**Тема – 8. Локальная и интегральная теоремы Лапласа**

1. Локальная теорема Лапласа.
2. Интегральная теорема Лапласа.
3. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности.

**Опорные слова:** локальная теорема Лапласа, вероятность того, что событие *А* появится в *п* независимых испытаниях ровно *k* раз, интегральная теорема Лапласа, вероятность того, что событие *А* появится в *п* независимых испытаниях от  до  раз, функция Лапласа, вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности.

Возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно *k* раз в *n* испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

**Локальная теорема Лапласа.** *Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность*  *того, что событие А появится в п испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше п) значению функции*

**

*при* *.*

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции **. При этом следует учитывать, что **, так как функция ** четная.

Итак, вероятность того, что событие *А* появится в *п* независимых испытаниях ровно *k* раз, приближенно равна

*,* (1)

где .

**Пример 1.** Найти вероятность того, что событие *А* наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

*Решение.* По условию ; ; ; . Воспользуемся формулой (4.7):

**.

Вычислим определяемое данными задачи значение *х:*

.

По таблице находим .

Искомая вероятность равна

**.

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки, ввиду их громоздкости, опущены):

**.

Пусть теперь требуется вычислить вероятность  того, что событие *А* появится в *п* испытаниях не менее  и не более  раз (для краткости будем говорить «от  до  раз»). Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

**Интегральная теорема Лапласа.** *Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность*  *того, что событие А появится в п испытаниях от*  *до*  *раз, приближенно равна определенному интегралу*

*,* (2)

*где*  *и* *.*

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальной таблицей для интеграла **. В таблице даны значения функции  для , а для  воспользуемся нечетностью функции , т.е. . Функцию  часто называют *функцией Лапласа*.

Итак, вероятность того, что событие *А* появится в *п* независимых испытаниях от  до  раз, равна

*,* (3)

где  и .

**Пример 2.** Вероятность того, что организация не прошла проверку налоговой инспекции, равна . Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных организаций не прошедших проверку окажется от 70 до 100 организаций.

*Решение.* По условию ; ; ; ; . Воспользуемся формулой (4.9):

**.

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

;

.

Таким образом, имеем

**.

По таблице значений функции ** находим

**; **.

Искомая вероятность равна

**.

Как мы уже знаем, что по статистическому определению вероятности в качестве вероятности можно взять относительную частоту, поэтому представляет интерес оценка разности между ними. Вероятность того, что отклонение относительной частоты  от постоянной вероятности *р* по абсолютной величине не превышает заданного числа , равна

. (4)

**Пример 3.** Вероятность того, что деталь не стандартна, равна . Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности  по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

*Решение.* По условию ; ; ; .

Требуется найти вероятность .

Пользуясь формулой (4.10), имеем

.

По таблице находим . Следовательно, .

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44 % этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности  по абсолютной величине не превысит 0,03.

**Вопросы для повторения и контроля:**

1. О чем идет речь в локальной теореме Лапласа?
2. О чем идет речь в интегральной теореме Лапласа?
3. Как находится вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности?