ДЗ 4

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a) Заметим, что $A_1 + \dots + A_n = a_1 + \dots + a_{p_{n+1}-1}$. Тогда $\lim_{n\to\infty}(A_1 + \dots + A_n) =$
$= \lim_{n\to\infty}\left(a_1 + \dots + a_{p_{n+1}-1}\right)$. И значит если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$

   (b) Возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ – он расходится. И возьмем числа $p_n = 2n - 1$. Тогда
$A_n = 0 = (-1+1)$, но $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ - сходится.

   (c) Возьмем первые n членов ряда a_n

$$-|A_{k+1}| + A_n + \dots + A_k \le a_1 + \dots + a_n \le A_1 + \dots + A_k + |A_{k+1}|$$

где $p_{k+1} - 1 \le n \le p_{k+2} - 1$
Так как $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$
И пусть $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = S$.
Тогда берем $\frac{\varepsilon}{2}$ и N, что $\forall n \ge N \;\; A_n < \frac{\varepsilon}{2}$
Тогда $\forall n > pN + 1 - 1$

$$A_1 + \dots + A_k - |A_k| \le a_1 + \dots + a_n \le A_1 + \dots + A_k + |A_k|$$

$$A_1 + \dots + A_k - \frac{\varepsilon}{2} \le a_1 + \dots + a_n \le A_1 + \dots + A_k + \frac{\varepsilon}{2}$$

Устремляя к бесконечности

$$\lim_{n\to\infty} |S - (a_1 + \dots + a_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

И значит $\lim_{n\to\infty}(a_1 + \dots + a_n) = S$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lceil \sqrt{n} \rceil}}{n^p}$$

При $p \le 0$ общий член не стремится к 0, значит смотрим $p > 0$

При $p > 1$ – абсолютная сходимость. При $0 < p \le 1$ абсолютной сходимости нет. Разобьем на суммы, где все члены одного знака:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n, \text{ где } A_n = \frac{1}{(n^2+1)^p} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{2p}}$$

$$\frac{2n+1}{(n+1)^{2p}} \le A_n \le \frac{2n+1}{(n^2+1)^p}$$

При $p \le \frac{1}{2}$ ряд расходится, ведь будет "лучше"гармонического.

3. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[2020]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[2020]{n}}\cdot\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[2020]{n}}+o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2020}}}\right)$$

Ну а это сходится по признаку Лейбница. А абсолютно очевидно расходится.

(b)

$$\sum_{n+1}^{\infty}\sin\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n}{\sqrt{n}}-\frac{\sin n}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$\frac{\sin n}{n}$ – сходится к $\frac{\pi-1}{2}$

Тогда надо просто понять что с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n}{\sqrt{n}}$

$$(-1)^{n+1}\sin n=\sin(\pi(n+1)+n)=\sin((\pi+1)n+\pi)=-\sin((\pi+1)n)$$

– мы доказывали что это ограничено. Тогда по Дирихле ряд сходится. А абсолютно это как

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sin n|\cdot|\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)|=\sum_{n=1}^{\infty}|\sin n|\cdot|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n}\right)|=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|\sin n|\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$$

Первое расходится, а второе сходится, значит в итоге абсолютно расходится.

(c)

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)\cdot\left(\frac{\sin n}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n\cdot\sqrt[3]{n}}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}\right)\right)\text{ – это абсолютно сходится}$$