1　注意

今日の発表はいろいろなヒトの発表を借りて切り貼りしています

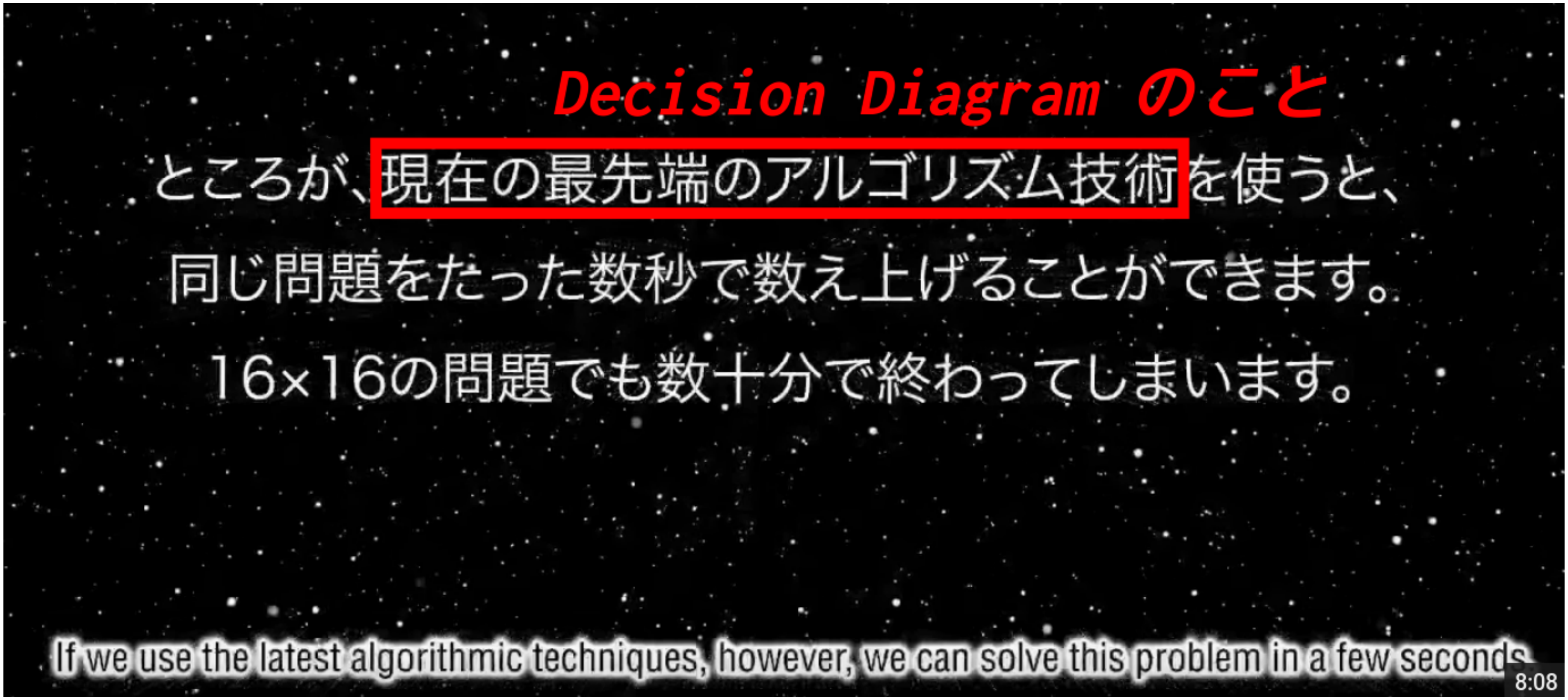
- 『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！
- ZDD とフロンティア法 2017 年版 ver 0.1 奈良先端科学技術大学院大学 川原 純
- ZDD を用いたパスの列挙と索引生成 川原 純 (JST ERATO 研究員)
- ICAPS2012-Tutorial Decision Diagrams in Discrete and Continuous Planning (Scott Sanner)
- AAAI2016-Tutorial Symbolic Methods for Probabilistic Inference, Optimization, and Decision-making (Scott Sanner)
- ICAPS2016-Tutorial Decision Diagrams for Discrete Optimization (John Hooker CMU)

