ДЗ 6

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

$$E = [0; 1-\varepsilon] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{0}{1+0} = 0$$

Отсюда

$$f_n \to f$$

где $f = 0$

$$\forall x \in E,\ n \in N:\ 0 \leq f_n(x) \leq f_n(1-\varepsilon)$$

Ну тогда:

$$\forall \varepsilon' > 0\, \exists N:\ \forall n \geq N \forall x \in E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - 0| < |f_n(1-\varepsilon) - 0| < \varepsilon'$$

Откуда получаем равномерную сходимость

(b)

$$1 - \varepsilon \leq x < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$1 < x \leq 1 + \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{\infty}+1} = 1$$

Поточечная сходимость есть

$$f_n \to_E f = \begin{cases} 0, 1-\varepsilon \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, x = 1 \\ 1, 1 < x \leq 1+\varepsilon \end{cases}$$

А равномерной сходимости нет.

$$\exists \varepsilon' > 0 : \forall N \in \mathbf{N} : \exists n \geq \mathbf{N} : \exists x \in E$$

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon'$$

Берем

$$\varepsilon' = \frac{1}{3}, n = N, x = \max\left(1-\varepsilon,\ \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)$$

Тогда

$$\forall N \in \mathbf{N} : |f_N(x) - f(x)| \geq \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} - 0 = \frac{1}{3} \geq \varepsilon'$$

(c)

$$1+\varepsilon \le x \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \quad f_n \to_E f = 1$$

$$\forall x \in E, n \in \mathbf{N} : f_n(1+\varepsilon) \le f_n(x) \le 1$$

Ну тогда аналогично первому пункту получим равномерную сходимость.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \le \frac{x^2}{n\ln^2 n} \le \frac{A^2}{n\ln^2 n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A^2}{n\ln^2 n} \sim A^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} \sim \int_2^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} dn = \frac{1}{\ln 2}$$

– сходится $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $f_n \to_E f$

3.

$$\forall x \in \mathbf{R} : |\operatorname{arctg}(x)| \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}\right| \le \frac{\pi}{2\sqrt{n^3}}$$

Но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{n^3}}$ – сходится $\Rightarrow$ по Вейерштрассу $f_n \to_E f$

4.

5.

6.

$$\forall x \in E \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{x\sqrt{n}}}$$

– сходится, ведь в знаменателе экспонента.

То $f_n \to_E f$

Отрицание Коши: $\varepsilon' = e^{-\sqrt{2}}, n = N, p = N, x = \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$|f_{n+p} - f_n| = f_{2n} - f_n = \sum_{k=1}^{2n} x^2 e^{-x\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} x^2 e^{-x\sqrt{k}} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} x^2 e^{-x\sqrt{k}} = \frac{1}{(\sqrt{n})^2}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-\sqrt{\frac{k}{n}}}\right) \ge \frac{1}{n}\cdot n \cdot e^{\sqrt{\frac{2n}{n}}} = e^{-\sqrt{2}} = \varepsilon'$$

Это верно $\forall N \in \mathbf{N} \Rightarrow$ равномерной сходимости нет.