# Tiebreaking Strategies for A* Search: How to Explore the Final Frontier

# 1　注意

今日の発表はいろいろなヒトの発表を借りて切り貼りしています

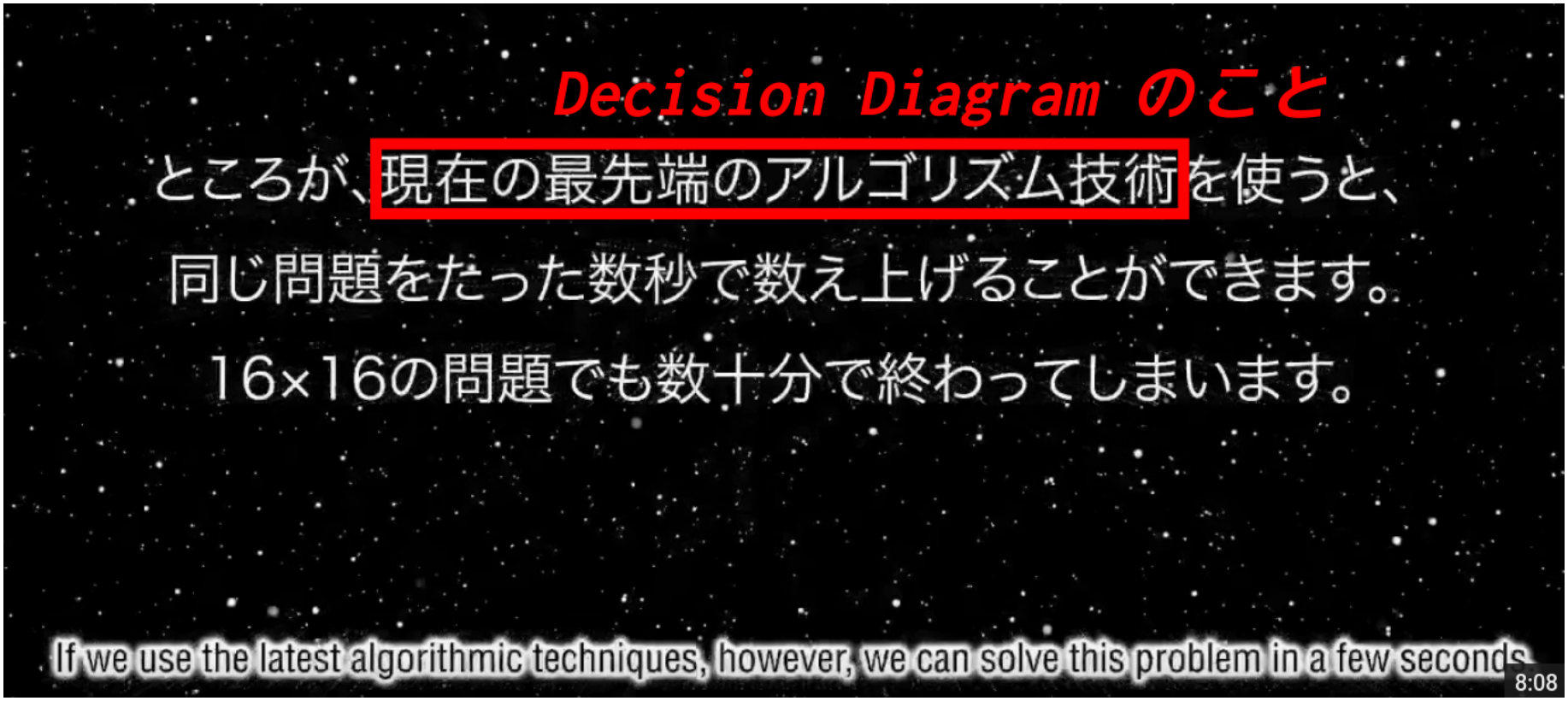
- 『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！
- ZDD とフロンティア法 2017 年版 ver 0.1 奈良先端科学技術大学院大学 川原 純
- ZDD を用いたパスの列挙と索引生成 川原 純 (JST ERATO 研究員)
- ICAPS2012-Tutorial Decision Diagrams in Discrete and Continuous Planning (Scott Sanner)
- AAAI2016-Tutorial Symbolic Methods for Probabilistic Inference, Optimization, and Decision-making (Scott Sanner)
- ICAPS2016-Tutorial Decision Diagrams for Discrete Optimization (John Hooker CMU)