2　Decision Diagram とは　4MIN

「『フカシギの数え方』おねえさんといっしょ！みんなで数えてみよう！」で紹介されないデータ構造

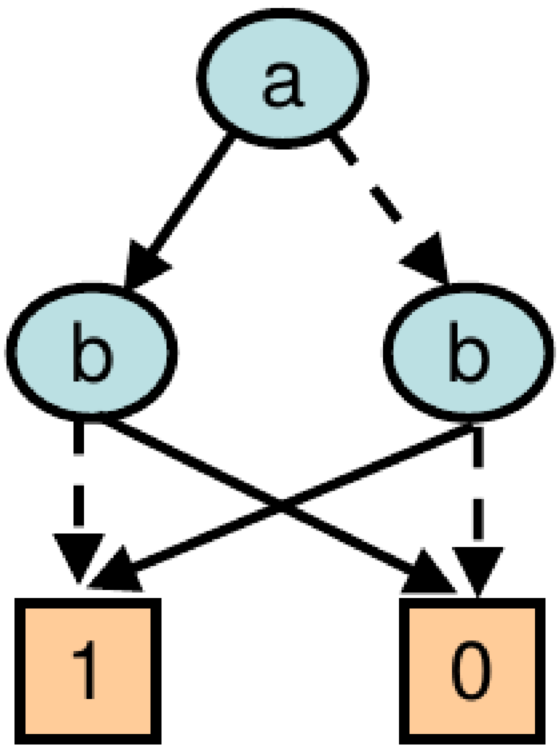
二倍速で見ましょう

3　今日のお話



- これを CL から扱うライブラリを紹介

4 Decision Diagrams (DDs)

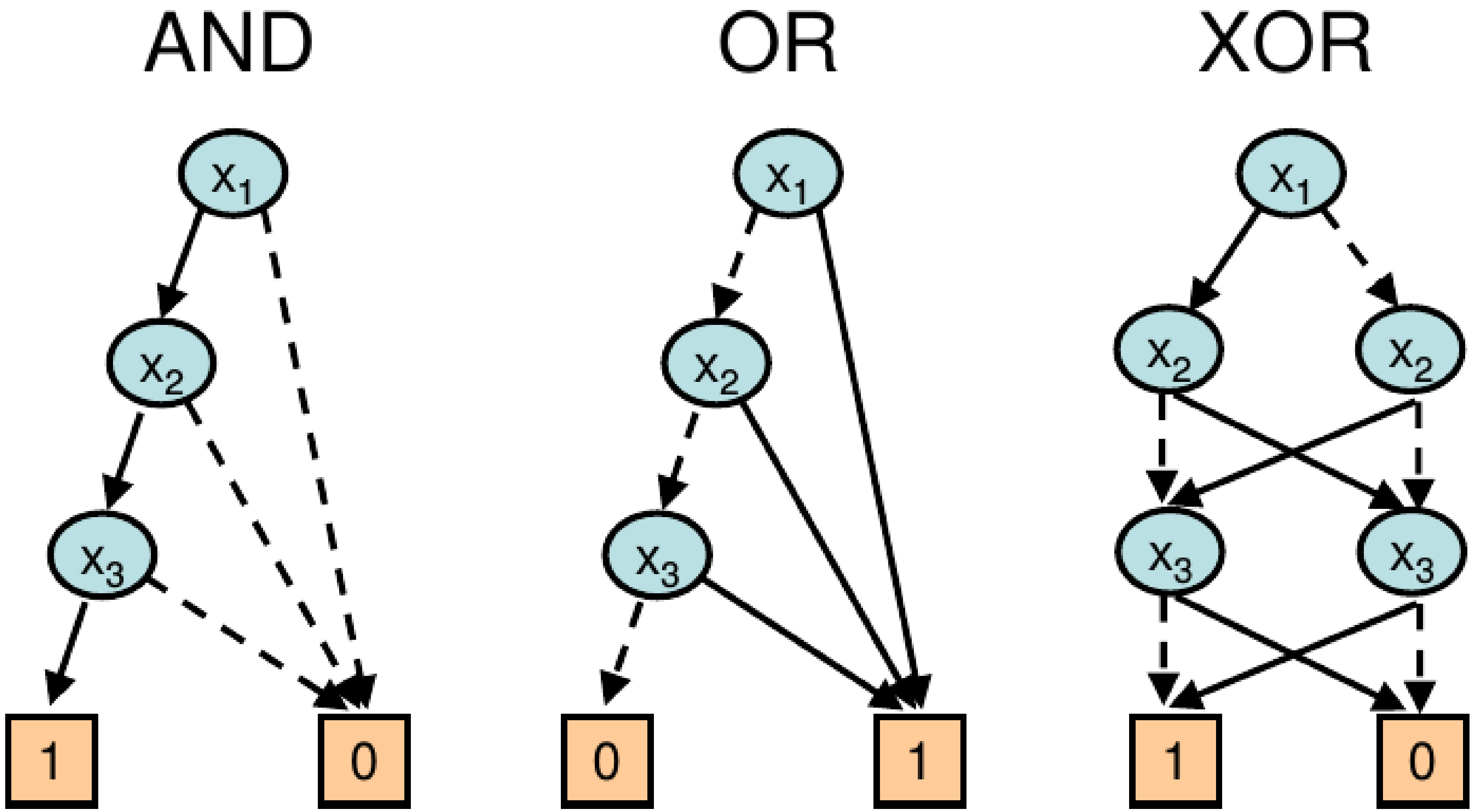


- 決定木 (Decision Tree) のグラフ版
- 関数をコンパクトに表現できる:
  - $B = \{0, 1\}$
  - $f : B^n \rightarrow B$: BDD,ZDD
  - $f : B^n \rightarrow R$ も可能 (ADD)

