ДЗ 1

Биктимиров Данила, группа 204

1. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kx$

   Пусть $z = q(\cos x + i \sin x)$

   Зная z, найдем z^k, но он в свою очередь равен $z^k = q^k(\cos kx + i \sin kx)$, а значит $q^k \cos kx = Re(z^k)$

$$Re(\sum_{\infty}^{k=0} z^k) = \sum_{\infty}^{k=0} q^k \cos kx$$

$$\sum_{\infty}^{k=0} z^k = \frac{1}{1-z}$$

   Тогда получаем ответ $Re(\frac{1}{1-q(\cos x + i \sin x)})$

2. (a) Заметим, что $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходятся, тогда сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ и тогда из признака сранения сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$

   (b) Воспользуемся первым пунктом и подставим вместе $b_n = \frac{1}{n}$, тогда получаем что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ сходится

3. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. $\forall p \in \mathbf{N} \lim_{n\to\infty} \sum_{k+n}^{n+p} a_k = 0$.

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n} = 0$$

   ТО есть для гармонического ряда условие выполняется, но он как мы занем расходится. То есть ответ нет.

4. Пусть ϵ-произвольное положительное число, а p-произвольное натуральное число, тогда

$$|\frac{cos(2^{n+1})}{(n+1)^2} + \frac{cos(2^{n+2})}{(n+2)^2} + ... + \frac{cos(2^{n+p})}{(n+p)^2}| \leq |\frac{cos(2^{n+1})}{(n+1)^2}| + |\frac{cos(2^{n+2})}{(n+2)^2}| + ... + |\frac{cos(2^{n+p})}{(n+p)^2}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

   откуда $n > \frac{1}{\varepsilon}, N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}]$, значит ряд сходится

5. (a)

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$

Применим радикальный признак Коши:

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}}=\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=\varlimsup_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}=e^{-2}<1\Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

(c) Пусть

$$c_1=\sqrt{2},\quad c_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad c_{n+1}=\sqrt{2+c_n}$$

и $d_n=\frac{c_n}{2}$, тогда $d_1=\cos\frac{\pi}{4}$ и $d_{n+1}=\sqrt{\frac{1+d_n}{2}}$, также заметим, что $c_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, тогда

$$\sqrt{2}=2\sin\frac{\pi}{4},\quad \sqrt{2-\sqrt{2}}=2\sin\frac{\pi}{8},\qquad \sqrt{2-c_n}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

т.е. мы хотим узнать, сходится ли $\sum_{n\geq 0}2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$, а она сходится так как $0<\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}<\frac{\pi}{2^{n+2}}$