

浅井 政太郎

東京大学大学院 総合文化研究科 福永研究室 D2

1 注意

今日の発表はいろいろなヒトの発表を借りて切り貼りしています

- 『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！
- ZDD とフロンティア法 2017 年版 ver 0.1 奈良先端科学技術大学院大学 川原 純
- ZDD を用いたパスの列挙と索引生成 川原 純 (JST ERATO 研究員)
- ICAPS2012-Tutorial Decision Diagrams in Discrete and Continuous Planning (Scott Sanner)
- AAI2016-Tutorial Symbolic Methods for Probabilistic Inference, Optimization, and Decision-making (Scott Sanner)
- ICAPS2016-Tutorial Decision Diagrams for Discrete Optimization (John Hooker CMU)

2 Decision Diagram とは

4MIN

「『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！」で紹介されないデータ構造

二倍速で見ましょう

3 今日のお話

Decision Diagram のこと

ところが、**現在の最先端のアルゴリズム技術**を使うと、
同じ問題をたった数秒で数え上げることができます。

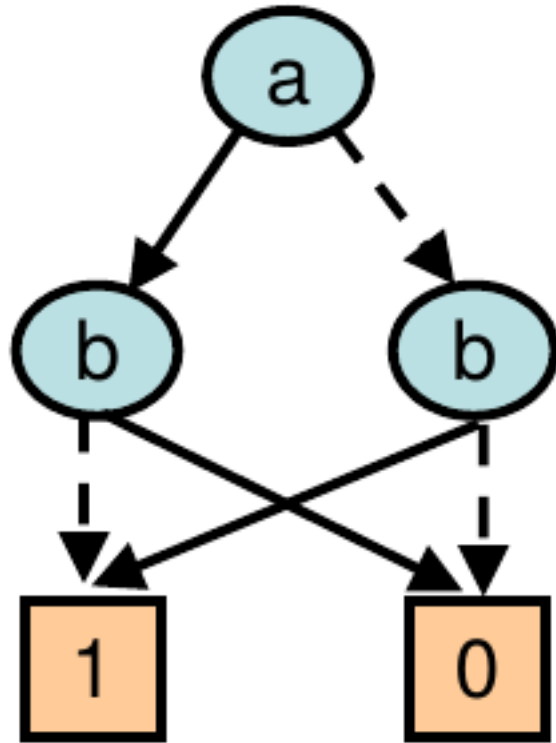
16×16の問題でも数十分で終わってしまいます。

If we use the latest algorithmic techniques, however, we can solve this problem in a few seconds

8:08

- これを CL から扱うライブラリを紹介

4 Decision Diagrams (DDs)

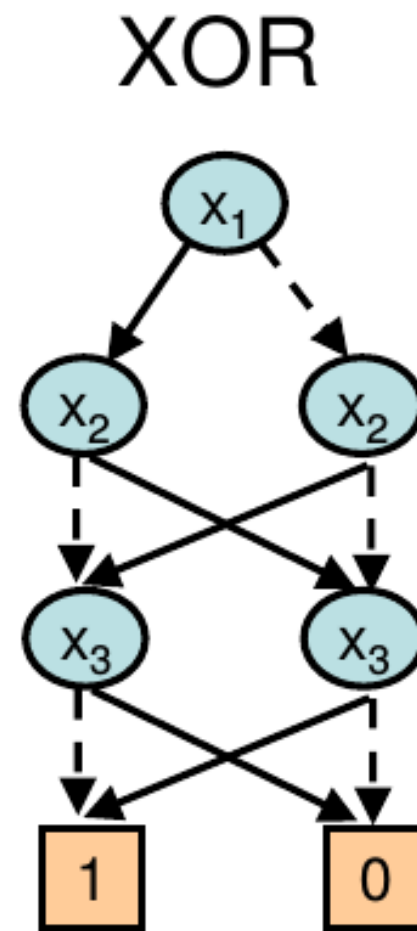
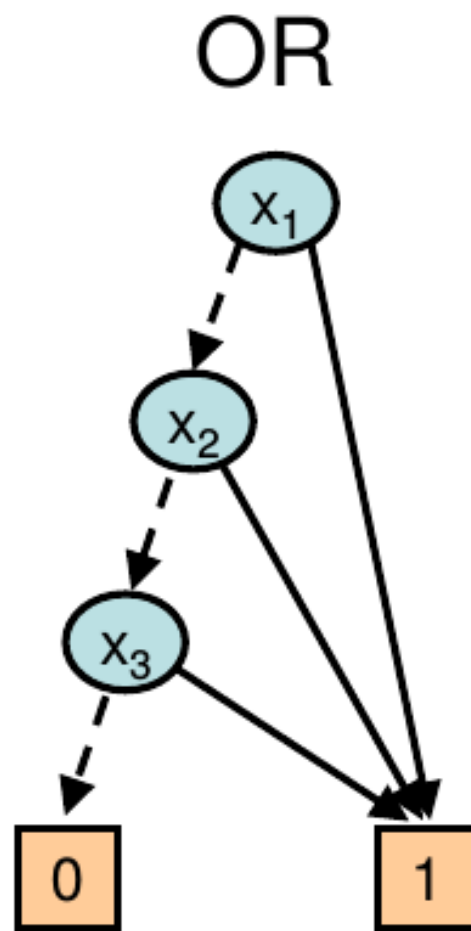
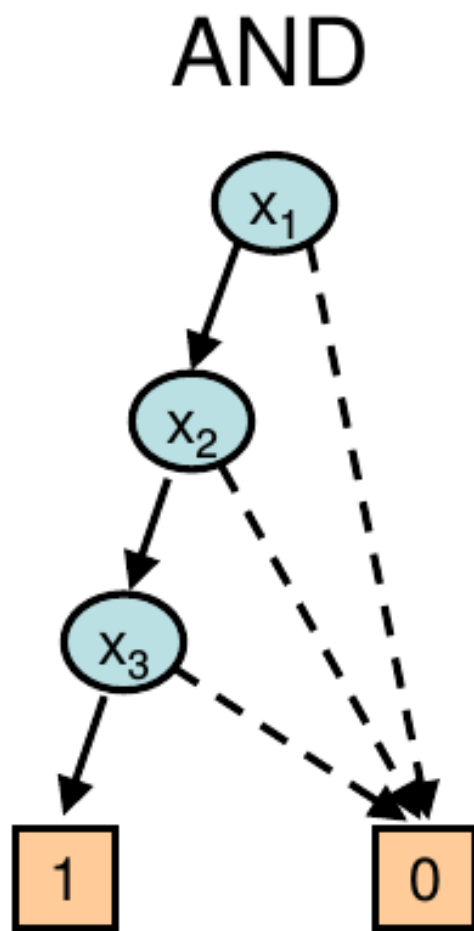