4.1 XOR 関数を線形サイズで保持できる

Tree では指数サイズのノードが必要。

AND と OR は DD でも Tree でも線形。



4.2 Boolean Function を表現してみる (真理値表)

a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

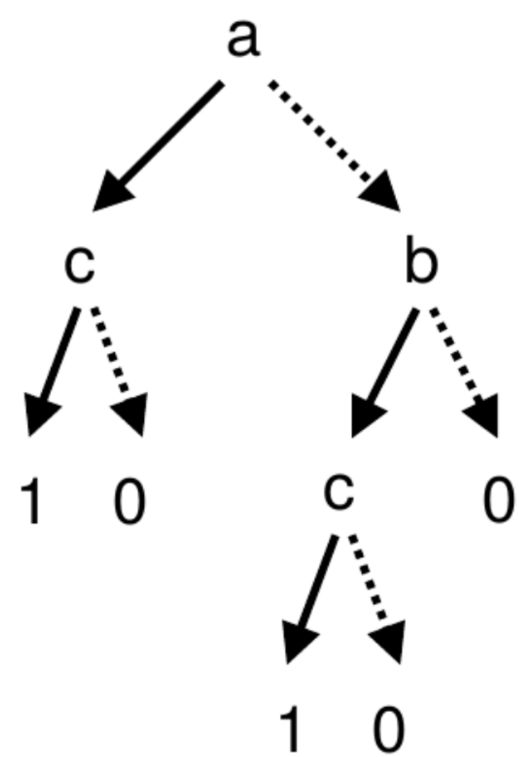
- 真理値表を使えば出来る
- 動くけど、もっとコンパクトに出来る

4.3 Boolean Function を表現してみる (木/Decision Tree)

ノードごとに True/False かで進む枝が決まる

表よりコンパクト

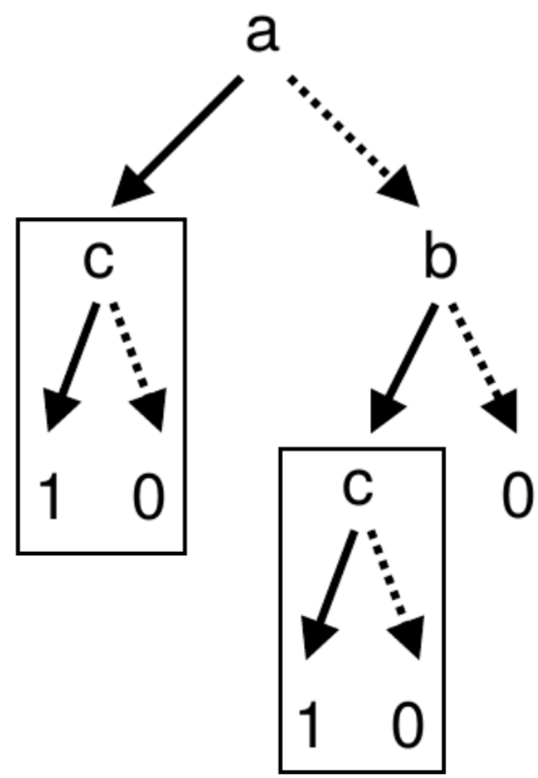
a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



4.4 Boolean Function を表現してみる (木/Decision Tree)

でもまだ無駄な重複がある

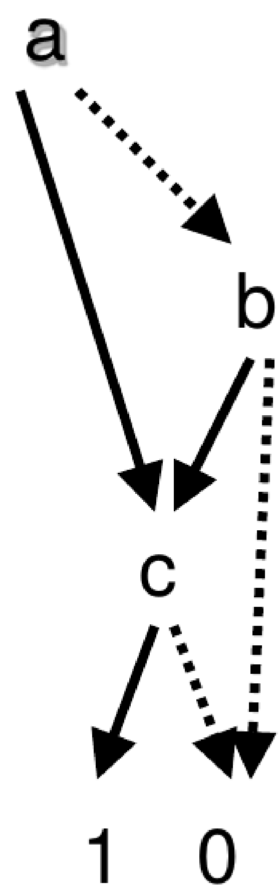
a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



4.5 Boolean Function を表現してみる (グラフ/Decision Diagram)

重複を共有してグラフにしよう!

a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



4.6 Decision Diagram 定義

```
node :: (index, then, else)
```

then 枝: index 番目の boolean 引数が true の時にたどる枝 (1-枝, true 枝)

else 枝: index 番目の boolean 引数が false の時にたどる枝 (0-枝, false 枝)

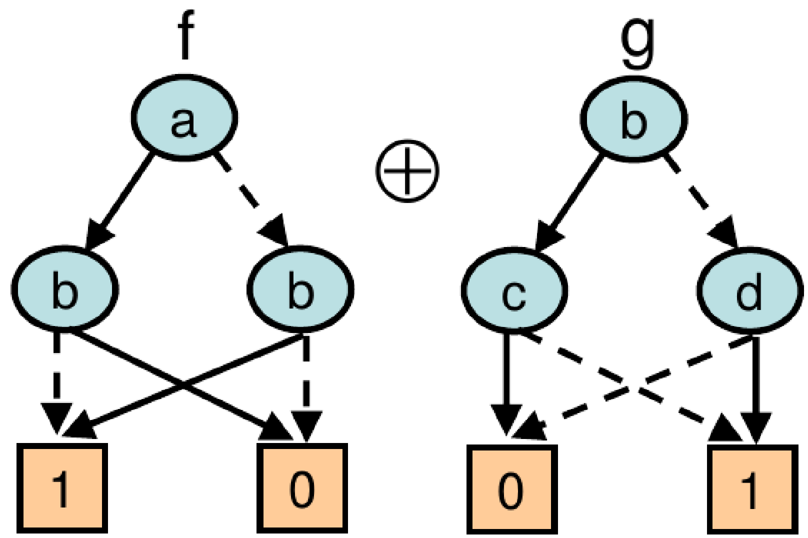
ハッシュテーブルでノードを管理

→同じ index と 子ノード を持つノードは 1 つしか存在しない (キャッシュされる)

かつ、グラフ上で常に index が降順で現れる (Ordered DD)

