Manual de Análisis Matemático Real

para Ciencias e Ingenierías

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Indice de contenidos

Prefacio

¡Bienvenida/os al manual de Análisis Matemático de variable real!

Este libro es una introducción al Análisis Matemático de variable real y cubre los contenidos típicos de un grado en Matemáticas o Ingeniería Matemática.

Este libro se acompaña de una colección de problemas resueltos.

Licencia

1 Teoría de conjuntos

Los conjuntos son entes matemáticos que se usan habitualmente para modelar situaciones reales en las que aparecen colecciones de objetos de cualquier naturaleza, así como las relaciones entre ellos, y por tanto, aparecen en la mayor parte de los problemas de Ciencia o Ingeniería.

Al mismo tiempo, los conjuntos son una de las estructuras matemáticas más básicas sobre las que se construyen la mayoría de las teorías matemáticas.

En este capítulo se estudia el concepto de *conjunto* y sus principales propiedades y relaciones.

1.1 Conjuntos

Definición 1.1 (Conjunto)**.** Un *conjunto* es a una colección o agrupación bien definida de objetos que puede considerarse en sí misma otro objeto. Para representar un conjunto se indican sus elementos entre llaves y normalmente se utilizarán letras mayúsculas para referirse a ellos.

Ejemplo 1.1. Algunos ejemplos de conjuntos son:

- El conjunto de los días de la semana es $A = \{\text{L, M, X, J, V, S, D}\}$.
- El conjunto de los colores básicos es $B = \{\text{rojo, verde, azul}\}$.
- El conjunto de los puntos de un dado $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- El conjunto de los números naturales pares: $D = \{2, 4, 6, ...\}$.

Definición 1.2 (Elementos)**.** Los objetos que componen un conjunto se llaman *elementos* o miembros del conjunto.

Los elementos de un conjunto pueden ser cualquier cosa (días, colores, personas, etc), pero en este curso nos centraremos los conjuntos numéricos, es decir, los conjuntos cuyos elementos son números, ya que son los que se estudian en el Análisis Matemático.

Existen dos formas de definir un conjunto: por *extensión* o por *comprensión*. La definición extensiva consiste en listar de manera explícita todos sus elementos, como por ejemplo $\{1, 2, 3\}$, mientras que la intensiva o por comprensión, consiste en dar una propiedad que cumplen los elementos del conjunto y solo ellos, como por ejemplo el conjunto de los números naturales menores que 4. En este último caso se suele utilizar la notación $\{x : P(x)\}$, donde $P(x)$ es la propiedad que cumple x.

Mientras que las definiciones por extensión no presentan problemas, hay que tener cuidado con las definiciones por comprensión, pues no todas las propiedades definen conjuntos válidos, tal y como demostró Bertrand Russell con su famosa paradoja del barbero.

Definición 1.3 (Pertenencia)**.** Si a es un elemento de un conjunto A, se dice que a *pertenence* a A y se denota $a \in A$. Por el contrario, si a no es un elemento del conjunto A, se dice que *no pertenece* a A y se denota $a \notin A$.

Ejemplo 1.2. Si A es el conjunto de los números naturales pares, $2 \in A$, pero $1 \notin A$.

Definición 1.4 (Igualdad)**.** Se dice que dos conjuntos A y B son iguales, y se denota $A = B$, si tienen exactamente los mismos elementos. En caso contrario se escribe $A \neq B$.

Conviene remarcar que en un conjunto no puede haber elementos repetidos y tampoco importa el orden en que se listan los elementos.

Ejemplo 1.3. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

Proposición 1.1. *La igualdad de conjuntos es una* relación de equivalencia*, es decir, satisface las propiedades:*

1. Reflexiva: $A = A$.
2. Simétrica: *Si* $A = B$ *entonces* $B = A$.
3. Transitiva: $A = B$ *y* $B = C$*, entonces* $A = C$.

Definición 1.5 (Subconjunto)**.** Se dice que un conjunto A es un *subconjunto* o está *incluído* en otro conjunto B, y se denota $A \subseteq B$, si todos los elementos de A pertenecen a B, es decir,

$$\forall x \in A, x \in B$$

Cuando $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ se dice que A está *estríctamente incluido* en B o que A es un *subconjunto propio* de B y se escribe $A \subsetneq B$.

Ejemplo 1.4. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{3, 1, 2\}$ y $\{1, 3\} \subsetneq \{3, 1, 2\}$.

Proposición 1.2. *La inclusión de conjuntos es una* relación de orden parcial*, es decir, satisface las propiedades:*

1. Reflexiva: $A \subseteq A$.
2. Antisimétrica: *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$*, entonces* $A = B$.
3. Transitiva: $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$*, entonces* $A \subseteq C$.

Definición 1.6 (Conjunto vacío)**.** El conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío y se denota $\emptyset$.

1.2 Álgebra de conjuntos

A continuación se definen las principales operaciones sobre conjuntos y sus propiedades.

Definición 1.7 (Unión)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B, y se denota $A \cup B$, al conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

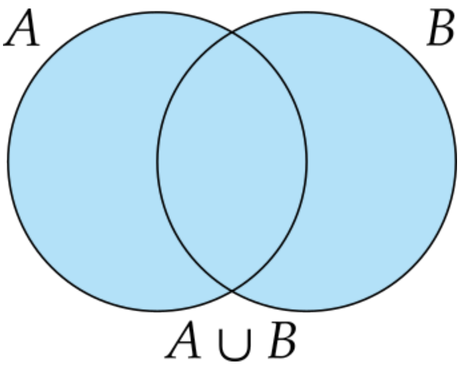

Figura 1.1: Unión de conjuntos

Definición 1.8 (Intersección)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *intersección* de A y B, y se denota $A \cap B$, al conjunto de todos los elementos comunes a A y B.

$$A \cap B = \{x \,:\, x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

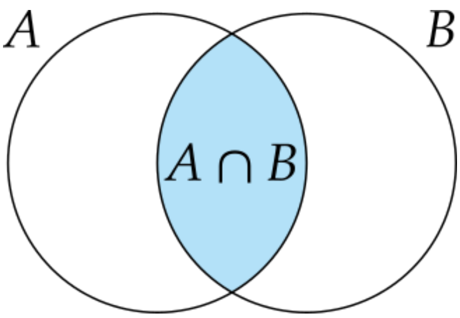

Figura 1.2: Intersección de conjuntos

Definición 1.9 (Complemento)**.** Dado un conjunto $A \subset \Omega$, se llama *complemento* de A con respecto a Ω, y se denota $\overline{A}$, al conjunto de todos los elementos de Ω que no pertenecen a A.

