

Вариант 2

Биктимиров Данила Рустемович, ФКН

1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -20x + 5y = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -120x + y = Q(x, y) \end{cases}$$

Найдем особые точки:

$$\begin{cases} -20x + 5y = 0 \\ -120x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}y \\ y = 120x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$(0; 0)$ – особая точка (критическая). Далее исследуем на устойчивость:

$$x = x_0 + \varepsilon, \quad y = y_0 + \mu$$

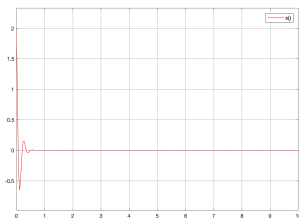
$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = -20\varepsilon + 5\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = -120\varepsilon + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -20 - \lambda & 5 \\ -120 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-20 - \lambda)(1 - \lambda) - (-120) \cdot 5 = 0$$

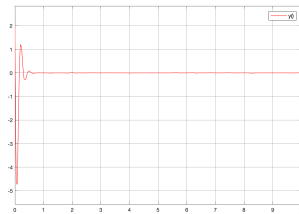
$$\lambda^2 + 19\lambda + 580 = 0$$

$$\lambda = -\frac{19}{2} \pm \frac{i\sqrt{1959}}{2}$$

Так как это два комплексных корня, и $\text{Re}\lambda < 0$ получаем, что это устойчивый фокус.



(a)



(b)

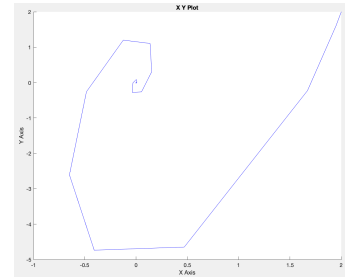


Рис. 1: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (2, 2)$

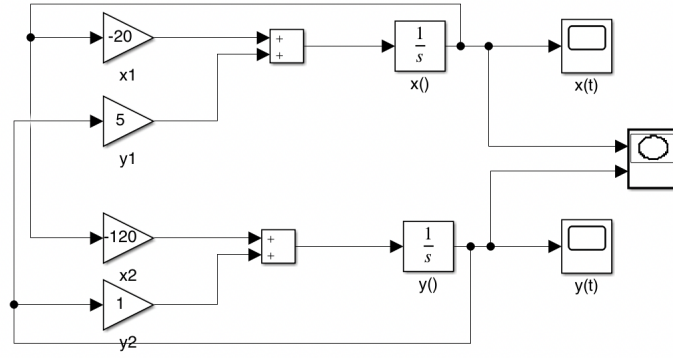


Рис. 2: Схема модели системы уравнений

2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2xy - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 \end{cases}$$

(a) Ищем особые точки

$$\begin{cases} 3x - 2xy - x^2 = 0 \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $x = 0$, $y = 0$ является решением. Таким образом, точка $A(0;0)$ является критической.

При $x = 0$ система принимает вид:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 2y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Таким образом получаем критическую точку $B(0;2)$.

$$\begin{cases} 3x - 2xy - x^2 = 0 \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3 - 2y - x) = 0 \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3-x}{2} \\ 2y - 2xy - y^2 + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$$2 \cdot \frac{3-x}{2} - 2x \cdot \frac{3-x}{2} - \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 + 3x^2 = 0$$

$$12 - 4x - 12x + 4x^2 - 9 + 6x - x^2 + 12x^2 = 0$$

$$15x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5} - 2i}{3\sqrt{5}} \\ x = \frac{\sqrt{5} + 2i}{3\sqrt{5}} \end{cases}$$

Так получаем точки $C(\frac{\sqrt{5}-2i}{3\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{5}+i}{3\sqrt{5}})$ и $D(\frac{\sqrt{5}+2i}{3\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{5}-i}{3\sqrt{5}})$.