4.7　関数同士の演算を高速に行える

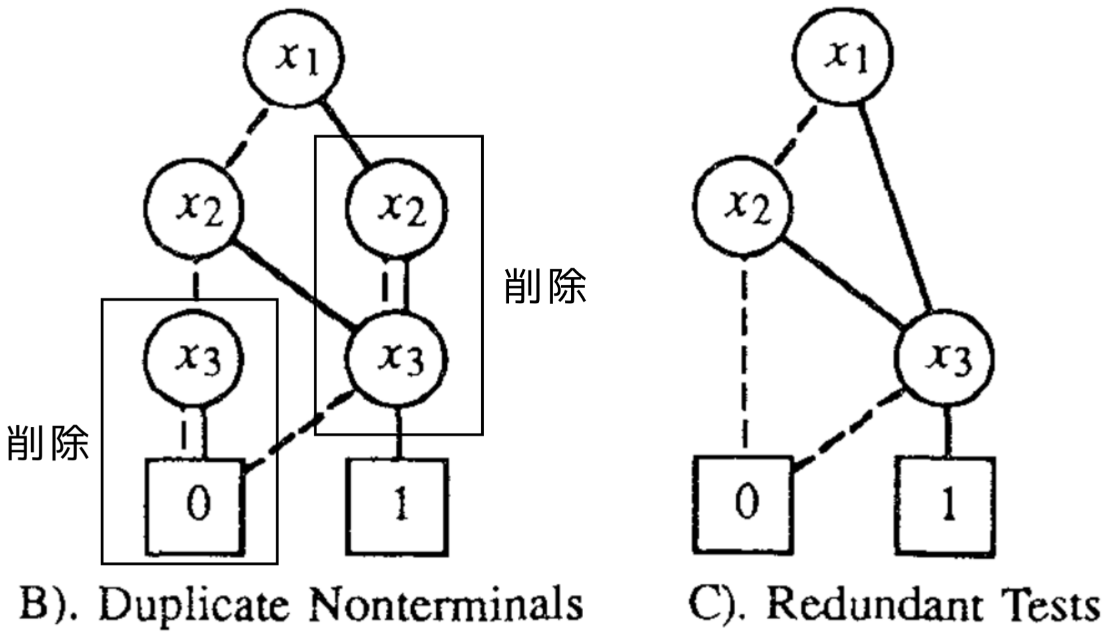
- 関数同士の演算 (代数系)
- BDD: $\neg f, f \wedge g, f \vee g$
- ZDD: $f \setminus g, f \cap g, f \cup g$
- ADD: $-f, f \oplus g, f \otimes g, \max(f, g)$
- コンパクトなまま効率的に計算できる



4.8 縮約規則

DD に縮約規則をつけることでさらにコンパクトに出来る

1-枝と 0-枝が同じノード を削除 ← 出力に影響を与えない 無駄なノード だから



正式には **Ordered BDD (OBDD) == DD + 縮約規則 + 変数順序**

Ordered でない BDD を使うことはまれなので, BDD といえば普通 OBDD

4.9　BDD 同士の演算: Apply

2 つの Boolean 関数 f と g の論理和/論理積などをとることができる

$(f\,R\,g)(x) = f(x)\,R\,g(x),\ x = (x_0, x_1, \ldots)$ のとき ($R = \wedge, \vee, \ldots$)、

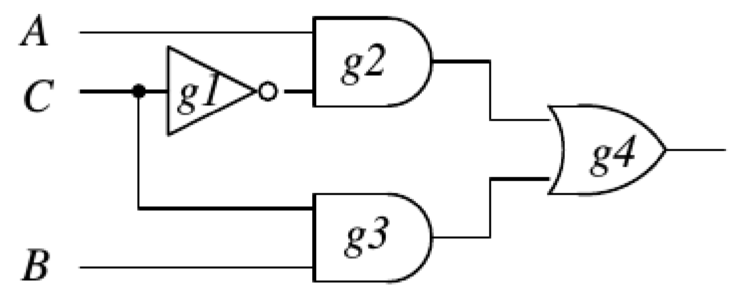
$$f\,R\,g = \mathrm{BDD}(i, \quad f_{x_i=1}\,R\,g_{x_i=1}, \quad f_{x_i=0}\,R\,g_{x_i=0})$$

ただし i は f, g のルートノードの index

$f\,R\,g = \mathrm{Apply}(f, g, R)$ と書くと、 Apply は再帰的に定義可能。

```
(defun apply (f g op)
  (match* (f g)
    (((bdd index1     then1 else1)
      (bdd (= index1) then2 else2))
     (make-bdd :index index1
       :then (apply then1 then2 op)
       :else (apply else1 else2 op)))
    ...(indexが違う場合など)...
    ...(leaf node の場合など)...             ))
```

4.10 用途: 自動定理証明、回路の検証、自動プログラム検証 (Formal Methods, Verification)



指数的に多い要素を「並列に」操作できる
→ 全ケースを余すこと無く検査できる
注: ここでいう「並列」は、「多数の要素をまとめて処理」ぐらいの意味
並列計算機を走らせることとは関連は無い
(が、その意味の並列化も可能)

	Level-Based	Fanout-Based	
		C0	$C1$
A	0	0	0
B	0	0	0
C	0	1	1
$g1$	1	1	1
$g2$	2	0	1
$g3$	1	0	1
$g4$	3	0	1

Figure 4: Example circuit

5 BDDの問題点

BDD は論理関数を表現するのには良いが、ある種類の関数が得意でない

集合族: $F = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}\}$ — を BDD で表してみる

関数 $f(x_0, x_1, x_2)$:

例: $S = \{a, b\}$ は F に含まれているか?

集合 S が 集合族 F に含まれれば $f = 1$, 含まれなければ $f = 0$

引数 x_0, x_1, x_2: 各要素 a, b, c が S に入力に含まれていれば 1, 含まれていなければ 0.