- 決定木 (Decision Tree) のグラフ版
- 関数をコンパクトに表現できる:
 - $B = \{0, 1\}$
 - $f : B^n \rightarrow B : \text{BDD, ZDD}$
 - $f : B^n \rightarrow R$ も可能 (ADD)

4.1 XOR関数を線形サイズで保持できる

Treeでは指数サイズのノードが必要。

AND と OR は DD でも Tree でも線形。



4.2 Boolean Function を表現してみる (真理値表)

a	b	c	$F(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

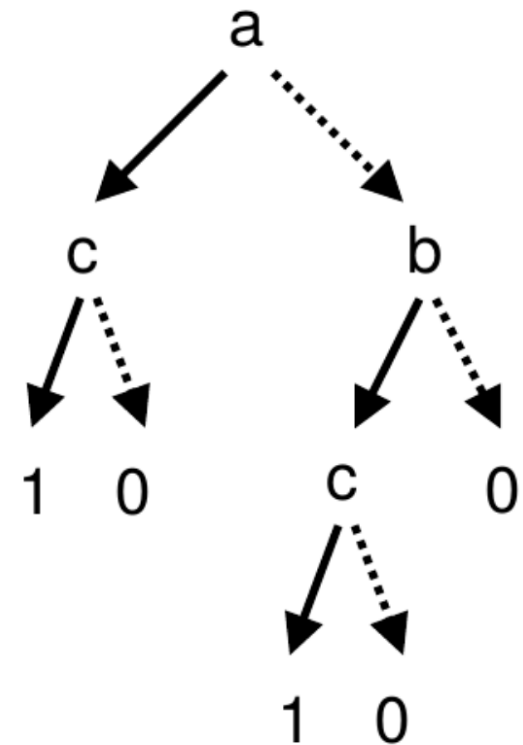
- 真理値表を使えば出来る
- 動くけど、もっとコンパクトに出来る

4.3 Boolean Function を表現してみる (木/Decision Tree)

ノードごとに True/False かで進む枝が決まる

表よりコンパクト

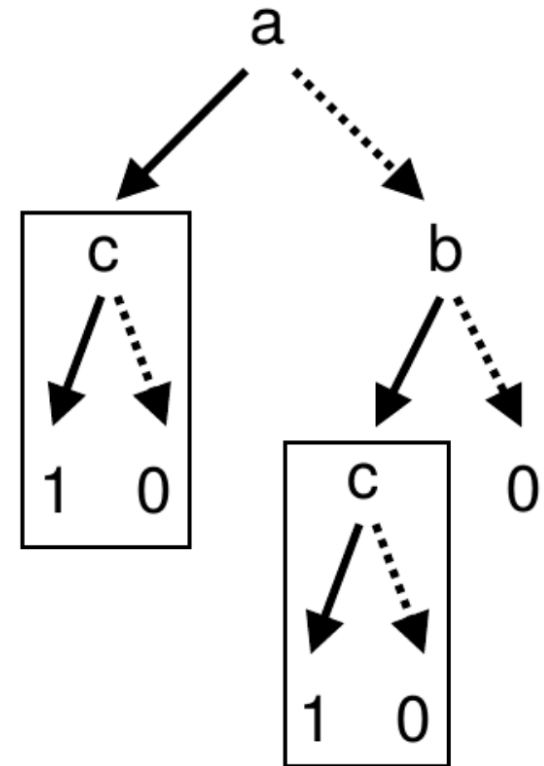
a	b	c	$F(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