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \,:\, x \notin A\}.$$

Definición 1.10 (Diferencia)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia* de A y B, y se denota $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir,

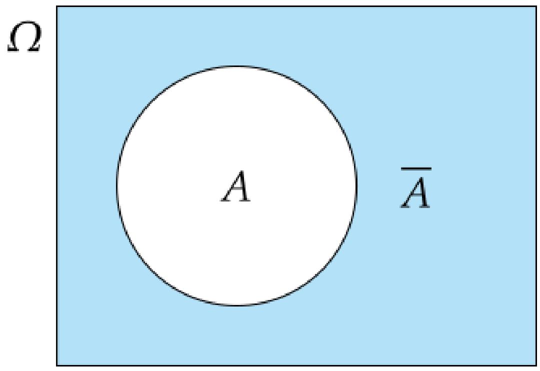

Figura 1.3: Complemento de un conjunto

$$A - B = \{x \,:\, x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

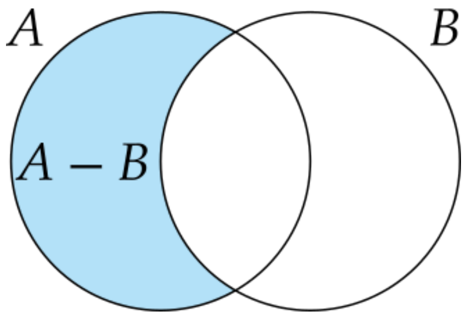

Figura 1.4: Diferencia de conjuntos

Definición 1.11 (Diferencia simétrica)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia simétrica* de A y B, y se denota $A\triangle B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B, pero no a ambos a la vez, es decir,

$$\begin{aligned} A\triangle B &= \{x \,:\, x \in A - B \text{ o } x \in B - A\} \\ &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

- La unión de A y B es $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

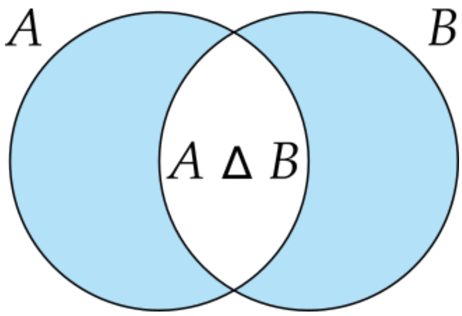

Figura 1.5: Diferencia simétrica de conjuntos

- La intersección de A y B es $A \cap B = \{2, 4\}$.
- El contrario de A con respecto a Ω es $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.
- La diferencia de A y B es $A - B = \{6\}$, y la diferencia de B y A es $B - A = \{1, 3\}$.
- La diferencia simétrica de A y B es $A \triangle B = \{1, 3, 6\}$.

Proposición 1.3. *Dado un conjunto universo Ω y los conjuntos $A, B, C \subseteq \Omega$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Idempotencia:* $A \cup A = A$ *y* $A \cap A = A$.
2. *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$.
3. *Asociativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. *Distributiva:* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *y* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
5. *Elemento neutro:* $A \cup \emptyset = A$ *y* $A \cap \Omega = A$.
6. *Elemento absorvente:* $A \cup \Omega = \Omega$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
7. *Elemento simétrico complementario:* $A \cup \overline{A} = E$ *y* $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
8. *Doble complemento:* $\overline{\overline{A}} = A$.
9. *Leyes de Morgan:* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *y* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
10. $A \cap B \subseteq A \cup B$.
11. $A - B = A \cap \overline{B}$.
12. $A - B \subseteq A$ *y* $B - A \subseteq B$.
13. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
14. $\overline{\Omega} = \emptyset$ *y* $\overline{\emptyset} = \Omega$.

Definición 1.12 (Conjuntos disjuntos)**.** Dados dos conjuntos A y B, se dice que son *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Definición 1.13 (Conjunto potencia)**.** Dado un conjunto A, se llama *conjunto potencia* o *conjunto de las partes* de A, y se denota $\mathcal{P}(A)$, al conjunto de todos los subconjuntos de A, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \,:\, X \subseteq A\}$$

Ejemplo 1.6. El conjunto potencia del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

1.3 Relaciones entre conjuntos

Definición 1.14 (Par ordenado)**.** Dados dos elementos a y b se define el *par ordenado* (a, b) como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

De manera más general, se define una *n-tupla ordenada* como

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

De forma mas informal, decimos que (a, b) es un par ordenado si el primer elemento (a) se distingue del segundo elemento (b). Por eso, se tiene que $(a, b) \neq (b, a)$, mientras que para conjuntos $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definición 1.15 (Producto cartesiano)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *producto cartesiano* de A y B, y se denota $A \times B$, al conjunto de los pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) \,:\, a \in A \text{ y } b \in B\}$$

De manera más general, si se tienen n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, el *producto cartesiano generalizado* es

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \,:\, a_i \in A_i \ \forall i = 1, \dots n\}$$

Definición 1.16 (Relación binaria)**.** Dados dos conjuntos A y B, se dice que R es una *relación binaria* sobre A y B si es un subconjunto del producto cartesiano de A y B, es decir,

$$R \subseteq A \times B$$

Si A y B son el mismo conjunto, se dice que R es una *relación binaria homogénea.*

Cuando un par ordenado pertenece a una relación, $(a, b) \in R$, también se suele escribir aRb.

Dependiendo de las propiedades que cumpla una relación tenemos los siguientes tipos de relaciones:

- **Reflexiva**: $\forall a \in A, (a, a) \in R$
- **Irreflexiva**: $\forall a \in A, (a, a) \notin R$.
- **Simétrica**: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.
- **Asimétrica**: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$.
- **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$.
- **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.
- **Total**: $\forall a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

Definición 1.17 (Relación de equivalencia)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $R \subseteq A \times A$, se dice que R es una *relación de equivalencia*, y se denota $(A, \sim)$, si es que cumple que R es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, si cumple las propiedades

- *Reflexiva:* $\forall a \in A, a \sim a$.
- *Simétrica:* $\forall a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $b \sim a$.
- *Transitiva:* $\forall a, b, c \in A$, si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.

Ejemplo 1.7. Ya hemos visto que la relación de igualdad matemática entre los elementos de un conjunto es una relación de equivalencia.

Definición 1.18 (Relación de orden)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que $\preceq$ es una *relación de orden*, si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, si cumple las propiedades

- *Reflexiva:* $\forall a \in A, a \preceq a$.

- *Antisimétrica:* $\forall a, b \in A$, si $a \preceq b$ y $b \preceq a$, entonces $a = b$.
- *Transitiva:* $\forall a, b, c \in A$, si $a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$.

Definición 1.19 (Relación de orden parcial)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que $\preceq$ es una *relación de orden parcial*, si es una relación de orden y al menos dos elementos de A están relacionados mediante $\preceq$, es decir,

$$\exists x, y \in A,\ x \preceq y \text{ o } y \preceq x.$$

Al conjunto A con la relación de orden parcial $\preceq$ se le llama *conjunto parcialmente ordenado*, y se denota $(A, \preceq)$.

Ejemplo 1.8. El conjunto potencia de un conjunto A con la relación de inclusión es un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Definición 1.20 (Relación de orden total)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que $\preceq$ es una *relación de orden total*, si es una relación de orden y todos los elementos de A se relacionan entre sí mediante $\preceq$, es decir,

$$\forall x, y \in A,\ x \preceq y \text{ o } y \preceq x.$$

Al conjunto A con la relación de orden total $\preceq$ se le llama *conjunto totalmente ordenado*, y se denota $(A, \preceq)$.

Ejemplo 1.9. La relación de orden de los números naturales $(\mathbb{N}, \leq)$ es un orden totalmente ordenado. Sin embargo, la relación de inclusión en el conjunto potencia de un conjunto A $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ no es un orden parcialmente ordenado, ya que dados dos elementos $a \neq b$ de A, se cumple que $\{a\} \subsetneq \{b\}$ y $\{b\} \subsetneq \{a\}$.

