

## ДЗ 5

Биктимиров Данила, группа 204

1. Рассмотрим язык без равенства с одним двуместным предикатом  $P$ . Положим  $\phi \Leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$  и  $\psi \Leftrightarrow (\forall y)P(y, x)$ . Эти формулы не логически эквивалентны. Рассмотрим интерпретацию на области  $D = 1, 2$ , полагая  $P(a, b) \Leftrightarrow (a \leq b)$ . Тогда при  $x = 1$  формула  $\phi$  окажется истинной, а  $\psi$  ложной.

С другой стороны, если добавить кванторы всеобщности по  $x$ , то получатся логически эквивалентные формулы  $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$  и  $(\forall x)(\forall y)P(y, x)$ . Это очевидно и из семантических соображений, и из того факта, что одноимённые кванторы можно переставлять, а связанные переменные переименовывать.

2. (а) Является. Пусть верна посылка импликации (в некоторой интерпретации, разумеется). Тогда существуют  $x_0, y_0$  из предметной области, которые делают формулу  $A(x, y, z)$  истинной при всех  $z$ . Тогда для любого  $z$  их же далее и берём в заключении импликации:  $y = y_0, x = x_0$ .
- (б) Является. Выведем истинность заключения из истинности посылки. Принимаем посылку. Пусть  $x$  произвольно. Доказываем импликацию  $A(x) \vee B(x) \rightarrow C(x)$ . Приняли  $A(x)$  и  $B(x)$ . Тогда существуют "иксы для которых  $A(x)$ , и для которых  $B(x)$ . Значит,  $(\exists x)A(x)$  и  $(\exists x)B(x)$  обе верны. Из них по *modus ponens* верно, что  $C(x)$  для всех  $x$ . В частности,  $C(x)$  верно, ч.т.д.
- (с) Является. Докажем это. Пусть посылка импликации истинна. Тогда при некотором  $w=w_0$  мы имеем  $(A(w) \vee B(w)) \rightarrow C(w)$ . Истинность этой импликации означает истинность заключения или ложность посылки. В первом случае  $C(w)$  истинно. Значит, истинно  $(\exists z)C(z)$ . Это делает истинной импликацию в заключении. Теперь пусть ложна посылка первой из импликаций. Тогда  $A(w)$  истинно,  $B(w)$  ложно. Тем самым, истинно  $(\exists x)A(x)$  и ложно то, что  $B(y)$  верно для всех  $y$ . Тогда у импликации из заключения оказывается ложна посылка, то есть вся эта импликация истинна.
- (d) Не является. Построим контрпример. Возьмём множество натуральных чисел  $N$  в качестве предметной области, и проинтерпретируем  $A(x, y, z)$  как  $x=1$  или  $z=1$ . От  $y$  это свойство не зависит. Тогда существуют  $x=y=1$ , что  $A(x, y, z)$  верно при любом  $z$ . Также существуют  $y=z=1$ , что  $A(x, y, z)$  верно при любом  $x$ . Однако не для любых  $z, x$  будет верно то, что находится после кванторов в заключении импликации: взяв  $z=x=2$ , мы не найдём такого  $y$ , для которого  $A(x, y, z)$ .
- (е) Не является. Рассмотрим в 3-мерном пространстве три взаимно перпендикулярные прямые, ни одна из которых не проходит через точку вида  $(a, a, a)$ . Например:  $x=1, y=2, z$  любое;  $y=1, z=2, x$  любое;  $z=1, x=2, y$  любое. Предикат  $A(x, y, z)$  будет означать, что точка  $(x, y, z)$  принадлежит хотя бы одной из этих прямых. Посылка истинна по построению, а заключение ложно, так как точек с одинаковыми координатами мы не брали.

Можно и на конечном множестве 1,2: полагаем  $A(x,y,z)$  истинным  $\Leftrightarrow$  не все три координаты равны. Тогда всё также выполнено по построению.

(f) Является. Если  $A(x,y)$  верно не всегда, то заключение импликации ложно. Пусть  $A(x,y)$  верно всегда. Тогда посылка импликации имеет вид  $1 \rightarrow 0$ , то есть она ложна, и всё вместе истинно.

3. Для начала покажем, что формула не общезначима. Рассмотрим  $N$  в качестве предметной области, и проинтерпретируем  $P(x,y)$  как  $x \geq y$ . Посылка импликации будет истинна, так как  $x \geq x$  всегда верно, и из  $x \geq z$  при любом  $y$  верно  $x \geq y$  или  $y \geq z$ . В противном случае было бы  $x < y < z$ , что давало бы противоречие.

Заключение импликации ложно, так как не существует натурального  $u$  со свойством  $u \geq v$  для всех  $v$ . Достаточно положить  $v = u + 1$ .

Докажем теперь, что на конечной предметной области формула будет истинной. Пусть  $Q$  – отрицание предиката  $P$ . Тогда рефлексивность отношения  $P$  даёт антирефлексивность  $Q$ , а из другой части условия в посылке импликации мы получаем по контрапозиции и закону де Моргана, что  $Q(x,y) \& Q(y,z)$  влечёт  $Q(x,z)$ , то есть отношение  $Q$  транзитивно. Тогда это строгий частичный порядок, и на конечном множестве для него есть максимальный элемент  $u$ . Его нельзя "увеличить" то есть  $Q(u,v)$  всегда будет ложно, и  $P(u,v)$  при любом  $v$  истинно.

4.

5.