ДЗ 2

Биктимиров Данила, группа 204

1. Рассмотрим последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$. Посмотрим на $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n(n+1)} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$ при $n \to \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, где $a_k = x_{k+1} - x_k$ (x_0 полагаем равным 0) сходится, и его сумма равна какому-то числу c. Но наш ряд это в точности $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$ (если вспомнить, что сумма логарифмов - это логарифм произведения: $-(\ln(\frac{2}{1}) + \ln(\frac{3}{2}) + ... + \ln(\frac{n}{n-1})) = -\ln(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot ... \cdot \frac{n}{n-1}) = -\ln(n)$).

2. (a)

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\alpha}$

   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\frac{\alpha}{2}}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2^3} \cdot \frac{1}{n^2} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   Бахнем признак Гаусса с параметрами $\lambda = 1, \mu = \frac{\alpha}{2}, \gamma = \frac{\alpha(\alpha+1)}{8} + \overline{\overline{o}}(1)$
   Тогда мгновенно получим, что все упирается в знание $\frac{\alpha}{2}$. Если $\frac{\alpha}{2} > 1 (\alpha > 2)$, то ряд сходится. Иначе он расходится.

   (c) Разложим $\ln\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{2n^{4\alpha}} + \frac{1}{6n^{6\alpha}}$. Тогда $\ln\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) < \frac{1}{n^{2\alpha}}$
   Теперь слвела $\ln\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = -\ln\left(\frac{n^{2\alpha}}{1+n^{2\alpha}}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{1+n^{2\alpha}}\right) > \frac{1}{n^{2\alpha+1}}$
   Получаем

   $$0 < \frac{1}{n^{\alpha}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)} < \frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n^{2\alpha}+1}} =$$

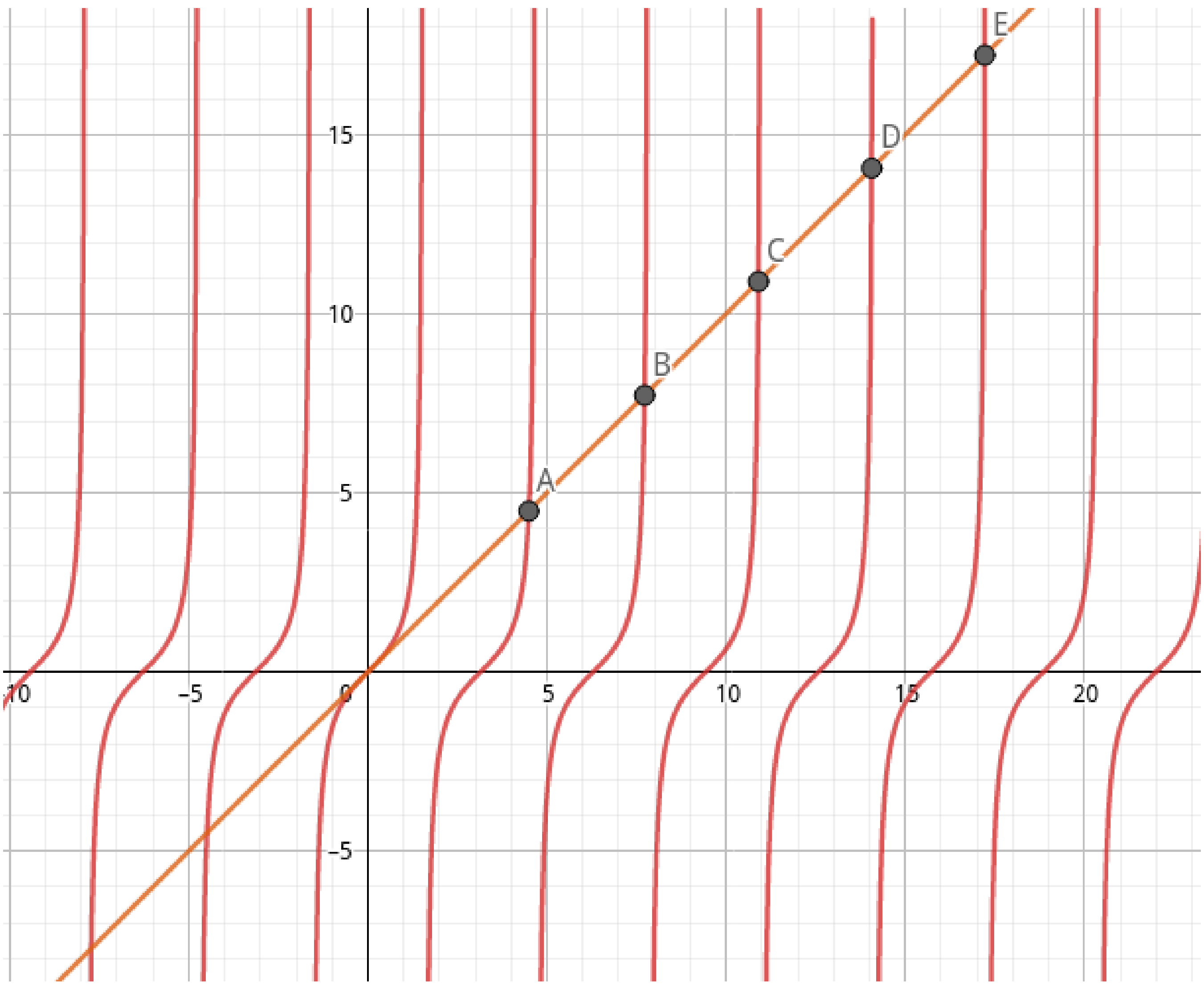
   $$= \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{n^{2\alpha}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n^{2\alpha}}} + \frac{1}{\sqrt{n^{2\alpha}+1}}} < \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}(n^{2\alpha}+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n^{2\alpha}+1}}} = \frac{1}{2n^{2\alpha}\sqrt{n^{2\alpha}+1}}$$

   И при $n \to \infty$ $\frac{1}{2n^{2\alpha}\sqrt{n^{2\alpha}+1}} = \frac{1}{2n^{3\alpha}}$. И тогда воспользовавшись гармоническим рядом получим:

   $$\text{При } a \leq \frac{1}{3} \text{ ряд расходится}$$

   $$\text{При } a > \frac{1}{3} \text{ ряд сходятся}$$

   (d) Дано $\tan x = x$. Нарисуем график(он на след. странице): То есть $n\pi < x_n < (n+1)\pi$
   Тогда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{\epsilon}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^2}$
   Но и левый и правый ряды очевидно сходятся, таким образом сходится и наш.



A
B
C
D
E
15
10
5
-5
-10
0
20