Вариант 2

Биктимиров Данила Рустемович, ФКН

1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -20x + 5y = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = -120x + y = Q(x,y) \end{cases}$$

Найдем особые точки:

$$\begin{cases} -20x + 5y = 0 \\ -120x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}y \\ y = 120x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$(0; 0)$ – особая точка (критическая). Далее исследуем на устойчивость:

$$x = x_0 + \varepsilon, \;\; y = y_0 + \mu$$

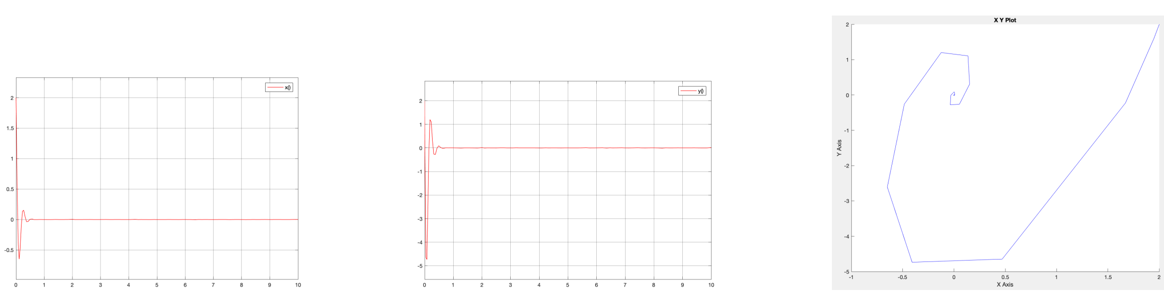
$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = -20\varepsilon + 5\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = -120\varepsilon + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -20-\lambda & 5 \\ -120 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-20-\lambda)(1-\lambda) - (-120) \cdot 5 = 0$$

$$\lambda^2 + 19\lambda + 580 = 0$$

$$\lambda = -\frac{19}{2} \pm \frac{i\sqrt{1959}}{2}$$

Так как это два комплексных корня, и $Re\lambda < 0$ получаем,что это устойчивый фокус.



(a) (b)

Рис. 1: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (2, 2)$

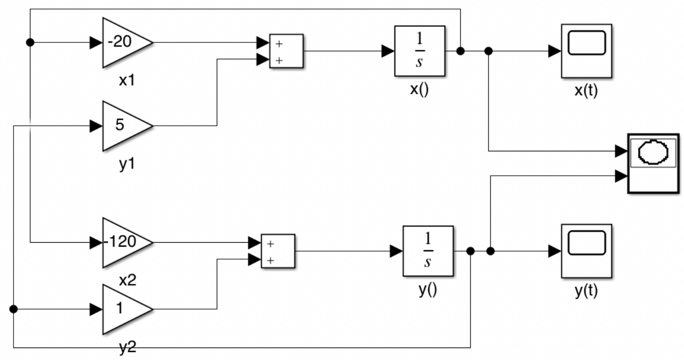


Рис. 2: Схема модели системы уравнений

2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2xy - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 \end{cases}$$

(a) Ищем особые точки

$$\begin{cases} 3x - 2xy - x^2 = 0 \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $x = 0$, $y = 0$ является решением. Таким образом, точка $A(0; 0)$ является критической.

При $x = 0$ система принимает вид:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 2y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Таким образом получаем критическую точку $B(0; 2)$.

$$\begin{cases} 3x - 2xy - x^2 = 0 \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3 - 2y - x) = 0 \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3-x}{2} \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$$2 \cdot \frac{3-x}{2} - 2x \cdot \frac{3-x}{2} - \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 + 3x^2 = 0$$

$$12 - 4x - 12x + 4x^2 - 9 + 6x - x^2 + 12x^2 = 0$$

$$15x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{\sqrt{5} - 2i}{3\sqrt{5}} \\ x = \dfrac{\sqrt{5} + 2i}{3\sqrt{5}} \end{matrix}$$

Так получаем точки $C(\frac{\sqrt{5}-2i}{3\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{5}+i}{3\sqrt{5}})$ и $D(\frac{\sqrt{5}+2i}{3\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{5}-i}{3\sqrt{5}})$.

(b) Исследование на устойчивость (рассматриваем только вещественные точки).

$$x = x_0 + \varepsilon,\ \ y = y_0 + \mu$$

$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = (3 - 2y - 2x)\varepsilon + (-2x)\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = (-2y + 6x)\varepsilon + (2 - 2x - 2y)\mu \end{cases}$$

i. $A(0;0)$

$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = (3)\varepsilon + (0)\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = (0)\varepsilon + (2)\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

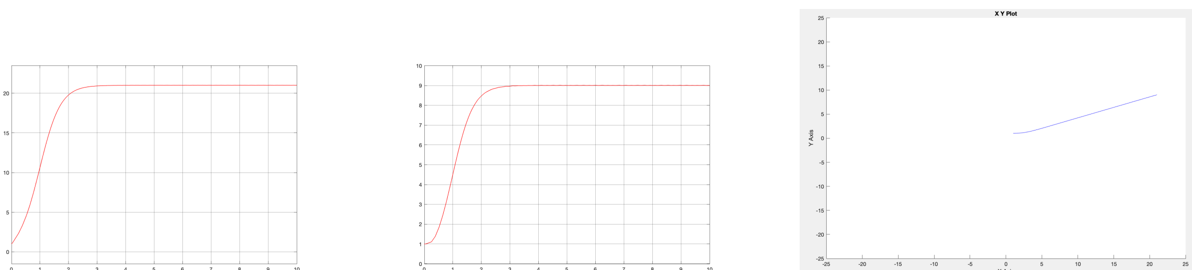
Два положительных вещественных корня $\Rightarrow$ это неустойчивый узел.