## 2　Decision Diagram とは　4MIN

「『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！」で紹介されないデータ構造

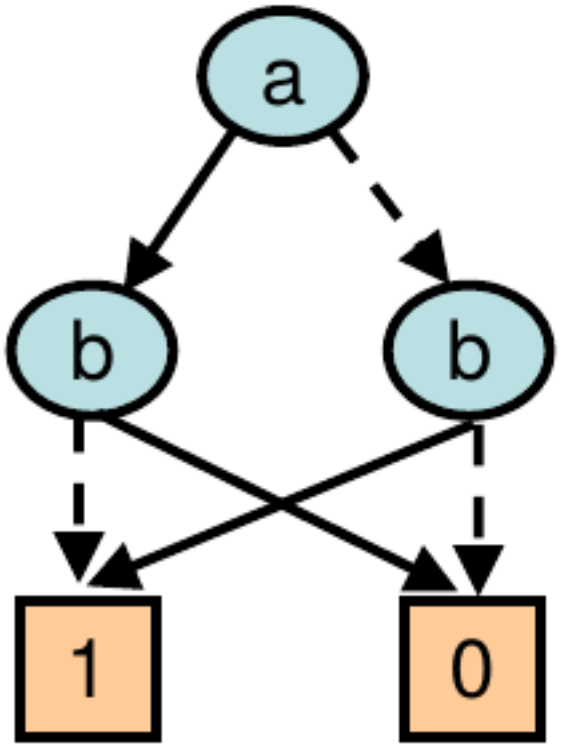
二倍速で見ましょう

# 3　今日のお話




- これをCLから扱うライブラリを紹介

# 4 Decision Diagrams (DDs)

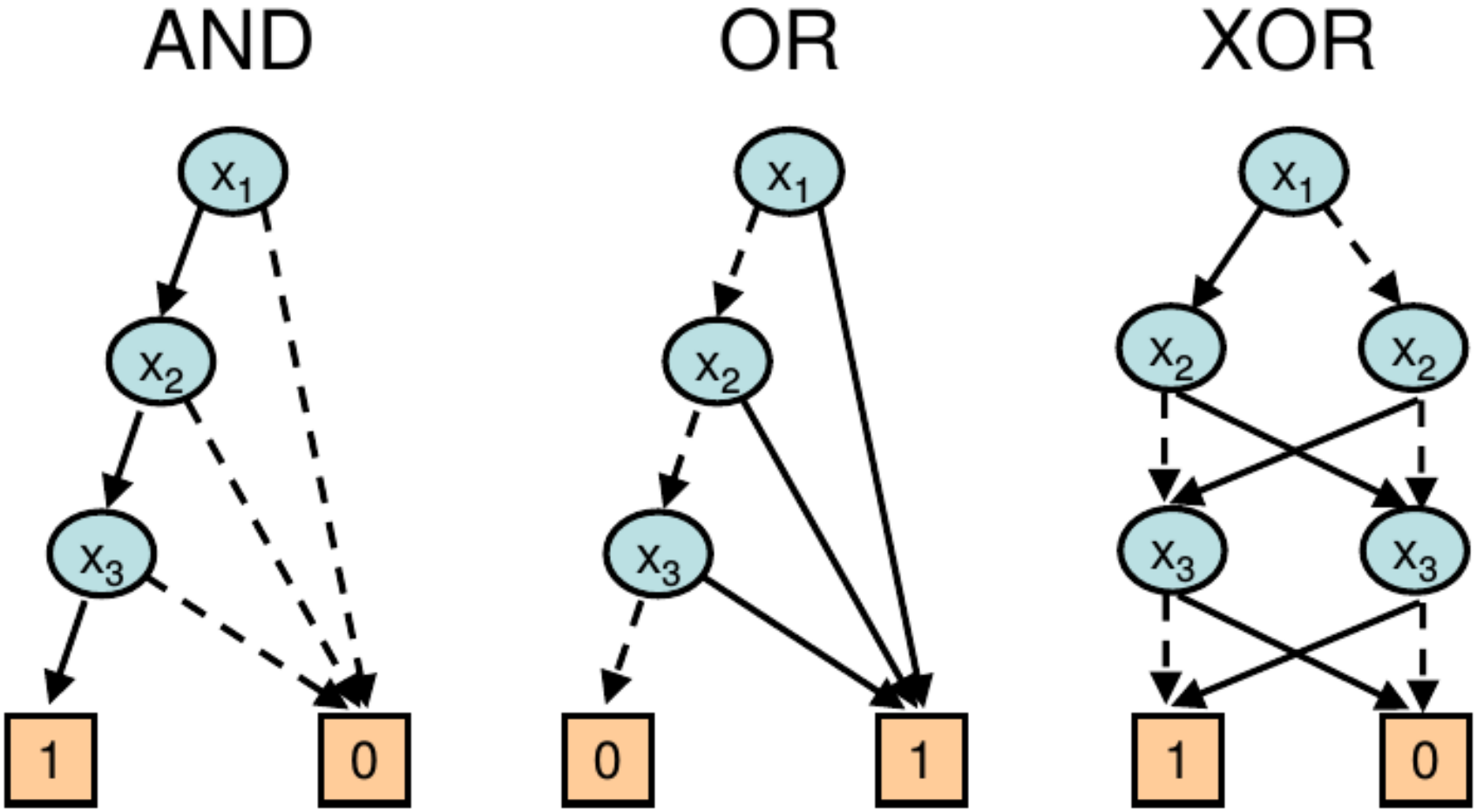



- 決定木(Decision Tree) のグラフ版
- 関数をコンパクトに表現できる:
  - $B = \{0, 1\}$
  - $f : B^n \to B$ : BDD,ZDD
  - $f : B^n \to R$ も可能 (ADD)

## 4.1　XOR関数を線形サイズで保持できる

Treeでは指数サイズのノードが必要。

AND と OR は DDでもTreeでも線形。



## 4.2 Boolean Function を表現してみる (真理値表)

| $a$ | $b$ | $c$ | $F(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

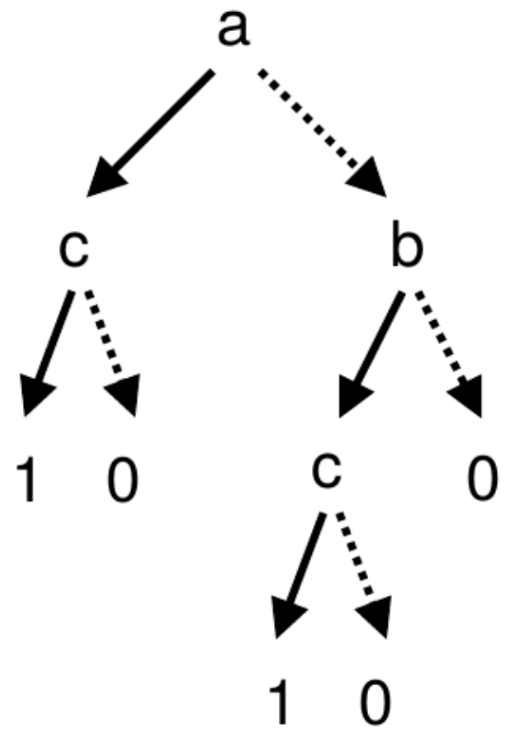
- 真理値表を使えば出来る
- 動くけど、もっとコンパクトに出来る

## 4.3 Boolean Function を表現してみる (木/Decision Tree)

ノードごとにTrue/Falseかで進む枝が決まる

表よりコンパクト

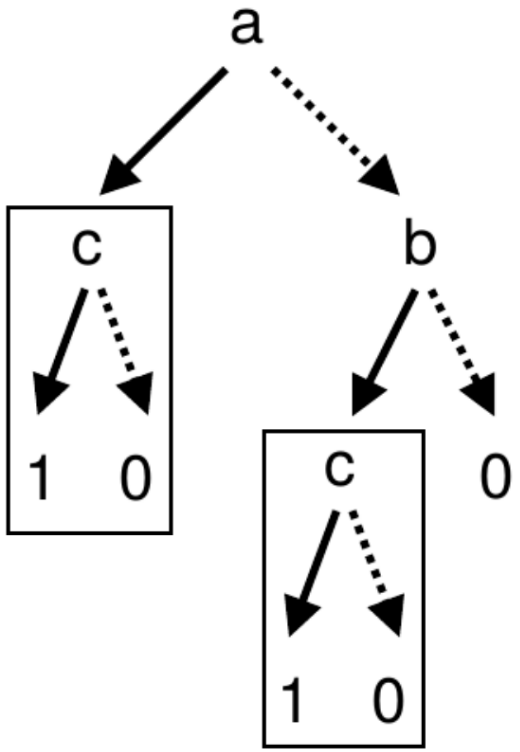
| $a$ | $b$ | $c$ | $F(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |



