III-BOB. TAQQOSLAMALAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

1-§.Taqqoslamalar va ularning asosiy xossalari

Agar ikkita butun a va b sonni $m\in N$ ga bo'lganda hosil bo'lgan qoldiqlar o'zaro teng bo'lsa, a va b sonlar m moduli bo'yicha teng qoldiqli yoki taqqoslanuvchi sonlar deyiladi va $a \equiv b(mod\, m)$ ko'rinishda belgilanadi. m modul bo'yicha taqqoslanuvchi sonlarning ayirmasi shu modulga qoldiqsiz bo'linadi.

Agar $a=b+mt$ bo'lib, b ni m ga bo'lgandagi qoldiq r bo'lsa, a ni ham m ga bo'lgandagi qoldiq r ga teng bo'ladi. Agar $a=mq+r$ bo'lsa, $a \equiv r(mod\, m)$ deb yozish mumkin. Agar $a \vdots m$ bo'lsa, $a \equiv 0(mod\, m)$ bo'ladi.

Taqqoslamalar quyidagi asosiy xossalarga ega:

1. Har bir butun son ixtiyoriy modul bo'yicha o'z-o'zi bilan taqqoslanadi.
2. Taqqoslamaning ikkala tomonini o'zaro almashtirish mumkin(simmetriklik).
3. Taqqoslamalar tranzitivlik xossasiga ega.
4. Bir xil modulli taqqoslamalarni hadlab qo'shish (ayirish), hadlab ko'paytirish mumkin.
5. Taqqoslamaning ikkala tomonini modul bilan o'zaro tub bo'lgan ularning umumiy bo'luvchisiga bo'lish mumkin.
6. Taqqoslamaning ikkala qismi va modulini bir xil songa bo'lish (ko'paytirish) mumkin.
7. Agar taqqoslama biror m modul bo'yicha o'rinli bo'lsa, u shu modulning ixtiyoriy bo'luvchisi m_1 moduli bo'yicha ham o'rinli bo'ladi.
8. Agar taqqoslama bir necha modul bo'yicha o'rinli bo'lsa, u shu modullarning eng kichik umumiy karralisi bo'yicha ham o'rinli bo'ladi.

159. Qanday modul bo'yicha barcha butun sonlar o'zi bilan taqqoslanadi.

160. 8 modul bo'yicha taqqoslanuvchi butun sonlarga misollar keltiring.

161. Quyidagi taqqoslamalardan qaysilari o'rinli:

$a)\ 1 \equiv -5(mod\ 6),\ b)\ 546 \equiv 0(mod\ 13), c)\ 2^3 \equiv 1(mod\ 4),$

$d)\ 3m \equiv -1(mod\ m).$

162. Quyidagi taqqoslamalarning o'rinli ekanligini isbotlang:

$a)121 \equiv 13145(mod\ 2), b)\ 121347 \equiv 92817(mod\ 10),$

c) $31 \equiv -9(mod\ 10), d)\ (m-1)^2 \equiv 1(mod\ m),$

$e)\ 2m+1 \equiv (m+1)^2(mod\ m).$

163. Quyidagi taqqoslamalarning o'rinli emasligini isbotlang.

$a)\ 5^{1812} \equiv 1964(mod\ 25),\ b)\ 7^{103} \equiv 3(mod\ 87),$

$c)\ 4^{1965} \equiv 25(mod\ 10)$, $\quad d)\ 30 \cdot 17 \equiv 81 \cdot 19(mod\ 6)$,

$e)\ (2n+1)(2m+1) \equiv 2k(mod\ 6)$, bu yerda n, m va k –butun sonlar.

164. Har bir butun son berilgan modul bo'yicha o'zining qoldig'i bilan taqqoslanishini isbotlang.

165. x soni $x \equiv 2(\mathrm{mod}10)$ shartni qanoatlantiradi. Bu shartni parametrik tenglama ko'rinishida yozing va x ning bir nechta qiymatini toping.

166. Quyidagi taqqoslamalarni qanoatlantiruvchi x ning barcha qiymatlarini toping: a) $x \equiv 0(mod\ 3)$, $b)\ x \equiv 1(mod\ 2)$.

167. *a)* $20 \equiv 8(\mathrm{mod}\ m)$ *b)* $3p+1 \equiv p+1(mod\ m)$ shartni qanoatlantiruvchi m ning qiymatini toping.

168. Agar $x = 13$ soni $x \equiv 5(modm)$ taqqoslamani qanoatlantirishi ma'lum bo'lsa, bu taqqoslamada modulning mumkin bo'lgan qiymatlarini toping.

169. 10 modul bo'yicha taqqoslanuvchi butun sonlarga misollar keltiring.

170. Quyidagi taqqoslamalardan qaysilari o'rinli: $a)\ 1 \equiv -11(mod\ 6)$,
$b)\ 3n \equiv n^2(mod\ n)$, $c)\ 2^6 \equiv 1(mod\ 7)$, $d)\ 3m \equiv 1(mod\ m)$.

