3-§. Taqqoslamalar nazariyasining ba'zi tadbiqlari

1.Berilgan songa bo'lishdan chiqqan qoldiqni hisoblash. Taqqoslamalar yordamida bo'linish belgilarini keltirib chiqarish.

A. Birinchi bo'lib fransuz matematigi B. Paskal berilgan N sonini m ga bo'lishdan chiqqan qoldiqni hisoblash qulay bo'ladigan qilib boshqa son bilan almashtirishning umumiy usulini ko'rsatgan. Biz bu usulni o'nlik sanoq sistemasida berilgan sonlar uchun qarab chiqamiz. Onlik sistemadagi N soni $N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ ... +$ $a_n \cdot 10^n$ ko'rinishda bo'lsin. 10^k ning m moduli bo'yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmasini r_k bilan belgilaylik, ya'ni $10^k \equiv r_k (modm)$, $k = 0,1, \ldots, n$ va $r_0 = 1$ bo'lsin. U holda

$$N = a_0 r_0 + a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \ ... + \ a_n \cdot r_n \qquad (1)$$

yoki

$$N \equiv R_m (modm)$$

bajariladi. Bu yerda $R_m = a_0 r_0 + a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \ ... + \ a_n \cdot r_n$ yuqorida aytib o'tilgan almashtirishni ifodalaydi. (1)-taqqoslama Paskalning bo'linish belgisini ifodalaydi:

1. R_m va N ni m ga bo'lishdan bir xil qoldiq qoladi;
2. N ning m ga bo'linishi uchun R_m ning m ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Endi ba'zi bir xususiy hollarni qaraymiz:

1). Agar $m = 3$ bo'lsa, u holda $10 \equiv 1(mod3)$ va $10^k \equiv 1(mod3)$ bo'lgani uchun $R_3 = a_0 + a_1 + a_2 + \ ... + \ a_n$ bo'ladi. Bundan berilgan sonning 3 ga bo'linishi uchun uni tashkil etuvchi raqamlarining yig'indisining 3 ga bo'linishi zarur va yetarli degan tasdiq kelib chiqadi.

2). Shuningdek, agar $m = 9$ bo'lsa, u holda $10 \equiv 1(mod9)$va $10^k \equiv 1(mod9)$ bo'lgani uchun $R_9 = a_0 + a_1 + a_2 + \ ... + \ a_n$ bo'ladi. Bundan berilgan sonning 9 ga bo'linishi uchun uni tashkil etuvchi raqamlarining yig'indisining 9 ga bo'linishi zarur va yetarli degan tasdiq kelib chiqadi.

3). Agar $m = 11$ bo'lsa, u holda $10 \equiv -1(mod11)$ va $10^k \equiv (-1)^k(mod11)$ bo'lgani uchun $R_{11} = (a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots)$ bo'ladi. Bundan berilgan sonning 11 ga bo'linishi uchun uni tashkil etuvchi juft o'rindagi raqamlari yig'indisidan toq o'rindagi raqamlarini yig`indisining ayirmasi 11 ga bo'linishi zarur va yetarli degan tasdiq kelib chiqadi.

4). Agar $m = 7$ bo'lsa, u holda $10^0 \equiv 1(mod7), 10 \equiv 3(mod7), 10^2 \equiv 2(mod7), 10^3 \equiv -1(mod7)$,

$10^4 \equiv -3(mod7), 10^5 \equiv -2(mod7), 10^6 \equiv 1(mod7)$ bo'lgani uchun $R_7 = (a_0 + 3a_1 + 2a_2) - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + \cdots$ bo'ladi. Bu yerda endi ifoda biroz murakkab.

B. Endi 10 soni m moduli bo'yicha δ ko'rsatkichga qarashli bo'lgan holga to'xtalamiz: bu holda $10^\delta \equiv 1(modm)$ bo'lgani uchun $r_\delta = 1$. Shuning uchun ham r_δ dan boshlab qoldiqlar takrorlanadi va $R_m = a_0 + a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \ ... + \ a_{\delta-1} \cdot r_{\delta-1} + a_\delta + a_{\delta+1} \cdot r_1 + \cdots$ bo'ladi. 3,7,9,11 modullari bo'yicha 10 soni mos ravishda 1, 6. 1, 2 ko'rsatkichlarga tegishli bo'lgani uchun bu modullar bo'yicha qoldiqlar mos ravishda r_1, r_6, r_1, r_2 lardan boshlab takrorlanadi. Buni biz yuqoridagi 1)-4)-misollarda ko'rdik.