## 4.4 Boolean Function を表現してみる (木/Decision Tree)

でもまだ無駄な重複がある

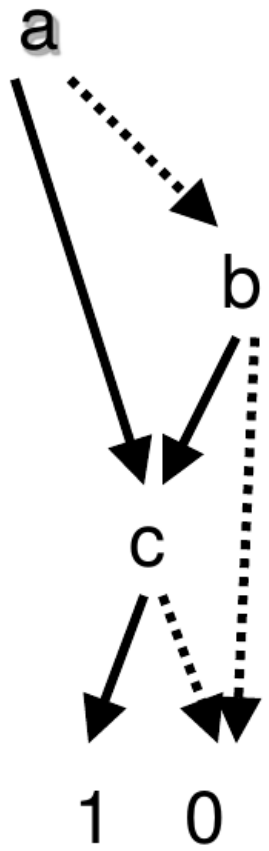
| $a$ | $b$ | $c$ | $F(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |



## 4.5 Boolean Function を表現してみる (グラフ/Decision Diagram)

重複を共有してグラフにしよう!

| $a$ | $b$ | $c$ | $F(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |



## 4.6 Decision Diagram 定義

```
node :: (index, then, else)
```

then 枝: index 番目の boolean 引数が true の時にたどる枝 (1-枝, true 枝)

else 枝: index 番目の boolean 引数が false の時にたどる枝 (0-枝, false 枝)

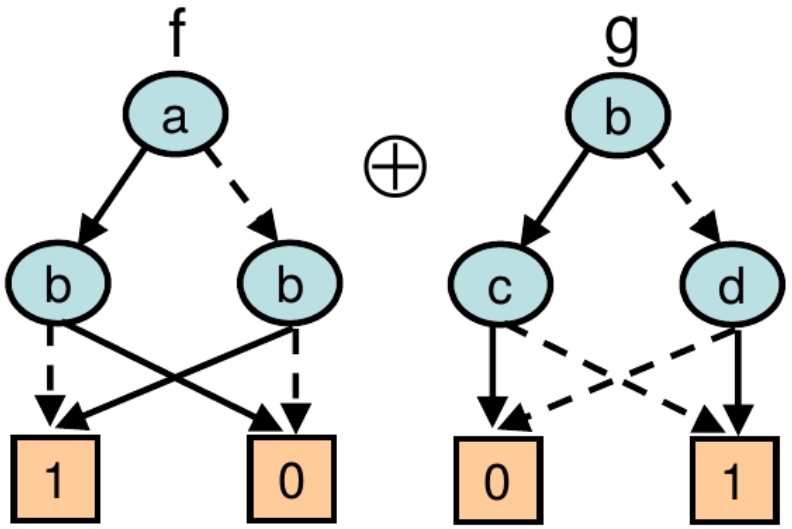
ハッシュテーブルでノードを管理

→同じ index と 子ノード を持つノードは 1 つしか存在しない (キャッシュされる)

かつ、グラフ上で常に index が降順で現れる (Ordered DD)

## 4.7　関数同士の演算を高速に行える

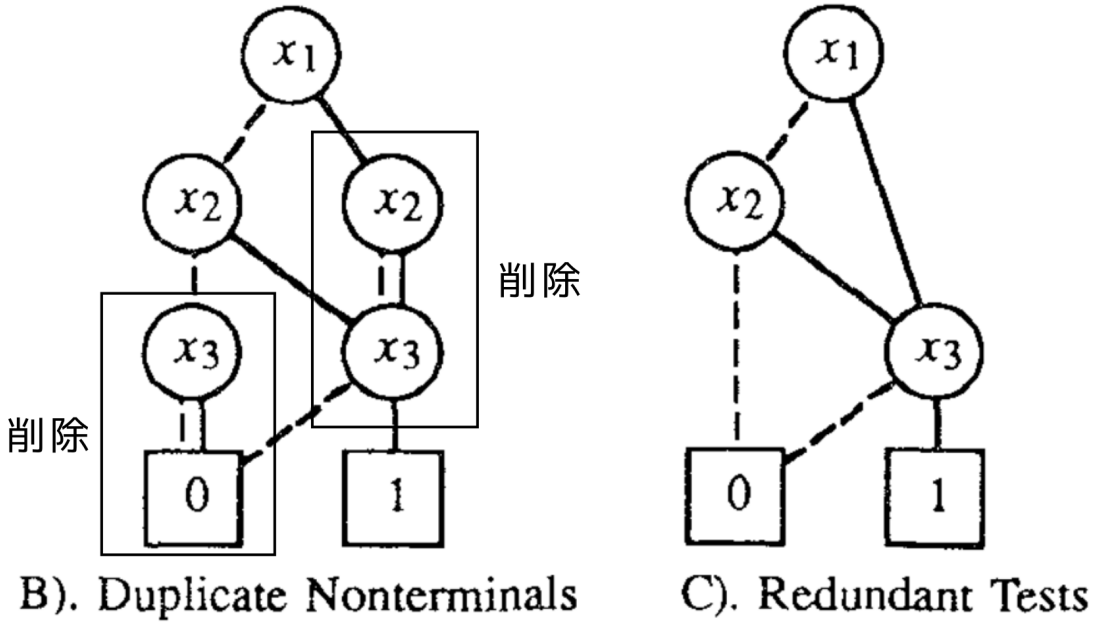
- 関数同士の演算 (代数系)
- BDD: $\neg f, f \wedge g, f \vee g$
- ZDD: $f \setminus g, f \cap g, f \cup g$
- ADD: $-f, f \oplus g, f \otimes g, \max(f, g)$
- コンパクトなまま効率的に計算できる



## 4.8　縮約規則

DD に縮約規則をつけることでさらにコンパクトに出来る

1-枝と0-枝が同じノード を削除 ← 出力に影響を与えない **無駄なノード** だから




正式には **Ordered BDD (OBDD) == DD + 縮約規則 + 変数順序**

Ordered でないBDDを使うことはまれなので, BDDといえば普通OBDD

## 4.9 BDD 同士の演算: Apply

2 つの Boolean 関数 f と g の論理和/論理積などをとることができる

$(f\,R\,g)(x) = f(x)\,R\,g(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots)$ のとき ($R = \wedge, \vee, \ldots$)、

$$f\,R\,g = \mathrm{BDD}(i, \quad f_{x_i=1}\,R\,g_{x_i=1}, \quad f_{x_i=0}\,R\,g_{x_i=0})$$

