**Theorem 5.3.** $D$'nin önceden verilmiş kompakt bir küme olduğu (5.26) numaralı sistemi ele alalım. Assumption 5.1 ve 5.2 altında performans çıktısı $y = col(z, x)$ olan (5.26) sisteminin GASP problem aşağıdaki kontrolcü ile çözülmektedir

$$u = -f_a^T(x,t)\hat{\mu} - \rho(x)x$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \Lambda x f_a(x,t) \quad , \quad \Lambda = \Lambda^T > 0 \qquad (5.31)$$

**Proof:**

(5.26) numaralı sistem için aşağıdaki Lyapunov fonksiyon adayını tanımlayalım

$$W(z, x, \tilde{\mu}) = V'(z) + x^2/2 + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\tilde{\mu}/2$$

Burada $\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu$ parametre tahmin hatasıdır.

Matematiksel dönüşümlerle, W Lyapunov fonksiyonunu aşağıdaki gibi dönüştürebiliriz.

Öncelikle eşitsizliklerde kullanacağımız, daha önceden çıkarımını yaptığımız denklem ve eşitsizlikleri yazalım:

$\dot{z} = q(z, x, d)$, $\dot{x} = f(z, x, d) + bf_a^T(x,t)\mu + bu$ — sistem denklemleri

$u = -f_a^T(x,t)\hat{\mu} - \rho(x)x$, $\dot{\hat{\mu}} = \Lambda x f_a(x,t)$, $\Lambda = \Lambda^T > 0$ — kontrol & adaptasyon

$\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu$ — parametre tahmin hatası

$\dot{V}(z) \leq -\Delta(z)\|z\|^2 + \varkappa(x)x^2$ — corollary 2.2'den gelen eşitsizlik

$|f(z, x, d)| \leq m_1(z)\|z\| + m_2(x)\|x\|$, $\forall d \in D$ — büyüme sınırı

$\Delta(z) \geq 1 + m_1^2(z)$ — $\Delta$ seçimi

$\rho(x) \geq [\varkappa(x) + m_2(x) + 5/4]/b$ — $\rho$ seçimi

$W(z, x, \hat{\mu}) = V'(z) + \frac{x^2}{2} + \frac{b}{2}\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\tilde{\mu}$ — Lyapunov adayı

Adım 1: Lyapunov türevini al

$\dot{W} = \dot{V}'(z) + x\dot{x} + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\tilde{\mu}}$ $\quad$ $\tilde{\mu}$'de $\mu$ sabit $\rightarrow \dot{\tilde{\mu}} = \dot{\hat{\mu}}$

(5.29)'daki corollary 2.2 denklemini kullan ve $\dot{x}$ yerine sistem dinamiği koy

$$\dot{W} = \dot{V}(z) + x\dot{x} + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\tilde{\mu}} \leq -\Delta(z)\|z\|^2 + \varkappa(x)x^2 + x\underbrace{[f(z,x,d) + bf_a^T(x,t)\mu + bu]}_{} + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}}$$

$\dot{x}$ denklemi: $f + bf_a^T\mu + bu = f + bf_a^T\mu + b(-f_a^T(x,t)\hat{\mu} - \rho(x)x) = (f - b\rho x) + b(f_a^T\mu - f_a^T\hat{\mu})$

Adım 2:

$$\dot{W} \le -\Delta(z)\|z\|^2 + \varkappa(x)x^2 + x[f(z,x,d) - bp(x)x] + bx[f_a^T(x,t)\mu - f_a^T(x,t)\hat{\mu}] + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}}$$

$xf(z,x,d)$ değeri sınırlandırılmalı

$$xf(z,x,d) \le |x|f(z,x,d) \quad ; \quad |f(z,x,d)| \le m_1(z)\|z\| + m_2(x)|x| \rightarrow$$

$$\rightarrow |x|f(z,x,d) \le \underbrace{|x|m_1(z)\|z\|}_{\text{küresellleştirilmeli}} + m_2(x)x^2$$

Young eşitsizliği $\left(2ab \le a^2 + b^2,\ ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)$ kullanarak

$a = m_1(z)\|z\|$, $b = |x|$ yaparak şöyle yazalım

$$|x|m_1(z)\|z\| \le (m_1(z)\|z\|)^2/2 + x^2/2$$

$$|x|m_1(z)\|z\| \le \underbrace{\frac{m_1^2(z)\|z\|^2}{2} + \frac{x^2}{2}}$$

Bunu Young eşitsizliğinin genellenmiş modelini kullanarak istediğimiz hale getirelim