$f(1, 1, 0) = 1$, 従って $S \in F$

5.1 実際にやってみると...

左は いまいち小さくならない 。

- → これを改良したのが右の **ZDD**

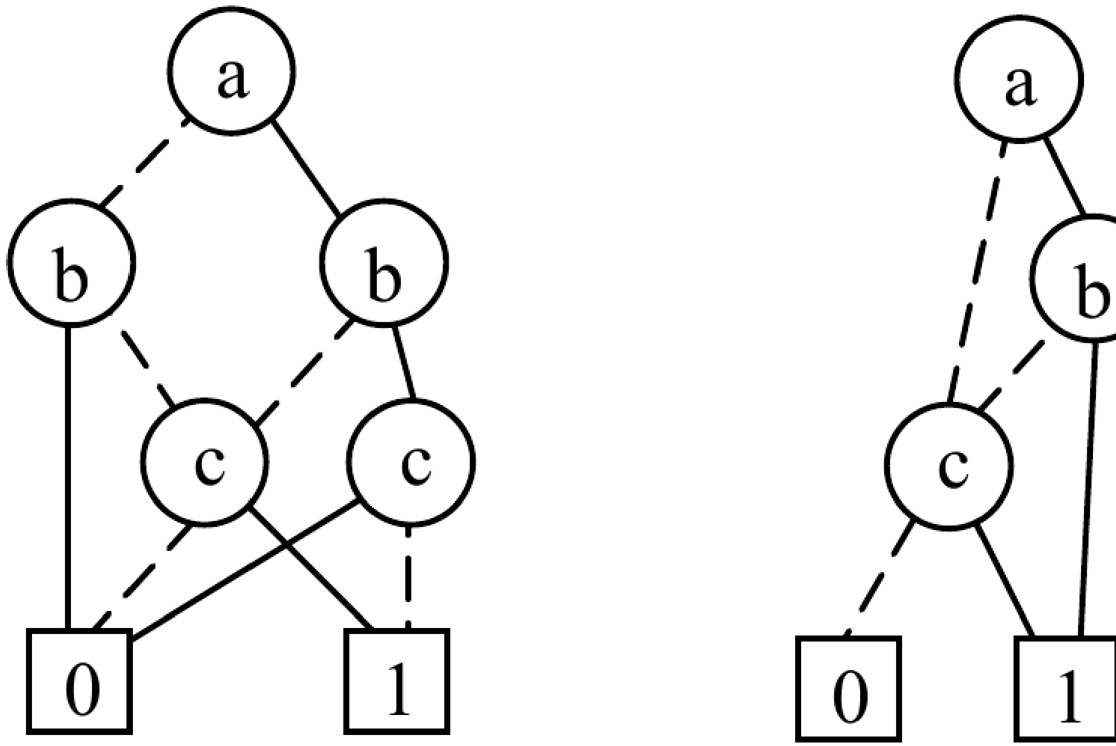
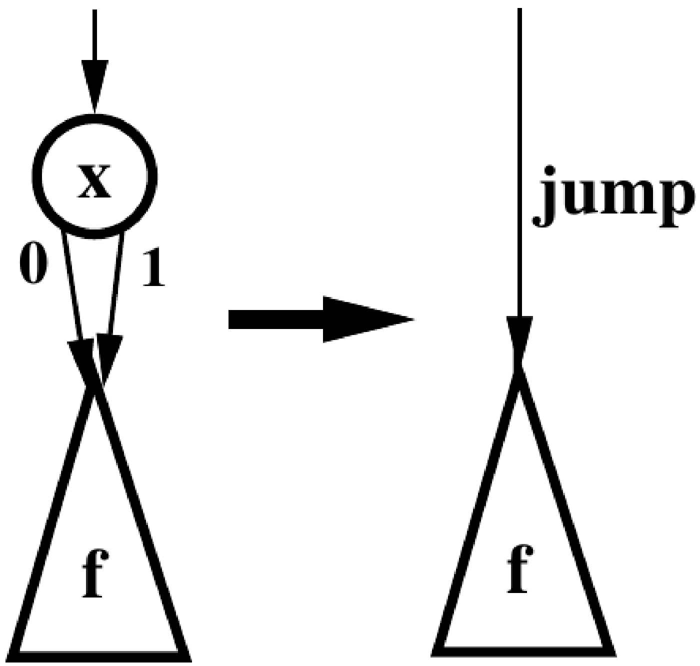


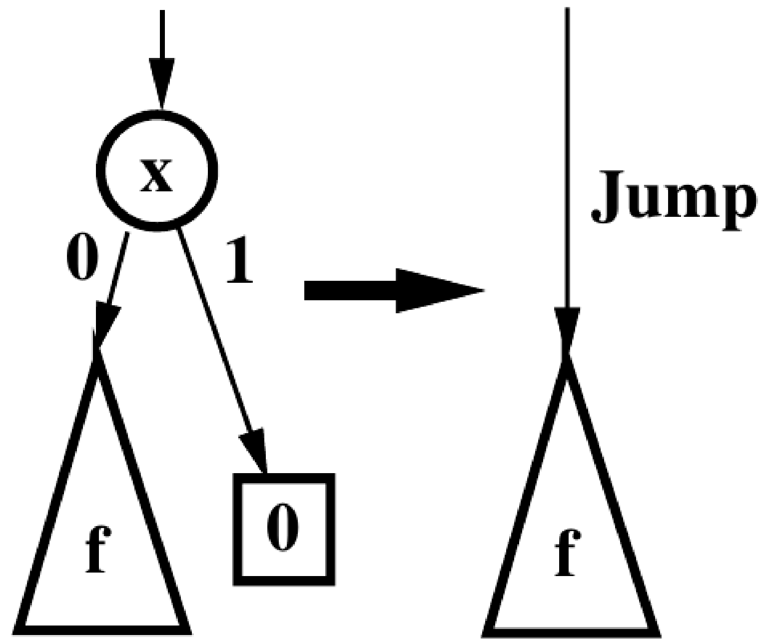
Figure 2. The BDD and the ZDD for the set of subsets {{a,b}, {a,c}, {c}}.

