**Тема – 5. Теоремы сложения и умножения вероятностей.**

1. Теоремы сложения вероятностей.
2. Условная вероятность.
3. Теоремы умножения вероятностей.

**Опорные слова:** вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события, вероятность произведения зависимых событий, вероятность произведения независимых событий, вероятность суммы несовместных событий, вероятность появления хотя бы одного события.

1. **Теоремы сложения вероятностей.**

Пусть события *А* и *В* — несовместные, причем вероятности этих событий даны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие *А*, либо событие *В*, т.е. вероятность суммы этих событий *А+В* ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема 1 (сложения вероятностей несовместных событий).** *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

. (1)

*Доказательство*. Введем обозначения:

 — общее число элементарных событий;

 — число элементарных событий, благоприятствующих событию *А*;

 — число элементарных событий, благоприятствующих событию *В*.

Число элементарных событий, благоприятствующих наступлению либо события *А*, либо события *В*, равно . Следовательно,

.

Приняв во внимание, что  и , окончательно получим

.

**Следствие 3.1.** *Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

. (2)

**Пример 1.** В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

*Решение*. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие *А*)

.

Вероятность появления синего шара (событие *В*)

.

События *А* и *В* несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому искомая вероятность равна

.

Так как противоположные события вместе образуют достоверное событие, то из теоремы 3.1 вытекает, что

,

поэтому

. (3)

**Пример 2.** Вероятность того, что день будет дождливым, равна . Найти вероятность того, что день будет ясным.

*Решение.* События «день дождливый» и «день ясный» — противоположные, поэтому искомая вероятность равна

.

**Условная вероятность.**

Вероятность события *А* при условии, что произошло событие *В*,называется *условной вероятностью* и обозначается через .

**Пример 3.** В урне содержится 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают наудачу по одному шару, не возвращая их в урну. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие *А*), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие *В*).

*Решение*. После первого испытания в урне осталось всего

5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность равна

.

Выведем теперь формулу условной вероятности. Пусть событиям *А* и *В* благоприятствуют соответственно *m* и *k* элементарных событий из *n*; тогда, согласно (1.1), их безусловные вероятности равны  и  соответственно. Пусть событию *А* при условии, что событие *В* произошло, благоприятствуют *r* элементарных событий, тогда, согласно (1.1), условная вероятность события *А* равна

.

Разделив и числитель, и знаменатель на *n*, получим формулу условной вероятности



или

. (4)

поскольку событию *АВ* соответствуют *r* элементарных событий и, следовательно,  — его безусловная вероятность.

1. **Теоремы умножения вероятностей.**

Из формулы (4) получаем следующую теорему.

**Теорема 2** (умножения вероятностей зависимых событий)**.** *Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

. (5)

**Пример 4.** У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

*Решение.* Вероятность того, что первый из взятых валиков окажется конусным (событие *В*), равна

.

Условная вероятность того, что второй из валиков окажется эллиптическим (событие *А*), вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, равна

.

Тогда по формуле (3.4) искомая вероятность равна

.

Теперь перейдем к случаю, когда события *А* и *В* — независимые, и найдем вероятность произведения этих событий.

Так как событие *А* не зависит от события *В*, то его условная вероятность  равна его безусловной вероятности , т.е.

.

Отсюда вытекает следующая теорема.

**Теорема 3** (умножения вероятностей независимых событий)**.** *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

. (6)

**Следствие 3.2.** *Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

.

**Пример 5.** Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

*Решение*. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие *А*), равна

.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие *В*), равна

.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие *С*), равна

.

Так как события *А*, *В* и *С* — независимые, то искомая вероятность по теореме умножения вероятностей независимых событий равна

.

Теперь перейдем к случаю, когда события *А* и *В* — совместные, и найдем вероятность суммы этих событий.

**Теорема 4** (сложения вероятностей совместных событий)**.** *Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий с вычетом вероятности их произведения:*

. (7)

**Пример 6.** Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: ; . Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

*Решение*. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события *А* (попадание первого орудия) и *В* (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события *АВ* (оба орудия дали попадание), равна

.

Искомая вероятность равна

.

Если н е з а в и с и м ы е события  вместе образуют достоверное событие, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий можно найти по формуле

 (8)

**Пример 7.** В типографии имеются 4 машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие *А*).

*Решение.* Вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

.

Тогда искомая вероятность равна

.

**Вопросы для повторения и контроля:**

1. О чем теорема сложения вероятностей несовместных событий и каково ее доказательство?
2. Чему равна вероятность противоположного события?
3. О чем идет речь в теоремах умножения вероятностей зависимых и независимых событий?
4. О чем теорема сложения вероятностей совместных событий?
5. Как можно найти вероятность появления хотя бы одного события?