ただし $i$ は $f, g$ のルートノードの index

$f\,R\,g = \mathrm{Apply}(f, g, R)$ と書くと、 Apply は再帰的に定義可能。

```
(defun apply (f g op)
  (match* (f g)
    (((bdd index1      then1 else1)
      (bdd (= index1) then2 else2))
     (make-bdd :index index1
       :then (apply then1 then2 op)
       :else (apply else1 else2 op)))
    ...(indexが違う場合など)...
```

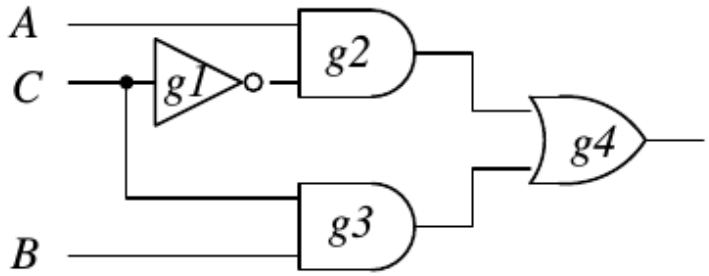
```
...(leaf node の場合など)...                    ))
```

## 4.10 用途: 自動定理証明、回路の検証、自動プログラム検証 (Formal Methods, Verification)

指数的に多い要素を「並列に」操作できる

→ 全ケースを余すこと無く検査できる

注: ここでいう「並列」は、「多数の要素をまとめて処理」ぐらいの意味並列計算機を走らせることとは関連は無い (が、その意味の並列化も可能)




| | Level-Based | Fanout-Based | |
|---|---|---|---|
| | | C0 | C1 |
| $A$ | 0 | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 0 | 0 |
| $C$ | 0 | 1 | 1 |
| $g1$ | 1 | 1 | 1 |
| $g2$ | 2 | 0 | 1 |
| $g3$ | 1 | 0 | 1 |
| $g4$ | 3 | 0 | 1 |

Figure 4: Example circuit

# 5　BDDの問題点

BDD は論理関数を表現するのには良いが、ある種類の関数が得意でない

集合族: $F = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}\}$ — をBDDで表してみる

関数 $f(x_0, x_1, x_2)$ :

例: $S = \{a, b\}$ はFに含まれているか?

集合 $S$ が 集合族 $F$ に含まれれば $f = 1$, 含まれなければ $f = 0$

引数 $x_0, x_1, x_2$: 各要素 $a, b, c$ が $S$ に入力に含まれていれば1, 含まれていなければ0.

$f(1, 1, 0) = 1$, 従って $S \in F$

## 5.1　実際にやってみると...

左は いまいち小さくならない 。

- → これを改良したのが右の **ZDD**

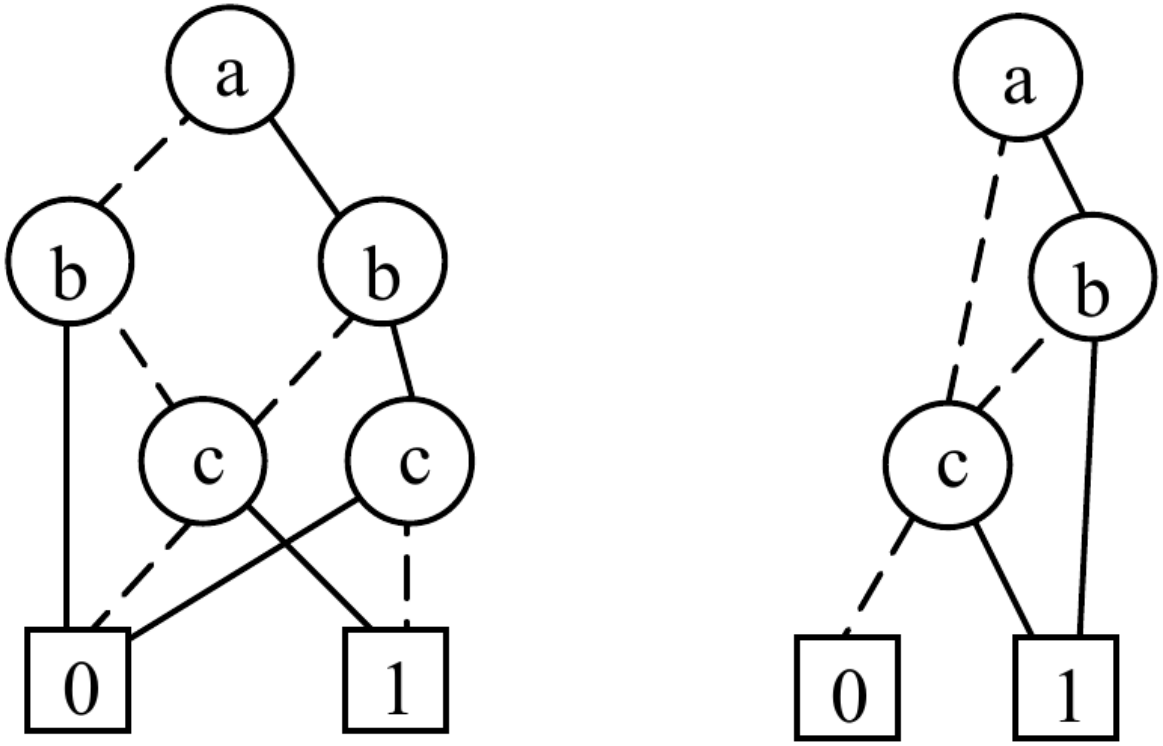
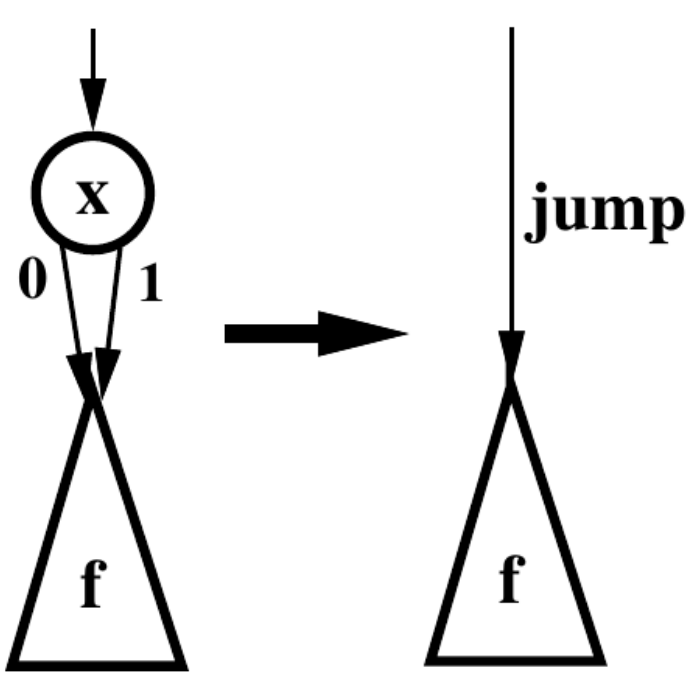