1.4 Cotas y extremos

Definición 1.21 (Cota superior)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se dice que un elemento $c \in A$ es una *cota superior* de B, si todos los elementos de B son menores o iguales a c según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in B, x \preceq c.$$

Definición 1.22 (Cota inferior)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se dice que un elemento $c \in A$ es una *cota inferior* de B, si todos los elementos de B son mayores o iguales a c según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in B, c \preceq x.$$

Definición 1.23 (Máximo)**.** Dado un conjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$, se dice que un elemento $m \in A$ es un *máximo* de A, si cualquier otro elemento de A es mayor o igual que él según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in A, x \preceq m.$$

Definición 1.24 (Mínimo)**.** Dado un conjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$, se dice que un elemento $m \in A$ es un *mínimo* de A, si y cualquier otro elemento de A es menor o igual que él según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in A, m \preceq x.$$

Teorema 1.1 (Unicidad de los extremos)**.** *Dado un conjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$, si existe el máximo de A entonces es único. Lo mismo es cierto para el mínimo.*

Demostración

Demostración. Supongamos que el conjunto A tienen dos máximos $m_1 \neq m_2$. Puesto que m_1 es un máximo de A, se cumple que $\forall x \in A, x \preceq m_1$. y, en particular, $m_2 \preceq m_1$. Del mismo modo, como m_2 es un máximo de A, se cumple que $\forall x \in A, x \preceq m_2$. y, en particular, $m_1 \preceq m_2$.
Así pues, se tiene que

$$m_2 \preceq m_1 \text{ y } m_1 \preceq m_2,$$

pero como $\preceq$ es un orden parcial, por la propiedad antisimétrica se concluye que $m_1 = m_2$, por lo que el máximo es único.
De manera análoga se puede probar que el mínimo es único.

$\square$

Dado que el máximo y mínimo de un conjunto, cuando existen, son únicos, es común referirse a ellos como *max* y *min* respectivamente. Obsérvese, no obstante, que un conjunto puede no tener máximo o mínimo.

Definición 1.25 (Supremo)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se llama *supremo* de B y se denota $\sup(B)$ a la menor de las cotas superiores de B.

Definición 1.26 (Ínfimo)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se llama *ínfimo* de B y se denota $\inf(B)$ a la mayor de las cotas inferiores de B.

Obsérvese que un conjunto puede no tener supremo o ínfimo.

Ejemplo 1.10. Si se toma el conjunto de los números naturales con la relación de orden total $(\mathbb{N}, \leq)$, para el conjunto $B = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que cualquier $x \in \mathbb{N}$ tal que $3 \leq x$ es una cota superior de B, por tanto 3 es el supremo de B, y además es un máximo puesto que $3 \in B$.

Por otro lado, si se considera el conjunto de los números reales con la relación de orden total $(\mathbb{R}, \leq)$, para el intervalo $(0, 1)$ se tiene que cualquier $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 0$ es una cota inferior y $x \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq x$ es una cota superior, de modo que 0 es el ínfimo y 1 el supremo. Sin embargo, este conjunto no tiene mínimo ni tampoco máximo puesto que $0 \notin (0, 1)$ y $1 \notin (0, 1)$.

Finalmente, si se considera el conjunto de los números enteros con la relación de orden total $(\mathbb{Z}, \leq)$, para el conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par}\}$, no existen cotas superiores ni inferiores, y por tanto tampoco tiene supremo, ínfimo, máximo ni mínimo.

1.5 Funciones

El concepto de función es uno de los más importantes en el Análisis Matemático, ya que muchos de los fenómenos naturales en los que una magnitud depende de otra se modelizan mediante funciones.

Definición 1.27 (Función)**.** Se dice que una relación binaria $f \subseteq A \times B$, con A y B conjuntos no vacios, es una *función* o *aplicación*, y se denota $f : A \to B$, si f no contiene dos pares ordenados distintos con la misma primera componente, es decir,

$$\forall a \in A, \forall b_1, b_2 \in B, \text{ si } (a, b_1) \in f \text{ y } (a, b_2) \in f, \text{ entonces } b_1 = b_2.$$

Es habitual representar los pares de una función con la notación $y = f(x)$ donde x es la primera componente del par e y la segunda.

Ejemplo 1.11. La relación binaria $f = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, b)\}$ es una función, pero la relación $g = \{(1, a), (2, c), (3, c), (2, b)\}$ no lo es porque existen dos pares cuya primera componente es 2. Del mismo modo la función raíz cuadrada $y = f(x) = \sqrt{x}$ no es una función en el conjunto de los números reales, ya que, por ejemplo $\sqrt{1} = \pm 1$.

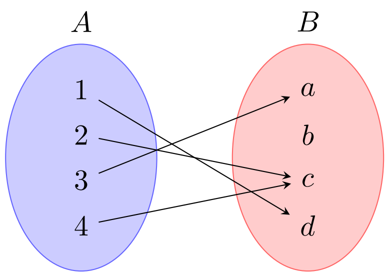

Figura 1.6: Ejemplo de función

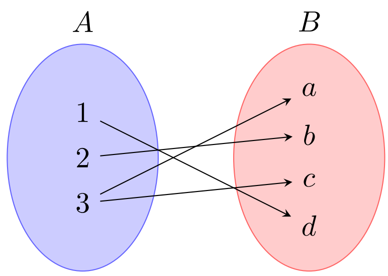

Figura 1.7: Ejemplo de no función

Definición 1.28 (Dominio)**.** Dada una función $f : A \to B$, se llama *dominio* de f, y se denota $\mathrm{Dom}(f)$ al conjunto de las primeras componentes de los pares de f, es decir,

$$\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A : \exists b \in B, (a, b) \in f\}$$

Definición 1.29 (Imagen)**.** Dada una función $f : A \to B$, se llama *imagen* de f, y se denota $\mathrm{Im}(f)$ al conjunto de las segundas componentes de los pares de f, es decir,

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \in A, (a, b) \in f\}$$

Definición 1.30 (Función inyectiva)**.** Dada una función $f : A \to B$, se dice que f es *inyectiva* si no existen dos elementos de A con la misma imagen, es decir,

$$\forall a_1, a_2 \in A, \text{ si } f(a_1) = f(a_2), \text{ entonces } a_1 = a_2.$$

Definición 1.31 (Función sobreyectiva)**.** Dada una función $f : A \to B$, se dice que f es *sobreyectiva* si todo elemento de B tiene una preimagen (está relacionado con algún elemento de A mediante f), es decir,

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$$

Definición 1.32 (Función biyectiva)**.** Dada una función $f : A \to B$, se dice que f es *biyectiva*, si f es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva.

Definición 1.33 (Función identidad)**.** Dado un conjunto A, se llama *función identidad* de A, y se denota $\mathrm{id}_A : A \to A$, a la función que empareja cada elemento de A consigo mismo, es decir,

$$\mathrm{id}_A(a) = a, \forall a \in A.$$

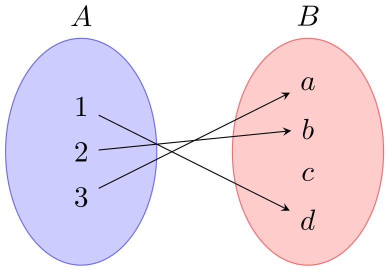

Figura 1.8: Función inyectiva y no sobreyectiva

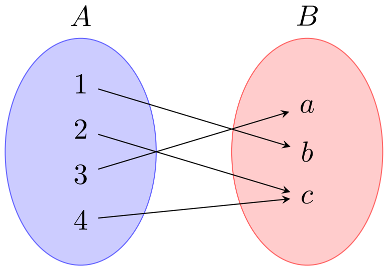

Figura 1.9: Función sobreyectiva y no inyectiva

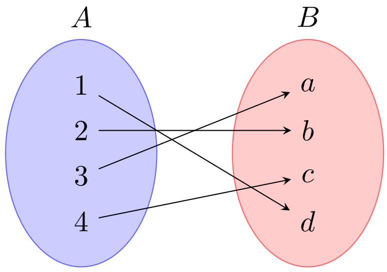

Figura 1.10: Función biyectiva

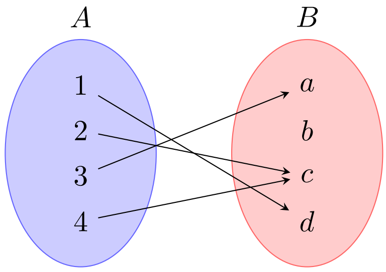

Figura 1.11: Función no inyectiva y no sobreyectiva

Definición 1.34 (Función inversa)**.** Dada una función $f : A \to B$, se llama *función inversa* de f, y se denota $f^{-1} : B \to A$, a la función que resulta de revertir el orden de los pares de f, es decir,

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}.$$

Obsérvese que para que exista la función inversa de f, f debe ser inyectiva.

En muchas ocasiones, el valor de salida de una función se puede utilizar como la entrada de otra función, concatenando la aplicación de las dos funciones.

Definición 1.35 (Composición de funciones)**.** Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, se llama *composición* de f con g, y se denota $g \circ f : A \to D$, a la funcion que a cada elemento del dominio de A le asocia el elemento que resulta de aplicar g a la imagen de a mediante f, es decir,

$$g \circ f(a) = g(f(a)), \forall a \in A.$$

Proposición 1.4. *Dada una función $f : A \to B$, si existe $^{-1}, entonces $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B$.*

1.6 Cardinalidad de un conjunto

Definición 1.36 (Cardinal)**.** Dado un conjunto A, se llama *cardinal* de A, y se denota $|A|$, al número de elementos de A.

De manera informal, se puede decir Que el cardinal de un conjunto es su tamaño.

Ejemplo 1.12. El cardinal del conjunto $A = \{a, b, c\}$ es $|A| = 3$.

Proposición 1.5. *El cardinal del conjunto potencia de un conjunto A es $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.*

Demostración

Demostración. Se puede dar una prueba mediante coeficientes binomiales. Si A tiene n elementos, es decir, $|\mathrm{A}| = n$, el número de subconjuntos distintos con k elementos es igual al número combinatorio

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Como un subconjunto de A puede tener desde 0 hasta n elementos, en total, el número de posibles subconjuntos de A será

$$|\mathcal{P}(A)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

y según el teorema del binomio de Newton se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = 2^{|A|}.$$

$\square$

Definición 1.37 (Conjuntos equipotentes)**.** Se dice que dos conjuntos A y B son *equipotentes*, y se denota $A \approx B$, si tienen la misma cantidad de elementos, es decir, si $|A| = |B|$.

Proposición 1.6. *Dos conjuntos A y B son equipotentes si y solo si cada elemento de A puede emparejarse con uno de B, de manera que todos los elementos de B sean pareja de uno de A y solo de uno, es decir, existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$.*

Proposición 1.7. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia, es decir, satisface las siguientes propiedades:*

- Reflexiva: *$A \approx A$ para todo conjunto A.*
- Simétrica: *Si $A \approx B$, entonces $B \approx A$, para cualesquiera conjuntos A y B.*
- Transitiva: *Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$ para cualesquiera conjuntos A, B y C.*

De igual modo se puede definir una relación que capture la noción de que un conjunto es de menor tamaño que otro.

Definición 1.38 (Conjunto minuspotente)**.** Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es *minuspotente* a B, y se denota $A \preceq B$, si el cardinal de A es menor o igual que el de B, es decir, si $|A| \leq |B|$.

Proposición 1.8. *El conjunto A es minuspotente al conjunto B si y solo si existe una aplicación inyectiva $f : A \to B$.*

Proposición 1.9. *La relación de minuspotencia es una relación de orden, es decir, satisface las siguientes propiedades:*

- *Reflexiva: $A \preceq A$ para todo conjunto A.*
- *Simétrica: Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \approx B$, para cualesquiera conjuntos A y B.*
- *Transitiva: Si $A \preceq B$ y $B \preceq C$, entonces $A \preceq C$ para cualesquiera conjuntos A, B y C.*

Definición 1.39 (Conjunto finito)**.** Se dice que un conjunto A es *finito* si es que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\{1, 2, 3, \dots, n\}|$. Cuando esto ocurre, el cardinal de A es $|A| = n$.

Definición 1.40 (Conjunto infinito)**.** Se dice que un conjunto A es *infinito* si no es finito. En tal caso su cardinal se denota $|A| = \infty$.

Hay que dejar claro que el símbolo ∞ es una notación de conveniencia que no es ningún número.

Ejemplo 1.13. El conjunto $A = \{a, b, c\}$ es finito ya que puede definirse una aplicación biyectiva $f : A \to \{1, 2, 3\}$ con los pares $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$, y por tanto, $|A| = 3$.

Por otro lado, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es infinito, ya que no puede ponerse en correspondencia biyectiva con ningún conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, $|\mathbb{N}| = \infty$.

Cabe preguntarse si dos conjuntos infinitos son siempre del mismo tamaño. Para responder a la pregunta basta con aplicar la Proposición 1.6.

Ejemplo 1.14. El conjunto de los números naturales pares P es infinito y también lo es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Además ambos son equipotentes pues se puede definir una aplicación biyectiva $f(n) = 2n \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $\mathbb{N} \approx P$.

Sin embargo, como se verá más adelante, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es equipotente al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, sino minuspotente. Por tanto, existen conjuntos infinitos de distintos tamaños. Para demostrarlo se necesita introducir un nuevo concepto.

Definición 1.41 (Conjunto numerable)**.** Se dice que un conjunto A es *numerable* si tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Corolario 1.1. *Un conjunto A es numerable si existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \to A$.*

En otras palabras, un conjunto es infinito numerable si tiene correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

La prueba de este resultado es inmediata aplicando la Proposición 1.6.

Ejemplo 1.15. En el ejemplo anterior hemos visto que el conjunto de los números pares es equipotente al conjunto de los números naturales, y por consiguiente, es numerable.

Del mismo modo se puede probar que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ también es numerable, pues se puede definir una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera

$$f(n) = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es impar,} \\ -n/2 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es par.} \end{cases}$$

Sin embargo, existen conjuntos infinitos que no son numerables, como por ejemplo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

David Hilbert, propuso una interesante paradoja para probar este hecho, conocida como la paradoja del hotel infinito

Georg Cantor dio una prueba formal de esto mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Cantor)**.** *El conjunto potencia de cualquier conjunto A tiene un cardinal estrictamente mayor que el cardinal de A, es decir, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demostración

Demostración. Basta con demostrar que no existe una aplicación $f : A \to \mathcal{P}(A)$ sobreyectiva, y para ello basta con encontrar un subconjunto B de A que no sea la imagen mediante f de ningún elemento de A.
Tomando el siguiente subconjunto de A

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

es decir, el conjunto de los elementos de A que no están contenidos en el subconjunto de A que le corresponde mediante f, se puede probar por reducción al absurdo que B no puede ser la imagen mediante f de ningún elemento de A.
Sunpóngase que que existe $a \in A$ tal que $B = f(a)$. Como B es un subconjunto de A, pueden darse dos casos:

- Si $a \in B$, entonces por la definición de B se tiene que $a \notin f(a) = B$, lo cual es contradictorio.

- Si $a \notin B$, entonces por la definición de B se tiene que $a \in f(a) = B$, que también es contradictorio.

