

ДЗ 4

Биктимиров Данила, группа 204

1. Запишем предложение $(\exists z)(Q(x, z) \wedge \neg(Q(y, z)))$. Это некоторый предикат $P(x, y)$, выразимый в языке данной сигнатуры. Если $P(x, y)$ истинно в какой-то интерпретации, то понятно, что элементы x и y не равны.

Напишем теперь формулу с кванторной приставкой из n кванторов существования по переменным $x(i)$, $1 \leq i \leq n$, и далее выпишем конъюнкцию из $n(n-1)/2$ формул вида $P(x(i), x(j))$ по всем $i < j$. Ясно, что любая модель будет иметь не менее n элементов, так как все $x(i)$ в ней интерпретируются по-разному.

Выполнимость легко следует из существования бесконечной модели. Например, \mathbb{N} , где предикат Q интерпретируется как равенство. Тогда для не равных x, y значение $P(x, y)$ будет истинно (поскольку существует z , равный x).

2. Наложим условия, задающее биекцию множества на себя. Под $Q(x, y)$ тогда будет пониматься, что x переходит в y при такой биекции.

- 1) $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ – у любого элемента есть образ
- 2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x, y) \wedge Q(x, z) \rightarrow y = z)$ – условие однозначности соответствия
- 3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x, z) \wedge Q(y, z) \rightarrow x = y)$ – условие инъективности
- 4) $(\forall y)(\exists x)Q(x, y)$ – условие сюръективности

Теперь потребуем существование двух различных элементов a, b , которые переходят при отображении друг в друга. Для остальных элементов потребуем существование циклов длины 3 типа $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, где все элементы попарно различны. Это должно выполняться для всех x отличных от выделенных элементов a, b .

При таких условиях все конечные модели, представленные графом, будут состоять из одного цикла длиной 2 и нескольких циклов длиной 3, причём эти циклы не пересекаются по причине биективности. Добавляем ещё один пункт, а в конце берём конъюнкцию всех пяти формул.

- 5) $(\exists a)(\exists b)(\neg(a = b) \wedge Q(a, b) \wedge Q(b, a) \wedge (\forall x)(\neg(x = a) \wedge \neg(x = b) \rightarrow (\exists y)(\exists z)(Q(x, y) \wedge Q(y, z) \wedge Q(z, x) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))))$

3. Берём двуместный предикат P . Пишем формулы, выражающие свойство, что P есть отношение строгого частичного порядка. Это антирефлексивность и транзитивность. На конечном множестве всегда имеется максимальный элемент. Отдельным пунктом даём свойство, что максимального элемента нет. Тогда все модели теории бесконечны. Примером будет \mathbb{N} с отношением $<$.

- 1) $(\forall x)\neg(P(x, x))$
- 2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$

3) $(Ax)(Ey)P(x, y)$

Искомое предложение будет конъюнкцией трёх формул из этих пунктов.

4. Пусть имеется инъекция f одной структуры в другую. Тогда каждому $n \geq 1$ мы ставим в соответствие $f(n) \geq 0$. При этом $f(xy) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \geq 1$.

Полагая $x = y = 1$, имеем $f(1) = 0$. Ввиду инъективности, $f(x) > 0$ при $x > 1$. В частности, $k = f(2) \geq 1$ и $m = f(3) \geq 1$. Из основного условия для f следует, что $f(x^n) = f(x \dots x) = f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$ при любом $n \geq 1$. В частности, $f(2^m) = mf(2) = mk$ и $f(3^k) = kf(3) = km$. Получается, что числа 2^m и 3^k заведомо не равны (первое чётно, второе нечётно), но переходят в один и тот же элемент $mk = km$, что противоречит инъективности.

5. а) Заметим что они не равномощные \Rightarrow нет

б) $z \rightarrow -z$

в) у N есть наименьший, но нет наибольшего \Rightarrow нет

6. а) Введём обозначения для элементов первого множества. Будем считать, что действительное число x из первого слагаемого R записывается как $a(x)$, а число y из второго слагаемого R представляется как $b(y)$. Рассмотрим систему отрезков вида $[a(n), b(-n)]$ по всем $n \geq 1$. Она имеет пустое пересечение. В самом деле, если в пересечение попал какой-то элемент, то он имеет вид $a(x)$ или $b(y)$. В первом случае $a(n) \leq a(x)$, то есть $n \leq x$ для всех n , но так не бывает. Во втором случае $b(y) \leq b(-n)$, то есть $y \leq -n$ для всех $n \geq 1$, и этого также не бывает.

