ДЗ 3

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a) Бахнем индикатор $I_i = \begin{cases} 1, & \text{если i-ый ящик пуст} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, тогда получим

$$E\xi = E\sum_{i}^{m} = \sum_{i}^{m} EI_i$$

.

Мат ожидание индикатора это его вероятность. Ну а она $EI_i = \frac{C_{m+k-2}^{m-2}}{C_{m+k-1}^{m-1}} = \frac{m-1}{m+k-1}$. А значит что

$$E\xi = m \cdot \frac{m-1}{m+k-1},\ D\xi = E\xi^2 - E^2\xi$$

Считаем

$$E\xi^2 = E(\sum_{i}^{m} I_i)^2 = E\left(\sum_{i}^{m} I_i^2 + 2\sum_{0\leq i\leq j\leq m} I_iI_j\right) = \sum_{i}^{m} EI_i^2 + 2\sum_{0\leq i\leq j\leq m} EI_iI_j$$

$$EI_i^2 = Ei_i = \frac{m-1}{m+k-1}$$

как мы посчитали ранее.

$$EI_iI_j = \frac{C_{m+k-3}^{m-3}}{C_{m+k-1}^{m-1}} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m+k-1)(m+k-2)}$$

И отсюда

$$E\xi^2 = m\left(\frac{m-1}{m+k-1}\right) + \frac{m(m-1)}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{(m+k-1)(m+k-2)}$$

И в итоге

$$D\xi = \frac{m(m-1)}{m+k-1} + \frac{m(m-1)^2(m-2)}{(m+k-1)(m+k-2)} - \left(\frac{m(m-1)}{m+k-1}\right)^2 = \frac{m(m-1)(k-1)k}{(m+k-1)^2(m+k-2)}$$

(b) Делаем все то же самое, но будут другие вероятности:

$$EI_i = \left(\frac{m-1}{m}\right)^k \Rightarrow E\xi = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^k$$

А с дисперсией:

$$EI_iI_j = \left(\frac{m-2}{m}\right)^k, \text{откуда: } D\xi = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^k + \frac{m(m-1)}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{m-2}{m}\right)^k - m^2 \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{(m-1)^k m^{k-1} + (m-1)(m-2)^k m^{k-1} - (m-1)^{2k}}{m^{2(k-1)}}$$

2.

$$E\xi = \sum_i^n i \cdot P(\xi = i)$$