ДЗ 5

Биктимиров Данила, группа 204

1. Рассмотрим язык без равенства с одним двуместным предикатом P. Положим $\phi \leftrightharpoons (\forall y)P(x, y)$ и $\psi \leftrightharpoons (\forall y)P(y, x)$. Эти формулы не логически эквивалентны. Рассмотрим интерпретацию на области $D = 1, 2$, полагая $P(a, b) \leftrightharpoons (a \leq b)$. Тогда при $x = 1$ формула ϕ окажется истинной, а ψ ложной.

   С другой стороны, если добавить кванторы всеобщности по x , то получатся логически эквивалентные формулы $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ и $(\forall x)(\forall y)P(y, x)$. Это очевидно и из семантических соображений, и из того факта, что одноимённые кванторы можно переставлять, а связанные переменные переименовывать.

2. (a) Является. Пусть верна посылка импликации (в некоторой интерпретации, разумеется). Тогда существуют x_0, y_0 из предметной области, которые делают формулу $A(x, y, z)$ истинной при всех z. Тогда для любого z их же далее и берём в заключении импликации: $y = y_0$, $x = x_0$.

   (b) Является. Выведем истинность заключения из истинности посылки. Принимаем посылку. Пусть x произвольно. Доказываем импликацию $A(x)\&B(x) \to C(x)$. Приняли $A(x)$ и $B(x)$. Тогда существуют "иксы для которых $A(x)$, и для которых $B(x)$. Значит, $(Ex)A(x)$ и $(Ex)B(x)$ обе верны. Из них по modus ponens верно, что $C(x)$ для всех x. В частности, $C(x)$ верно, ч.т.д.

   (c) Является. Докажем это. Пусть посылка импликации истинна. Тогда при некотором $w = w_0$ мы имеем $(A(w) \to B(w)) \to C(w)$. Истинность этой импликации означает истинность заключения или ложность посылки. В первом случае $C(w)$ истинно. Значит, истинно $(Ez)C(z)$. Это делает истинной импликацию в заключении. Теперь пусть ложна посылка первой из импликаций. Тогда $A(w)$ истинно, $B(w)$ ложно. Тем самым, истинно $(Ex)A(x)$ и ложно то, что $B(y)$ верно для всех y. Тогда у импликации из заключения оказывается ложна посылка, то есть вся эта импликация истинна.

   (d) Не является. Построим контрпример. Возьмём множество натуральных чисел N в качестве предметной области, и проинтерпретируем $A(x, y, z)$ как $x = 1$ или $z = 1$. От y это свойство не зависит. Тогда существуют $x = y = 1$, что $A(x, y, z)$ верно при любом z. Также существуют $y = z = 1$, что $A(x, y, z)$ верно при любом x. Однако не для любых z, x будет верно то, что находится после кванторов в заключении импликации: взяв $z = x = 2$, мы не найдём такого y, для которого $A(x, y, z)$.

   (e) Не является. Рассмотрим в 3-мерном пространстве три взаимно перпендикулярные прямые, ни одна из которых не проходит через точку вида (a, a, a). Например: $x = 1$,$y = 2$,z любое; $y = 1$,$z = 2$,x любое; $z = 1$,$x = 2$,y любое. Предикат $A(x, y, z)$ будет означать, что точка (x, y, z) принадлежит хотя бы одной из этих прямых. Посылка истинна по построению, а заключение ложно, так как точек с одинаковыми координатами мы не брали.

Можно и на конечном множестве $\{1, 2\}$: полагаем $A(x, y, z)$ истинным $\Leftrightarrow$ не все три координаты равны. Тогда всё также выполнено по построению.

(f) Является. Если $A(x, y)$ верно не всегда, то заключение импликации ложно. Пусть $A(x, y)$ верно всегда. Тогда посылка импликации имеет вид $1 \to 0$, то есть она ложна, и всё вместе истинно.

3. Для начала покажем, что формула не общезначима. Рассмотрим N в качестве предметной области, и проинтерпретируем $P(x, y)$ как $x \geq y$. Посылка импликации будет истинна, так как $x \geq x$ всегда верно, и из $x \geq z$ при любом y верно $x \geq y$ или $y \geq z$. В противном случае было бы $x < y < z$, что давало бы противоречие.

   Заключение импликации ложно, так как не существует натурального u со свойством $u \geq v$ для всех v. Достаточно положить $v = u + 1$.

   Докажем теперь, что на конечной предметной области формула будет истинной. Пусть Q – отрицание предиката P. Тогда рефлексивность отношения P даёт антирефлексивность Q, а из другой части условия в посылке импликации мы получаем по контрапозиции и закону де Моргана, что $Q(x, y) \& Q(y, z)$ влечёт $Q(x, z)$, то есть отношение Q транзитивно. Тогда это строгий частичный порядок, и на конечном множестве для него есть максимальный элемент u. Его нельзя "увеличить то есть $Q(u, v)$ всегда будет ложно, и $P(u, v)$ при любом v истинно.

4.

5.