Así pues, en ambos casos se llega a una contradicción y, por tanto, se concluye que no existe $a = f(B)$, por lo que f no es sobreyectiva y $|A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

$\square$

Teorema 1.3 (Cardinalidad del continuo). *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene un cardinal igual al del conjunto potencia del conjunto de los números naturales $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, es decir, $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$.*

Demostración

Demostración. Daremos una demostración partiendo del hecho de que cada número real tiene una expansión decimal infinita de la forma $e.d$ donde e es la parte entera y d la decimal infinita (por ejemplo, $3/2$ se puede representar por la expansión decimal infinita $1.5000\ldots$).
El número de dígitos en la parte decimal es numerable ya que pueden ponerse fácilmente en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$ y, por tanto, cualquier número real tendrá $|\mathbb{N}|$ dígitos en su parte decimal, lo que nos da, al ser nuestro sistema de numeración en base 10, un total de $10^{|\mathbb{N}|}$ posibles combinaciones en la parte decimal.
En cuanto a la parte entera, ya se ha visto que el conjunto de los números enteros es equipotente al de los números naturales, por lo que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
Así pues, el número total de expansiones decimales infinitas es $|\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|}$, y como todo número real tienen una expansión decimal infinita, se tiene

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|}.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 1.2, $|\mathbb{N}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$, por lo que finalmente se tiene $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|} \leq 2^{|\mathbb{N}|}10^{|\mathbb{N}|} \leq 2^{|\mathbb{N}|}(2^4)^{|\mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{N}|+4|\mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{N}|}$, ya que por aritmética de las cardinalidades se tiene que $|\mathbb{N}| + 4|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
Para probar el otro sentido de la desigualdad, basta tomar el conjunto de las fracciones decimales de la forma $0.d_1d_2d_3\ldots$ donde $d_i \in \{0,1\}$ (por ejemplo $0.101000\ldots$) que claramente es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Puesto que cada número de este conjunto tiene infinitos dígitos decimales, de nuevo, se puede poner en correspondencia biyectiva cada dígito con un número natural, y como para cada posición hay dos posibles dígitos (0 y 1), el número total de números en este conjunto es $2^{|\mathbb{N}|}$, por lo que se tiene que $2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{R}|$.
Así pues, como $|\mathbb{R}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$ y $2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{R}|$, se concluye que $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$.

$\square$

Tomando iterativamente el conjunto potencia de un conjunto infinito y aplicando el teorema de Cantor, obtenemos una jerarquía infinita de cardinales infinitos, cada uno estrictamente mayor que el anterior.

2 El sistema de los números reales

En este capítulo se estudia el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ ya que el Análisis Matemático estudia conceptos y construcciones realizadas a partir de este conjunto de números y sus propiedades.

Antes de presentar el conjunto de los números reales se presentan otros subconjuntos suyos más elementales que suelen introducirse antes. Iremos ampliando sucesivamente estos conjuntos para dotarlos de nuevas propiedades hasta llegar al conjunto de los números reales.

2.1 El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

El primer conjunto de números que tradicionalmente suele estudiarse en el colegio son los números *naturales* $\mathbb{N}$, ya que sirven para contar.

En los números naturales se define una relación de orden $<$ $(1 < 2 < 3 < \cdots)$, y dos operaciones binarias, la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$, con una serie de propiedades que dotan al conjunto de una estructura de *semianillo unitario conmutativo bien ordenado*:

a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{N}\ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
b. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a\ \forall a, b \in \mathbb{N}$. d.Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{N}\ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
d. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
e. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a\ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
f. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{N}$.
g. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

En el conjunto de los números naturales todo número tiene un posterior, pero no un anterior.

2.2 El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

Los números naturales no tienen simétrico (opuesto) para la suma, de manera que no puede definirse la resta. Para ello es necesario extender el conjunto de los naturales con los números negativos $(-1, -2, -3, ...)$, y el cero (0).

Extendiendo el orden y las operaciones de los naturales a estos números se obtiene el conjunto de los números *enteros* $\mathbb{Z}$ con las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de *anillo conmutativo unitario y totalmente ordenado*:

a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{Z}\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
b. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
d. Elemento neutro de la suma: $0 + a = a\ \forall a \in \mathbb{Z}$.
e. Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $a + (-a) = 0\ \forall a \in \mathbb{Z}$.
f. Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{Z}\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
g. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
h. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
i. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{Z}$.
j. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Al introducir el opuesto de la suma, se puede definir bien la resta como $a - b = a + (-b)\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

En el conjunto de los enteros todo número tiene un anterior y un posterior.

2.3 El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$

Los números enteros (salvo el -1 y 1) no tienen elemento simétrico (inverso) para el producto, de manera que no puede definirse la división. Para ello es necesario extender el conjunto de los enteros con los números fraccionarios, que se definen de la forma a/b donde el numerador a y el denominador b son números enteros primos entre si (por ejemplo $1/2$ o $-5/3$).

Extendiendo el orden y las operaciones de los enteros a estos números se obtiene el conjunto de los números *racionales* $\mathbb{Q}$ con las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de *cuerpo conmutativo totalmente ordenado*:

a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{Q}\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
b. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.
c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
d. Elemento neutro de la suma: $0 + a = a\ \forall a \in \mathbb{Q}$.
e. Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $a + (-a) = 0\ \forall a \in \mathbb{Q}$.

f. Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{Q}\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
g. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.
h. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
i. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{Q}$.
j. Elemento simétrico (inverso) del producto: $a \cdot a^{-1} = 1\ \forall a \neq 0 \in \mathbb{Q}$.
k. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Al introducir el inverso del producto, se puede definir la división como $a/b = a \cdot b^{-1}\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.

A diferencia de los enteros, aunque los racionales también tienen un orden total, el orden es *denso*, es decir, entre dos números racionales cualesquiera siempre existe otro número racional (en realidad infinitos), por lo que no existe el anterior y el posterior de cualquier número racional.

2.4 El conjunto de los números irracionales

Muy pronto los griegos se dieron cuenta de que había otra clase de números que no podían representarse como cociente de números enteros y por tanto no pertenecían al conjunto de los números racionales, de manera que este conjunto es incompleto. El ejemplo clásico es el número $\sqrt{2}$ que se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con ambos lados de longitud 1.

Teorema 2.1 (Irracionalidad de $\sqrt{2}$)**.** *El número $\sqrt{2}$ no es racional.*

Demostración

Demostración. Probar que $\sqrt{2}$ no es racional es equivalente a probar que no existe un número racional m/n tal que $(m/n)^2 = 2$. La demostración de este último resultado es sencilla por reducción al absurdo.
Supongamos que existe un número m/n con $n, m \in \mathbb{Z}$ primos entre si, tal que $(m/n)^2 = 2$, o lo que es lo mismo,

$$m^2 = 2n^2.$$

De aquí se puede deducir que m^2 es par, lo que implica que m también es par, pues si m fuese impar, su cuadrado también sería impar. En tal caso, m podría escribirse como $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y se tendría $m^2 = 4k^2$. Sustituyendo ahora en la ecuación inicial se tiene $4k^2 = 2n^2$, lo que implica que $2k^2 = n^2$. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, se tendría que n también sería un número par, por lo se obtiene un absurdo ya que partimos de que m y n eran primos entre sí.

$\square$

Estos números que no son racionales se denominan *irracionales*, y, al igual que los números racionales, es un conjunto denso.