2.Oddiy kasrni o'nlik kasrga aylantirishda hosil bo'ladigan kasrning davr uzunligini aniqlash. A. Ma'lumki, maxrajida 2 va 5 dan boshqa sonlar qatnashgan qisqarmas oddiy kasr $\frac{a}{b}$ ni o'nlik kasrga aylantirsak, cheksiz davriy kasr hosil bo'ladi. Davrdagi raqamlar sonini aniqlash uchun avvalo qisqarmas oddiy kasr $\frac{a}{b}$ maxrajida 2 va 5 sonlari qatnashmagan, ya'ni $(10, b) = 1$ bo'lgan holni qaraymiz. Bunda $(a < b)$ bo'lgan holni ($\frac{a}{b}$—to'g'ri kasrni) qarash bilan chegaralanish mumkin. Tushunarliki, bunday kasrning surati a soni $b$dan kichik va b bilan o'zaro tub bo'lgan $\varphi(b)$ ta quymatdan birini qabul qiladi. Oddiy kasrrni o`nlik kasrga aylantirishdagi singari ish tutib, m qadamdan keyin quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 10a = bq_1 + r_1, \\ 10r_1 = bq_2 + r_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10r_{m-1} = bq_m + r_m, \end{cases} \tag{1}$$

bu yerdagi barcha r_i qoldiqlar $0 < r_i < b$ shartni qanoatlantiradi. Shuningdek, $b > a$ bo'lgani uchun $q_1 < 10; b > r_1$ bo'lgani uchun $q_2 < 10$ va xokazo. Shunday qilib, barcha q_i lar raqamlardir. Misol uchun: $\frac{a}{b} = \frac{5}{13}$ bo'lsa, (1) quyidagicha bo'ladi: $10 \cdot 5 = 13 \cdot 3 + 11$,

$10 \cdot 11 = 13 \cdot 8 + 6,$

$$10 \cdot 6 = 13 \cdot 4 + 8, \;\; 10 \cdot 8 = 13 \cdot 6 + 2, \;\; 10 \cdot 2 = 13 \cdot 1 + 7,$$
$$10 \cdot 7 = 13 \cdot 5 + 5 \qquad (1')$$

lardan iborat bo'ladi.

(1) da $(10, b) = 1$ va$(a, b) = 1$ bo'lgani uchun $(10a, b) = 1$ bo'ladi bundan esa $(r_i, b) = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Boshqacha qilib aytganda r_i lar b moduli bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasiga tegishli bo'ladi, ya'ni ularning soni $\varphi(b)$ tadan ko'p bo'la olmaydi. Shuning uchun ham ko'pi bilan $\varphi(b)$ qadamdan keyin qoldiqdagi va ular bilan birga bo'linmadagi raqamlar ham takrorlanadi. Bundan esa davrda $\varphi(b)$ tadan ko'p raqam bo'lmasligi kelib chiqadi.

B. Davrdagi raqamlar va davr haqida aniqroq ma'lumotga ega bo'lish uchun (1) dagi tengliklarni b moduli bo'yicha qaraymiz:

$$\begin{cases} 10a \equiv r_1 (modb), \\ 10r_1 \equiv r_2 (modb), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 10r_{m-1} \equiv r_m (modb), \end{cases} \qquad (2)$$

bularni hadlab ko'paytirib va $(r_1 r_2 \cdots r_{m-1}, b) = 1$ bo'lgani uchun $r_1 r_2 \cdots r_{m-1}$ ga qisqartirib,