4.4 Boolean Function を表現してみる (木/Decision Tree)

でもまだ無駄な重複がある

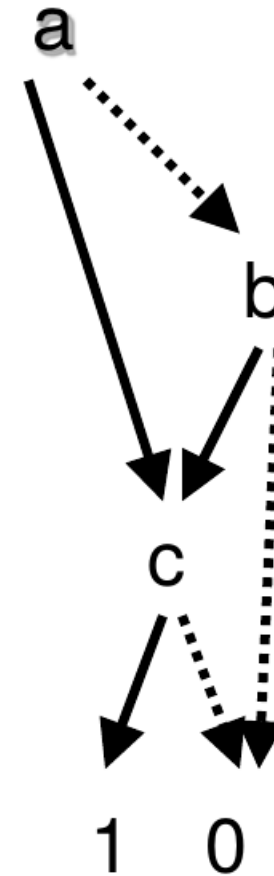
a	b	c	$F(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



4.5 Boolean Function を表現してみる (グラフ/Decision Diagram)

重複を共有してグラフにしよう!

a	b	c	$F(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



4.6 Decision Diagram 定義

node :: (index, then, else)

then 枝: index 番目の boolean 引数が true の時にたどる枝 (1-枝, true 枝)

else 枝: index 番目の boolean 引数が false の時にたどる枝 (0-枝, false 枝)

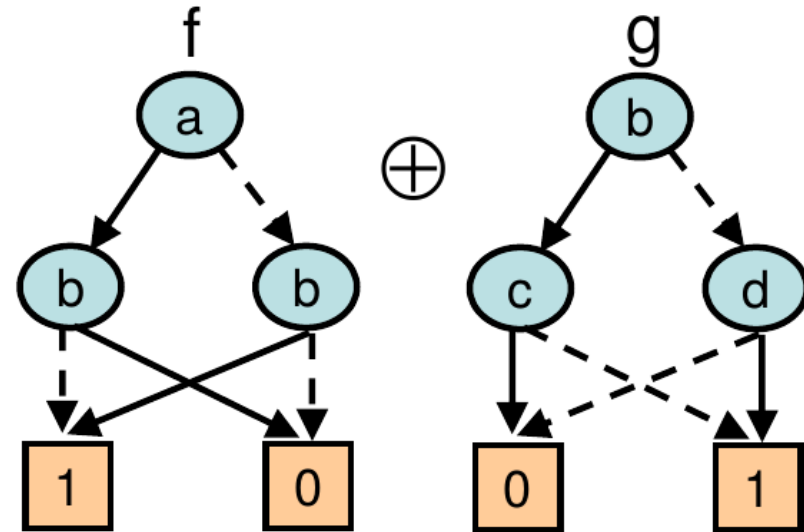
ハッシュテーブルでノードを管理

→同じ index と 子ノード を持つノードは1つしか存在しない (キャッシュされる)

かつ、グラフ上で常に index が降順で現れる (Ordered DD)

4.7 関数同士の演算を高速に行える

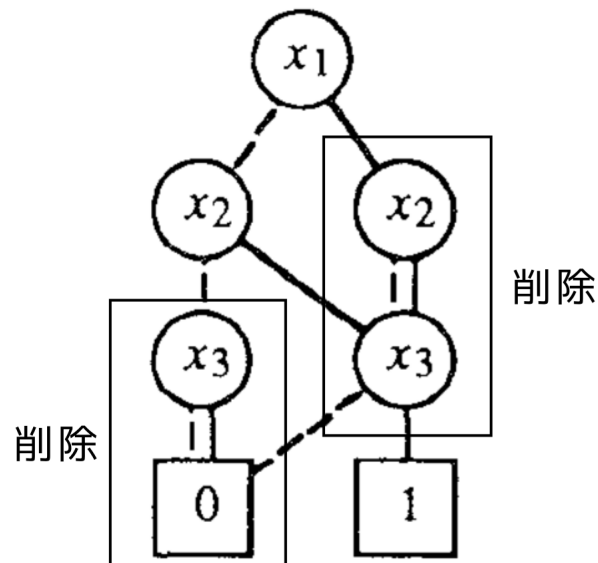
- 関数同士の演算 (代数系)
- BDD: $\neg f, f \wedge g, f \vee g$
- ZDD: $f \setminus g, f \cap g, f \cup g$
- ADD: $-f, f \oplus g, f \otimes g, \max(f, g)$
- コンパクトなまま効率的に計算できる