(b) Исследование на устойчивость (рассматриваем только вещественные точки).

$$x = x_0 + \varepsilon, \quad y = y_0 + \mu$$

$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = (3 - 2y - 2x)\varepsilon + (-2x)\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = (-2y + 6x)\varepsilon + (2 - 2x - 2y)\mu \end{cases}$$

i. $A(0; 0)$

$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = (3)\varepsilon + (0)\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = (0)\varepsilon + (2)\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

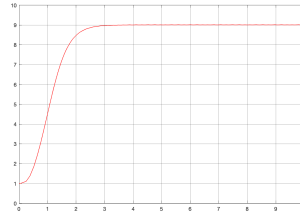
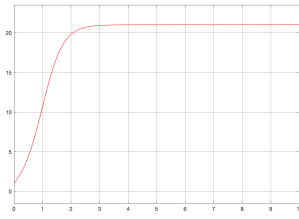
Два положительных вещественных корня \Rightarrow это неустойчивый узел.

ii. $B(0; 2)$

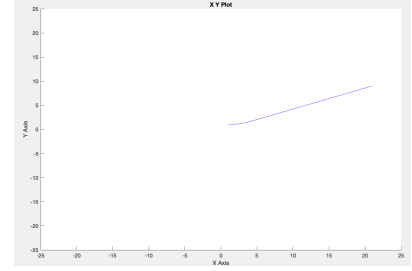
$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon)}{d(t)} = (-1)\varepsilon + (0)\mu \\ \frac{d(\mu)}{d(t)} = (-4)\varepsilon + (-2)\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ -4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0$$

Два отрицательных вещественных корня \Rightarrow это устойчивый узел.

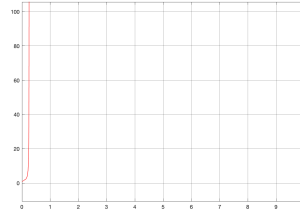
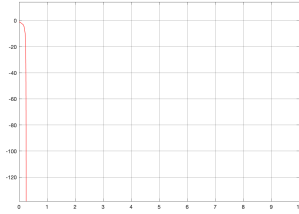


(a) $x(t), y(t)$

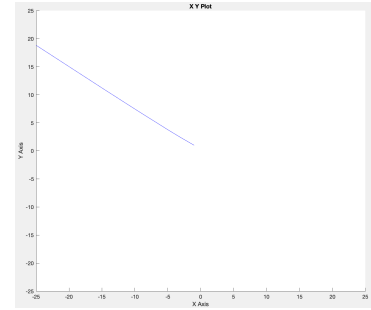


(b)

Рис. 3: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (1, 1)$



(a) $x(t), y(t)$



(b)

Рис. 4: Кинетические (a) и фазовый (b) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

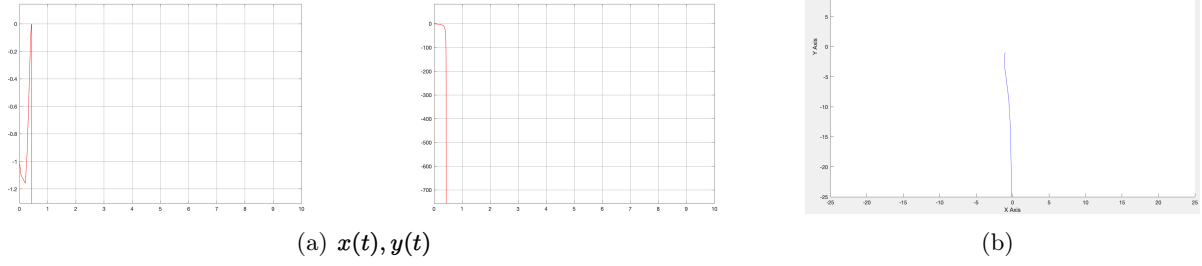


Рис. 5: Кинетические (а) и фазовый (б) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (-1, -1)$

