2-§. Berilgan modul bo'yicha chegirmalar sinflari

m modul bo'yicha Z-butun sonlar to'plamini quyidagicha m ta sinfga ajratamiz. m ga bo'lganda bir xil qoldiq qoladigan sonlar to'plamini bitta sinf deb qaraymiz. Ixtiyoriy $a \in Z$ sonini $a = mq + r, 0 \leq r < m$ ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lgani uchun, $r = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ qoldiqlarga mos ravishda

$$C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{m-1} \qquad (1)$$

sinflarga ega bo'lamiz. C_i sinfning elementlari $a = mq + i$ shaklga ega bo'lib, q ga har xil qiymatlar berish natijasida bu sinfning barcha elementlarini hosil qilish mumkin. (1) ga m moduli bo'yicha chegirmalar sinflari deyiladi. m moduli bo'yicha chegirmalar sinflari to'plami $\frac{Z}{mZ} = \{C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}\}$ da qo'shish

$$C_i + C_j = \begin{cases} C_{i+j}, & \text{agar } i + \text{j} < m \text{ bo'lsa;} \\ C_{i+j-m}, & \text{agar } i + \text{j} \geq \text{m bo'lsa} \end{cases} \quad (2)$$

munosabat bilan, ko'paytirish esa

$$C_i \cdot C_j = \begin{cases} C_{ij}, & \text{agar } i\text{j} < m \text{ bo'lsa;} \\ C_r, & \text{agar } i\text{j} \geq \text{m bo'lib } ij = mq + r \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (3)$$

munosabat bilan aniqlanadi.

m moduli bo'yicha chegirmalar sinflarining har biridan bittadan element olib tuzilgan sonlar to'plami m modul bo'yicha *chegirmalarning to'la sistemasi* deyiladi.

Chegirmalarning m modul bo'yicha to'la sistemasi sifatida odatda qulaylik uchun $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ – manfiy bo'lmagan eng kichik chegirmalarning to'la sistemasi; $\{1, 2, \ldots, m-1, m\}$ – musbat eng kichik chegirmalarning to'la sistemasi; m juft bo'lsa $\{0; \pm1; \pm2; \ldots, \pm(m\text{-}2)/2; m/2\}$, m toq bo'lsa, $\{0; \pm1; \pm2; \ldots, \pm(m\text{-}1)/2\}$ – absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarning to'la sistemasilari olib qaraladi.

Berilgan sonlar to'plami biror m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini hosil qilishi uchun bu to'plam elementlari quyidagi ikki shartni qanoatlantirishi kerak:

1) ular m modul bo'yicha har xil sinflarning vakillari bo'lishi;

2) ularning soni m ga teng bo'lishi kerak .

Bu yerda quyidagi teorema keng qo'llaniladi

1-teorema. Agar x o'zgaruvchi m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini qabul qilsa, u holda $(a,m)=1$va b esa ixtiyoriy butun son bo'lganda $ax+b$ chiziqli forma ham m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini qabul qiladi.

m moduli bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasidan m bilan o'zaro tub bo'lganlarini ajratib olib sistema tuzsak hosil bo'lgan sistemaga m moduli bo'yicha *chegirmalarning keltirigan sistemasi* deyiladi.Ta'rifdan chegirmalarning keltirilgan sistemasida $\varphi(m)$ta chegirma mavjud ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar $(a,m)=1$ bo'lib x o'zgaruvchi m modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini qabul qilsa, u holda ax ham m modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini qabul qiladi.

p –tub moduli bo'yicha eng kichik musbat chegirmalarning keltirilgan sistemasi $1,2,3,\ldots p-1$, ularning to'la sistemasi $1,2,3,\ldots p-1, p$ dan p ni tushurib qoldirib hosil qilinadi. Shuningdek, p –tub moduli bo'yicha eng katta manfiy chegirmalarning keltirilgan sistemasi $-(p-1), -(p-2), \ldots, -2, -1;$ $p > 2$ –tub moduli bo’yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarning keltirilgan sistemasi $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}$ lardan iborat bo’ladi.

195. 10 moduli bo’yicha barcha sinflarni taqqoslama ko’rinishda yozing.

