ДЗ 2

Биктимиров Данила, группа 204

1. Покажем перечислимое, но не разрешимое множества. Берём любой известный нам пример (скажем, множество номеров машин Тьюринга, останавливающихся за конечное время). Тогда за $f(n)$ принимаем номер машины, которое перечисляющее устройство печатает на n-м шаге.

2. Рассмотрим какую-нибудь невычислимую функцию g одной переменной, стремящуюся к бесконечности (получить её легко, взяв любую невычислимую и прибавив x). Построим по неё функцию двух переменных: $f(x, y) = 1$ при $y <= g(x)$ и $f(x, y) = 0$ при $y > g(x)$.

   Если бы f была вычислима, мы могли бы по каждому x найти максимальное y, для которого $f(x, y) = 1$. Понятно, что такое y равно $g(x)$, то есть получился бы алгоритм вычисления функции g.

   С другой стороны, при фиксированном x в качестве сечения получается функция от y, которая почти всюду (всюду, кроме конечного числа номеров) равна нулю, а такая функция вычислима. Аналогично, если мы зафиксируем y, то в сечении получится функция от x, почти всюду равная 1. Она также вычислима.

3. Допустим, что $f(x)$ вычислима при помощи программы с номером p. Тогда $f(x) = U(p, x)$ для всех x. В частности, $f(p) = U(p, p)$. Однако это противоречит определению функции f как в случае $U(p, p) = 2020$, так и в противном случае.

4.

5. Приведу в пример функцию Радо, так же известную как $BB(n)$ — функция от натурального аргумента n, равная максимальному числу шагов, которое может совершить программа длиной n символов и затем остановиться. Докажем, что для любой вычислимой функции $f(n)$ функция $BB(n)$ будет превышать ее значение (за исключением конечного множества значений числа n.

   Пусть $f(n)$ представлена своим кодом. Для каждого n определим программы вида:

   $p_n()$:

   $k =$ десятичная запись числа n

   $m = f(k)$

   $for\, i = 1\, to\, m + 1$

   шаг программы

   Каждая такая программа делает как минимум $f(n) + 1$ шагов. Так как мы рассматриваем n в десятичной записи, то длина p_n будет равна $\lg n + const$, где $const$ — длина кода без десятичной записи n. Пусть n_0 — решение уравнения $\lg n + const = n$. Тогда для всех натуральных $n > \lceil n_0 \rceil$ будет выполнено неравенство: $n > len(p_n) \Rightarrow BB(n) \geqslant BB(len(p_n)) > m = f(n)$. Данный переход корректен, так как мы доказали, что $BB(n)$ — монотонно возрастающая функция. Так как n_0 конечно, то мы всегда можем найти такие значения n, при которых будет выполняться полученное неравенство. Отсюда следует, что утверждение доказано.

6.

7. Если A является m-сводимым к N, то $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in N$. Последнее верно всегда. Значит, $A = N$. Во втором случае когда $N \leq_m B$, условие $f(x) \in B$ всегда верно. Из определения m-сводимости мы получаем, что $f(x)$ всегда должно лежать в B. Пусть множество B - непустое, и $f(x) = const =$ любой его элемент. Это значит, что B является непустым

8. Вместо подмножеств N будем рассматривать подмножества счётного множества $N \times Z$, которое равномощно N. Построим там подходящую цепочку, а потом перенесём её в N посредством вычислимой биекции.

   В качестве $A(2k)$ берём $N \times \{i \in Z | i \leq k\}$. Очевидно, все такие множества перечислимы. При переходе от $A(2k)$ к $A(2k+2)$ мы добавляем одну копию N, а именно, $N \times 2k + 2$. Зафиксируем какое-то одно неперечислимое подмножество $X < N$, и положим $A(2k+1) = A(2k) \cup (X \times 2k + 2)$. Ясно, что оно будет неперечислимо.

9.

10. Рассмотрим перечислимое, но не разрешимое множество X. Для него существует тотальная вычислимая функция $f : N \to N$ такая, что $f(N) = X$. В качестве B возьмём множество всех нечётных чисел. Оно разрешимо. В качестве A возьмём множество всех чисел вида $2^{f(n)}(2n-1)$. Оно разрешимо, так как всякое натуральное число m однозначно представимо в виде произведения степени двойки и нечётного числа. Представляя $m = 2^s(2n-1)$ в таком виде, видим, что $s = f(n)$.

    В то же время, множество A/B неразрешимо, так как степень двойки 2^k принадлежит этому множеству тогда и только тогда, когда k имеет вид $f(n)$, однако $X = f(N)$ у нас неразрешимо.