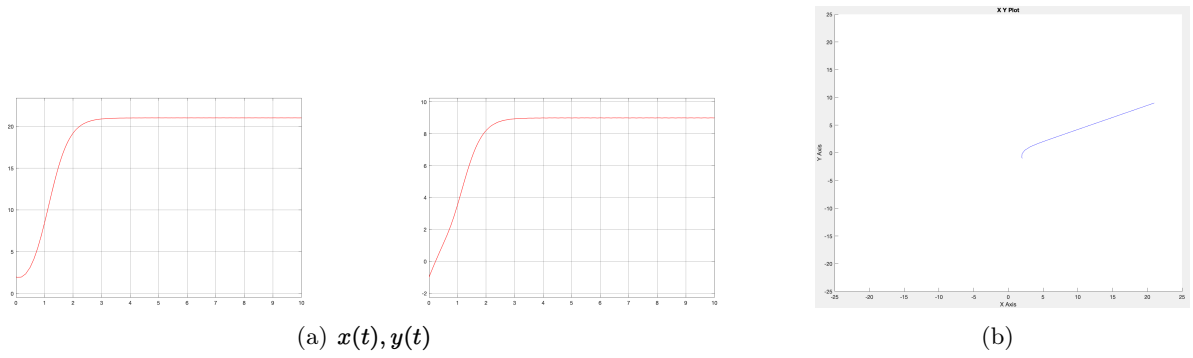


Рис. 6: Кинетические (а) и фазовый (б) портреты при начальном значении $(x_0, y_0) = (1, -1)$

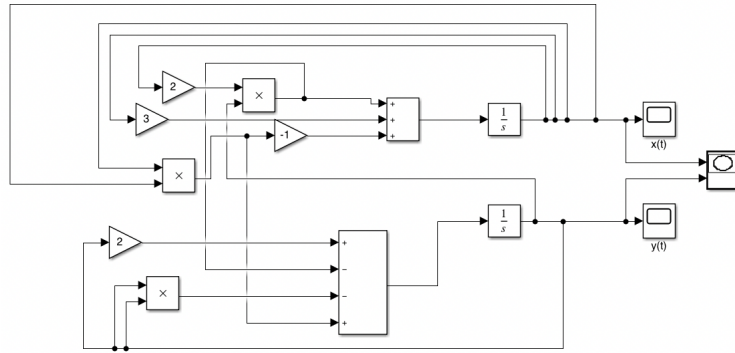


Рис. 7: Схема модели системы уравнений

3. Составим уравнения и опишем используемые константы:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \frac{a_1 SE}{N} + \frac{a_2 SI}{N} + \frac{a_3 SH}{N} - bE - kE \\ \frac{dH}{dt} = cI - z_1 fH - z_2 dH - kH \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{a_1 SE}{N} - \frac{a_2 SI}{N} - \frac{a_3 SH}{N} + (1-i)mN - kS \\ \frac{dI}{dt} = bE - cI - gI - kI \\ \frac{dR}{dt} = gI + z_2 dH - kR + imN \\ N = S + E + I + H + R \end{cases}$$

$a_1/a_2/a_3 = 0.6/0.3/0.1$ – коэффициент контакта в обществе/при симптомах/в больнице

$y_1/y_2 = 0.01/0.99$ – вероятность госпитализации/выздороветь

$z_1/z_2 = 0.001/0.99$ – вероятность умереть/выздороветь при госпитализации

$m/k/N$ – рождаемость/смертность/население в Уфе

$\frac{1}{b} = 15$ – инкубационный период

$\frac{1}{c} = 10$ – время до госпитализации

$\frac{1}{g} = 7$ – время до выздоровления

$\frac{1}{f} = 20$ – время до смерти

$\frac{1}{d} = 10$ – время от госпитализации до выздоровления

Пусть начальное значение это число вакцинированных 95%, $R = 1045000$, $S = 54000$, $E = 1000$

