ДЗ 3

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(p^{\frac{1}{n}}-\frac{q^{\frac{1}{n}}+r^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$

$$p^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln p}=1+\frac{\ln p}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Тогда:

$$\left(p^{\frac{1}{n}}-\frac{q^{\frac{1}{n}}+r^{\frac{1}{n}}}{2}\right)=\left(1+\frac{\ln p}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(1+\frac{\ln\sqrt{qr}}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{\ln\frac{p}{\sqrt{qr}}}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

И тогда, если $\ln\frac{p}{\sqrt{qr}}\neq 0$ то ряд расходится. Иначе $p=\sqrt{qr}$. Тогда:

$$-\frac{q^{\frac{1}{n}}-2\sqrt{qr}^{\frac{1}{n}}+r^{\frac{1}{n}}}{2}=-\frac{\left(q^{\frac{1}{n}}-r^{\frac{1}{n}}\right)^2}{2}$$

И снова разложим:

$$-\frac{\left(\left(1+\frac{\ln q}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(1+\frac{\ln r}{n}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^2}{2}=-\frac{(\ln q-\ln r)^2}{8n^2}$$

Ну а это очевидно сходится, как $\frac{1}{n^2}$.

(b)

2. Смотрим на первые $n(p+q)$ членов:

$$\sum_{i=1}^{np}\frac{1}{2i-1}-\sum_{j=1}^{nq}\frac{1}{2j}=\left(\sum_{i=1}^{2np}\frac{1}{i}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{np}\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{nq}\frac{1}{i}=$$

$$=\ln(2np)+C+\overline{o}(1)-\frac{1}{2}\ln(np)-\frac{1}{2}C-\overline{o}(1)-\frac{1}{2}\ln(nq)-\frac{1}{2}C-\overline{o}(1)=$$

$$=\ln\left(\frac{2np}{n\sqrt{pq}}\right)+\overline{o}(1)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\overline{o}(1)$$

Осталось разобрались со случаем где мы берем не первые $n(p+q)$ членов.

Ограничим ее ближайшими $n(p+q)$ суммами. И все внутри будет колыхаться на $\overline{\overline{o}}(1)$, ведь к этому стремится разность при $n\to\infty$. И значит все стремится к $\ln 2+\ln\frac{p}{q}$.

3. Ряд

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{6n-5}+\frac{1}{6n-3}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{2n}\right)+...$$

Расходится, поскольку

$$\frac{1}{6n-5}+\left(\frac{1}{6n-3}+\frac{1}{6n-1}\right)-\frac{1}{2n}>\frac{1}{6n-5}+\frac{2}{6n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=\frac{1}{6n-5}+\left(\frac{1}{1.5n-0.75}-\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{6n-5}\sim\frac{1}{6}n^{-1}.$$

4. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[100]{n}}\cdot\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[100]{n}}+o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right)$$

Ну а это сходится по признаку Лейбница. А абсолютно очевидно расходится.

(b)

(c)