**Тема – 13 – 14. Функции распределения и плотности непрерывных случайных величин, их свойства**

1. Функция распределения случайной величины.
2. Свойства функции распределения.
3. Функция плотности непрерывной случайной величины.
4. Свойства функции плотности.

**Опорные слова:** Функция распределения случайной величины, график функции распределения непрерывной случайной величины, график функции распределения дискретной случайной величины, функция плотности непрерывной случайной величины

Дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Однако такой способ задания неприменим для непрерывных случайных величин.

Например, рассмотрим случайную величину *Х*, возможные значения которой сплошь заполняют интервал . Очевидно, что невозможно составить перечень всех возможных значений *Х*. Поэтому целесообразно дать общий способ задания любых типов случайных величин, для чего вводятся функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть *х* — действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что *Х* примет значение, меньшее *х*, т.е. вероятность события , обозначим через . Если *х*  изменяется, то изменяется и , т.е.  — функция от *х*.

*Функцией распределения случайной величины Х* называется функция , определяющая вероятность того, что случайная величина *Х* в результате испытания примет значение, меньшее *х*, т.е.

. (1)

Геометрически это равенство можно истолковать так:  есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки *х*.

Теперь рассмотрим свойства функции распределения.

**Свойство 1.** *Значения функции распределения принадлежат отрезку *:

. (2)

*Доказательство*. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

**Свойство 2.**  — *неубывающая функция, т.е.*:

, *если* . (3)

**Следствие 1.** *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале* *, равна приращению функции распределения на этом интервале:*

. (4)

**Пример 1.** Cлучайная величина *Х* задана следующей функцией распределения:

# .

# Найти вероятность того, что в результате испытания *Х* примет значение, принадлежащее интервалу :

# .

*Решение.* Так как на интервале , по условию,

,

то

# .

Итак,

.

**Следствие 2.** *Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет одно определенное значение, равна нулю*.

**Свойство 3.** *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу* *, то*: 1)  *при* ; 2)  *при* .

*Доказательство*. 1) Пусть . Тогда событие  невозможно (так как значений, меньших , величина *Х* по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть . Тогда событие  достоверно (так как все возможные значения *Х* меньше ) и, следовательно, вероятность его равна единице.

**Следствие 3.** *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси х, то справедливы следующие предельные соотношения:*

; . (5)

График функции распределения непрерывной случайной величины в силу свойства 1 расположен в полосе, ограниченной прямыми , .

Из свойства 2 вытекает, что при возрастании *х* в интервале , в котором заключены все возможные значения случайной величины, график имеет вид либо наклона вверх, либо горизонтальный.

В силу свойства 3 при  ординаты графика равны нулю; при  ординаты графика равны единице.

График функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис. 1.

*F(x)*

*1*

*x*

*b*

*a*

*0*

Рис. 1.

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

**Пример 2.** Дискретная случайная величина *Х* задана следующим законом распределения:

Т а б л и ц а 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 8 |
|  | 0,3 | 0,1 | 0,6 |

# Найти функцию распределения и вычертить ее график.

*Решение.* Если , то по свойству 3 .

Если , то . Действительно, *Х* может принять значение 1 с вероятностью 0,3.

Если , то . Действительно, если  удовлетворяет неравенству , то  равно вероятности события , которое может быть осуществлено, когда *Х* примет значение 1 с вероятностью 0,3 или значение 4 с вероятностью 0,1. Поскольку эти два события несовместны, то по теореме 3.1 вероятность события  равна сумме вероятностей 0,3 + 0,1 = 0,4.

Если , то по свойству 3 .

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

.

График этой функции приведен на рис. 2.

*F(x)*

1

0,4

0,3

*x*

4

8

1

0

Рис. 2.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которая называется функцией плотности.

##### Функцией плотности непрерывной случайной величины Х называется функция — первая производная от функции распределения :

. (6)

Отсюда следует, что функция распределения является первообразной для функции плотности. Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины функция плотности неприменима.

Зная функцию плотности, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

**Теорема 1.** *Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет значение, принадлежащее интервалу* *, равна определенному интегралу от функции плотности, взятому в пределах от а до b*:

. (7)

*Доказательство*. Из формулы (4) получаем

.

По формуле Ньютона–Лейбница

.

Таким образом,

.

Так как , то получаем

.

**Пример 3.** Задана функция плотности случайной величины *Х*:

# .

# Найти вероятность того, что в результате испытания *Х* примет значение, принадлежащее интервалу .

*Решение.* Искомая вероятность по формуле (7) равна

.

Зная функцию плотности распределения **, можно найти функцию распределения  по формуле

. (8)

**Пример 4.** Найти функцию распределения по данной функции плотности:

# .

# Построить график найденной функции.

*Решение.* Воспользуемся формулой (8). Если , то , следовательно, . Если , то , следовательно,

.

Если , то

.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

.

График этой функции изображен на рис.3.

*F(x)*

*1*

*a*

*b*

*x*

*0*

Рис. 3.

Приведем два свойства функции плотности.

**Свойство 4.** *Функция плотности — неотрицательная функция*:

. (9)

*Доказательство*. Функция распределения — неубывающая функция, следовательно, ее производная  — функция неотрицательная.

**Свойство 5.** *Несобственный интеграл от функции плотности распределения в пределах от  до*  *равен единице*:

. (10)

**Вопросы для повторения и контроля:**

1. Почему целесообразно дать общий способ задания любых типов случайных величин?
2. Что называется функцией распределения случайной величины?
3. Что вы знаете о 1-свойстве функции распределения (свойство 1)?
4. Что вы знаете о 2-свойстве функции распределения и его следствиях (свойство 2, следствия 1 и 2)
5. Что вы знаете о 3-свойстве функции распределения и его следствии (свойство 3 и следствие 3)?
6. Какими свойствами обладают графики функций распределения непрерывной и дискретной случайной величин?
7. Что называется функцией плотности непрерывной случайной величины и что вы знаете о теореме 1?
8. Как можно найти функцию распределения, зная функцию плотности распределения и что вы знаете о свойствах функции плотности (свойства 4 и 5)?