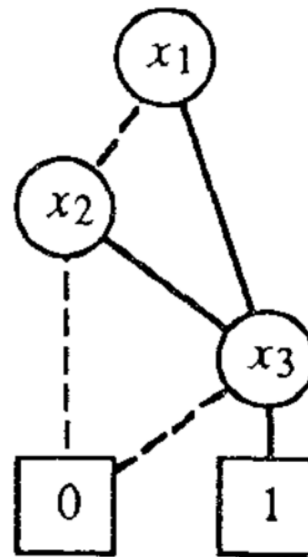
4.8 縮約規則

DD に縮約規則をつけることでさらにコンパクトに出来る

1-枝と0-枝が同じノード を削除 ← 出力に影響を与えない 無駄なノード だから



B). Duplicate Nonterminals



C). Redundant Tests

正式には **Ordered BDD (OBDD)** == **DD** + 縮約規則 + 変数順序

Ordered でない BDD を使うことはまれなので, BDD といえば普通 OBDD

4.9 BDD 同士の演算: Apply

2つの Boolean 関数 f と g の論理和/論理積などをとることができる

$(f R g)(x) = f(x) R g(x)$, $x = (x_0, x_1, \dots)$ のとき ($R = \wedge, \vee, \dots$),

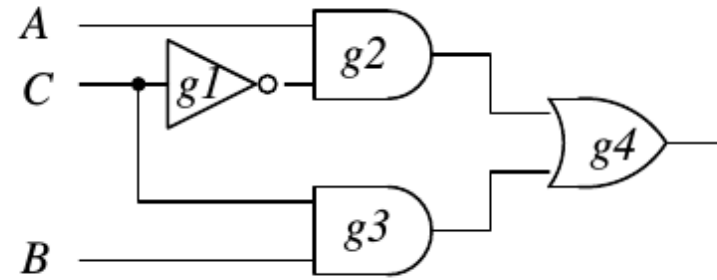
$$f R g = \text{BDD}(i, \quad f_{x_i=1} R g_{x_i=1}, \quad f_{x_i=0} R g_{x_i=0})$$

ただし i は f, g のルートノードの index

$f R g = \text{Apply}(f, g, R)$ と書くと、Apply は再帰的に定義可能。

```
(defun apply (f g op)
  (match* (f g)
    ((bdd index1      then1 else1)
     (bdd (= index1) then2 else2))
    (make-bdd :index index1
              :then (apply then1 then2 op)
              :else (apply else1 else2 op)))
    ... (indexが違う場合など) ...
    ... (leaf node の場合など) ...
  ))
```

4.10 用途: 自動定理証明、回路の検証、自動プログラム検証 (Formal Methods, Verification)



指数的に多い要素を「並列に」操作できる

→ 全ケースを余すことなく検査できる

注: ここでいう「並列」は、「多数の要素をまとめて処理」ぐらいの意味

並列計算機を走らせることとは関連は無い
(が、その意味の並列化も可能)

	Level-Based	Fanout-Based	
		C0	C1
<i>A</i>	0	0	0
<i>B</i>	0	0	0
<i>C</i>	0	1	1
<i>g1</i>	1	1	1
<i>g2</i>	2	0	1
<i>g3</i>	1	0	1
<i>g4</i>	3	0	1

Figure 4: Example circuit

5 BDDの問題点

BDD は論理関数を表現するのには良いが、ある種類の関数が得意でない

集合族: $F = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}\}$ — を BDD で表してみる

関数 $f(x_0, x_1, x_2)$:

例: $S = \{a, b\}$ は F に含まれているか?

集合 S が 集合族 F に含まれれば $f = 1$, 含まれなければ $f = 0$

引数 x_0, x_1, x_2 : 各要素 a, b, c が S に入力に含まれていれば1, 含まれていなければ0.

$f(1, 1, 0) = 1$, 従って $S \in F$

5.1 実際にやってみると...