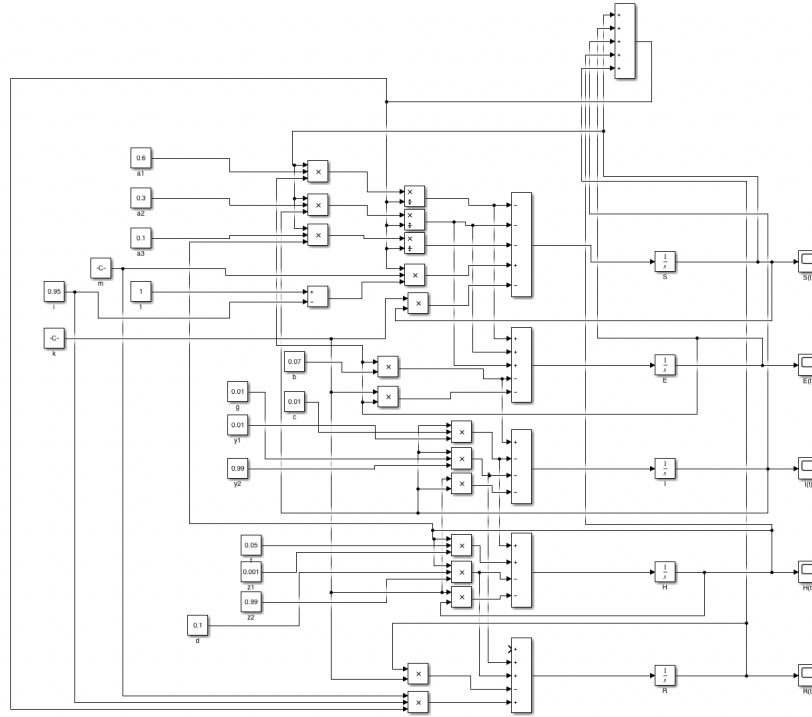


Рис. 8: Схема модели системы уравнений

Как можно убедиться из графиков далее, в связи с очень высокой заболеваемостью число заболевший будет сначала очень сильно расти, но так вероятность умереть очень маленькая, то умирать люди почти не будут от ветряной оспы.