Young eşitsizliği genel hali $\quad ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2 \quad (\varepsilon > 0)$

$\varepsilon = 1$ seçelim: $\quad ab \le a^2 + \frac{1}{4}b^2$

$$\underbrace{|x|m_1(z)\|z\| \le m_1^2(z)\|z\|^2 + \frac{x^2}{4}}_{\text{Bunu esas denklemde yerine koyalım}}$$

$$|x|f(z,x,d) \le m_1^2(z)\|z\|^2 + \frac{1}{4}x^2 + m_2(x)x^2$$

$$|x|f(z,x,d) \le m_1^2(z)\|z\|^2 + \left(\frac{1}{4} + m_2(x)\right)x^2$$

$$\dot{W} \le -\Delta(z)\|z\|^2 + m_1^2(z)\|z\|^2 + x^2\left(\frac{1}{4} + m_2(x) + \varkappa(x) - bp(x)\right) + \underbrace{bx[f_a^T\mu - f_a^T\hat{\mu}] + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}}}$$

Adım 3. Adaptif terimler

$$b x[\underbrace{f_a^T\mu - f_a^T\hat{\mu}}] + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}}$$

$\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu$

$$-(f_a^T\hat{\mu} - f_a^T\mu) = -f_a^T\tilde{\mu} \rightarrow + bx[-f_a^T\tilde{\mu}] + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}} = -bxf_a^T\tilde{\mu} + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}} =$$

$$= +b\tilde{\mu}^T(-xf_a) + b\tilde{\mu}^T\Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}} = \underbrace{b\tilde{\mu}^T(-xf_a + \Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}})}_{\text{ana denkleme yazalım}}$$

$$\dot{W} \le -\Delta(z)\|z\|^2 + m_1^2(z)\|z\|^2 + x^2\left(\varkappa(x) + \frac{1}{4} + m_2(x) - bp(x)\right) + b\tilde{\mu}^T(-xf_a + \Lambda^{-1}\dot{\hat{\mu}})$$

Adım 4: Basitleşme ve iptaller

$$\dot{W} \leq -\Delta(z)\|z\|^2 + m_1^2(z)\|z\|^2 + x^2\left(\varkappa(x) + \frac{1}{4} + m_2(x) - b\rho(x)\right) + b\tilde{\mu}^T\left(-xf_a + \Omega^{-1}\dot{\hat{\mu}}\right)$$

Bu kısmı adaptasyon law kullanarak sıfırlayacağız

$$\dot{\hat{\mu}} = \Omega x f_a(x,t)$$

$$\Omega^{-1}\dot{\hat{\mu}} = \Omega^{-1}\Omega x f_a(x,t) = x f_a(x,t)$$

Bu zaman denklemimiz şöyle olur:

$$-xf_a + \Omega^{-1}\dot{\hat{\mu}} = -xf_a + xf_a = 0$$

$$\dot{W} \leq -\Delta(z)\|z\|^2 + m_1^2(z)\|z\|^2 + x^2\underbrace{\left(\varkappa(x) + \frac{1}{4} + m_2(x) - b\rho(x)\right)}$$

$\rho(x)$ denklemini (eşitsizliğini kullanarak) aşağıdaki hale getirebiliriz

$$\varkappa(x) + \frac{1}{4} + m_2(x) - b\rho(x) \leq \varkappa(x) + \frac{1}{4} + m_2(x) - \left(\varkappa(x) + m_2(x) + \frac{5}{4}\right) = -1$$

$$x^2\left(\varkappa(x) + \frac{1}{4} + m_2(x) - b\rho(x)\right) \leq -x^2$$

$$\dot{W} \leq \underbrace{-\Delta(z)\|z\|^2 + m_1(z)\|z\|^2} - x^2$$

Yaptığımız $\Delta(z)$ seçimini kullanalım

$$-\Delta(z)\|z\|^2 + m_1^2(z)\|z\|^2 = -\left(\Delta(z) - m_1^2(z)\right)\|z\|^2$$

$$\Delta(z) \geq 1 + m_1^2(z) \implies \Delta(z) - m_1^2(z) \geq 1$$

$$\hookrightarrow -\left(\Delta(z) - m_1^2(z)\right)\|z\|^2 \leq -\|z\|^2$$

Tüm bu eşitsizliklerin sonucu olarak Lyapunov türevini aşağıdaki hale getirebildik

$$\dot{W} \leq -\|z\|^2 - x^2$$

$$\dot{W} \leq 0$$