2. Исследуем функцию на точки перегиба. Найдем вторую производную:

′′

Легко видеть, что при  вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки она меняет знак (в обеих этих точках значение функции равно ). Таким образом, точки графика  и  являются точками перегиба. На рис. 2.7 изображена нормальная кривая



Рис. 2.7.

Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой

Выясним, как влияют на форму и расположение нормальной кривой значения параметров *а* и .

Известно, что графики функций имеют одинаковую форму; сдвинув график в положительном направлении оси *x* на *а* единиц масштаба при или в отрицательном направлении при  получим график . Отсюда следует, что изменение величины параметра *а* не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси *Оx*: вправо, если *а* возрастает, и влево, если *а* убывает.

Рассмотрим форму кривой при изменении параметра . Как было указано выше, максимум нормальной кривой равен . Отсюда следует, что с возрастанием  максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т.е. сжимается к оси *Оx*; при убывании нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси *Оy*.

Заметим, что при любых значениях параметров *а* и площадь, ограниченная нормальной кривой и осью *x*, остается равной единице (третье свойство плотности распределения).

На рис. 2.8 изображены нормальные кривые при различных значениях  и . Чертеж наглядно иллюстрирует, как изменение параметра сказывается на форме нормальной кривой.



Рис. 2.8.

**Замечание 1. *Общим*** называют нормальное распределение с произвольными параметрами *а* и 

***Нормированным (стандартным)*** называют нормальное распределение с параметрами  и 

Плотность нормированного распределения

.

Эта функция табулирована (приложение 1).

**Замечание 2.** Функция *F(x)* общего нормального распределения определяется равенством



а функция нормированного распределения



Легко проверить, что .

**Замечание 3.** Существует связь между функциями общего и нормированного распределения *F(x), F0(x)* и функцией Лапласа *Ф(x)*:



Данные равенства позволяют вычислять значения  по таблице значений *Ф(x)* (приложение 3).

**Вероятностный смысл параметров *а* и σ**

**Теорема.** Для нормально распределенной случайной величины справедливы равенства:



Доказательство. 1. По определению математического ожидания непрерывной случайной величины,



Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе из слагаемых равно *а* .

Итак,  т.е. математическое ожидание нормального распределения равно параметру *а*.

2. По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что имеем



Интегрируя по частям, положив  найдем



Следовательно,



Итак, среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру .

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

**Теорема.** Вероятность того, что непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону, примет значение на интервале , равна



где *Ф(x)* – функция Лапласа.

Доказательство. Из свойств функции распределения известно, что Так как случайная величина распределена нормально, то ее функция распределения связана с функцией Лапласа равенством  (замечание 3).

Таким образом, искомая вероятность

.

Вычисление вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины *X* по абсолютной величине меньше заданного положительного числа *δ*, т.е. требуется найти вероятность осуществления неравенства .

**Теорема.** Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины по абсолютной величине меньше положительного числа , находится из соотношения

.

Доказательство. Заменим неравенство равносильным ему двойным неравенством



Пользуясь предыдущей теоремой



приняв во внимание равенство



(функция Лапласа – нечетная), окончательно имеем

.

Правило трех сигм

Преобразуем формулу

,

положив . В итоге получим



Если *t*=3 и , следовательно, то



т.е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,998.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,002 7. Это означает, что лишь в 0,27 % случаев так может произойти. Такие события исходя из принципа невозможности маловероятных событий можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

**Решение типовых задач**

**Задача 1.** Поезда метро идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Составить *f(x)* и *F(x)* случайной величины *X* – времени ожидания очередного поезда и построить их графики. Найти *M(X), D(X).*

Решение. Случайная величина *X* – время ожидания очередного поезда. Величина *X* распределена равномерно на отрезке [0,5], поэтому воспользуемся формулами

 

Тогда имеем





Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам:

.

Тогда



**Задача 2.** Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону с параметром Составить функцию распределения, функцию плотности этой случайной величины. Найти числовые характеристики и вероятность того, что случайная величина попадет в интервал (0,3;1).

Решение. Очевидно, искомая плотность распределения



Искомая функция распределения



По условию  Следовательно,



Для нахождения вероятности *P*(0,3<*X<*1) воспользуемся формулой 

Тогда, 

**Задача 3.** Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали равна *а*=35, среднее квадратическое отклонение  Требуется:

а) составить функцию плотности вероятностей;

б) найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше 

в) найти вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не больше чем на 

Решение. 1. Так как непрерывная случайная величина *X* распределена по нормальному закону, есть ее плотность распределения вероятностей выражается формулой

.

Следовательно,

.

2. Для нормально распределенной случайной величины



Тогда

3. Последнее задание решаем по формуле



Таким образом,



где *Ф(x)* – интегральная функция Лапласа (приложение 3).

**Задачи (61 – 70)**

В задачах 61 – 70. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами 

Требуется:

1. Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
2. Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу .
3. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит .

**61.** ****

**62. **

**63. **

**64. **

**65. **

**66. **

**67. **

**68. **

**69. **

**70. **