ДЗ 4

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a)

$$\int \sin^n(x)dx = \left|u(x) = \sin^{n-1} x \;\; v(x) = -\cos(x)\right| = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \int \frac{n-1}{n}\sin^{n-2}(x)dx =$$

$$= -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)dx =$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)dx, \text{ при } n \geq 2$$

Дальше по индукции

$$n = 1 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \cos(\frac{\pi}{2}) - \cos 0 = 1 = \frac{0!!}{1!!}$$

$$n = 2 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\sin\pi}{4} + \frac{\sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{0!!}{1!!}$$

Пусть верно для $k = 2n - 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

Пусть верно для $k = 2n - 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2n!!}$$

(b) При $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ верно $0 \leq \sin x \leq 1$ и значит $\sin^{2n+2}(x) \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x)$.
Отсюда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)dx = \frac{2n+1}{2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx$$

Получим

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx} \leq 1$$

Ну и по теореме о 2 милиционерах получим желаемое.

(c)

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx} = \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} \to 1$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$(2n)!! = 2^n\cdot n!,\quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!(2n!!)}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n-1}\cdot(n!)^3\cdot(n-1)!}{(2n-1)!(2n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n-1}\cdot C^4 n\sqrt{n^2-n}\left(\frac{n}{e}\right)^{3n}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{C^2\sqrt{4n^2-1}\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{2n-1}\cdot\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n-1}\cdot C^4}{C^2\cdot 2\cdot 2^{2n-1}\cdot 2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{C^2}{4} = \frac{C^2}{4}$$

И

$$\frac{C^2}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

Победа!

2. (a)

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ - абсолютно очевидно расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(4n+1)} - \frac{1}{(4n+2)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16n^2+20n+6-16n^2-4n}{4n(4n+1)(4n+2)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16n+6}{o(n^4)} \text{ - сходится}$$

(b)

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{сходится по Лейбницу}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{расходится}} \Rightarrow \text{ ряд сходится условно и абсолютно}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} \cdot \frac{(-1)^{n+1-k-1}}{(n+1-k)^{\beta}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}(n+1-k)^{\beta}}$$

$$\forall k \in [1; n] : 0 < k^{\alpha}(n+1-k)^{\beta} \leq n^{\alpha} n^{\beta} = n^{\alpha+\beta}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}(n+1-k)^{\beta}} \geq \frac{n}{n^{\alpha+\beta}} \cdot n^{1-\alpha-\beta}$$

Очевидно, общий член не стремится к 0, значит, ряд расходится.