5.2　別の縮約規則: Zero-suppressed Decision Diagram (ZDD)

BDD: 同じなら削除



ZDD: 1-枝が0なら削除



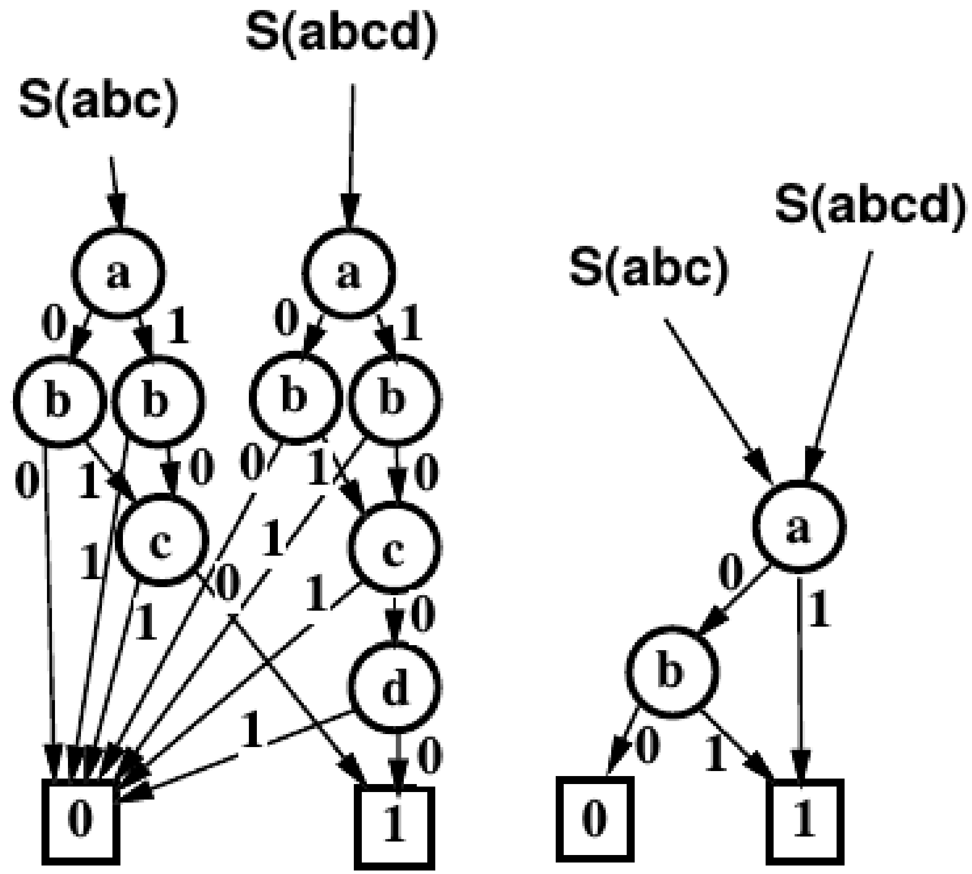
5.3　同じ関数でも zdd のほうが小さいのは…

$S(abc)$:

abc	S
000	0
100	1
010	1
110	0
001	0
101	0
011	0
111	0

$S(abcd)$:

abcd	S
0000	0
1000	1
0100	1
1100	0
0010	0
1010	0
0110	0
1110	0
0001	0
1001	0
0101	0
1101	0
0011	0
1011	0
0111	0
1111	0



BDD　　ZBDD

- 理由: 殆どの場合で関数の値が **0** だから
- → 0 と 1 の割合が同じぐらいの時は bdd, **0** が多い場合には **zdd** が良い

6　ZDD は使える

0 が多い場合には zdd が良い

- 最悪指数時間の問題を動的計画法で解く場合…
  - 空間全体 のうち 使う空間 はほんの少しなので…
  - 保持すべきデータを zdd に貯めれば 殆ど 0
  - **BDD より ZDD が速いはず!**
  - 指数的に速いアルゴリズムを書くのに役立つハズ $\neq$ 定数倍の高速化

