**Тема – 15 – 16. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Виды непрерывных распределений**

1. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
2. Нормальное распределение.
3. Равномерное и показательное распределения.

**Опорные слова:** математическое ожидание непрерывной случайной величины, дисперсия непрерывной случайной величины, закон распределения, нормальное распределение, общее нормальное распределение, стандартное нормальное распределение, вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал, нормальная кривая (кривая Гаусса), равномерное распределение, вероятность попадания равномерной случайной величины в заданный интервал, показательное распределение, вероятность попадания показательной случайной величины в заданный интервал.

Как и дискретные случайные величины, непрерывные случайные величины также имеют числовые характеристики. Рассмотрим математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины.

Пусть непрерывная случайная величина *Х* задана функцией плотности  и возможные значения этой случайной величины принадлежат отрезку .

*Математическим ожиданием непрерывной случайной величины Х*, возможные значения которой принадлежат отрезку , называется следующий определенный интеграл

. (1)

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси *Ох*, то математическое ожидание имеет следующий вид

. (2)

*Дисперсией непрерывной случайной величины Х*, возможные значения которой принадлежат отрезку , называется следующий определенный интеграл

. (3)

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси *Ох*, то дисперсия имеет следующий вид

. (4)

Для вычисления дисперсии более удобны соответственно следующие формулы

 (5)

и

. (6)

Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных случайных величин.

*Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины* определяется, как и для дискретной случайной величины, следующим равенством

. (7)

**Пример 1.** Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *Х*, заданной следующей функцией распределения:

# .

*Решение.* Найдем функцию плотности:

# .

Найдем математическое ожидание по формуле (8.1):

.

Найдем дисперсию по формуле (8.5):

.

Найдем среднее квадратическое отклонение по формуле (7):

.

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Функции плотности непрерывных случайных величин называются также *законами распределений*. Наиболее часто встречаются законы нормального, равномерного и показательного распределений.

*Нормальным распределением с параметрами  и * (**) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается следующей функцией плотности

. (8)

Отсюда видно, что нормальное распределение определяется двумя параметрами:  и . Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

Отметим вероятностный смысл этих параметров. Итак, , т.е. *математическое ожидание нормального распределения равно параметру* , *и *, т.е. *среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру* *.*

# Функция распределения нормальной случайной величины имеет вид

. (9)

*Общим* называется нормальное распределение с произвольными параметрами  и  (). *Стандартным* называется нормальное распределение с параметрами  и .

Легко заметить, что функция плотности стандартного нормального распределения имеет следующий вид

. (10)

Эта функция уже встречалась нам раньше. Ее значения приведены в специальных таблицах в различной литературе по теории вероятностей и математической статистике.

Вероятность попадания нормальной случайной величины с произвольными параметрами  и  в интервал  можно найти, пользуясь функцией Лапласа . Действительно, по теореме 1 (из преведущей темы) имеем

.

Введем новую переменную . Отсюда , . Найдем новые пределы интегрирования. Если , то ; если , то .

Таким образом, имеем





.

Используя функцию , окончательно получим

. (11)

В частности, вероятность попадания стандартной нормальной случайной величины *Х* в интервал  равна

, (12)

так как в этом случае  и .

**Пример 2.** Случайная величина *Х* распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что *Х* примет значение, принадлежащее интервалу .

*Решение.* Воспользуемся формулой (8.11). По условию, , , , , следовательно,

.

По таблице находим . Отсюда искомая вероятность равна

.

Рис. 1.

График функции плотности нормального распределения называется *нормальной кривой* (*кривой Гаусса*). Этот график изображен на рис. 1.

*Равномерным распределением на отрезке*  называется распределение вероятностей случайной величины *Х*, все возможные значения которой принадлежат этому отрезку, если ее функция плотности имеет вид

# . (13)

*f(x)*

*1/(b-a)*

*b*

*0*

*a*

*x*

Рис. 2.

Функция распределения равномерно распределенной на  случайной величины имеет вид

. (14)

График функции плотности равномерного распределения приведен на рис. 2, а график функции распределения — на рис.3 (преведущей темы).

Вычислим математическое ожидание и дисперсию равномерной случайной величины. По формуле (1) имеем

.

Далее, по формуле (5) имеем



.

Теперь найдем вероятность попадания непрерывной случайной величины *Х*, распределенной равномерно на , в интервал , принадлежащий .

Используя теорему 1 (преведущей темы) и формулу (13), имеем



или

. (8.15)

*Показательным (экспоненциальным) распределением* называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *Х*, которое описывается функцией плотности

# , (16)

где  — постоянная положительная величина.

Из определения видно, что показательное распределение определяется одним параметром . Найдем функцию распределения показательного закона:

.

Итак,

# . (17)

Графики функций плотности и распределения показательного закона изображены на рис. 3.

Рис. 3.

Найдем вероятность попадания в интервал  непрерывной случайной величины *Х*, которая распределена по показательному закону из формулы (17). Используя формулу (4) (преведушей темы), имеем



или

. (18)

**Пример 3.** Непрерывная случайная величина *Х* распределена по показательному закону

.

Найти вероятность того, что в результате испытания *Х* попадает в интервал .

*Решение.* По условию, . Воспользуемся формулой (18):



Отметим вероятностный смысл параметра показательного распределения. *Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны обратной величине параметра* , *т.е.*  *и *.

**Пример 4.** Непрерывная случайная величина *Х* распределена по показательному закону

.

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию случайной величины *Х*.

*Решение*. По условию, . Следовательно,

;

.

**Вопросы для повторения и контроля:**

1. Что является математическим ожиданием непрерывной случайной величины?
2. Что является дисперсией непрерывной случайной величины и как она вычисляется
3. Что называется нормальным распределением?
4. Каков вероятностный смысл параметров нормального распределения?
5. Что такое общее и стандартное нормальные распределения, каковы их функции плотности и распределения?
6. Как находится вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал?
7. Что называется равномерным распределением?
8. Как вычисляется математическое ожидание и дисперсия равномерной случайной величины?
9. Как находится вероятность попадания равномерной случайной величины в заданный интервал?
10. Что называется показательным распределением?
11. Как находится вероятность попадания показательной случайной величины в заданный интервал?
12. Каков вероятностный смысл параметра показательного распределения?