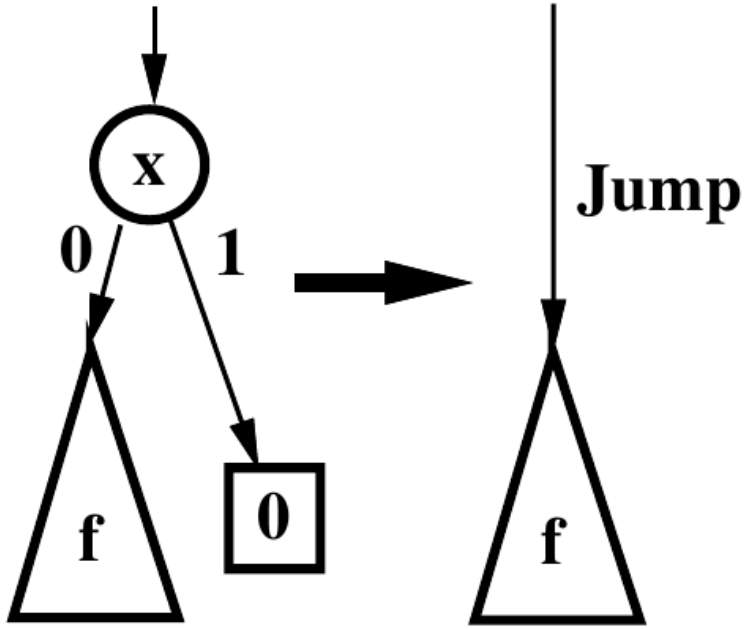

Figure 2. The BDD and the ZDD for the set of subsets {{a,b}, {a,c}, {c}}.

## 5.2　別の縮約規則: Zero-suppressed Decision Diagram (ZDD)

BDD: 同じなら削除




ZDD: 1-枝が0なら削除



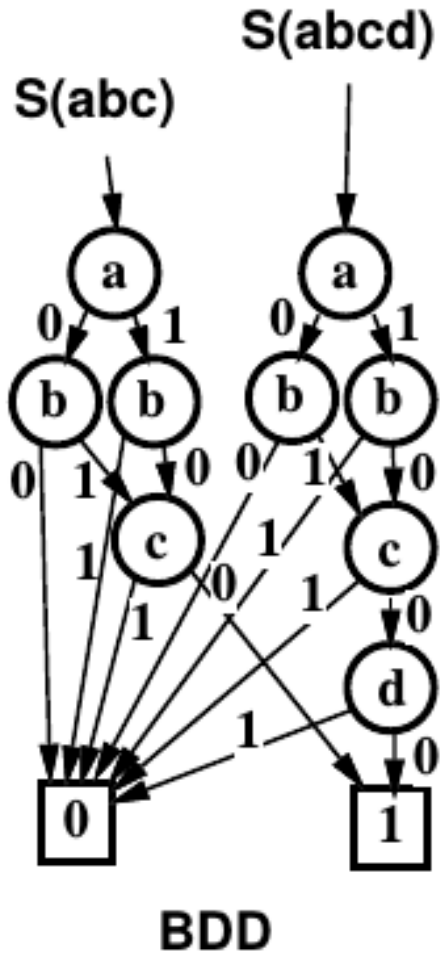
## 5.3 同じ関数でも zdd のほうが小さいのは...

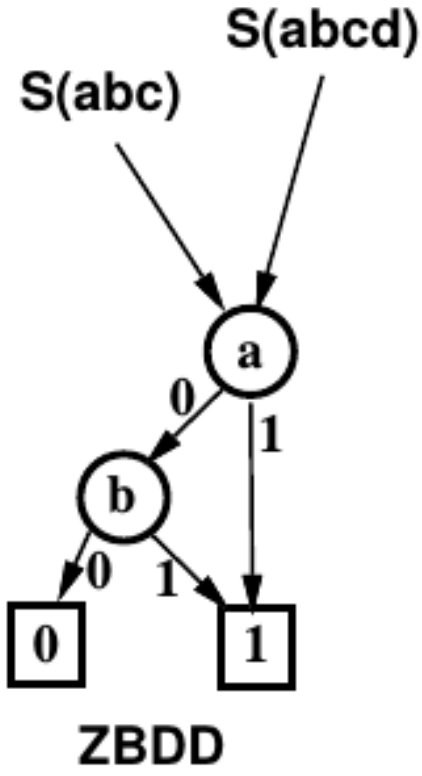
$S(abc)$:

| abc | S |
|---|---|
| 000 | 0 |
| 100 | 1 |
| 010 | 1 |
| 110 | 0 |
| 001 | 0 |
| 101 | 0 |
| 011 | 0 |
| 111 | 0 |

$S(abcd)$:

| abcd | S |
|---|---|
| 0000 | 0 |
| 1000 | 1 |
| 0100 | 1 |
| 1100 | 0 |
| 0010 | 0 |
| 1010 | 0 |
| 0110 | 0 |
| 1110 | 0 |
| 0001 | 0 |
| 1001 | 0 |
| 0101 | 0 |
| 1101 | 0 |
| 0011 | 0 |
| 1011 | 0 |
| 0111 | 0 |
| 1111 | 0 |




- 理由: 殆どの場合で関数の値が **0** だから

- → 0 と 1 の割合が同じぐらいの時は bdd, **0** が多い場合には **zdd** が良い

# 6　ZDD は使える

0 が多い場合には zdd が良い

- 最悪指数時間の問題を動的計画法で解く場合…
  - 空間全体 のうち 使う空間 はほんの少しなので…
  - 保持すべきデータを zdd に貯めれば 殆ど 0
  - **BDD より ZDD が速いはず!**
  - 指数的に速いアルゴリズムを書くのに役立つハズ ≠ 定数倍の高速化

