ДЗ 8

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,\ a,b>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$$

У первого $R_1=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}}}=\frac{1}{a}$

У второго $R_2=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}}}=\frac{1}{b}$

Соответственно радиус сходимости $R_0=\min\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b}\right)$

Ну и проверим границы:

- $a<b\Rightarrow R_0=\frac{1}{b}$. исследуем в $x=\pm\frac{1}{b}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{nb^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{b^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

  Оба слагаемых сходится, значит и наш ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{nb^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

  $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{nb^n}$ – сходится по Лейбницу, как и второй ряд. То есть, если $a<b$, то область сходимости $[-\frac{1}{b};\frac{1}{b}]$

- $a\ge b\Rightarrow R_0=\frac{1}{a}$. исследуем в $x=\pm\frac{1}{a}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{a^nn^2}$$

  Первый ряд расходится, а второй сходится, значит и наш ряд расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{a^nn^2}$$

  Оба сходятся по Лейбницу. То есть, если $a<b$, то область сходимости $[-\frac{1}{a};\frac{1}{a})$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} x^n$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\frac{1}{n}\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}} = e^0 = 1$$

Смотрим в $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \text{ – сходится по Дирихле}$$

Смотрим в $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \pi n)}{\sqrt{n}} \text{ – точно так же сходится по Дирихле}$$

И значит область сходимости $[-1; 1]$

2. (a)

$$f(x) = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{ по Тейлору } = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} y^{2n}\right) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n+1]{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n+1]{\frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \cdot 2\pi n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot (2n+1)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{\sqrt{\pi n} \cdot (2n+1)}} = 1$$

Тогда $R = 1$. И смотрим $x_0 = \pm 1$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{2n!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot \frac{x_0^{2n+1}}{2n+1}\right| \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}(2n+1)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

сходится абсолютно. Тогда область сходимости $[-1; 1]$

(b)

$$f(x) = x \operatorname{arctg} x - 1n\sqrt{1+x^2} = \int_0^x f'(y) dy$$

$$f'(y) = \operatorname{arctg} y + \frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}} = \operatorname{arctg} y$$

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{arctg} y dy$$

$$\operatorname{arctg} y = \int_0^y \frac{1}{1+z^2}dz = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x) = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}dy = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}$$

(c)

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Посчитаем коэффициенты

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i(-1)^{n-i-1}}{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{i+1}$$

Тогда

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{i+1}\right)x^n$$

3. (a)

(b)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}x^{2k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!}\right)' = \left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}\right)' = (x\cdot e^{x^2})' = e^{x^2}\cdot(1+2^{x^2})$$

4. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n \pm \sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$$

Ну тогда чтоб сходился наш ряд, надо чтоб сходились оба ряда, ну а такое достигается при $R \leq \min(R_1, R_2)$

(b) По теореме о радиусе сходимости, на промежутке сходимости ряд сходится абсолютно. Если взять два степенных ряда, то на общей части их промежутка сходимости, ряды будут абсолютно сходиться