$$10^m a \equiv r_m (modb) \qquad (3)$$

ni hosil qilamiz. Endi m qandaydir bir son bo'lmasdan, balki 10 sonining b moduli bo'yicha tegishli bo'lgan daraja ko'satkichi bo'lsin, ya'ni m soni $10^m \equiv 1(modb)$ taqqoslama o'rinli bo'lgan eng kichik ko'rsatkich bo'lsin. Bunday m lar uchun (3) dan $a \equiv r_m (modb)$ kelib chiqadi. Bu yerda $0 < a < b$ va $0 < r_m < b$ bo'lgani uchun $a = r_m$ kelib chiqadi. Shunday qilib biz berilgan kasrning suratiga teng bo'lgan qoldiqni hosil qildik. Bu yerdan kelib chiqadiki, shu qadamdan boshlab qoldiqlar takrorlana boshlaydi: $r_{m+1} = r_1$, $r_{m+2} = r_2, \dots$. Tushunarliki, ana shunday aniqlangan m soni kasrning davridagi raqamlari sonini, davrning uzunligini bildiradi.

Demak, bu holda sof davriy kasrga ega bo'lamiz va bunda davrdagi raqamlar soni faqat berilgan kasrning maxrajiga bog'liq, suratiga bog'liq emas ekan. Bundan esa maxraji bir xil bo'lgan barcha oddiy kasrlarni o'nlik kasrga aylantirilganda bir xil davr uzunligiga ega degan xulosa kelib chiqadi.

C. Endi maxraji bir xil bo'lgan barcha oddiy kasrlarni o'nlik kasrga aylantirilganda davrda hosil bo'ladigan raqamlarni aniqlaymiz. (1) –tengliklardan $\frac{a}{b} = \frac{r_0}{b}$ kasrning davri $q_1 q_2 \cdots q_m$; $\frac{r_1}{b}$ kasrning davri $q_2 q_3 \cdots q_m q_1$; ... , $\frac{r_k}{b}$ kasrning davri $q_{k+1} \cdots q_k$ dan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib $\frac{r_0}{b}, \frac{r_1}{b}, \dots, \frac{r_{m-1}}{b}$ kasrlarning davrlari biridan raqamlarni doiraviy almashtirish natijasida hosil bo'lar ekan. Bunda $\frac{r_k}{b}$ kasrning davrini hosil qilish uchun $\frac{r_0}{b}$ kasrning davridagi k ta raqamni o’ng tomonga doiraviy almashtirish kerak bo’lar ekan.

Misol. $\frac{a}{b}=\frac{5}{13}$ bo’lsin. 10 soni 13 moduli bo’yicha 6 ko’rsatkichiga tegishli bo’lgani uchun davrda 6 ta raqam bo’lishi kerak. Shuning uchun ham $(1')$ ga asosan

$$\frac{5}{13}=0,(384615),\quad \frac{11}{13}=0,(846153),\quad \frac{6}{13}=0,(461538),$$
$$\frac{8}{13}=0,(615384),\quad \frac{2}{13}=0,(153846),\quad \frac{7}{13}=0,(538461) \qquad (4)$$

larga ega bo’lamiz.

D. Agar 10 soni b moduli bo’yicha boshlang’ich ildiz bo’lmasa, ($b\neq p^{\alpha},\alpha\geq 1$ bo’lganda bu albatta shunday bo’ladi, chunki bunday *b, (b,10)=1* modul bo’yicha boshlang’ich ildiz mavjud emas) u b moduli bo’yicha biror $m<\varphi(b)$ ko’rsatkichiga tegishli bo’ladi. Ma’lumki, bunda m soni $\varphi(b)$ ning bo’luvchisi bo’ladi, ya’ni $\varphi(b)=m\cdot d$, u holda mahraji b gat eng bo’lgan qisqarmas $\varphi(b)$ ta kasrlar $d$ta sistemaga bo’linadi. Bular:

$\frac{r_0}{b},\ \frac{r_1}{b},\dots,\frac{r_{m-1}}{b};\frac{s_0}{b},\ \frac{s_1}{b},\dots,\frac{s_{m-1}}{b};\ \cdots;\ \frac{t_0}{b},\ \frac{t_1}{b},\dots,\frac{t_{m-1}}{b}$ lardan iborat bo’ladi. Bu yerda s_0 soni $r_0,r_1,\cdots,r_{m-1}$ lardan farqli $\frac{s_0}{b}$ kasrning surati.

