ДЗ 3

Биктимиров Данила, группа 204

1. (a) Бахнем индикатор $I_i = \begin{cases} 1, & \text{если i-ый ящик пуст} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, тогда получим

$$E\xi = E\sum_i^m = \sum_i^m EI_i$$

.

Мат ожидание индикатора это его вероятность. Ну а она $EI_i = \frac{C_{m+k-2}^{m-2}}{C_{m+k-1}^{m-1}} = \frac{m-1}{m+k-1}$. А значит что

$$E\xi = m \cdot \frac{m-1}{m+k-1},\ D\xi = E\xi^2 - E^2\xi$$

Считаем

$$E\xi^2 = E(\sum_i^m I_i)^2 = E\left(\sum_i^m I_i^2 + 2\sum_{0\leq i\leq j\leq m} I_iI_j\right) = \sum_i^m EI_i^2 + 2\sum_{0\leq i\leq j\leq m} EI_iI_j$$

$$EI_i^2 = Ei_i = \frac{m-1}{m+k-1}$$

как мы посчитали ранее.

$$EI_iI_j = \frac{C_{m+k-3}^{m-3}}{C_{m+k-1}^{m-1}} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m+k-1)(m+k-2)}$$

И отсюда

$$E\xi^2 = m\left(\frac{m-1}{m+k-1}\right) + \frac{m(m-1)}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{(m+k-1)(m+k-2)}$$

И в итоге

$$D\xi = \frac{m(m-1)}{m+k-1} + \frac{m(m-1)^2(m-2)}{(m+k-1)(m+k-2)} - \left(\frac{m(m-1)}{m+k-1}\right)^2 = \frac{m(m-1)(k-1)k}{(m+k-1)^2(m+k-2)}$$

(b) Делаем все то же самое, но будут другие вероятности:

$$EI_i = \left(\frac{m-1}{m}\right)^k \Rightarrow E\xi = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^k$$

А с дисперсией:

$$EI_iI_j = \left(\frac{m-2}{m}\right)^k, \text{откуда: } D\xi = m\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^k + \frac{m(m-1)}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{m-2}{m}\right)^k - m^2\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{(m-1)^k m^{k-1} + (m-1)(m-2)^k m^{k-1} - (m-1)^{2k}}{m^{2(k-1)}}$$

2.

$$E\xi = \sum_i^n i \cdot P(\xi = i)$$

$$P(\xi = i) = \frac{C_{i-1}^{k-1}\cdot k!\cdot(n-k)!}{C_n^k\cdot k!\cdot(n-k)!} = \frac{C_{i-1}^{k-1}}{C_n^k}$$

Имеем

$$E\xi = \sum_i^n i\cdot\frac{C_{i-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{C_n^k}\sum_i^n C_i^k = \frac{k}{C_n^k}\cdot C_{n+1}^{k+1} = \frac{k(n+1)}{k+1}$$

И теперь дисперсию:

$$D\xi = E\xi^2 - E^2\xi$$

$$E\xi^2 = \sum_i^n i^2\cdot P(\xi=i) = \sum_i^n i(i+1)\cdot P(\xi=i) - \sum_i^n i\cdot P(\xi=i) =$$

$$= \sum_i^n i(i+1)\cdot\frac{C_{i-1}^{k-1}}{C_n^k} - \frac{k(n+1)}{k+1} = \frac{k(k+1)}{C_n^k}\sum_i^n C_{i+1}^{k+1} - \frac{k(n+1)}{k+1} = \frac{k(k+1)C_{n+2}^{k+2}}{C_n^k} - \frac{k(n+1)}{k+1} =$$

$$= \frac{k(n+2)(n+1)}{k+2} - \frac{k(n+1)}{k+1}$$

Тогда:

$$D\xi = \frac{k(n+2)(n+1)}{k+2} - \frac{k(n+1)}{k+1} - \frac{k^2(n+1)^2}{(k+1)^2} = \frac{k(n+1)(n-k)}{(k+1)^2(k+2)}$$