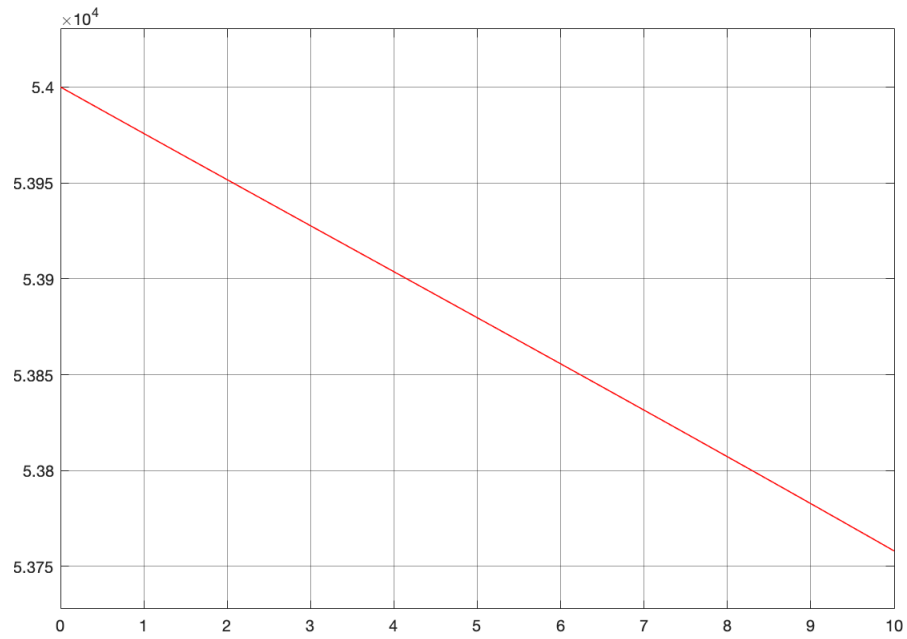


Рис. 9: $S(t)$

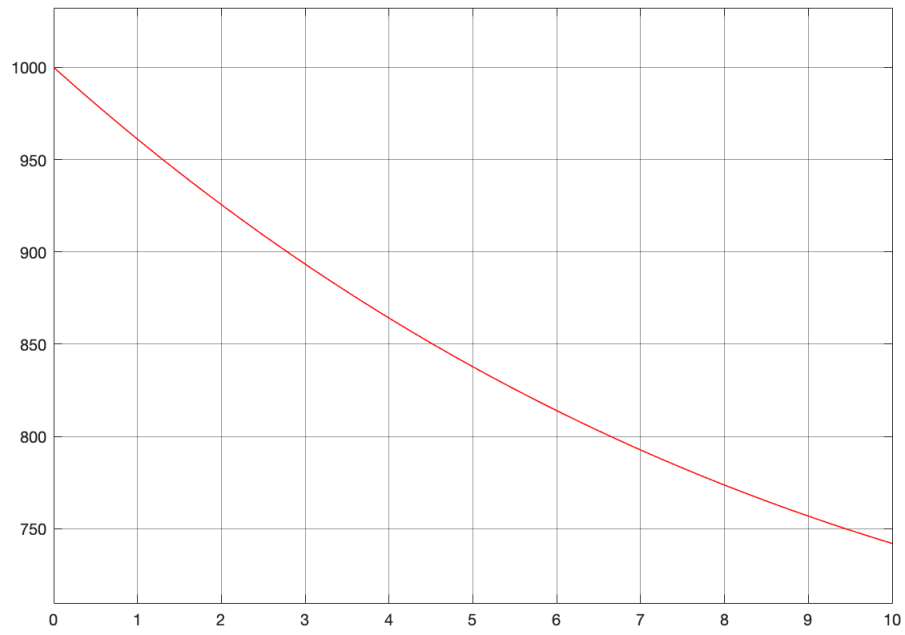


Рис. 10: $E(t)$

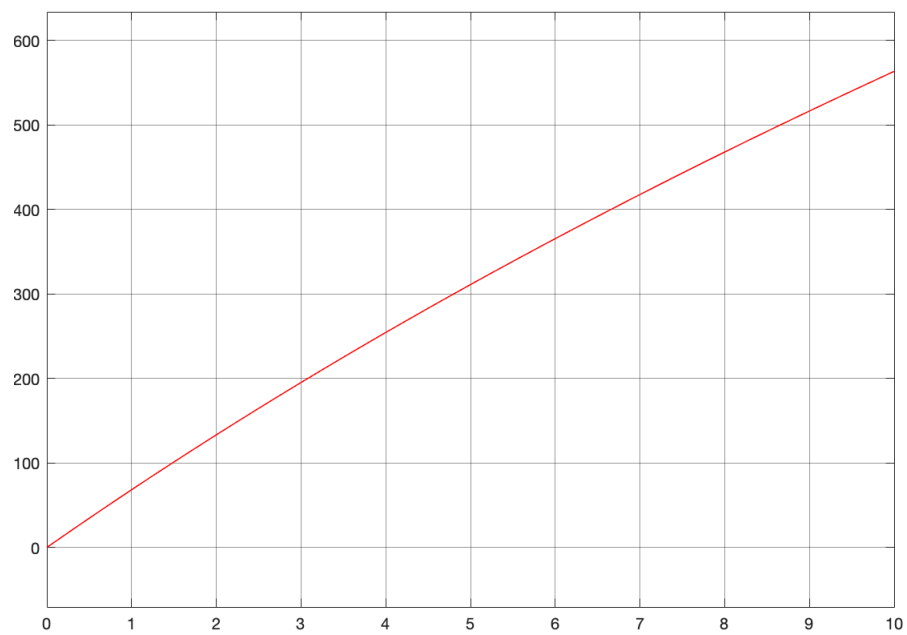