Misol. 10 soni 13 moduli bo’yicha 6 ko’rsatkichiga tegishli bo’lgani uchun u boshlang’ich ildiz emas. Shuning uchun ham maxraji 13 ga teng bo’lgan to’g’ri kasrlar $d=\frac{\varphi(13)}{6}=\frac{12}{6}$ ta sistemaga ajraladi. Bulardan biri bilan biz yuqoridagi misolda tanishdik ((4) ga qarang). Ikkinchisini aniqlash maqsadida maxraji 13 ga teng bo’lgan surati esa (4) dagi kasrlarning suratidan farq qiluvchi biror kasrni olamiz. Masalan, $\frac{1}{13}$, u holda (4) ni tuzishdagi singari yo’l tutib

$$\frac{1}{13}=0,(076923),\quad \frac{10}{13}=0,(769230),\quad \frac{9}{13}=0,(692307),$$
$$\frac{12}{13}=0,(923076),\quad \frac{3}{13}=0,(230769),\quad \frac{4}{13}=0,(307692)$$

larni hosil qilamiz.

E. Endi b bilan 10 soni ozaro tub bo’lmaganda $\frac{a}{b}$ kasrni o’nlik kasrga aylantirishni qaraymiz. Faraz etaylik, $b=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot b_1$ bo’lsin, bunda $(b_1,10)=1$. α va β sonlaridan eng kattasini n bilan belgilab olamiz. U holda

$$\frac{10^n a}{b}=\frac{2^{n-\alpha}\cdot 5^{n-\beta}\cdot a}{b_1}=\frac{a_1}{b_1}.$$

$\frac{a_1}{b_1}$, $(b,10)=1$ kasrni o’nlik kasrga aylantirib,

$$\frac{10^n a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=K,(q_1q_2\cdots q_m)$$

ni hosil qilamiz. Bundan $\frac{a}{b}$ ni topish uchun uni 10^n ga bo'lamiz. U holda bergulni n ta belgi chap tomonga surish kerak bo`ladi. Buning natijasida $\frac{a_1}{b_1} = k, k_1 k_2 \cdots k_n (q_1 q_2 \cdots q_m)$ dan iborat aralash davriy kasrga ega bo'lamiz.

3. Arifmetik amallar natijasini tekshirish. Faraz etaylik, N_1 sonini N_2 ga qo'shib N soni hosil qilingan bo'lsin:

$$N = N_1 + N_2 \tag{5}$$

U holda $N_1 \equiv r_1,\ N_2 \equiv r_2, N \equiv r(modm)$ deb yozish mumkin. (5) ga asosan

$$r_1 + r_2 \equiv r(modm) \tag{5'}$$

bajarilisni kerak. Shunga o'xshash

$$N = N_1 - N_2 \tag{6}$$

bo'lsa,

$$r_1 - r_2 \equiv r(modm); \tag{6'}$$

agarda

$$N = N_1 \cdot N_2 \tag{7}$$

bo'lsa,

$$r_1 \cdot r_2 \equiv r(modm); \tag{7'}$$

agarda

$$N = N_1 \cdot N_2 + N_3 \tag{8}$$

bo'lsa, ya'ni N ni N_1 ga bo'lsak, N_2 tadan tegib N_3 qoldiq qolsa,

$$r_1 \cdot r_2 + r_3 \equiv r(modm) \tag{8'}$$

bajarilishi kerak. Tushunarliki, $(5') - (8')$ shartlar $(5) - (8)$ lardagi amallarning to'g'ri bajarilgan ekanligini tekshirishning zaruriy shartlari bo'lib, ular yetarli shatlar bo'la olmaydilar.

Amallar natijalarini tekshirish imkoni boricha ishonchli va bir vaqtning o'zida sodda bo'lishi uchun modul sifatida 9 soninni tanlash ma'qul, chunki sonni 9 ga bo'lishdan chiqqan qoldiq shu sonni tashkil etuvchi raqamlar yig'indisini 9 ga bo'lishdan chiqqan qoldiqqa teng. Bu jarayonda berilgan sonning barcha raqamlari ishtirok etadi. Shuning uchun ham ishonchlilik darajasi yuqori va jarayon sodda bo'ladi. Lekin $m = 10$ ni olsak, jarayon yanada soddalashadi, lekin bunday tekshirishni ishonchli deb bo'lmaydi, chunki bu jarayonda berilgan sonning faqat oxirgi raqamigina ishtirok etadi. Agar tekshirishni $m = 11$ moduli bo'yicha bajarsak, ishonchlilik sezilarli darajada oshadi.

