

ДЗ 3

Биктимиров Данила, группа 204

$$1. \quad (a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(p^{\frac{1}{n}} - \frac{q^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} \right)$$

$$p^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln p} = 1 + \frac{\ln p}{n} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Тогда:

$$\left(p^{\frac{1}{n}} - \frac{q^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} \right) = \left(1 + \frac{\ln p}{n} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \left(1 + \frac{\ln \sqrt{qr}}{n} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{\ln \frac{p}{\sqrt{qr}}}{n} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

И тогда, если $\ln \frac{p}{\sqrt{qr}} \neq 0$ то ряд расходится. Иначе $p = \sqrt{qr}$. Тогда:

$$-\frac{q^{\frac{1}{n}} - 2\sqrt{qr}^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}}{2} = -\frac{\left(q^{\frac{1}{n}} - r^{\frac{1}{n}} \right)^2}{2}$$

И снова разложим:

$$-\frac{\left(\left(1 + \frac{\ln q}{n} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \left(1 + \frac{\ln r}{n} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right)^2}{2} = -\frac{(\ln q - \ln r)^2}{8n^2}$$

Ну а это очевидно сходится, как $\frac{1}{n^2}$.

(b)

2. Смотрим на первые $n(p+q)$ членов:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{np} \frac{1}{2i-1} - \sum_{j=1}^{nq} \frac{1}{2j} &= \left(\sum_{i=1}^{2np} \frac{1}{i} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{np} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nq} \frac{1}{i} = \\ &= \ln(2np) + C + \bar{o}(1) - \frac{1}{2} \ln(np) - \frac{1}{2} C - \bar{o}(1) - \frac{1}{2} \ln(nq) - \frac{1}{2} C - \bar{o}(1) = \\ &= \ln \left(\frac{2np}{n\sqrt{pq}} \right) + \bar{o}(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \bar{o}(1) \end{aligned}$$

Осталось разобраться со случаем где мы берем не первые $n(p+q)$ членов.

Ограничим ее ближайшими $n(p+q)$ суммами. И все внутри будет колыхаться на $\bar{o}(1)$, ведь к этому стремится разность при $n \rightarrow \infty$. И значит все стремится к $\ln 2 + \ln \frac{p}{q}$.

3.

4.