**Тема – 11-12. Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства**

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
2. Свойства математического ожидания.
3. Числовые характеристики рассеяния дискретной случайной величины.
4. Свойства дисперсии.
5. Другие числовые характеристики дискретных случайных величин.

**Опорные слова:** Числовые характеристики случайной величины, математическое ожидание, независимые случайные величины, произведение независимых случайных величин, сумма случайных величин, отклонение случайной величины, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Как мы видели выше, закон распределения полностью характеризует дискретную случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют *числовыми характеристиками случайной величины*.

К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание. Математическое ожидание приближенно равно среднему значению случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго.

*Математическим ожиданием дискретной случайной величины Х* называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности и обозначается через *М(Х)*.

Пусть случайная величина *Х* принимает значения  с соответствующими вероятностями . Тогда математическое ожидание *М(Х)* случайной величины *Х* определяется равенством

. (1)

Если дискретная случайная величина *Х* принимает бесконечное множество возможных значений, то

. (2)

**Пример 1.** Найти математическое ожидание случайной величины *Х*, зная закон ее распределения

Т а б л и ц а 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 5 | 2 |
|  | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

Решение. Искомое математическое ожидание по формуле (6.1) равно

.

**Пример 2.** Найти математическое ожидание числа появлений события *А* в одном испытании, если вероятность события *А* равна *р*.

*Решение*. Случайная величина *Х* — число появлений события *А* в одном испытании — может принимать только два значения:  (событие *А* наступило) с вероятностью *р* и  (событие *А* не наступило) с вероятностью *q =* 1 – *р*. Искомое математическое ожидание по формуле (6.1) равно

.

Итак, *математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события*.

Теперь приведем свойства математического ожидания.

**Свойство 1.** *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной*:

.

*Доказательство*. Будем рассматривать постоянную *С* как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение *С* и принимает его с вероятностью . Следовательно,

.

**Свойство 2.** *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*:

.

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

##### Произведением независимых случайных величин Х и Y называется случайная величина ХY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения Х на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения ХY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

**Свойство 3.** *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*:

.

**Следствие 1.** *Математическое ожидание произведения нескольких независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*.

**Пример 3.** Независимые случайные величины *Х* и *Y* заданы следующими законами распределения:

Т а б л и ц а 3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 7 | 9 |
|  | 0,8 | 0,2 |

Т а б л и ц а 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 2 | 4 |
|  | 0,6 | 0,1 | 0,3 |

Найти математическое ожидание случайной величины *ХY*.

*Решение.* Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

;

.

Случайные величины *Х* и *Y* независимые, поэтому искомое математическое ожидание равно

.

##### Суммой случайных величин Х и Y называется случайная величина Х+Y, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения Х с каждым возможным значением Y; вероятности возможных значений Х+Y для независимых величин Х и Y равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин — произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

**Свойство 4.** *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых*:

.

**Следствие 2.** *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых*.

**Пример 4.** Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

*Решение*. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через *Х* и на второй — через *Y*. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6, причем вероятность каждого из этих значений равна 1/6.

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

.

Очевидно, что и .

Искомое математическое ожидание равно

.

**Свойство 5.** *Математическое ожидание числа появлений события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность р появления события постоянна, равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании*:

.

**Пример 5.** Вероятность выявления ошибок в документации при проверке предприятия равна . Найти математическое ожидание общего числа выявлений ошибок, если будет проведено 10 проверок предприятий.

*Решение*. Выявление ошибок при каждой проверке не зависит от исходов других проверок, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание равно

 (выявлений ошибок).

Некоторые случайные величины имеют одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения. Рассмотрим, например, дискретные случайные величины *Х* и *Y*, заданные следующими законами распределения:

Т а б л и ц а 5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | –100 | 100 |
|  | 0,5 | 0,5 |

Т а б л и ц а 4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | –0,01 | 0,01 |
|  | 0,5 | 0,5 |

Найдем математические ожидания этих величин:

;

.

Здесь математические ожидания обеих величин одинаковы, а возможные значения различны, причем *Х* имеет возможные значения, близкие к математическому ожиданию, а *Y* — далекие от своего математического ожидания. Таким образом, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, ни о том, как они рассеяны вокруг математического ожидания.