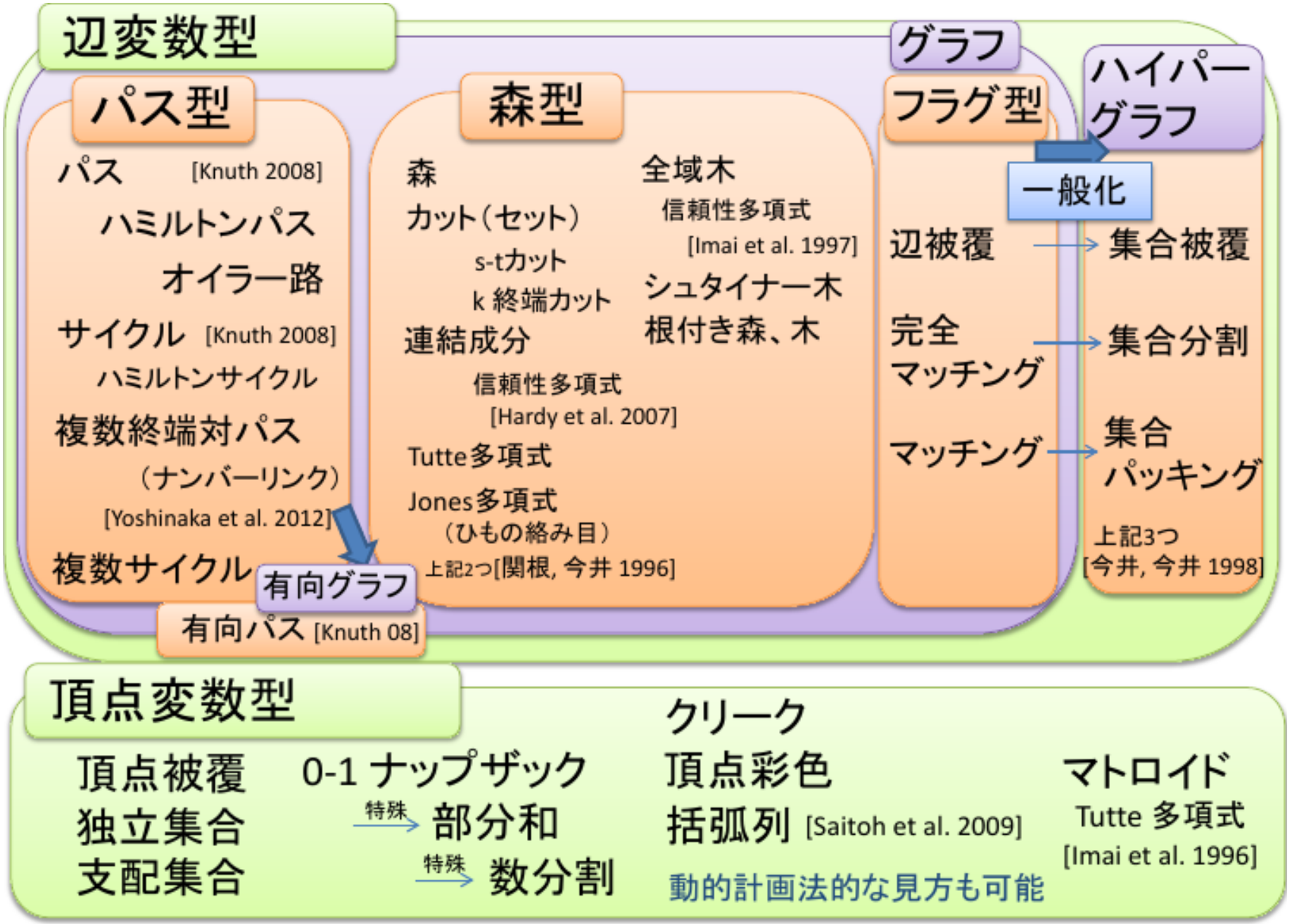
## 6.1 例えば... (ERATOのスライドを借用)

### 様々なグラフ構造

- パス以外にも様々なグラフ構造に対して ZDD 構築可能
  - ハミルトンパス
  - 複数終端対パス
  - 森、全域木
  - マッチング
  - 集合被覆
  - グラフ分割
  - etc.

川原 純, 湊 真一,
"組合せ問題の解を列挙索引化するZDD構築アルゴリズムの汎用化,"
電子情報通信学会コンピュテーション研究会, 信学技報, vol. 112, No. 93,
COMP2012-12, pp. 1-7, June 2012.

## 6.2　例えば… (ERATOのスライドを借用)



## 6.3　例えば... (ERATOのスライドを借用)

### ZDD に関するその他の研究成果

- グラフ彩色問題 [Morrison et al. 2016]
- 多次元ナップサック問題 [安田ら 2016]
- 制約を追加したナップザック問題 [Nishino et al. 2015]
- Web の影響拡散の厳密計算 [Maehara et al. 2017]
- 自然言語処理における最適化 [西野ら 2015]
- 系統樹復元問題に対する列挙アルゴリズム [Kiyomi et al. 2012]

## 6.4　例えば... (ERATOのスライドを借用)

### ZDD に関するその他の研究成果

- 最長路問題の求解 [Kawahara et al. 2016]
- 頂点故障も考慮した信頼性評価 [園田ら 2016]
- 避難計画作成 [Takizawa et al. 2013]
- AND/OR 演算に関する計算量の証明 [Yoshinaka et al. 2012]
- 簡潔データ構造による ZDD のインデックス作成 [Denzumi et al. 2014]
- プリミティブソーティングネットワークの数え上げ [Kawahara et al. 2011]

## 6.5　ZDD と BDD では扱う Apply 操作が違う

BDD: 論理操作 — $\neg f, f \wedge g, f \vee g$

ZDD: 集合操作 — $f \setminus g, f \cap g, f \cup g$

互換性はそこまでではない アルゴリズムも別に作らないといけない

# 7　本題: BDD/ZDD を Lisp から使うためのライブラリ

BDD は沢山のライブラリがある

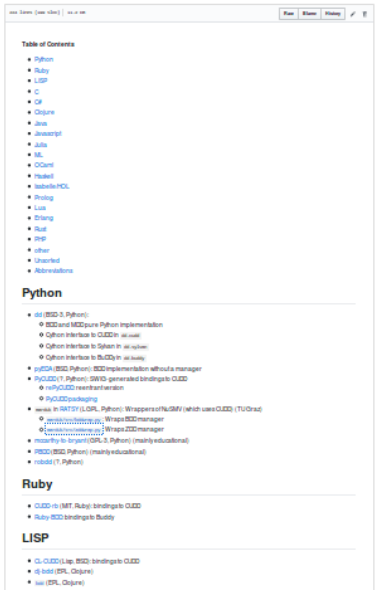


Table of Contents

- Python
- Ruby
- LISP
- C
- C#
- Clojure
- Java
- Javascript
- Julia
- ML
- OCaml
- Haskell
- Isabelle/HOL
- Prolog
- Lua
- Erlang
- Rust
- PHP
- other
- Unsorted
- Abbreviations