左は いまいち小さくならない。

- → これを改良したのが右の **ZDD**

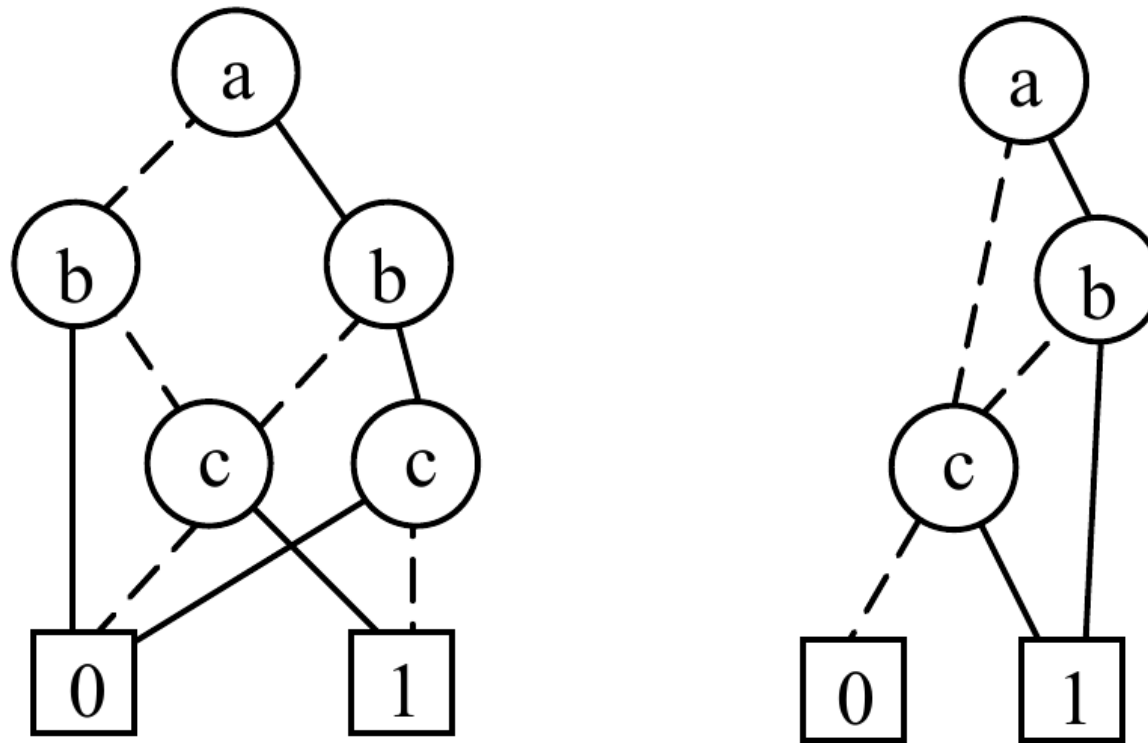
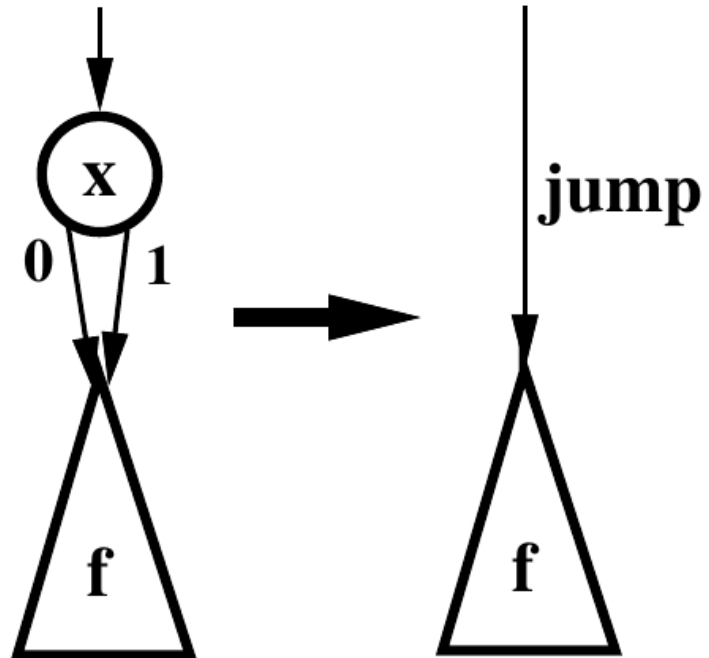


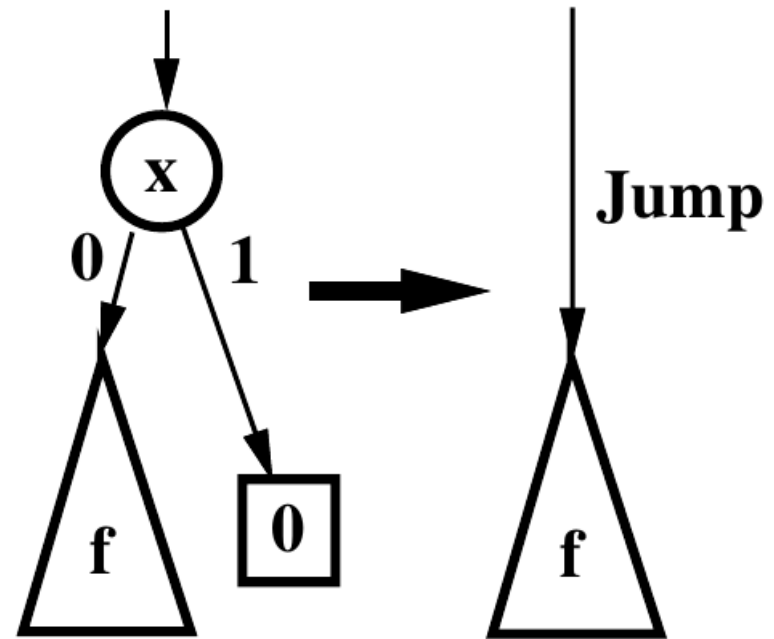
Figure 2. The BDD and the ZDD for the set of subsets $\{\{a,b\}, \{a,c\}, \{c\}\}$.

