**Тема – 17. Закон больших чисел и его практическое значение.**

**Понятие о центральной предельной теореме**

1. Закон больших чисел.
2. Центральная предельная теорема.

**Опорные слова:** закон больших чисел, неравенство Чебышева, последовательность независимых случайных величин, центрированная и нормированная сумма случайных величин, центральная предельная теорема.

Как мы видели в предыдущих темах, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания, потому что это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Однако при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли.

Теоремы, относящиеся к закону больших чисел, устанавливают условия сходимости среднего арифметического *п* случайных величин к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Вначале приведем неравенство Чебышева, на которое опираются доказательства вышеназванных теорем.

Если известна дисперсия случайной величины, то с ее помощью можно оценить вероятность отклонения этой величины на заданное значение от своего математического ожидания, причем оценка вероятности отклонения зависит лишь от дисперсии. Соответствующую оценку вероятности дает *неравенство П.Л.Чебышева*:

, . (1)

Из этого неравенства в качестве следствия можно получить следующее неравенство

, . (2)

**Пример 1.** Оценить вероятность отклонения случайной величины *Х* от своего математического ожидания на величину, превышающую утроенное среднеквадратическое отклонение случайной величины.

*Решение*. По условию, . Учитывая, что , из формулы (1) получаем

.

**Теорема 1** (закон больших чисел в форме Чебышева)**.** *Пусть  — последовательность независимых случайных величин, дисперсии которых ограничены сверху одним и тем же числом с: , . Тогда для любого*  *имеет место*:

. (3)

Из этой теоремы вытекает справедливость закона больших чисел для среднего арифметического независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение вероятностей.

**Следствие 1.** *Пусть  — последовательность независимых случайных величин, имеющих одно и то же математическое ожидание а, и дисперсии которых ограничены сверху одним и тем же числом с: , . Тогда для любого*  *имеет место*:

. (4)

Закон больших чисел для независимых случайных величин с одинаковым математическим ожиданием отражает сходимость среднего арифметического случайных величин в сериях независимых испытаний к общему математическому ожиданию этих случайных величин.

Таким образом, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин* (дисперсии которых равномерно ограничены) *утрачивает характер случайной величины*. Объясняется это тем, что отклонения каждой из этих величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они погашаются.

Закон больших чисел имеет многочисленные практические приложения. Пусть, например, производится *п* независимых измерений некоторой величины, истинное значение которой равно *а*. Результат каждого измерения является случайной величиной . Если измерения выполняются без систематической погрешности, то математическое ожидание случайных величин  можно считать равным истинному значению измеряемой величины, , . Дисперсию результатов измерений часто можно считать ограниченной некоторым числом *с*.

Тогда случайные результаты измерений удовлетворяют условиям теоремы 9.1 и, следовательно, среднее арифметическое *п* измерений при большом числе измерений практически не может сильно отличаться от истинного значения измеряемой величины *а*. Этим обосновывается выбор среднего арифметического измерений в качестве истинного значения измеряемой величины.

Для относительной частоты успехов в независимых испытаниях справедлива следующая теорема.

**Теорема 2** (закон больших чисел в форме Бернулли)**.**

*Если в каждом из п независимых испытаний вероятность р появления события А постоянна, то для числа успехов т в этих испытаниях при любом*  *имеет место*:

. (5)

Рассмотрим последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин . Пусть , , . Образуем последовательность , , центрированных и нормированных сумм случайных величин:

. (6)

Согласно центральной предельной теореме, при достаточно общих предположениях о законах распределения случайных величин  последовательность функций распределения центрированных и нормированных сумм случайных величин  при  сходится для любых *х* к функции распределения стандартной нормальной случайной величины.

**Теорема 3** (центральная предельная теорема).

*Пусть  — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечную дисперсию* , *и пусть* *, . Тогда для любого*  *имеет место*:

. (7)

**Вопросы для повторения и контроля:**

1. О чем идет речь в теоремах, носящих общее название закона больших чисел?
2. Что вы знаете о неравенстве Чебышева?

# Что утверждает закон больших чисел в форме Чебышева?

1. В чем сущность закона больших чисел и каково его практическое значение?

# Что утверждает закон больших чисел в форме Бернулли?

1. О чем идет речь в центральной предельной теореме?