## Python

- dd (BSD-3, Python):
  - BDD and MDD pure Python implementation
  - Cython interface to CUDD in
  - Cython interface to Sylvan in
  - Cython interface to BuDDy in
- pyBDA (BSD, Python): BDD implementation without a manager
- PyCUDD (?, Python): SWIG-generated bindings to CUDD
  - reimplementation
  - PyCUDD packaging
- for RATSY (LGPL, Python): Wrappers of NuSMV (which uses CUDD ( TU Graz)
  - Wraps BDD manager
  - Wraps ZDD manager
- mozarthy-to-bryant (GPL-3, Python) : (mainly educational)
- PBDD (BSD, Python) : (mainly educational)
- nobdd (?, Python)

## Ruby

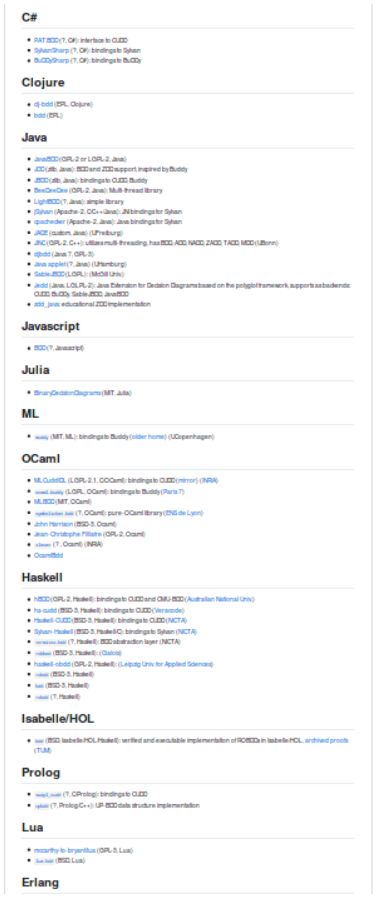
- CUDD-rb (MIT, Ruby): bindings to CUDD
- Ruby BDD bindings to Buddy

## LISP

- CL-CUDD (Lisp, BSD): bindings to CUDD
- cl-bdd (BSL, Clojure)
- bdd (BSL, Clojure)

## C

- CUDD (BSD) : (Colorado U)
  - DDDMP (BSD) : Decision Diagram DuMP package
  - cmDobdd (same as MiniSAT)
  - windowsport
  - Chain-CUDD (BSD-3, C): Extension of CUDD to support BDD with chain nodes
  - Cloud-BDD (?, C): Distributed implementation of BDD package, using CUDD
  - Python:
    - old_model
    - PyCUDD
    - new-stick
  - Ruby
    - CUDD-rb
  - LISP
    - CL-CUDD
  - OCaml:
    - MLCuddIDL
  - Haskell:
    - HBDD
    - hs-cudd
    - Haskell-CUDD
  - Java:
    - JBDD
    - Jedd
  - C#:
    - PAT.BDD
  - Prolog:
    - swipl_cudd
  - Rust:
    - cudd_rust
- BuDDy (Public domain) : (UMichigan)
  - fork/Utamik
  - fork re-entrant version
  - Python:
    - old_buddy
  - ML:
    - mudby
  - OCaml:
    - ocaml_buddy
  - Java:
    - JBDD
  - Ruby:
    - Ruby BDD
  - C#
    - BuDDySharp
- CacBDD (BSD) : (UC Berkeley)
- ABCD (?) : (JAIST)
- CMU-BDD (CMU)
  - hBDD
- Geert Janssen: package used in PVS and available here: ftp://ftp.icsvlsi.tue.nl/pub/users/geert/ (Eindhoven)
- MONA
- TiGeR (C): BDDs and compacted Boolean functions ( DEC)
- PBF (C): parallel BDD package based on partial BFS expansion ( CMU)
- Sylvan ( Apache- 2): Multi- core library using work- stealing framework and lock- less hash table
  - Python:
    - dd
  - Haskell:
    - Sylvan- Haskell
  - Java:
    - jSylvan
    - cpacheder
  - C#
    - SylvanSharp
- BuDDI (LGPL, C++) : (CNRS)
- TdZdd (MIT, C++) : top- down breadth- first- ary DD/ZDD manipulation, parallel processing with OpenMP
- CacBDD (BSD- 3, C++)
- BDDSharp (MIT, C#) : (UCatholique Louvain)
- LaVeBDD (?, C++) : Lattice- valued BDDs ( ULB)
- sdd (FUSIC, C++) : sword- level DDs ( UFreiburg)
- BDS (FUSIC, C) : ( UMass)
- Buddy (GPL- 2, C) : a multi- platform academic BDD package ( UMarbor)
- list of BDD packages with comparisons
- BBDD (?, ?) : bicondi tional BDDs
- RelBDD (GPL, C++)
- LIBDD (BSD, C) : multi- platform BDD package
- BDDC : BDD- based logical calculator
- EHV: Eindhoven BDD package
- (Libraries/tools/models) (C++, GPL- 3)



## C#

- PAT.BDD (?, C#) : interface to CUDD
- SylvanSharp (?, C#) : bindings to Sylvan
- BuDDySharp (?, C#) : bindings to BuDDy

## Clojure

- cljbdd (BSL, Clojure)
- bdd (BSL)

## Java

- JavaBDD (GPL- 2 or LGPL- 2, Java)
- JDD (dlib, Java) : BDD and ZDD support, inspired by Buddy
- JBDD (dlib, Java) : bindings to CUDD, Buddy
- BeeDeeDee (GPL- 2, Java) : Multi- thread library
- LightBDD (?, Java) : simple library
- Sylvan ( Apache- 2, C/C++/Java) : JNI bindings for Sylvan
- cpacheder ( Apache- 2, Java) : Java bindings for Sylvan
- JADE (custom, Java) : ( UFreiburg)
- JINC (GPL- 2, C++) : utilizes multi- threading, has BDD, ADD, NADD, ZADD, TADD, MDD ( UBonn)
- cbjbdd (Java ?, GPL- 3)
- Java applet (?, Java) : ( UHamburg)
- Sable_BDD ( LGPL) : ( McGill Univ)
- Jedd (Java, LGPL- 2) : Java Extension for Decision Diagrams based on the polyglot framework, supports as backends: CUDD, BuDDy, Sable_BDD, JavaBDD
- bdd_java : educational ZDD implementation

## Javascript

- BDD (?, Javascript)

