

ДЗ 4

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a)

$$\begin{aligned}\int \sin^n(x) dx &= |u(x) = \sin^{n-1} x \quad v(x) = -\cos(x)| = -\frac{\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \int \frac{n-1}{n} \sin^{n-2}(x) dx = \\ &= -\frac{\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx &= \left. -\frac{\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx = \\ &= \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx, \text{ при } n \geq 2\end{aligned}$$

Дальше по индукции

$$\begin{aligned}n = 1 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0 = 1 = \frac{0!!}{1!!} \\ n = 2 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx &= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\sin \pi}{4} + \frac{\sin 0}{4} = \frac{\pi}{4} = \frac{0!!}{1!!}\end{aligned}$$

Пусть верно для $k = 2n - 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

Пусть верно для $k = 2n - 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2n!!}$$

(b) При $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ верно $0 \leq \sin x \leq 1$ и значит $\sin^{2n+2}(x) \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x)$.

Отсюда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x) dx = \frac{2n+1}{2n+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx$$

Получим

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx} \leq 1$$

Ну и по теореме о 2 милиционерах получим желаемое.

(c)

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx} = \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} \rightarrow 1$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!, \quad (2n)!! = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

2. (a)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \text{абсолютно очевидно расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+1)} - \frac{1}{(4n+2)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n^2 + 20n + 6 - 16n^2 - 4n}{4n(4n+1)(4n+2)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n+6}{o(n^4)} - \text{сходится}$$

(b)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{сходится по Лейбницу}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{расходится}} \Rightarrow \text{ряд сходится условно и абсолютно}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} \cdot \frac{(-1)^{n+1-k-1}}{(n+1-k)^{\beta}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha}(n+1-k)^{\beta}}$$

$$\forall k \in [1; n] : 0 < k^{\alpha}(n+1-k)^{\beta} \leq n^{\alpha}n^{\beta} = n^{\alpha+\beta}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha}(n+1-k)^{\beta}} \geq \frac{n}{n^{\alpha+\beta}} \cdot n^{1-\alpha-\beta}$$

Очевидно, общий член не стремится к 0, значит, ряд расходится.