5.2 別の縮約規則: Zero-suppressed Decision Diagram (ZDD)

BDD: 同じなら削除

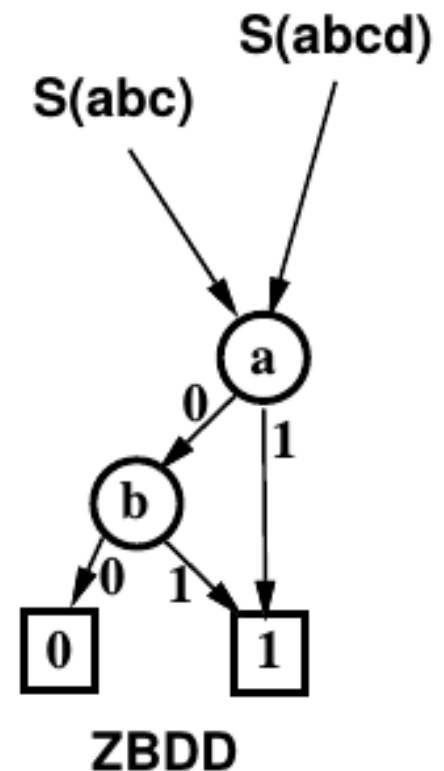
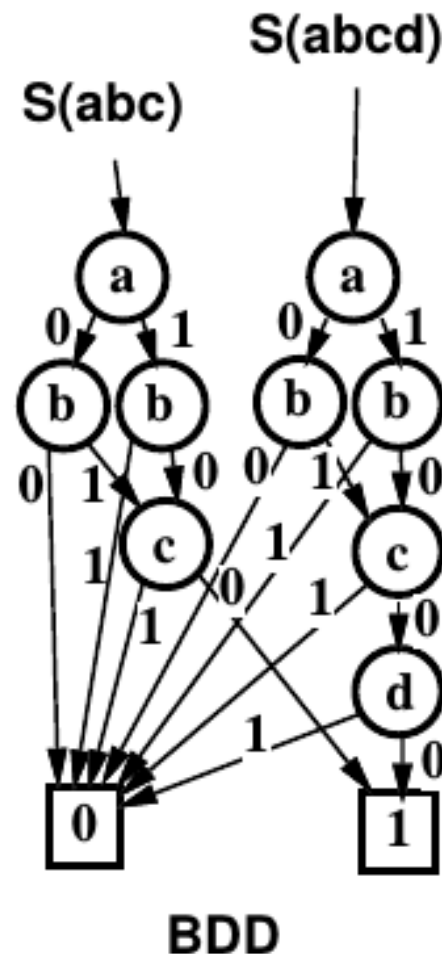


ZDD: 1-枝が0なら削除



5.3 同じ関数でも **zdd** のほうが小さいのは...

$S(abc):$		$S(abcd):$	
abc	S	abcd	S
000	0	0000	0
100	1	1000	1
010	1	0100	1
110	0	1100	0
001	0	0010	0
101	0	1010	0
011	0	0110	0
111	0	1110	0
		0001	0
		1001	0
		0101	0
		1101	0
		0011	0
		1011	0
		0111	0
		1111	0



- 理由: 殆どの場合で関数の値が **0** だから
- \rightarrow 0 と 1 の割合が同じぐらいの時は bdd, **0** が多い場合には **zdd** が良い

6 ZDD は使える

0が多い場合にはzddが良い

- 最悪指数時間の問題を動的計画法で解く場合…
 - 空間全体のうち使う空間はほんの少しなので…
 - 保持すべきデータをzddに貯めれば殆ど0
 - **BDD** より **ZDD** が速いはず!
 - 指数的に速いアルゴリズムを書くのに役立つハズ ≠ 定数倍の高速化