334. a sonini m ga bo'lishdan chiqqan qoldiqni toping:

1). $a = 2^{64},\ m = 360;$ 2). $a = 1532^5 - 1, m = 9;$

3). $a = (1271^{56} + 34)^{28}, m = 111;$ 4). $a = 8!\,, m = 11.$

335. Agar $a^x \equiv 2(mod13)$ va $a^{x+1} \equiv 6(mod13)$ bo'lsa, a ni $m = 13$ bo'lishdan chiqqan qoldiqni toping.

336. Eyler teoremasini qo'llab a sonini m ga bo'lishdan chiqqan qoldiqni toping: 1). $a = 174^{249}, m = 13$;

2). $a = 18632^5 - 5, m = 10$;

3). $a = 2^{37\cdot73-1}, m = 37\cdot73$.

337. Quyidagi sonlarning oxirgi ikkita raqamini toping:

1). 203^{20}; 2). 243^{402}; 3). $1812\cdot1941\cdot1965$;

4). $(116 + 17^{17})^{21}$.

338. Isbotlang:

1). $(2^{32} + 1) \vdots 641$;

2). $(222^{555} + 555^{222}) \vdots 7$;

3). $(220^{119^{69}} + 69^{220^{119}} + 119^{69^{220}}) \vdots 102$;

4). $(6^{2n+1} + 5^{n+2}) \vdots 31$.

339. $4^{\varphi(m)-1}$ sonini $m > 1$ toq soniga bo'lishdan chiqqan qoldiqni toping.

340. Indekslardan foydalanib berilgan a sonini $m$ga bo'lishdan chiqqan qoldiqni toping: 1). $a = 10^{10}, m = 67$; 2). $a = 178^{52}, m = 11$; 3). $a = 2017^{2018}$, $m = 11$.

341. Paskalning umumiy bo'linish belgisidan foydalanib, 1)6 ga; 2) 8 ga; 3) 12 ga; 4) 15; 18; 45 ga bo'linish belgisini keltirib chiqaring.

342. 792 ga bo'linadigan $13xy45z$ ko'rinishidagi barcha sonlarni toping.

343. Quyidagi oddiy kasrlarni cheksiz o'nli kasrlarga aylantirmasdan davr uzunligini aniqlang: 1) $\frac{4}{21}$; 2) $\frac{9}{91}$; 3) $\frac{1}{43}$; 4) $\frac{a}{97}$, bunda $(a, 97) = 1$

344. Quyidagi oddiy kasrlarni o'nli kasrlarga aylantirganda hosil bo'ladigan davr uzunligini aniqlang:

1) $\frac{10}{17\cdot23}$; 2) $\frac{1}{53\cdot59}$; 3) $\frac{1}{7\cdot23\cdot31}$; 4) $\frac{1}{11\cdot13\cdot17}$; 5) $\frac{1}{13\cdot37}$.

345. Quyidagi oddiy kasrlarni o'nli kasrlarga aylantirganda hosil bo'ladigan davr uzunligini aniqlang: 1) $\frac{1}{14}$; 2) $\frac{7}{550}$; 3) $\frac{1}{5\cdot23\cdot31}$; 4) $\frac{1}{4\cdot53\cdot73}$; 5) $\frac{1}{10\cdot37}$.

346. Taqqoslamalardan foydalanib quyidagi tengliklarning xato ekanligini ko'rsating: 1). $4237\cdot27925 = 118275855$;

2). $42981{:}\,8264 = 5201$; 3). $1965^2 = 3761225$.

347. Taqqoslamalardan foydalanib, quyidagi tengliklarning to`g'riligini tekshiring:

1). $25041 + 91382 = 116423$; 4). $235463 - 25376 = 210087$.

2). $42932 - 18265 = 24667$;

3). $13547 - 9862 = 3685$;