196. Berilgan modullar bo’yicha chegirmalarning to’la va keltirilgan sistemalarini uch xil (musbat eng kichik chegirmalar, manfiy va absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalar sistemalari) ko’rinishlarida yozing:

1) $m = 9$, 2) $m = 8$, 3) $p = 13$, 4) $m = 12$, 5) $p = 7$, 6) $m = 10$.

197. 10 modul bo’yicha barcha sinflarni $x = 10q + r, 0 \leq r < 10$ formula yordamida yozing.

198. Chegirmalarning barcha sinflarini ko’rsating: *a*) 10 modul bilan o’zaro tub bo’lgan; b)10 modul bilan EKUBi 2 ga teng, *c*) 10 moduli bilan EKUBi 5ga teng;

d) 10 modul bilan EKUBi 10ga teng.

199. *m* modul bo’yicha har bir sinf, *md* modul bo’yicha *d* ta sinfdan tuzilganligini isbotlang.

200. 10 moduli bo’yicha bir nechta chegirmalarning to’la sistemasini toping.

201. m moduli bo’yicha chegirmalar sinflari to’plamining halqa bo’lishligini isbotlang. Bunda sinflar yig’indisi va ko’paytmasi mos ravishda (2) va (3) tengliklar yordamida aniqlanadi.

202. $20, -4, 22, 18, -1$ sonlari qanday modul bo’yicha chegirmalarning to’la temasini tashkil etadi.

203. $20, 31, -8, -5, 25, 14, 8, -1, 13$ va 6 sonlar sistemasining 10 moduli bo’yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etmasligini isbotlang.

204. Istalgan m ta ketma-ket kelgan butun sonlar m modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasini tashkil qilishini isbotlang.

205. $-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-3}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}$ sonlar m- toq modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasini tashkil qilishini isbotlang.

206. 10 moduli bo’yicha hech bo’lmaganda bitta $3x - 1$ ko’rinishdagi chegirmalarning to’la sistemasini toping.

207. 4 moduli bo’yicha $5x$ ko’rinishdagi hech bo’lmaganda bitta chegirmalarning to’la sistemasini toping.

208. Agar $ax_i + b$ $(i = 1, 2, 3, \dots, m)$ ko’rinishdagi son m modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasini tashkil etsa, unga mos x_i sonlar ham m modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasini tashkil qilishini isbotlang.

209. Агар $a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0, (i = 1,2, \dots, m)$ ko’rinishdagi sonlar *m* modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasini hosil qilsa, u holda unga mos x_i sonlar ham m modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasini hosil qiladi va aksincha ekanligini isbotlang.

210. 6 moduli bo'yicha bir nechta chegirmalarning keltirilgan sistemasini tuzing.

211. Nima uchun -5, 13, 11, -21, 5 sonlar sistemasi 12 moduli bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etmaydi.

212. p modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasi $p-1$ ta chegirmadan tuzilganligini isbotlang.

213. $-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \dots, -1, 1, \dots, \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}$ sonlar sistemasi p>2 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etishini isbotlang.

214. $5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6$ sonlar sistemasining 7 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasi ekanligini isbotlang.

215. Agar $ax_i, (i = 1,2, \dots, \varphi(m))$ sonlari m modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil qilsa, u holda ularga mos x_i sonlarining ham m modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etishini isbotlang (yuqoridagi ikkinchi teoremaga teskari teorema).

216. Agar $(a,m)=1$, $b\equiv 0(mod m)$ va x o'zgaruvchining qiymatlari m modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etsa, unda $ax+b$ funksiya`ning qiymatlari ham m modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sitsemasini tashkil qilishini isbotlang.

217. Agar $(a,m)=d$ va x o'zgaruvchining qiymatlari $\frac{m}{d}$ modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil etsa, u holda $\frac{a}{d}x + b$ funksiya`ning mos qiymatlari ham $\frac{m}{d}$ modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil qilishini isbotlang.

218. Agar $(a,m)=d$ va x o'zgaruvchining qiymatlari $\frac{m}{d}$ modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etsa, u holda $\frac{a}{d}x$ funksiya`ning mos qiymatlari ham $\frac{m}{d}$ modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil qilishini isbotlang.

219. m=9 moduli bo'yicha chegirmalarning to'la va keltirilgan sistemalarini 3 xil (musbat, manfiy bo'lmagan, absolyut qyimati jihatidan eng kichik chegirmalar) ko'rinishda yozing.