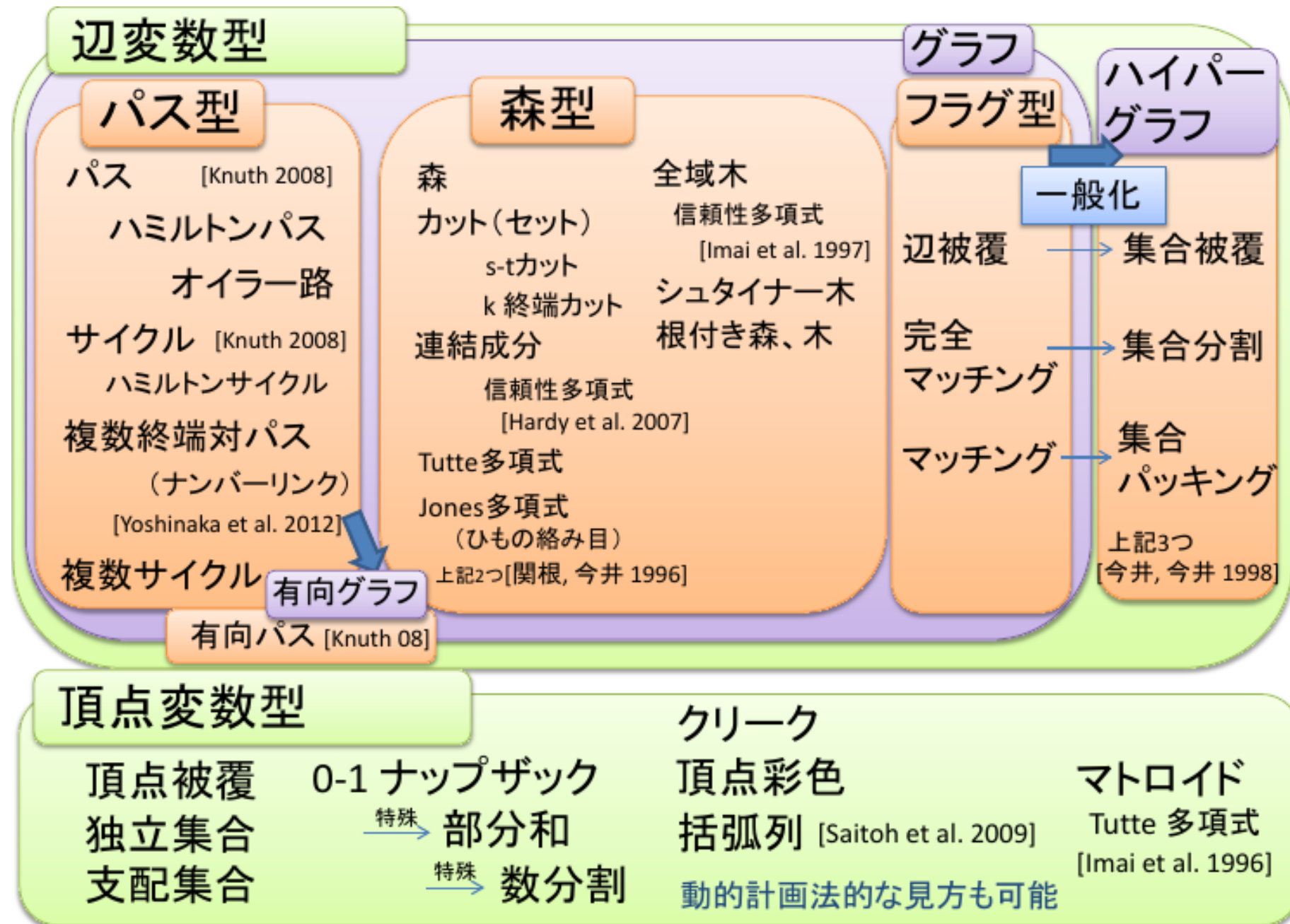
6.1 例えば... (ERATOのスライドを借用)

様々なグラフ構造

- パス以外にも様々なグラフ構造に対してZDD 構築可能
 - ハミルトンパス
 - 複数終端対パス
 - 森、全域木
 - マッチング
 - 集合被覆
 - グラフ分割
 - etc.

川原 純, 湊 真一,
"組合せ問題の解を列挙索引化するZDD構築アルゴリズムの汎用化,"
電子情報通信学会コンピュータ研究会, 信学技報, vol. 112, No. 93,
COMP2012-12, pp. 1-7, June 2012.