Рис. 11: $I(t)$

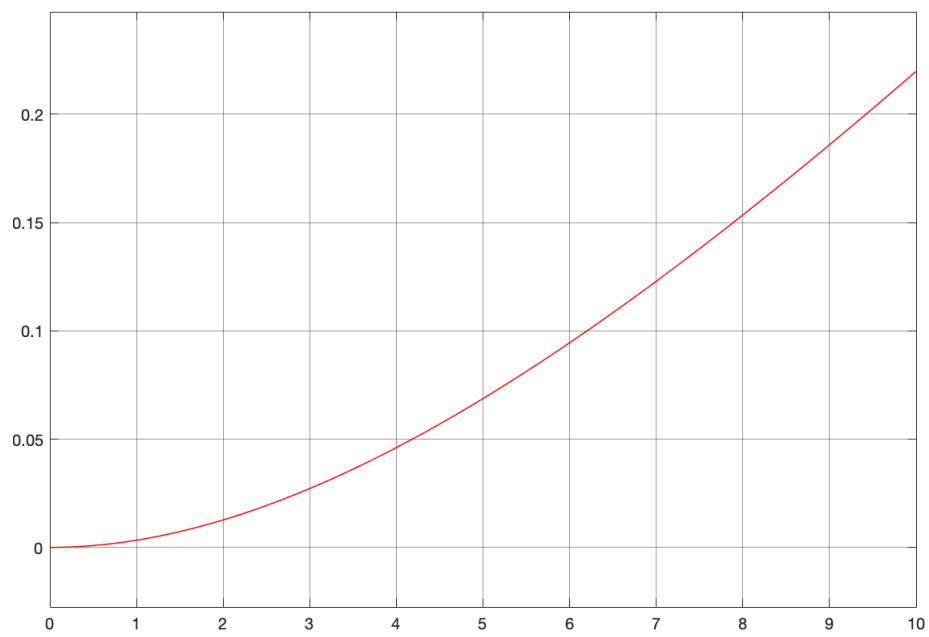


Рис. 12: $H(t)$

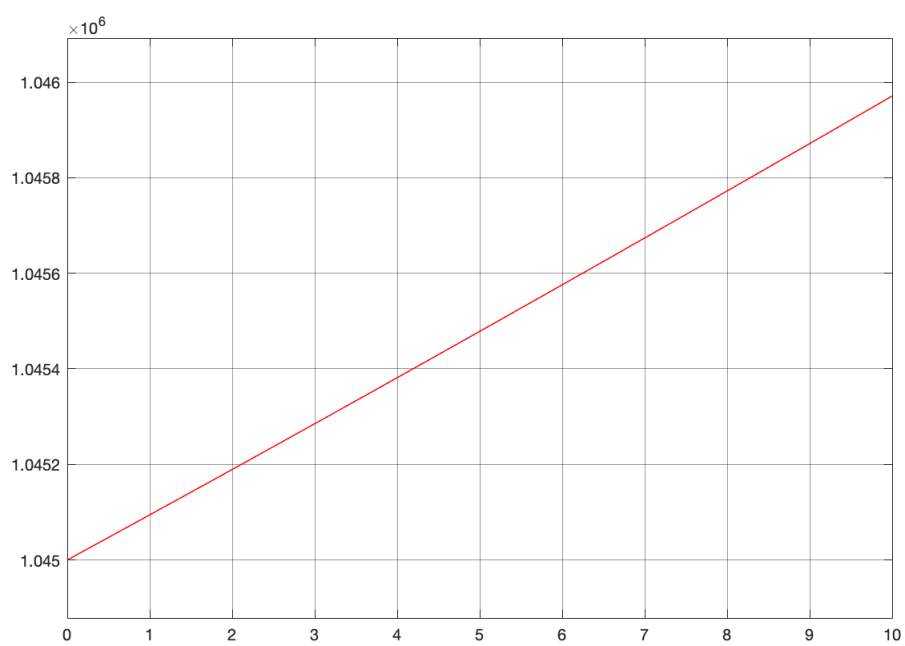


Рис. 13: $R(t)$