3-§. Tub va murakkab sonlar

Agar natural son faqat ikkita bo'linuvchi (bir va o'zi) ga ega bo'lsa, bunday natural sonlar tub sonlar deb ataladi. Agar natural son ikkitadan ortiq bo'luvchilarga ega bo'lsa, bunday sonlar murakkab sonlar deyiladi.

Tub sonlar (va ularning natural darajalari) juft-juft o'zaro tub. Birdan farqli berilgan a sonining eng kichik bo'luvchisi p tub son bo'ladi va $p \leq \sqrt{a}$ bajariladi. Har bir murakkab sonni tub sonlar ko'paytmasi ko'rinishida yagona usulda tasvirlash mumkin (bu tasdiqga arifmetikaning asosiy teoremasi deyiladi), ya'ni a ni $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ ko'rinishda yozish mumkin.

Agar bu yoyilmada p_1 soni α_1 marta, p_2 soni α_2 marta va hokazo p_k soni α_k marta qatnashsa, $(k \leq n)$, uni $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerdan a ning ixtiyoriy bo'luvchisi d ni

$$a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \ \ (0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = \overline{1,n}) \qquad (*)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan (N_0, N_1), $(N_0 < N_1)$ oraliqdagi tub sonlarni ajratish uchun Eratosfen g'alviri deb ataluvchi usuldan foydalaniladi. Unga ko'ra berilgan oraliqdagi 2 ga bo'linadigan sonlarni o'chirib chiqamiz. Qolgan sonlar orasidan 3 ga karralilarini o'chirib chiqamiz, keyin esa 5 ga karrali sonlarni o'chirib chiqamiz va hokazo davom etib p ga (p bu $\sqrt{N_1}$ dan katta bo'lmagan va unga eng yaqin turgan tub son) bo'linadigan barcha sonlarni o'chirib chiqamiz. Bunda p ga karrali sonlarni o'chirishni p^2 dan boshlash kifoya. O'chmay qolgan sonlar izlanayotgan tub sonlar bo'ladi.

Berilgan sonning tub yoki murakkab ekanligini aniqlashda ham shunga o'xshash usuldan foydalanish mumkin. Berilgan a sonining tub yoki murakkab ekanligini aniqlash uchun uni $p \leq \sqrt{a}$ shartni qanoatlantiruvchi barcha tub sonlarga bo'lib ko'ramiz. Agar ularning birortasiga ham bo'linmasa a tub son, aks holda murakkab son bo'ladi.

54. $6n+1$ $(n=1,2,...)$ ko'rinishidagi toq sonni, tub sonlar ayirmasi ko'rinishida ifodalab bo'lmasligini isbotlang.

55. Tub sonlar ayirmasi ko'rinishida tasvirlanadigan barcha toq sonlarni toping.

56. $N=3m+2$ $(m=1,2,...)$ sonning kvadratini natural son kvadrati va tub sonning yiq'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin emasligini isbotlang.

57. a murakkab sonning eng kichik tub bo'luvchisi $\sqrt{a}$ dan katta emasligini isbotlang. Bu teorema $a=p$ tub son o'rinli bo'ladimi?

58. Oldingi masaladagi teoremadan foydalanib,

1) 127 2) 919 3) 7429

sonlarining tub yoki murakkab ekanligini aniqlang.

59. 1) 100 va 110, 2) 190 va 200, 3) 200 va 220,

4) 2640 va 2680 sonlari orasidagi barcha tub sonlarni toping.

60. n va $n!$ $(n>2)$ natural sonlari orasida hech bo'lmaganda bitta tub son joylashganini isbotlang.

61. 20 ta ketma-ket murakkab sonni yozing.

62. n ning shunday natural qiymatlarini topingki, n, $n+10$ va $n+14$ sonlarning barchasi tub sonlardan iborat bo'lsin.

63. Shunday p tub sonni topingki $2\mathrm{p}^2+1$ ham tub son bo'lsin.

64. $4\mathrm{p}^2+1$ va $6\mathrm{p}^2+1$ sonlarning har ikkalasi ham tub son bo'ladigan p tub sonni toping.

65. Quyidagi sonlarning bir vaqtda tub son bo'lmasligini isbotlang:

1). $\mathrm{p}+5$ va $\mathrm{p}+10$; 2) $\mathrm{p}, \mathrm{p}+2$ va $\mathrm{p}+5$; 3) 2^n-1 va 2^n+1, bunda $n>2$.

66. Agar p va $8p^2+1$ tub sonlar bo'lsa, u holda $8p^2+2\mathrm{p}+1$ ham tub son ekanligini isbotlang.

67. $2^{18}+3^{18}$ ni tub ko'paytuvchilarga ajrating.

68. $a>3$ butun son va m,n lar natural sonlar 3 ga bo'lganda mos ravishda 1 va 2 qoldiqli bo'lsalar uchta $a, a+m, a+n$ sonlarining bir vaqtda tub son bo'lmasligi isbotlang.

69. $n>1$ natural son bo'lsa, n^4+4 va n^4+n^2+1 larning murakkab son bo'lishini isbotlang.

70. $3,5$ va 7 sonlari yagona egizak tub sonlar uchligi ekanligini isbotlang: (ya'ni ayirmasi 2 ga teng arifmetik progresiya tub sonlar uchligini tashkil etishini isbotlang).

71. $3n+2$ $(n=1,2,...)$ko'rinishdagi tub sonlarning eng kattasi mavjud emasligini isbotlang.

72. $p_{n+1}<p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_n$ ekanligini isbotlang, bunda p_i $(i=1,2,...,n)$ – birinchi$n$ ta tub son va p_{n+1}soni p_n dan keyingi tub son.

73. $p_n>2n$ ekanligini isbotlang, bunda $n=5,6,...$.

74. Matematik induksiya metodidan foydalanib, $p_n\leq 2^{2^n}$ ekanligini isbotlang. Bunda p_n bilan n –tub son belgilangan va tenglik faqatgina $n=1$ bo'lgandagina bajariladi.

75. Agar 2^n-1 tub son bo'lsa, u holda n ning ham tub son bo'lishini isbotlang.