6.2 例えば... (ERATOのスライドを借用)



6.3 例えば... (ERATOのスライドを借用)

ZDD に関するその他の研究成果

- グラフ彩色問題 [Morrison et al. 2016]
- 多次元ナップザック問題 [安田ら 2016]
- 制約を追加したナップザック問題
[Nishino et al. 2015]
- Web の影響拡散の厳密計算 [Maehara et al. 2017]
- 自然言語処理における最適化 [西野ら 2015]
- 系統樹復元問題に対する列挙アルゴリズム
[Kiyomi et al. 2012]

6.4 例えば... (ERATOのスライドを借用)

ZDD に関するその他の研究成果

- 最長路問題の求解 [Kawahara et al. 2016]
- 頂点故障も考慮した信頼性評価 [園田ら 2016]
- 避難計画作成 [Takizawa et al. 2013]
- AND/OR 演算に関する計算量の証明
[Yoshinaka et al. 2012]
- 簡潔データ構造による ZDD のインデックス作成
[Denzumi et al. 2014]
- プリミティブソーティングネットワークの数え
上げ [Kawahara et al. 2011]

6.5 ZDD と BDD では扱う Apply 操作が違う

BDD: 論理操作 — $\neg f, f \wedge g, f \vee g$

ZDD: 集合操作 — $f \setminus g, f \cap g, f \cup g$

互換性はそこまでではない アルゴリズムも別に作らないといけない

- [rustlang/rustlang: MT, Rust, BCC implementation, conversion from C to Rust with subgoal based minimization](#)
- [rustlang/rustlang: BCC 5. Rust bindings to C/C++](#)

PHP

- [BCC \(1, PHP\)](#)

other

- [BCC papers link](#)

Unsorted

- [Gutierrez](#)
- [BCC](#)
- [MCCOLY](#)
- [FANED](#)
- [BCC](#)
- [BCC](#)

7.1 そのうち、**ZDD** に対応するのはあまり多くない

- CUDD: 大御所, C のライブラリ
- SapporoBDD, TdZdd (Graphillion の内部): ERATO が作った C/Python ライブラリ,
- ほか数件だけ, つまり ZDD はあまりまだ注目されていない
- CUDD への CFFI バインディング: CL-CUDD が存在
- → zdd 対応なし, CLOS(遅い), Quicklisp 登録なし, テスト無し, Tutorial 無し、CUDD を自分でビルドしてインストールする必要あり, 最新版の CUDD に対応せず。
- 自分がやったこと: ココらへんを整備して、これで何かを作れることを実証すること。

8 Mate-ZDD

おねえさんのパス数え上げ問題を解くためのアルゴリズム

Don Knuth の Simpath アルゴリズムをピュア ZDD で書き直した、シンプルだが遅いバージョン

これを CL-CUDD を使って実装した

<https://github.com/guicho271828/simpath>

デモ

9 Future Work

自分の専門である 自動行動計画ソルバ(プランナ)を ZDD で作る

- 配列ベースの普通の手法に比べた利点:
 - よりスケールする (大きな問題が解ける)
 - * メモリ使用量が削減できる
 - * 探索の情報を圧縮して保持できるから
 - 細かなループの中のチューニングを気にしなくて良い
 - * ZDD が複数の状態をまとめて処理するから

9.1 BDD ベースのプランニングアルゴリズムは存在する:

procedure *BDDA**

$Open(f, x) \leftarrow h(f, x) \wedge \Phi_{S0}(x)$

while ($Open \neq \emptyset$)

$(f_{\min}, Min(x), Open'(f, x)) \leftarrow goLeft(Open)$

if ($\exists x (Min(x) \wedge \Phi_G(x))$) **return** f_{\min}

$VarTrans_{x,x'}(Min(x))$

$Open''(f, x) \leftarrow \exists x' Min(x') \wedge T(x', x) \wedge$

$\exists e' h(e', x') \wedge \exists e h(e, x) \wedge (f = f_{\min} + e - e' + 1)$

$Open(f, x) \leftarrow Open'(f, x) \vee Open''(f, x)$

Table 2. The A^* algorithm using *OBDDs*.

BDD より ZDD のほうがよいハズ

← 指数爆発している全空間に比べ、実際に使われる空間サイズは小さいから

9.2 International Planning Competition 2014 で優勝

Sequential Optimal track: Results

17 planners submitted. Showing the top FIVE

SymBA*-2	151/280	1st
SymBA*-1	143/280	1st
cGamer	120/280	2nd
SPM&S	114/280	3rd
RIDA	113/280	4th
Dynamic-Gamer	99/280	5th

9.3 強い

BDDs Strike Back (in AI Planning)

Stefan Edelkamp

Institute of Artificial Intelligence
University of Bremen
edelkamp@tzi.de

Peter Kissmann and Álvaro Torralba

Foundations of Artificial Intelligence
Saarland University, Saarbrücken
{kissmann,torralba}@cs.uni-saarland.de

Symbolic Pattern Databases in Heuristic Search Planning

Stefan Edelkamp

Institut für Informatik,
Albert-Ludwigs-Universität,
Georges-Köhler-Allee, D-79110 Freiburg
eMail: edelkamp@informatik.uni-freiburg.de

コレに勝つ!

10 まとめ

BDD, ZDD を概説

CL-CUDD をまともに使える状態にした

ZDDでお姉さん問題を解くソルバを作った

プランニングに応用したい

福永研は *AI* やりたい新規学生募集中! *metahack.org*

Lisper 歓迎, 教授も *lisper*