2-§. Eng katta umumiy bo'luvchi (EKUB) va eng kichik umumiy karrali (EKUK)

Berilgan $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlarning barchasini bo'luvchi sonlarga ularning umumiy bo'luvchilari deyiladi. Umumiy bo'luvchilarining eng kattasiga berilgan sonlarning eng katta umumiy bo'luvchi (EKUB) deyiladi va uni $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Berilgan $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlarning barchasiga bo'linadigan sonlarga ularning umumiy karralilari (bo'linuvchilari) deyiladi. Umumiy karralilarining eng kichigiga berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisi (EKUK) deyiladi va uni $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, a_n]$ ko'rinishda belgilaymiz. Ta'rifdan $(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 1$ va $[a_1, a_2, \dots, a_n] \geq 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu paragrafda masalalar yechimini topishda EKUB va EKUK ning quyidagi ikki asosiy xossasidan foydalanamiz:

1. Berilgan sonlar EKUBi ularning ixtiyoriy umumiy bo'luvchisiga bo'linadi.
2. Berilgan sonlarning ixtiyoriy umumiy karralisi ularning EKUKiga bo'linadi.

Bir nechta sonlarning EKUB va EKUKini topishda

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = \big((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n\big);\ [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = \big[[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}], a_n\big]$$

rekurrent formulalardan foydalanib, ikkita sonning EKUB va EKUKlarini topishga keltiramiz.

Ikkita sonning EKUBini ularning kanonik yoyilmasi (tub ko'paytuvchilar ko'paytmasiga yoyilmasi) yoki Evklid algoritmidan foydalanib topish mumkin.

a va b lar natural sonlar bo'lib $a > b$ bo'lsin. U holda qo'ldiqli bo'lish haqidagi teoremaga asoslangan quyidagi jarayonga Evklid algoritmi deyiladi:

$$\left.\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b \\ b = r_1 \cdot q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_n \cdot q_n & \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Bu yerda $b > r_1 > r_2 > \cdots > r_{n-1} > r_n$ bajarilgani uchun jarayon albatta, chekli bo'ladi. Evklid algoritmidagi noldan farqli oxirgi qoldiq r_n berilgan a va b sonlarning EKUBi bo'ladi, ya'ni $r_n = (a, b)$. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ *sonlari uchun* $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ *bo'lsa, ular o'zaro tub,* $i_2 \neq i_1$ bo'lganda $\left(a_{i_1}, a_{i_2}\right) = 1$ bo'lsa, juft-jufti bilan o'zaro tub sonlar deb ataladi. Ikkita a va b sonlarining EKUB va

EKUK lari $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$ tenglik orqali bog’langan, ammo bu ko’p hollarda bir nechta sonlar uchun o’rinli emas.

Agar berilgan sonlar juft-jufti bilan o’zaro tub bo’lsa, ularning EKUKi berilgan sonlarning ko’paytmasiga teng bo’ladi.

28. Evklid algoritmidan foydalanib, berilgan sonlarning EKUBini toping:
1) 546 va 231; 2) 1001 va 6253; 3) 1517 va 2257.

29. $a)$. $(420, 126, 525)$ va $[420, 126, 525]$;
$b)$. $(529, 1541, 1817)$ va $[529, 1541, 1817]$ ni toping.

30. $a)$. $[6, 35, 143] = 6\cdot 35\cdot 143$; $b)$.$[n, n+1] = n(n+1)$ ekanligini isbotlang.

31. Ikkita ketma-ket juft sonlarning EKUBi 2ga, ikkita ketma-ket toq sonlarning EKUBi esa 1ga teng ekanligini isbotlang.

32. $(cb, bc, ca) \vdots (a,b,c)^2$ ekanligini isbotlang.

33. Agar$(a,b)=1$ bo’lsa, u holda $(a+b, a-b)$ 1 ga yoki 2 ga teng ekanligini isbotlang.

34. Agar $\frac{a}{b}$ qisqarmaydigan kasr bo’lsa, $\frac{a}{a+b}$ kasr qisqarmaydigan kasr bo’la oladimi?

35. Ikkita toq sonlar ayirmasi 2^n ga teng. Bu sonlar o’zaro tub ekanligini isbotlang.

36. Quyidagi sonlarning EKUBini toping:
$a)$ $d=(a,b)$ va $m=[a,b]$ $b)$ $a\cdot b$ va $[a,b]$
$c)$ $a+b$ va ab, bunda $(\mathrm{a}, b)=1$ $d)$ $a+b$ va $m=[a,b]$.