При порядковом изоморфизме система отрезков переходит в систему отрезков, вложенная переходит во вложенную, и пересечение переходит в пересечение. Остаётся вспомнить, что в R любая вложенная система отрезков имеет непустое пересечение по принципу Кантора.

б) На наглядном уровне, RQ есть R , взятое Q раз, то есть мы представляем себе упорядоченное множество Q , и в каждой точке q рассматриваем свою отдельную прямую. Это множество обладает тем свойством, что для любых $a < b$, интервал (a, b) несчётен. Это верно как в случае, если a, b принадлежат экземпляру R для одного и того же рационального q , и тем более верно, если для разных.

В QR содержится экземпляр Q в качестве подструктуры, а там уже интервал между любыми двумя точками счётен.

7.

8. Для начала надо написать само алгебраическое уравнение. Оно при этом может иметь несколько корней. Их конечное число. Поэтому для корня x , который нас интересует, всегда есть отрезок с рациональными концами, содержащий x и не содержащий других корней. Пусть его концы a/n и b/n . Тогда добавляем через знак конъюнкции неравенства $a \leq nx$ и $nx \leq b$.

При этом, если сигнатура поля содержит только кольцевые операции, то в их терминах надо уметь выражать предикат \leq . Это несложно для случая R : если разность неотрицательна, то она равна квадрату какого-то числа, то есть $a \leq nx$ означает, что существует z такое, что $nx = a + z^2$.

9. Будем считать, что речь идёт о целых положительных числах.

Равенство $a + b = c$ равносильно $ac + bc = c^2$.

Рассмотрим произведение $(ac + 1)(bc + 1) = abc^2 + (ac + bc) + 1$. Если заменить $ac + bc$ на c^2 , то получится высказывание, равносильное исходному:

$$(ac + 1)(bc + 1) = abc^2 + c^2 + 1 = (ab + 1)c^2 + 1$$

Здесь каждая из частей выражена через произведение и прибавление единицы, а сама формула равносильна $a + b = c$.

10.

11. Непонятно, почему знак теоретико-множественной разности превратился в букву г.

а) Рассматривается группа рациональных чисел, не равных 0, относительно умножения. Её элементы имеют однозначное представление вида $+ - p(1)^{k(1)} \dots p(r)^{k(r)}$, где $p(1) < \dots < p(r)$ простые, и показатели целые ненулевые.

Любая перестановка на множестве простых чисел задаёт автоморфизм группы. Значит, автоморфизмов не меньше, чем биекций \mathbb{N} на \mathbb{N} . Их не меньше континуума, так как натуральные числа разбиваются на счётное множество пар, и в каждой паре мы элементы или переставляем, или нет. Таких биекций уже $2^{\mathbb{N}}$, то есть континуум.

С другой стороны, группа счётна, а отображений счётного множества в счётное не больше континуума: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$.

б) Среди автоморфизмов группы есть $x \rightarrow 1/x$. Он является автоморфизмом структуры, но целые числа не сохраняет. Значит, множество $\mathbb{Z} \setminus 0$ невыразимо на языке логики предикатов.

в) То же самое: автоморфизм из предыдущего пункта не сохраняет порядок $<$.

12.

13. Сигнатуру надо указывать при постановке таких вопросов!

При естественном выборе сигнатуры, где есть кольцевые операции, достаточно заметить, что в \mathbb{R} из $x^4 = 1$ следует $x^2 = 1$, а в \mathbb{C} не следует. Поэтому формула $(Ax)(x^4 = 1 \rightarrow x^2 = 1)$ языка первого порядка будет различать эти две структуры.

14. С одной стороны, известна теорема Стоуна, которая любой частичный порядок позволяет рассматривать на некотором множестве множеств с отношением включения. С другой стороны, это даёт лишь вложение, и из самого факта ничего прямо не следует.

Здесь надо обратить внимание на то, что бывают числа, у которых ровно три делителя, но не бывает множеств, у которых ровно три подмножества. Пусть Q – двуместный предикатный символ. Формула $Q(x, y) \& Q(y, x)$ будет задавать равенство как для чисел, так и для множеств. Будем писать это условие в виде $E(x, y)$.

Нам подойдет формула, утверждающая существование такого a , для которого существуют b , c отличные от a такие, что $Q(b, a) \& Q(c, a)$, и при этом для любого t с условием $Q(t, a)$ верна дизъюнкция $E(t, a) \vee E(t, b) \vee E(t, c)$. На \mathbb{N} это будет верно при $a=4$, а для множеств – нет. Значит, системы не являются элементарно эквивалентными.