Другими словами, математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует. По этой причине наряду с математическим ожиданием рассматриваются и другие числовые характеристики.

Пусть *Х* — случайная величина и *М(Х)* — ее математическое ожидание. *Отклонением случайной величины* называется разность .

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

*Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины* называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

. (3)

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно воспользоваться следующей формулой:

. (4)

**Пример 6.** Найти дисперсию случайной величины *Х*, которая задана следующим законом распределения:

Т а б л и ц а 6

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 5 |
|  | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

*Решение.* Математическое ожидание *М(Х)* равно:

.

Закон распределения случайной величины  имеет вид:

Т а б л и ц а 7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 9 | 25 |
|  | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

Математическое ожидание  равно:

.

Искомая дисперсия равна

.

Дисперсия, как и математическое ожидание, имеет несколько свойств.

**Свойство 6.** *Дисперсия постоянной величины равна нулю*:

.

*Доказательство*. По определению дисперсии,

.

Пользуясь свойством 6.1, получим

.

Итак,

.

Свойство становится ясным, если учесть, что постоянная величина сохраняет одно и то же значение и рассеяния не имеет.

**Свойство 7.** *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат*:

.

**Свойство 8.** *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

.

**Следствие 3.** *Дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*.

**Следствие 4.** *Дисперсия суммы постоянной величины и случайной величины равна дисперсии случайной величины:*

.

*Доказательство*. Величины *С* и *Х* независимы, поэтому по свойству 6.8 имеем

.

В силу свойства 6 . Следовательно,

.

Свойство становится ясным, если учесть, что величины *Х* и *Х + С* отличаются лишь началом отсчета и, значит, рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково.

**Свойство 9.** *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий*:

.

*Доказательство*. В силу свойства 6.8 имеем

.

По свойству 6.7,

.

или

.

**Свойство 10.** *Дисперсия числа появлений события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность р появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании*:

.

**Пример 7.** ГТК проводит 10 независимых проверок управлений, в каждой из которых вероятность выявления ошибок в документации равна . Найти дисперсию случайной величины *Х* — числа выявлений ошибок в документации в этих проверках.

*Решение*. По условию, , . Вероятность невыявления ошибок в документации равна

.

Искомая дисперсия равна

.

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения служит также среднее квадратическое отклонение.

*Средним квадратическим отклонением случайной величины Х* называется квадратный корень из дисперсии:

. (5)

**Пример 8.** Случайная величина *Х* задана следующим законом распределения:

Т а б л и ц а 8

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 10 |
|  | 0,1 | 0,4 | 0,5 |

# Найти среднее квадратическое отклонение .

*Решение*. Математическое ожидание *М(Х)* равно:

.

Математическое ожидание  равно:

.

Найдем дисперсию:

.

Искомое среднее квадратическое отклонение равно:

.

**Вопросы для повторения и контроля:**

1. Что называется числовыми характеристиками случайной величины и какие их виды вы знаете?
2. Что такое математическое ожидание и как оно определяется?
3. Чему равно математическое ожидание числа появлений события в одном испытании и как оно находится?
4. Что вы знаете о 1- и 2-свойствах математического ожидания (свойства 1 и 2)?
5. Какие случайные величины называются независимыми и что является произведением независимых случайных величин?
6. Как определяется сумма случайных величин?
7. Что вы знаете о 3- и 4-свойствах математического ожидания, а также об их следствиях (свойства 3 и 4, следствия 1 и 2)?
8. В чем целесообразность введения других числовых характеристик случайной величины, кроме математического ожидания, и что такое отклонение случайной величины?
9. Что такое дисперсия и как она находится?
10. Что вы знаете о 1- и 2-свойствах дисперсии (свойства 6 и 7)?
11. Что вы знаете о 3-свойстве дисперсии и его следствиях (свойство 8, следствия 3 и 4)?
12. Что вы знаете о 4-свойстве дисперсии (свойство 9)?
13. Чему равны математическое ожидание и дисперсия числа появлений события *А* в *n* независимых испытаниях (свойства 5 и 10)?
14. Что такое среднее квадратическое отклонение и как оно определяется?