ДЗ 4

Биктимиров Данила, группа 204

1. Запишем предложение $(Ez)(Q(x,z)\&not(Q(y,z)))$. Это некоторый предикат $P(x,y)$, выразимый в языке данной сигнатуры. Если $P(x,y)$ истинно в какой-то интерпретации, то понятно, что элементы x и y не равны.

   Напишем теперь формулу с кванторной приставкой из n кванторов существования по переменным $x(i)$, $1 \leq i \leq n$, и далее выпишем конъюнкцию из $n(n-1)/2$ формул вида $P(x(i),x(j))$ по всем $i < j$. Ясно, что любая модель будет иметь не менее n элементов, так как все $x(i)$ в ней интерпретируются по-разному.

   Выполнимость легко следует из существования бесконечной модели. Например, N, где предикат Q интерпретируется как равенство. Тогда для не равных x, y значение $P(x,y)$ будет истинно (поскольку существует z, равный x).

2. Наложим условия, задающее биекцию множества на себя. Под $Q(x,y)$ тогда будет пониматься, что x переходит в y при такой биекции.

   1) $(Ax)(Ey)Q(x,y)$ – у любого элемента есть образ

   2) $(Ax)(Ay)(Az)(Q(x,y)\&Q(x,z) \rightarrow y = z)$ – условие однозначности соответствия

   3) $(Ax)(Ay)(Az)(Q(x,z)\&Q(y,z) \rightarrow x = y)$ – условие инъективности

   4) $(Ay)(Ex)Q(x,y)$ – условие сюръективности

   Теперь потребуем существование двух различных элементов a,b, которые переходят при отображении друг в друга. Для остальных элементов потребуем существование циклов длины 3 типа $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, где все элементы попарно различны. Это должно выполняться для всех x отличных от выделенных элементов a,b.

   При таких условиях все конечные модели, представленные графом, будут состоять из одного цикла длиной 2 и нескольких циклов длиной 3, причём эти циклы не пересекаются по причине биективности. Добавляем ещё один пункт, а в конце берём конъюнкцию всех пяти формул.

   5) $(Ea)(Eb)(not(a = b)\&Q(a,b)\&Q(b,a)\&(Ax)(not(x = a)\&not(x = b) \rightarrow$
   $(Ey)(Ez)(Q(x,y)\&Q(y,z)\&Q(z,x)\&not(x = y)\&not(y = z)\&not(z = x)))))$

3. Берём двуместный предикат P. Пишем формулы, выражающие свойство, что P есть отношение строгого частичного порядка. Это антирефлексивность и транзитивность. На конечном множестве всегда имеется максимальный элемент. Отдельным пунктом даём свойство, что максимального элемента нет. Тогда все модели теории бесконечны. Примером будет N с отношением $<$.

   1) $(Ax)not(P(x,x)$

   2) $(Ax)(Ay)(Az)(P(x,y)\&P(y,z) \rightarrow P(x,z))$

3) $(Ax)(Ey)P(x,y)$

Искомое предложение будет конъюнкцией трёх формул из этих пунктов.

4. Пусть имеется инъекция f одной структуры в другую. Тогда каждому $n \geq 1$ мы ставим в соответствие $f(n) \geq 0$. При этом $f(xy) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \geq 1$.

   Полагая $x = y = 1$, имеем $f(1) = 0$. Ввиду инъективности, $f(x) > 0$ при $x > 1$. В частности, $k = f(2) \geq 1$ и $m = f(3) \geq 1$. Из основного условия для f следует, что $f(x^n) = f(x...x) = f(x) + ... + f(x) = nf(x)$ при любом $n \geq 1$. В частности, $f(2^m) = mf(2) = mk$ и $f(3^k) = kf(3) = km$. Получается, что числа 2^m и 3^k заведомо не равны (первое чётно, второе нечётно), но переходят в один и тот же элемент $mk = km$, что противоречит инъективности.

5. а) Заметим что они не равномощные $\Rightarrow$ нет

   б) $z \to -z$

   в) у N есть наименьший, но нет наибольшего $\Rightarrow$ нет

6. а) Введём обозначения для элементов первого множества. Будем считать, что действительное число x из первого слагаемого R записывается как $a(x)$, а число y из второго слагаемого R представляется как $b(y)$. Рассмотрим систему отрезков вида $[a(n), b(-n)]$ по всем $n \geq 1$. Она имеет пустое пересечение. В самом деле, если в пересечение попал какой-то элемент, то он имеет вид $a(x)$ или $b(y)$. В первом случае $a(n) \leq a(x)$, то есть $n \leq x$ для всех n, но так не бывает. Во втором случае $b(y) \leq b(-n)$, то есть $y \leq -n$ для всех $n \geq 1$, и этого также не бывает.