37. Quyidagilarni toping:
$a)$ $(n, 2n+1)$, $b)$ $(10n+9, n+1)$, $c)$ $(3n+1, 10n+3)$

38. $x=[a,b]$ bo’lganda va faqat shunday bo’lgandagina $\left(\frac{x}{a}, \frac{x}{b}\right)=1$ bo’lishini isbotlang.

39. a,b,c toq sonlar uchun $(a,b,c)=\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$ tenglik o’rinli ekanligini isbotlang.

40. 1). Agar $a=cq+r$ va $b=cq_1+r_1$ bo’lsa, u holda $(a,b,c)=(c,r,r_1)$ ekanligini isbotlang. Bu yerda a,b,q,q_1,r,r_1- manfiy bo’lmagan butun sonlar; $c-$ musbat butun son.

2). Birinchi qismda isbotlangan qoida bo’yicha : a) (299, 391, 667), b) (588, 2058, 2849) larni toping.

40. $(a,b)=(5a+3b, 13a+8b)$ tenglik o’rinli ekanligini isbotlang.

41. Uchta ketma-ket natural sonlarning EKUB va EKUKlari nimaga teng ekanligini toping.

42. n, a, b – natural sonlar va (a,b)=1 bo’lsa, nab sonni $ax+by$ ko’rinishda tasvirlang, bu yerda x,y lar ham natural sonlar.

43. $a = 899, b = 493$ uchun $d = (\mathrm{a}, b)$ ni toping va uni $d = ax + by$ ko'rinishda ifodalab x, y larning qiymatlarini aniqlang.

44. Evklid teoremasini isbotlang: Agar $(\mathrm{a}, \mathrm{c}) = (b, c) = 1$ bo'lsa, u holda $(\mathrm{a}b, c) = 1$bo'ladi.

45. Ikkita natural sonning EKUBi ular ayirmasidan katta bo'lishi mumkinmi?

46. Agar $(a, c) = 1$ bo'lsa, u holda $b \vdots (ab, c)$ o'rinli ekanligini isbotlang.

47. Agar $(\mathrm{a}, b) = 1$ bo'lsa, u holda $(\mathrm{ac}, b) = (\mathrm{c}, b)$ekanligini isbotlang.

48. *m*, *n* va *k* natural sonlar uchun $m \cdot n \cdot k = [m, n, k] \cdot (mn, mk, nk)$ munosabat o'rinli ekanligini isbotlang.

49. Quyidagi tenglamalar sistemasini natural sonlarda yeching:

$$a) \begin{cases} x + y = 150 \\ (x, y) = 30 \end{cases}; \qquad b) \begin{cases} (x, y) = 45 \\ \frac{x}{y} = \frac{11}{7} \end{cases}; \qquad c) \begin{cases} xy = 8400 \\ (x, y) = 20 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{9} \\ (x, y) = 28 \end{cases}; \qquad e) \begin{cases} xy = 20 \\ [x, y] = 10 \end{cases}.$$

50. $(a - bq) \vdots m$ $(0 \leq b \leq 9)$ bo'lganda va faqat shu holdagina $N = 10a + b$ natural son $m = 10q + 1$ ga bo'linishini isbotlang.

51. $a + b(q + 1) \vdots m$ bo'lganda, va faqat shu holdagina $N = 10a + b(0 \leq b \leq 9)$ natural son $m = 10q + 9$ ga bo'linishini isbotlang.

52. $N = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ soni 19 ga bo'linishi uchun, $N_1 = \overline{a_n \ldots a_2 a_1} + 2a_0$ sonning 19 ga bo'linishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang va misollarda ko'rib chiqing.

53. 52-misoldagi qoida bo'yicha $N = 3086379$ sonining 19 ga bo'linish bo'lin-masligini aniqlang.