ДЗ 1

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a) Непустое A является множеством значений всюду определённой вычислимой функции f. Перебирая все пары вида (m, n), рассматриваем число $x = f(m)$ и вычисляем при помощи алгоритма значение $\cos x$ с n знаками после запятой. Все числа z, встречающиеся в записи дробной части косинуса, подаём на печать. В итоге будет напечатано множество из условия, то есть оно перечислимо.

   (b) Очевидно, что $z = 1$ подходит. Для остальных z находим каноническое разложение. Вычисляем НОД показателей степеней. Его делители проверяем на предмет принадлежности B. Если хотя бы один принадлежит, то z принадлежит исследуемому множеству, что даёт алгоритм.

2. Мы знаем что существует какое-то неразрешимое множество $A \in \mathbf{N}$. Возьмем его и в качестве B возьмем $\mathbf{N}$, тогда все условия раотают, ответ существуют.

3. Заметим, что тогда $A \cup B$ перечислимо и C перечислимо. Тогда перечислимо и $C \cap B$. Тогда перечислимо A и $\overline{A}$, значит A разрешимо.

4. Тогда $\overline{A \cup B}$ тоже разрешимо, а это $A \cap B$. B так как конечно, то разрешимо. Тогда мы можем взять неразрешимое множество A и конечное число элементов B, что $\forall x \in B : x \notin A$. Тогда все будет удовлетворять условию так как пустое множество разрешимое множество.

5. Точка (x, y) принадлежит графику функции $f \Leftrightarrow y = f(x)$, а такое условие проверяется при помощи алгоритма ввиду вычислимости f (с учётом того, что она всюду определена).

6. Пусть $f(x) = 1$ на $A \in \mathbf{N}$, $f(x) = 69$ на $\overline{A}$. Для $g(x)$ наоборот. Тогда $h(x) = 69$ тождественно, она вычислима. При этом f и g невычислимы, если A неразрешимо.

7. Программа вычисления имеет примерно такой вид: если $x \geq x_0$, то $f := x + k$, где k – число значений $\mathbf{N} \setminus rngf$, x_0 – наибольшее значение начиная с которого строго возрастает без исключений, а для конечного множества остальных значений аргумента, значение функции находится по известной нам таблице значений.

8. Пусть число классов эквивалентности равно k. Тогда существует конечный набор представителей этих классов: $a(1), ..., a(k)$.

   На вход программы подаём два числа m и n. Нужно определить, эквивалентны они или нет. Число m эквивалентно ровно одному из представителей. Запускаем программу перечисления пар из E, и за конечное время дожидаемся появления пары вида $(m, a(i))$. Аналогично поступаем с числом n, дожидаясь появления пары $(n, a(j))$. Теперь мы знаем числа i, j. Если они равны, то m и n эквивалентны. Если не равны, то не эквивалентны. Это даёт разрешающий алгоритм.