ii. $B(0;2)$

$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = (-1)\varepsilon + (0)\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = (-4)\varepsilon + (-2)\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

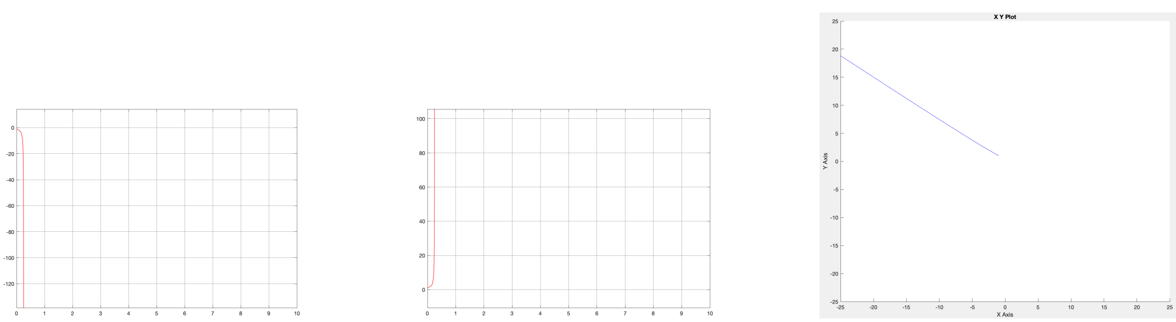
$$(-1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

Два отрицательных вещественных корня $\Rightarrow$ это устойчивый узел.



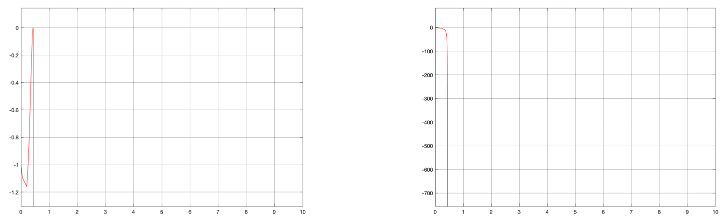
(a) $x(t), y(t)$ (b)

Рис. 3: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (1, 1)$

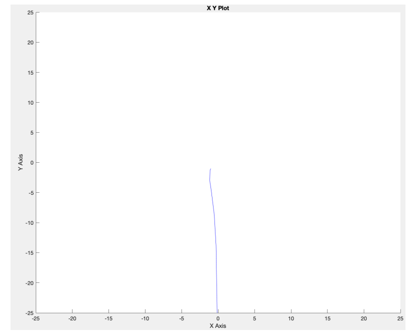


(a) $x(t), y(t)$ (b)

Рис. 4: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

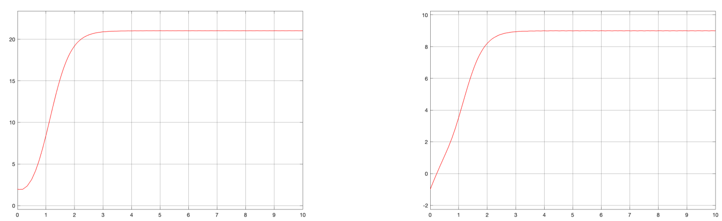


(a) $x(t), y(t)$

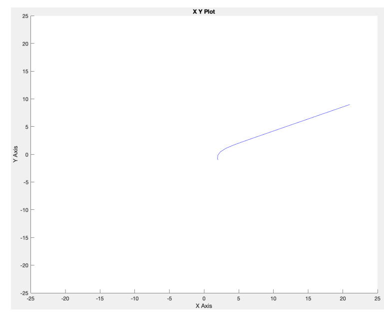


(b)

Рис. 5: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (-1, -1)$



(a) $x(t), y(t)$



(b)

Рис. 6: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (1, -1)$

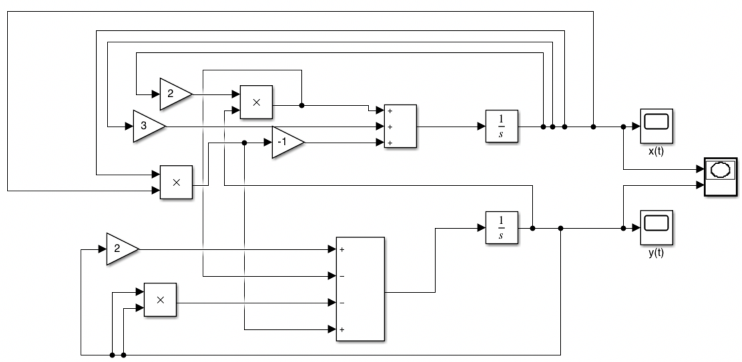


Рис. 7: Схема модели системы уравнений

3.