Тема -10. **Дискретные случайные величины. Закон распределения. Виды дискретных распределений**

1. Основные понятия.
2. Закон распределения дискретной случайной величины.
3. Некоторые дискретные распределения.

**Опорные слова: с**лучайная величина, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина, закон распределения дискретной случайной величины, многоугольник распределения, биномиальное распределение, геометрическое распределение, распределение Пуассона.

В предыдущих темах неоднократно приводились события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 есть возможные значения этой величины.

*Случайной величиной* называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

**Пример 1.** Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ... , 100.

**Пример 2.** Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку .

Так как в результате испытаний происходят элементарные события, то можно связать понятия случайной величины и элементарных событий и дать другое определение случайной величины.

*Случайной величиной* называется функция , определенная на пространстве элементарных событий , .

**Пример 3.** При подбрасывании двух монет число выпавших гербов *Х* есть случайная величина, которая может принимать значения 0, 1 и 2. Пространство элементарных событий состоит из следующих элементарных событий:

, , , .

Тогда *Х* принимает следующие значения:

, ,

, .

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами , а их возможные значения — соответствующими строчными буквами . Например, если случайная величина *Х* имеет три возможных значения, то они обозначаются через .

*Дискретной (прерывной)* называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным. В качестве примера таковой можно привести случайную величину из примера 1.

*Непрерывной* называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. В качестве примера такой величиныможно привести случайную величину из примера 2.

Для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности. С другой стороны, во многих задачах нет необходимости рассматривать случайные величины как функции от элементарного события, а достаточно знать лишь вероятности возможных значений случайной величины, т.е. закон распределения случайной величины.

*Законом распределения вероятностей* или просто *законом распределения дискретной случайной величины* называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать в виде таблицы, графика и формулы.

Рассмотрим различные способы задания закона распределения вероятностей на примерах.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности. Сумма вероятностей во второй строке таблицы должна быть равна 1. В таблице 1 задан закон распределения дискретной случайной величины из примера 3.

Т а б л и ц а 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 1 / 4 | 1 / 2 | 1 / 4 |

**Пример 4.** В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 5000 сум, пять выигрышей по 1000 сум и десять выигрышей по 500 сум. Найти закон распределения случайной величины *Х* — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

*Решение*. Напишем возможные значения *Х*: , , , . Вероятности этих возможных значений таковы: , , , .

Тогда искомый закон распределения имеет вид

Т а б л и ц а 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 500 | 1000 | 5000 |
|  | 0,84 | 0,1 | 0,05 | 0,01 |

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки , а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*. На рисунке 1 приведен многоугольник распределения случайной величины *Х* из примера 3.

Теперь рассмотрим некоторые дискретные распределения, заданные посредством формул: биномиальное, геометрическое и Пуассона.

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события *А* (успеха) постоянна и равна *p* (следовательно, вероятность непоявления (неудачи) равна *q=*1*–p*). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины *Х* число появлений события *А* в этих испытаниях. Возможные значения *Х* таковы: 0, 1, 2, ..., *n*. Вероятности этих возможных значений находятся по формуле Бернулли (1):

,

где *k=* 0, 1, 2, ..., *n*.

Рис. 1.

*Биномиальным* называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть формулы Бернулли можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

.

Так как *p* + *q* = 1, то сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1.

Таким образом, биномиальный закон распределения имеет вид

Т а б л и ц а 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | . . . |  | . . . | 0 |
|  |  |  | . . . |  | . . . |  |

В качестве примера биномиального распределения можно привести распределение случайной величины из примера 3.

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события *А* (успеха) равна *р* () и, следовательно, вероятность его непоявления (неудачи) равна *q=*1*–p*. Испытания продолжаются до первого успеха. Таким образом, если событие *А* появилось в *k*-м испытании, то в предшествующих *k –* 1 испытаниях оно не появлялось.

Если через *Х* обозначить дискретную случайную величину, равную числу испытаний до первого успеха, то ее возможными значениями будут натуральные числа 1, 2, 3, ...

Пусть в первых *k –* 1 испытаниях событие *А* не наступило, а в *k*-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме 3.3 умножения вероятностей независимых событий, равна

. (1)

*Геометрическим* называют распределение вероятностей, определяемое формулой (5.1), так как полагая в этой формуле *k* = 1, 2, ..., получим геометрическую прогрессию с первым членом *р* и знаменателем *q* ():



Просуммировав бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, легко убедиться, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1:

.

Таким образом, геометрический закон распределения имеет вид

Т а б л и ц а 4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | . . . | *k* | . . . |
|  |  |  |  | . . . |  | . . . |

**Пример 5.** Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель . Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

*Решение*. По условию , , . Искомая вероятность по формуле (1) равна:

.

Пусть производится *n*  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *А* равна *р*. Для определения вероятности *k* появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же *п* велико, то пользуются локальной теоремой Лапласа. Однако она дает большую погрешность, если вероятность события мала ().

Если сделать допущение, что произведение  при  сохраняет постоянное значение, а именно , то вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно *k* раз, находится по следующей формуле

. (2)

Эта формула выражает закон распределения *Пуассона* вероятностей массовых (*п* велико) и маловероятных (*р* мало) событий. Имеются специальные таблицы для распределения Пуассона.

**Пример 6.** Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

*Решение.* По условию , , . Найдем :

.

Искомая вероятность по формуле (5.2) равна:

.

**Вопросы для повторения и контроля:**

1. Как определяется случайная величина в общем случае и на языке функций?
2. Что такое дискретная случайная величина?
3. Что такое непрерывная случайная величина?
4. Что вы знаете о законе распределения дискретной случайной величины?
5. Что вы знаете о биномиальном законе распределения?
6. Каковы особенности геометрического закона распределения?
7. В каких случаях используют распределение Пуассона?