171. $x \equiv 7(mod5)$ taqqoslamani qanoatlantiruvchi x ning barcha qiymatlarini toping.

172. Butun koeffitsiyentli $F(x,y,z) = ax^3 + bx^2y + cxyz + dz$ ko'phad argumentlarining qiymatlari berilgan modul bo'yicha taqqoslanuvchi bo'lsa, u holda ko'phad qiymatlari ham shu modul bo'yicha taqqoslanuvchi bo'lishini isbotlang.

173. Agar $3^n \equiv -1(mod\ 10)$ bo'lsa, unda $3^{n+4} \equiv -1(mod\ 10)$ bo'lishini isbotlang, bu yerda n – natural son.

174. $2^{5n} - 1$ soni 31 ga bo'linishini isbotlang, bu yerda n –natural son.

175. Agar $x = 3n+1, n = 0,1,2,...$bo'lsa,$1 + 3^x + 9^x$ soni 13 ga bo'linishini isbotlang.

176. $(a+b)^p \equiv a^p + b^p(mod\ p)$ o'rinli bo'lishini isbotlang.

177. Agar $a \equiv b(modp^n)$ bo'lsa, $a^p \equiv b^p(mod\ p^{n+1})$ ekanligini isbotlang.

178. Agar $ax \equiv bx(modm)$ bo'lsa, u holda $a \equiv b\left(mod\,\frac{m}{(x,m)}\right)$ ekanligini isbotlang.

179. $a_{i+1} = 0$ bo'lganda $\overline{a_{i+1}a_i} = a_i$ deb hisoblab, agar $\overline{a_4a_3a_2a_1} \equiv 0(mod\ 33)$ bo'lsa, u holda $a_4 + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0} \equiv 0(mod\ 33)$ ekanligini isbotlang.

180. $p - i \equiv -i(modp)$, (bu yerda $i = 1,2,\dots,n$ ekanligidan foydalanib.
1) $C_{p-1}^n \equiv (-1)^n(mod\ p)$; 2) $C_{p-2}^n \equiv (-1)^n(n+1)(mod\ p)$
o'rinli ekanligini isbotlang.

181. 1) 9^{9^9} 2) $7^{9^{9^9}}$ sonlarning oxirgi ikki raqamini toping.

182. $p^{p+2} + (p+2)^p \equiv 0(mod\ 2p+2)$ taqqoslama o'rinli ekanligini isbotlang, bu yerda $p > 2$.

183. $-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}$ sonlarning $p>2$ modul bo'yicha o'zaro taqqoslanmasligini isbotlang.

184. $i \equiv i-m(mod\ m)$ ekanligidan foydalanib $\sum_{i=1}^{m} i^n \equiv 0(mod\ m)$ o'rinli ekanligini isbotlang, bu yerda *n* va *m* lar toq sonlar.

185. $2^{3^n} \equiv -1(mod\ 3^{n+1})$ taqqoslama o'rinli ekanligini isbotlang, bu yerda $n = 1,2,3, \dots$.

186. 185-masaladagi taqqoslamadan foydalanib $2^m + 1 \equiv 0(modm)$ shartni qanoatlantiruvchi cheksiz ko'p m>1 natural sonlarning mavjudligini isbotlang.

187. $m > 1$-toq son va n –natural son uchun $(m-1)^{m^n} \equiv -1(mod\ m^{n+1})$ ekanligini isbotlang.

188. 187-masaladagi taqqoslama yordamida $2^{2x} + 1 \equiv 0(mod x)$ shartni qanoatlantiruvchi natural x sonlarning cheksiz to'plami mavjudligini isbotlang.

189. $N = 3^{2^{4n+1}} + 2$ va $M = 2^{3^{4n+1}} + 3$, (bunda $n = 1,2,3, \dots$) ko'rinishdagi sonlarning murakkab son ekanligini isbotlang.

190. $2^x + 7^y = 19^z$ va $2^x + 5^y = 19^z$ tenglamalarning natural sonlarda yechimga ega emasligini isbotlang.

191. Agar $\frac{11a+2b}{19}$ ko'rinishdagi sonlarning butun ekanligi ma'lum bo'lsa, (a, b –butun sonlar) $\frac{18a+5b}{19}$ ko'rinishdagi son ham butun son ekanligini isbotlang.

192. Agar *n* toq son bo'lsa, $n^2 - 1 \equiv 0(mod8)$ ning o'rinli ekanligini isbotlang.

193. $2^{11\cdot 31} \equiv 2(mod 11 \cdot 31)$ ning o'rinli ekanligini ko'rsating.

194. Agar $p>2$ tub son bo'lsa, $1^{2k+1} + 2^{2k+1} + 3^{2k+1} + \dots + (p-1)^{2k+1} \equiv 0(modp)$ ning o'rinli ekanligini ko'rsating.