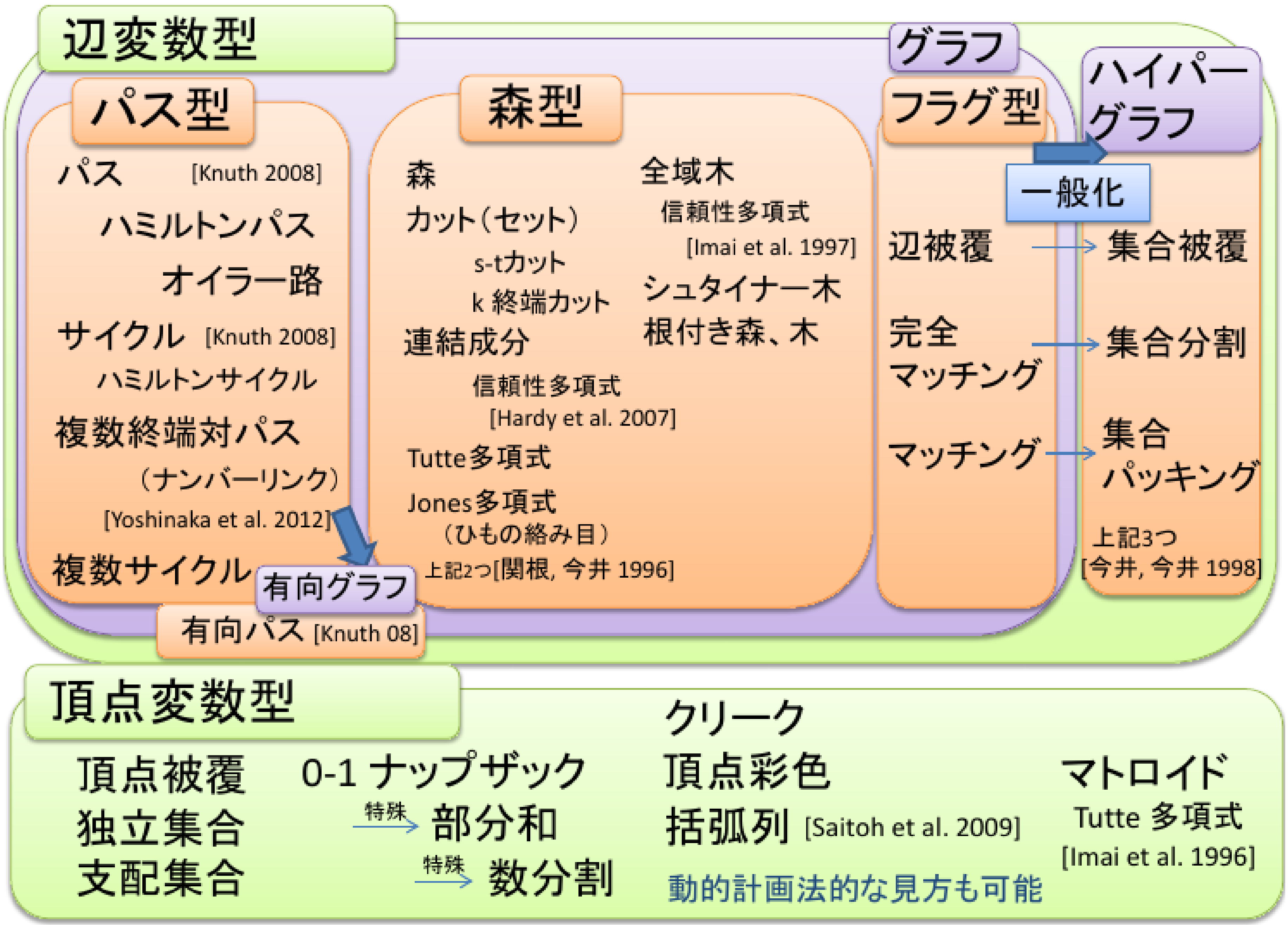
6.1 例えば... (ERATO のスライドを借用)

様々なグラフ構造

- パス以外にも様々なグラフ構造に対して ZDD 構築可能
  - ハミルトンパス
  - 複数終端対パス
  - 森、全域木
  - マッチング
  - 集合被覆
  - グラフ分割
  - etc.

川原 純, 湊 真一,
"組合せ問題の解を列挙索引化するZDD構築アルゴリズムの汎用化,"
電子情報通信学会コンピュテーション研究会, 信学技報, vol. 112, No. 93, COMP2012-12, pp. 1-7, June 2012.

6.2 例えば... (ERATO のスライドを借用)



6.3　例えば... (ERATOのスライドを借用)

ZDD に関するその他の研究成果

- グラフ彩色問題 [Morrison et al. 2016]
- 多次元ナップサック問題 [安田ら 2016]
- 制約を追加したナップザック問題 [Nishino et al. 2015]
- Web の影響拡散の厳密計算 [Maehara et al. 2017]
- 自然言語処理における最適化 [西野ら 2015]
- 系統樹復元問題に対する列挙アルゴリズム [Kiyomi et al. 2012]

6.4 例えば... (ERATOのスライドを借用)

ZDD に関するその他の研究成果

- 最長路問題の求解 [Kawahara et al. 2016]
- 頂点故障も考慮した信頼性評価 [園田ら 2016]
- 避難計画作成 [Takizawa et al. 2013]
- AND/OR 演算に関する計算量の証明 [Yoshinaka et al. 2012]
- 簡潔データ構造による ZDD のインデックス作成 [Denzumi et al. 2014]
- プリミティブソーティングネットワークの数え上げ [Kawahara et al. 2011]

6.5　ZDD と BDD では扱う Apply 操作が違う

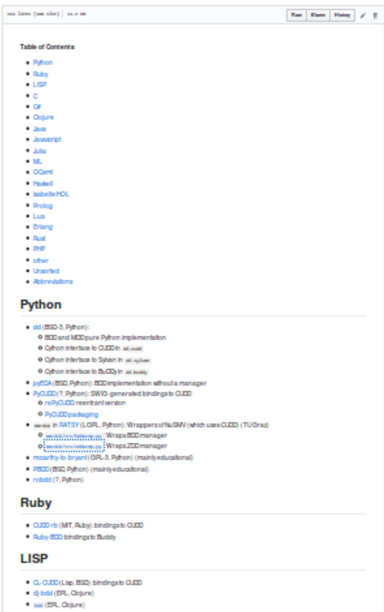
BDD: 論理操作 — $\neg f, f \wedge g, f \vee g$