   При порядковом изоморфизме система отрезков переходит в систему отрезков, вложенная переходит во вложенную, и пересечение переходит в пересечение. Остаётся вспомнить, что в R любая вложенная система отрезков имеет непустое пересечение по принципу Кантора.

   б) На наглядном уровне, RQ есть R, взятое Q раз, то есть мы представляем себе упорядоченное множество Q, и в каждой точке q рассматриваем свою отдельную прямую. Это множество обладает тем свойством, что для любых $a < b$, интервал (a, b) несчётен. Это верно как в случае, если a, b принадлежат экземпляру R для одного и того же рационального q, и тем более верно, если для разных.

   В QR содержится экземпляр Q в качестве подструктуру, а там уже интервал между любыми двумя точками счётен.

7.

8. Для начала надо написать само алгебраическое уравнение. Оно при этом может иметь несколько корней. Их конечное число. Поэтому для корня x, который нас интересует, всегда есть отрезок с рациональными концами, содержащий x и не содержащий других корней. Пусть его концы a/n и b/n. Тогда добавляем через знак конъюнкции неравенства $a \leq nx$ и $nx \leq b$.

   При этом, если сигнатура поля содержит только кольцевые операции, то в их терминах надо уметь выражать предикат $<=$. Это несложно для случая R: если разность неотрицательна, то она равна квадрату какого-то числа, то есть $a \leq nx$ означает, что существует z такое, что $nx = a + z^2$.

9. Будем считать, что речь идёт о целых положительных числах.

   Равенство $a + b = c$ равносильно $ac + bc = c^2$.

   Рассмотрим произведение $(ac+1)(bc+1) = abc^2 + (ac+bc) + 1$. Если заменить $ac + bc$ на c^2, то получится высказывание, равносильное исходному:

$(ac+1)(bc+1) = abc^2 + c^2 + 1 = (ab+1)c^2 + 1$

Здесь каждая из частей выражена через произведение и прибавление единицы, а сама формула равносильна $a + b = c$.

10.

11. a) Рассматривается группа рациональных чисел, не равных 0, относительно умножения. Её элементы имеют однозначное представление вида $+-p(1)^{k(1)}...p(r)^{k(r)}$, где $p(1) < ... < p(r)$ простые, и показатели целые ненулевые.

    Любая перестановка на множестве простых чисел задаёт автоморфизм группы. Значит, автоморфизмов не меньше, чем биекций N на N. Их не меньше континуума, так как натуральные числа разбиваются на счётное множество пар, и в каждой паре мы элементы или переставляем, или нет. Таких биекций уже 2^N, то есть континуум.

    С другой стороны, группа счётна, а отображений счётного множества в счётное не больше континуума: $N^N <= (2^N)^N\ 2^{NxN}\ 2^N$.

    b) Среди автоморфизмов группы есть $x \to 1/x$. Он является автоморфизмом структуры, но целые числа не сохраняет. Значит, множество $Z\ \emptyset$ невыразимо на языке логики предикатов.

    c) То же самое: автоморфизм из предыдущего пункта не сохраняет порядок $<$.

12.

13. При естественном выборе сигнатуры, где есть кольцевые операции, достаточно заметить, что в R из $x^4 = 1$ следует $x^2 = 1$, а в C не следует. Поэтому формула $(Ax)(x^4 = 1 \to x^2 = 1)$ языка первого порядка будет различать эти две структуры.

14. Обратим внимание на то, что бывают числа, у которых ровно три делителя, но не бывает множеств, у которых ровно три подмножества. Пусть Q – двуместный предикатный символ. Формула $Q(x, y)\&Q(y, x)$ будет задавать равенство как для чисел, так и для множеств. Будем писать это условие в виде E(x,y).

    Нам подойдет формула, утверждающая существование такого a, для которого существуют b, c отличные от a такие, что $Q(b, a)\&Q(c, a)$, и при этом для любого t с условием Q(t,a) верна дизъюнкция E(t,a) V E(t,b) V E(t,c). На N это будет верно при a=4, а для множеств – нет. Значит, системы не являются элементарно эквивалентными.