## Julia

- BinaryDecisionDiagrams (MIT, Julia)

## ML

- mudby (MIT, ML) : bindings to Buddy ( older home) ( UCopenhagen)

## OCaml

- MLCuddIDL (LGPL- 2.1, OCaml) : bindings to CUDD ( mirror) ( INRIA)
- ocaml_buddy (LGPL, OCaml) : bindings to Buddy ( Paris 7)
- ML BDD (MIT, OCaml)
- spdeclarer_bdd (?, OCaml) : pure- OCaml library ( ENS de Lyon)
- John Harrison (BSD- 3, Ocaml)
- Jean- Christophe Filliatre (GPL- 2, Ocaml)
- cbmc (?, Ocaml) : ( INRIA)
- Ocamlbdd

## Haskell

- HBDD (GPL- 2, Haskell) : bindings to CUDD and CMU- BDD ( Australian National Univ)
- hs- cudd (BSD- 3, Haskell) : bindings to CUDD ( Versacode)
- Haskell- CUDD (BSD- 3, Haskell) : bindings to CUDD ( NICTA)
- Sylvan- Haskell (BSD- 3, Haskell C) : bindings to Sylvan ( NICTA)
- vernacular_bdd (?, Haskell) : BDD abstraction layer ( NICTA)
- robdd (BSD- 3, Haskell) : ( Galois)
- haskell- robdd (GPL- 2, Haskell) : ( Leipzig Univ. for Applied Science)
- robdd (BSD- 3, Haskell)
- bdd (BSD- 3, Haskell)
- robdd (?, Haskell)

## Isabelle/HOL

- bdd (BSD, Isabelle HOL- Haskell) : verified and executable implementation of RBDDs in Isabelle/HOL, archived proofs ( TUM)

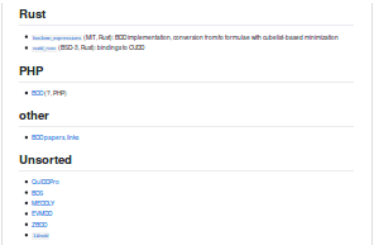
## Prolog

- swipl_cudd (?, CProlog) : bindings to CUDD
- cplbdd (?, Prolog C++) : LP- BDD data structure implementation

## Lua

- mozarthy-to-bryantlua (GPL- 3, Lua)
- lua_bdd (BSD, Lua)

## Erlang



## Rust

- boolean_expressions (MIT, Rust) : BDD implementation, conversion from to formulae with cube list- based minimization
- cudd_rust (BSD- 3, Rust) : bindings to CUDD

## PHP

- BDD (?, PHP)

## other

- BDD papers, links

## Unsorted

- QuBDDPro
- BDS
- MRDDLY
- PVMDD
- ZBDD
- (Unsorted)

## 7.1　そのうち、ZDD に対応するのはあまり多くない

- CUDD: 大御所, C のライブラリ
- SapporoBDD, TdZdd (Graphillion の内部): ERATO が作った C/Python ライブラリ,
- ほか数件だけ, つまり ZDD はあまりまだ注目されていない
- CUDD への CFFI バインディング: CL-CUDD が存在
- → zdd 対応なし, CLOS(遅い), Quicklisp 登録なし, テスト無し, Tutorial 無し、CUDD を自分でビルドしてインストールする必要あり, 最新版の CUDD に対応せず。
- 自分がやったこと: ココらへんを整備して、 これで何かを作れることを実証する こと。

# 8 Mate-ZDD

おねえさんのパス数え上げ問題を解くためのアルゴリズム

Don Knuth の Simpath アルゴリズムをピュアZDDで書き直した、シンプルだが遅いバージョン

これをCL-CUDDを使って実装した

https://github.com/guicho271828/simpath

デモ

---

川原 et al. 数理解析研究所講究録 第 1744 巻 2011 年 35-41 ZDD によるパスの列挙

# 9 Future Work

自分の専門である 自動行動計画ソルバ(プランナ) を ZDD で作る

- 配列ベースの普通の手法に比べた利点:
  - よりスケールする (大きな問題が解ける)
    - メモリ使用量が削減できる
    - 探索の情報を圧縮して保持できるから
  - 細かなループの中のチューニングを気にしなくて良い
    - ZDD が複数の状態をまとめて処理するから

## 9.1 BDDベースのプランニングアルゴリズムは存在する:

**procedure** $BDDA^*$

$Open(f,x) \leftarrow h(f,x) \wedge \Phi_{S0}(x)$

**while** $(Open \neq \emptyset)$

$(f_{\min}, Min(x), Open'(f,x)) \leftarrow goLeft(Open)$

**if** $(\exists x\ (Min(x) \wedge \Phi_G(x))$ **return** $f_{\min}$

$VarTrans_{x,x'}(Min(x))$

$Open''(f,x) \leftarrow \exists x'\ Min(x') \wedge T(x',x) \wedge$

$\exists e'\ h(e',x') \wedge \exists e\ h(e,x) \wedge (f = f_{\min} + e - e' + 1)$

$Open(f,x) \leftarrow Open'(f,x) \vee Open''(f,x)$

**Table 2.** The $A^*$ algorithm using $OBDDs$.

BDDよりZDDのほうがよいハズ

← 指数爆発している全空間に比べ、実際に使われる空間サイズは小さいから

## 9.2 International Planning Competition 2014 で優勝

### Sequential Optimal track: Results

17 planners submitted. Showing the top FIVE

| | | |
|---|---|---|
| SymBA*-2 | 151/280 | **1st** |
| SymBA*-1 | 143/280 | **1st** |
| cGamer | 120/280 | **2nd** |
| SPM&S | 114/280 | 3rd |
| RIDA | 113/280 | 4th |
| Dynamic-Gamer | 99/280 | 5th |

## 9.3 強い

# BDDs Strike Back (in AI Planning)

**Stefan Edelkamp**
Institute of Artificial Intelligence
University of Bremen
edelkamp@tzi.de

**Peter Kissmann** and **Álvaro Torralba**
Foundations of Artificial Intelligence
Saarland University, Saarbrücken
{kissmann,torralba}@cs.uni-saarland.de

# Symbolic Pattern Databases in Heuristic Search Planning

**Stefan Edelkamp**

Institut für Informatik,
Albert-Ludwigs-Universität,
Georges-Köhler-Allee, D-79110 Freiburg
eMail: edelkamp@informatik.uni-freiburg.de

コレに勝つ!

# 10　まとめ

BDD, ZDD を概説

CL-CUDD をまともに使える状態にした

ZDDでお姉さん問題を解くソルバを作った

プランニングに応用したい