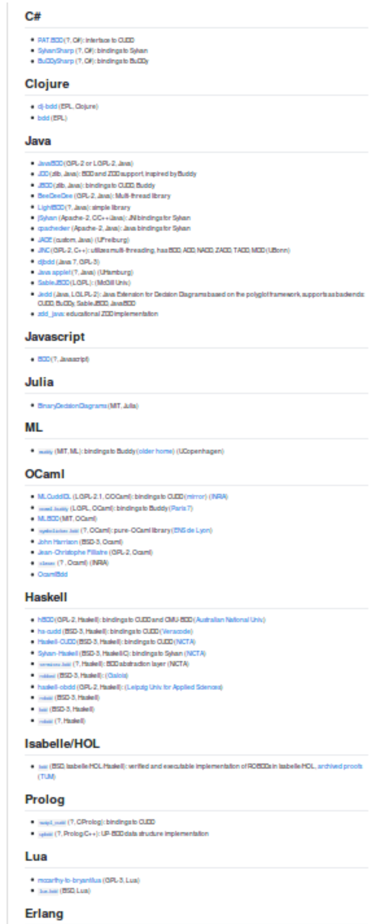
ZDD: 集合操作 — $f \setminus g, f \cap g, f \cup g$

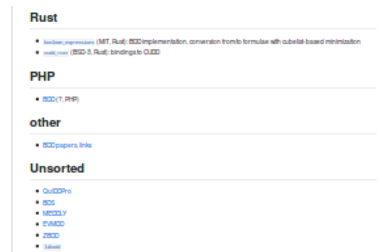
互換性はそこまでではない アルゴリズムも別に作らないといけない

7　本題: BDD/ZDD を Lisp から使うためのライブラリ

BDD は沢山のライブラリがある







7.1 そのうち、ZDD に対応するのはあまり多くない

- CUDD: 大御所, C のライブラリ
- SapporoBDD, TdZdd (Graphillion の内部): ERATO が作った C/Python ライブラリ,
- ほか数件だけ, つまり ZDD はあまりまだ注目されていない
- CUDD への CFFI バインディング: CL-CUDD が存在
- → zdd 対応なし, CLOS(遅い), Quicklisp 登録なし, テスト無し, Tutorial 無し、CUDD を自分でビルドしてインストールする必要あり, 最新版の CUDD に対応せず。
- 自分がやったこと: ココらへんを整備して、 これで何かを作れることを実証する こと。

8 Mate-ZDD

おねえさんのパス数え上げ問題を解くためのアルゴリズム

Don Knuth の Simpath アルゴリズムをピュア ZDD で書き直した、シンプルだが遅いバージョン

これを CL-CUDD を使って実装した

https://github.com/guicho271828/simpath

デモ

9 Future Work

自分の専門である 自動行動計画ソルバ(プランナ) を ZDD で作る

- 配列ベースの普通の手法に比べた利点:
  - よりスケールする (大きな問題が解ける)
    - * メモリ使用量が削減できる
    - * 探索の情報を圧縮して保持できるから
  - 細かなループの中のチューニングを気にしなくて良い
    - * ZDD が複数の状態をまとめて処理するから

9.1 BDDベースのプランニングアルゴリズムは存在する:

procedure $BDDA^*$

$Open(f, x) \leftarrow h(f, x) \wedge \Phi_{S0}(x)$

while $(Open \neq \emptyset)$

$(f_{\min}, Min(x), Open'(f, x)) \leftarrow goLeft(Open)$

if $(\exists x\ (Min(x) \wedge \Phi_G(x))$ **return** $f_{\min}$

$VarTrans_{x,x'}(Min(x))$

$Open''(f, x) \leftarrow \exists x'\ Min(x') \wedge T(x', x) \wedge$
$\exists e'\ h(e', x') \wedge \exists e\ h(e, x) \wedge (f = f_{\min} + e - e' + 1)$

$Open(f, x) \leftarrow Open'(f, x) \vee Open''(f, x)$

Table 2. The A^* algorithm using *OBDDs*.

BDDよりZDDのほうがよいハズ

← 指数爆発している全空間に比べ、実際に使われる空間サイズは小さいから

9.2 International Planning Competition 2014 で優勝

Sequential Optimal track: Results

17 planners submitted. Showing the top FIVE

SymBA*-2	151/280	**1st**
SymBA*-1	143/280	**1st**
cGamer	120/280	**2nd**
SPM&S	114/280	3rd
RIDA	113/280	4th
Dynamic-Gamer	99/280	5th

9.3 強い

BDDs Strike Back (in AI Planning)

Stefan Edelkamp
Institute of Artificial Intelligence
University of Bremen
edelkamp@tzi.de

Peter Kissmann and **Álvaro Torralba**
Foundations of Artificial Intelligence
Saarland University, Saarbrücken
{kissmann,torralba}@cs.uni-saarland.de

Symbolic Pattern Databases in Heuristic Search Planning

Stefan Edelkamp

Institut für Informatik,
Albert-Ludwigs-Universität,
Georges-Köhler-Allee, D-79110 Freiburg
eMail: edelkamp@informatik.uni-freiburg.de

コレに勝つ!

10　まとめ

BDD, ZDD を概説

CL-CUDD をまともに使える状態にした

ZDD でお姉さん問題を解くソルバを作った

プランニングに応用したい