Teorema 2.2. *Entre dos números racionales siempre existe un número irracional.*

Demostración

Demostración. Tomemos para empezar un número irracional entre 0 y 1, como por ejemplo, $1/\sqrt{2} = 0.7071\ldots$, y consideremos dos números racionales cualesquiera $a, b \in \mathbb{Q}$, tales que $a < b$. Como $0 < 1/\sqrt{2} < 1$ y $b - a > 0$, se tiene que

$$0(b-a) < \frac{b-a}{\sqrt{2}} < 1(b-a),$$

o lo que es lo mismo, simplificando

$$0 < \frac{b-a}{\sqrt{2}} < (b-a).$$

Si ahora sumamos a a cada término de la desigualdad se tiene

$$a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b,$$

de manera que el número $a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ está entre a y b, pero además, se trata de un número irracional, ya que es el producto de un número irracional $1/\sqrt{2}$ por un racional $b - a$ y más otro racional a.

$\square$

En realidad, se puede probar que entre dos números racionales no solo existe un número irracional, sino una infinidad de ellos. Y del mismo modo, se puede probar que entre dos números irracionales existe una infinidad de números racionales.

2.5 El conjunto de los números reales

La extensión de los números racionales con los irracionales da lugar al conjunto de los números *reales*. Su construcción formal puede realizarse de distintas maneras (cortaduras de Dedekind o sucesiones de Cauchy), pero todas ellas satisfacen la siguiente definición axiomática:

Definición 2.1 (Números reales)**.** El sistema de los números *reales* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ está formado por un conjunto no vacío de números $\mathbb{R}$, sobre los que se definen dos operaciones binarias, suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, que satisfacen los siguientes axiomas:

Axiomas de cuerpo algebraico.$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo abeliano:

- *Axioma 1.* Propiedad de cierre de la suma: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$.
- *Axioma 2.* Propiedad asociativa de la suma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- *Axioma 3.* Propiedad conmutativa de la suma: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.
- *Axioma 4.* Elemento neutro de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, tal que $0 + a = a$.
- *Axioma 5.* Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un número $-a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = 0$.
- *Axioma 6.* Propiedad de cierre del producto: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \in \mathbb{R}$.
- *Axioma 7.* Propiedad asociativa del producto: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- *Axioma 8.* Propiedad conmutativa del producto: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- *Axioma 9.* Elemento neutro del producto: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un número $1 \in \mathbb{R} \ \ \{0\}$, tal que $1 \cdot a = a$.
- *Axioma 10.* Elemento simétrico (o inverso) del producto: $\forall a \in \mathbb{R} \ \ \{0\}$, existe un número $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
- *Axioma 11.* Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Axiomas de orden. Existe un subconjunto no vacío $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado el conjunto de los *números reales positivos*, que verifica los siguientes axiomas:

- *Axioma 12.* Cierre del la suma en los reales positivos: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $a + b \in \mathbb{R}^+$.
- *Axioma 13.* Cierre del producto en los reales positivos: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.
- *Axioma 14.* Propiedad de tricotomía: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes alternativas es cierta: $a \in \mathbb{R}^+$, $a = 0$ o $-a \in \mathbb{R}^+$.

Axioma de completitud

- *Axioma 15.* Axioma del supremo: Si un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota superior, entonces tiene un supremo $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

El último axioma es el que diferencia el conjunto de los números reales de otros cuerpos totalmente ordenados como los racionales.

A partir de las propiedades de las suma y el producto se pueden definir nos nuevas operaciones en $\mathbb{R}$.

Definición 2.2 (Resta)**.** Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$, se define la *resta* de a y b, y se denota $a - b$, como la suma de a y el opuesto de b,

$$a - b = a + (-b).$$

Definición 2.3 (División)**.** Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$, se define la *división* de a y b, y se denota a/b, como el producto de a y el inverso de b,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Definición 2.4 (Potencia)**.** Dado un número reale $a \in \mathbb{R}$ y un número $n \in \mathbb{N}$, se define la *potencia* de a elevado a n, y se denota a^n, como el producto de a por sí mismo n veces,

$$a^n = a \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot a.$$

A a se le llama la *base* y a n el *exponente* de la potencia.

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Proposición 2.1 (Propiedades de algebraicas)**.** *De los axiomas de cuerpo algebraico de los números reales se deducen las siguientes propiedades:*

a. *El elemento neutro de la suma* (0) *es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a + b = a$, *entonces* $b = 0$.
b. *El elemento neutro del producto* (1) *es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a \cdot b = a$, *entonces* $b = 1$.
c. *El elemento opuesto de un número real es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a + b = 0$, *entonces* $b = -a$.

d. *El elemento inverso de un número real es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a \cdot b = 1$, *entonces* $b = a^{-1}$.

e. *El producto de cualquier número real por el elemento neutro de la suma, es el elemento neutro de la suma:* $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$.

f. *El producto de cualquier número real por el opuesto de* 1 *es el opuesto del número:* $\forall a \in \mathbb{R}$ $(-1) \cdot a = -a$.

g. *El opuesto del opuesto de un número real es el propio número:* $\forall a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.

h. *El producto de los opestos de dos números reales es igual al producto de los números:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

i. *El inverso de un número real distinto de* 0 *también es distinto de* 0*:* $\forall a, \in \mathbb{R}$, *si* $a \neq 0$, *entonces* $a^{-1} \neq 0$.

j. *El inverso del inverso de un número real distinto de 0 es el propio número:* $\forall a \in \mathbb{R}$, *si* $a \neq 0$, *entonces* $(a^{-1})^{-1} = a$.

k. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *si* $a \cdot b = a \cdot c$ *y* $a \neq 0$, *entonces* $b = c$.

l. *Si el producto de dos números reales es* 0, *entonces alguno de los dos números es* 0*:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a \cdot b = 0$, *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$.

m. *El inverso del producto de dos números distintos de* 0 *es el producto de los inversos:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$, *entonces* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b + a = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} b + a = a &\Leftrightarrow b + a + (-a) = a + (-a) \\ &\Leftrightarrow b + 0 = 0 && \text{(axioma 5)} \\ &\Leftrightarrow b = 0 && \text{(axioma 4)} \end{aligned}$$

b. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \cdot a = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} b \cdot a = a &\Leftrightarrow b \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} \\ &\Leftrightarrow b \cdot 1 = 1 && \text{(axioma 10)} \\ &\Leftrightarrow b = 1 && \text{(axioma 9)} \end{aligned}$$

c. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a + b = 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
a+b=0 &\Leftrightarrow (-a)+a+b=(-a)+0 \\
&\Leftrightarrow (-a)+a+b=-a && \text{(axioma 4)} \\
&\Leftrightarrow 0+b=-a && \text{(axioma 5)} \\
&\Leftrightarrow b=-a && \text{(axioma 4)}
\end{aligned}
$$

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b = 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
a \cdot b = 1 &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 1 \\
&\Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} && \text{(axioma 9)} \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot b = a^{-1} && \text{(axioma 10)} \\
&\Leftrightarrow b = a^{-1} && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}
$$

e. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{(axioma 9)} \\
&= a \cdot (1+0) && \text{(axioma 4)} \\
&= (a \cdot 1) + (a \cdot 0) && \text{(axioma 11)} \\
&= a + (a \cdot 0) && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}
$$

Así pues, por la propiedad (a) se tiene que $a \cdot 0 = 0$.

f. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
a + (-1) \cdot a &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a && \text{(axioma 9)} \\
&= (1 + (-1)) \cdot a && \text{(axioma 11)} \\
&= 0 \cdot a && \text{(axioma 5)} \\
&= 0 && \text{(prop. e)}
\end{aligned}
$$

Como $a + (-1) \cdot a = 0$, aplicando la propiedad (c) se tiene $(-1) \cdot a = -a$.

g. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
a + (-a) = 0 &\Leftrightarrow (-a) + a = 0 && \text{(axiomas 5 y 3)} \\
&\Leftrightarrow a = -(-a) && \text{(prop. c)}
\end{aligned}
$$

h. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$,se tiene

$$\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b) && \text{(prop. f)}\\
&= ((-1)\cdot(-1))\cdot a\cdot b && \text{(axioma 7)}\\
&= -(-1)\cdot a\cdot b && \text{(prop. f)}\\
&= 1\cdot a\cdot b && \text{(prop. g)}\\
&= a\cdot b && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

i. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Supongamos ahora que $a^{-1} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= a\cdot 0 && \text{(prop. e)}\\
&= a\cdot a^{-1} &&\\
&= 1 && \text{(axioma 10)}
\end{aligned}$$

Así pues, llegamos a que $0 = 1$, lo cual es absurdo, por lo que $a^{-1} \neq 0$.

j. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}
a\cdot a^{-1} = 1 &\Leftrightarrow a^{-1}\cdot a = 1 && \text{(axiomas 10 y 8)}\\
&\Leftrightarrow a = (a^{-1})^{-1} && \text{(prop. d)}
\end{aligned}$$

k. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a\cdot b = a\cdot c$ y $a \neq 0$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
a\cdot b = a\cdot c &\Leftrightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) = a^{-1}\cdot(a\cdot c) &&\\
&\Leftrightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot b = (a^{-1}\cdot a)\cdot c && \text{(axioma 7)}\\
&\Leftrightarrow 1\cdot b = 1\cdot c && \text{(axioma 10)}\\
&\Leftrightarrow b = c && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

l. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a\cdot b = 0$. Supongamos que $a \neq 0$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
a\cdot b = 0 &\Leftrightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) = a^{-1}\cdot 0 &&\\
&\Leftrightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) = 0 && \text{(prop. e)}\\
&\Leftrightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot b = 0 && \text{(axioma 7)}\\
&\Leftrightarrow 1\cdot b = 0 && \text{(axioma 10)}\\
&\Leftrightarrow b = 0 && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

m. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Entonces, por la propiedad (l) se tiene $a \cdot b \neq 0$, y se tiene

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1 &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot 1 \\
&\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} && \text{(axioma 9)} \\
&\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1 && \text{(axioma 7)} \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} && \text{(axioma 10)} \\
&\Leftrightarrow b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \Leftrightarrow && \text{(axioma 9)} \\
&\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} a^{-1} \\
&\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 8)} \\
&\Leftrightarrow (b^{-1} \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 7)} \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 10)} \\
&\Leftrightarrow (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}
$$

□

A partir del axioma de tricotomía se puede descomponer el conjunto de los números reales en tres conjuntos disjuntos, los positivos $\mathbb{R}^+$, $\{0\}$ y los negativos $\mathbb{R}^-$.

Definición 2.5 (Números reales positivos y negativos)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se dice que:

- a es *estríctamente positivo*, y lo notamos $a > 0$, si $a \in \mathbb{R}^+$.
- a es *positivo*, y lo notamos $a \geq 0$, si $a \in \mathbb{R}^+$ o $a = 0$.
- a es *estríctamente negativo*, y lo notamos $a < 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+$.
- a es *negativo*, y lo notamos $a \leq 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+$ o $-a = 0$.

También se puede definir la siguiente relación que permite comparar dos números.

Definición 2.6 (Relaciones de comparación)**.** Dados dos números $a, b \in \mathbb{R}$, se dice que:

- a es *menor* que b, y lo notamos $a < b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
- a es *menor o igual* que b, y lo notamos $a \leq b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$ o $b - a = 0$.
- a es *mayor* que b, y lo notamos $a > b$, si $a - b \in \mathbb{R}^+$.
- a es *mayor o igual* que b, y lo notamos $a \geq b$, si $a - b \in \mathbb{R}^+$ o $a - b = 0$.

De esta definición y los axiomas de orden de los números reales se deduce que la relación $\leq$ es una relación de orden.

Proposición 2.2. *La relación* menor o igual $\leq$ *es una relación de orden, es decir, cumple las propiedades*

a. Reflexiva*:* $\forall a \in \mathbb{R}$*,* $a \leq a$*.*
b. Antisimétrica*:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*, si* $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$*.*
c. Transitiva*:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$*, si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$*.*

Demostración

Demostración. Veamos que la relación $\leq$ cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

a. Propiedad reflexiva: Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a - a = 0$, luego $a \leq a$.

b. Propiedad antisimétrica: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, se tiene que $b-a \geq 0$ y $-(b-a) \geq 0$, de donde se deduce, por el axioma de tricotomía, que $a - b = 0$, y aplicando los axiomas 4 y 5 se llega a $a = b$.

c. Propiedad transitiva: Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que $a \leq b$ y $b \leq c$, se tiene que $b - a \geq 0$ y $c - b \geq 0$. Supongamos que $b - a > 0$ y $c - b > 0$. Entonces, por el axioma 12 se tiene

$$\begin{aligned}
&(b-a) + (c-b) > 0 && \text{(axioma 2)}\\
&\Leftrightarrow (b-b) + (c-a) > 0 && \text{(axioma 5)}\\
&\Leftrightarrow 0 + (c-a) > 0 && \text{(axioma 4)}\\
&\Leftrightarrow c - a > 0 \Leftrightarrow a \leq c.
\end{aligned}$$

Si $b - a = 0$, entonces $a = b$ y como $b \leq c$ resulta evidente que $a \leq c$. El mismo razonamiento puede aplicarse si $c - b = 0$.

$\square$

Proposición 2.3 (Propiedades de orden)**.** *De los axiomas de orden de los números reales se deducen las siguientes propiedades:*

a. *El cuadrado de cualquier número real distinto de* 0 *es positivo:* $\forall a \in \mathbb{R}$*, si* $a \neq 0$*, entonces* $a^2 > 0$*.*

b. *El elemento neutro de la suma es menor que el elemento neutro del producto:* $0 < 1$*.*

c. *Cualquier número natural es positivo:* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $0 < n$*.*

d. *La suma preserva el orden:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$*, si* $a < b$*, entonces* $a + c < b + c$*.*

e. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, si* $a < b$ *y* $c < d$*, entonces* $a + c < b + d$*.*

f. *El producto por un número real positivo preserva el orden:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$*, si* $a < b$ *y* $c > 0$*, entonces* $a \cdot c < b \cdot c$*.*

g. *El producto por un número real negativo invierte el orden:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$*, si* $a < b$ *y* $c < 0$*, entonces* $a \cdot c > b \cdot c$*.*

h. *El inverso de un número real positivo es positivo y el de un número real negativo es negativo:* $\forall a \in \mathbb{R}$*, si* $a > 0$*, entonces* $a^{-1} > 0$*, y si* $a < 0$*, entonces* $a^{-1} < 0$*.*

i. *El producto de dos números reales es positivo si y solo si los dos números son positivos, o bien los dos números son negativos:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \cdot b > 0$ *si y solo si* $a > 0$ *y* $b > 0$*, o* $a < 0$ *y* $b < 0$*.*

j. *El producto de dos números reales es negativo si y solo si uno de los números es positivo y el otro negativo:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \cdot b < 0$ *si y solo si* $a > 0$ *y* $b < 0$*, o* $a < 0$ *y* $b > 0$*.*

k. $\forall a, b \in \mathbb{R}$*, si* $a < b$*, entonces* $a < \dfrac{a+b}{2} < b$*.*

l. *Cualquier número no negativo que es menor que cualquier número positivo es* 0*:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*, si* $0 \leq a < b$ *y* $b > 0$*, entonces* $a = 0$*.*

Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Entonces, por la propiedad de tricotomía se tiene que $a \in \mathbb{R}^+$ o $-a \in \mathbb{R}^+$.

   Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces, por el axioma 13, se tiene $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$, y por tanto $a^2 \in \mathbb{R}^+$, de manera que $a^2 > 0$.

   Si $-a \in \mathbb{R}^+$, entonces, de nuevo por el axioma 13, se tiene

$$
\begin{aligned}
-a \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow (-a)\cdot(-a) \in \mathbb{R}^+ && \text{(axioma 13)}\\
&\Leftrightarrow (-1)\cdot a\cdot(-1)\cdot a \in \mathbb{R}^+ && \text{(prop. f)}\\
&\Leftrightarrow (-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot a \in \mathbb{R}^+ && \text{(axioma 7)}\\
&\Leftrightarrow 1\cdot a^2 \in \mathbb{R}^+ && \text{(prop. h)}\\
&\Leftrightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+ && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}
$$

y se concluye de nuevo que $a^2 > 0$.

b. Por el axioma 9 se tiene que $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$, y por la propiedad anterior se tiene que $1^2 > 0$, con lo que $1 > 0$.

c. Haremos la prueba por inducción. Para $n = 1$ ya hemos visto en resultado anterior que $1 > 0$. Supongamos ahora que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n-1 > 0$. Entonces, como $1 > 0$, por el axioma 12 se tiene que $n-1+1 > 0$, de lo que se deduce, por los axiomas 5 y 4 que $n > 0$.

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $b-a > 0$. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
b-a > 0 &\Leftrightarrow b+0-a > 0 && \text{(axioma 4)}\\
&\Leftrightarrow b+(c-c)-a > 0 && \text{(axioma 5)}\\
&\Leftrightarrow (b+c)-(a+c) > 0 && \text{(axioma 2)}\\
&\Leftrightarrow a+c < b+c.
\end{aligned}
$$

e. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
b-a > 0 \text{ y } d-c > 0 &\Leftrightarrow (b-a)+(d-c) > 0 && \text{(axioma 12)}\\
&\Leftrightarrow (b+d)-a-c > 0 && \text{(axioma 12)}\\
&\Leftrightarrow (b+d)-(a+c) > 0 && \text{(prop. f)}\\
&\Leftrightarrow a+c < b+d.
\end{aligned}
$$

f. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $b-a > 0$. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
b-a > 0 \text{ y } c > 0 &\Leftrightarrow (b-a)\cdot c > 0 && \text{(axioma 13)}\\
&\Leftrightarrow (b\cdot c)-(a\cdot c) > 0 && \text{(axioma 11)}\\
&\Leftrightarrow a\cdot c < b\cdot c.
\end{aligned}
$$

g. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $b - a > 0$. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ con $c < 0$, entonces $-c > 0$ y se cumple que

$$\begin{aligned} b - a < 0 \text{ y } \; -c > 0 &\Leftrightarrow (b-a)\cdot(-c) > 0 && \text{(axioma 13)} \\ &\Leftrightarrow (b\cdot(-c)) - (a\cdot(-c)) > 0 && \text{(axioma 11)} \\ &\Leftrightarrow -(b\cdot c) + (a\cdot c) > 0 && \text{(prop. f)} \\ &\Leftrightarrow (a\cdot c) - (b\cdot c) > 0 && \text{(axioma 3)} \\ &\Leftrightarrow a\cdot c > b\cdot c. \end{aligned}$$

h. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$. Entonces, por la propiedad de tricotomía, $a \neq 0$ y, por la propiedad algebraica i, $a^{-1} \neq 0$. Supongamos que $a^{-1} < 0$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} a > 0 \text{ y } a^{-1} < 0 &\Leftrightarrow a\cdot a^{-1} < a\cdot 0 && \text{(prop. de orden f)} \\ &\Leftrightarrow a\cdot a^{-1} < 0 && \text{(prop. algebraica e)} \\ &\Leftrightarrow a\cdot a^{-1} \neq 1 && \text{(prop. orden b)} \end{aligned}$$

De esta manera llegamos a una contradicción y por consiguiente, $a^{-1} > 0$.

De forma similar se prueba que si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

i. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b > 0$. Entonces, por la propiedad algebraica e se tiene $a \neq 0$ y $b \neq 0$, y por la propiedad de tricotomía se tiene que $a > 0$ o $a < 0$.

Si $a > 0$, entonces por la propiedad anterior, $a^{-1} > 0$, y se tiene

$$\begin{aligned} a^{-1} > 0 \text{ y } a\cdot b > 0 &\Rightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) > 0 && \text{(axioma 13)} \\ &\Rightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot b > 0 && \text{(axioma 7)} \\ &\Rightarrow b > 0 && \text{(axioma 10)} \end{aligned}$$

Y si $a < 0$, entonces, por la propiedad anterior, $a^{-1} < 0$, y se tiene

$$\begin{aligned} a^{-1} < 0 \text{ y } a\cdot b > 0 &\Rightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) < a^{-1}\cdot 0 && \text{(prop. orden g)} \\ &\Rightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) < 0 && \text{(prop. algebraica e)} \\ &\Rightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot b < 0 && \text{(axioma 7)} \\ &\Rightarrow b < 0 && \text{(axioma 10)} \end{aligned}$$

Para probar la otra implicación, si $a > 0$ y $b > 0$, por el axioma 13 se tiene que $a \cdot b > 0$, y si $a < 0$ y $b < 0$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} a < 0 \text{ y } b < 0 &\Rightarrow a \cdot b > a \cdot 0 && \text{(prop. orden g)} \\ &\Rightarrow a \cdot b > 0 && \text{(prop. algebraica e)} \end{aligned}$$

j. Se demuestra de forma análoga a la propiedad anterior.

k. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} 2 \cdot a = (1+1) \cdot a = (1 \cdot a) + (1 \cdot a) && \text{(axioma 11)} \\ = a + a && \text{(axioma 9)} \\ < a + b && \text{(prop. orden d)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2 \cdot b = (1+1) \cdot b = (1 \cdot b) + (1 \cdot b) && \text{(axioma 11)} \\ = b + b && \text{(axioma 9)} \\ > a + b && \text{(prop. orden d)} \end{aligned}$$

Así pues, se puede concluir que $2 \cdot a < a + b < 2 \cdot b$ y ahora se tiene

$$\begin{aligned} 2 \cdot a < a + b < 2 \cdot b &\Leftrightarrow 2^{-1} \cdot (2 \cdot a) < 2^{-1} \cdot (a+b) < 2^{-1} \cdot (2 \cdot b) \\ & && \text{(prop. orden f)} \\ &\Leftrightarrow (2^{-1} \cdot 2) \cdot a < 2^{-1} \cdot (a+b) < (2^{-1} \cdot 2) \cdot b && \text{(axioma 7)} \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot a < 2^{-1} \cdot (a+b) < 1 \cdot b && \text{(axioma 10)} \\ &\Leftrightarrow a < 2^{-1} \cdot (a+b) < b && \text{(axioma 9)} \\ &\Leftrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b. \end{aligned}$$

l. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a < b$ $\forall b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$. Como $a \geq 0$ se tiene que $a > 0$ o $a = 0$. Si $a > 0$, por la propiedad anterior se tiene $0 < \frac{a}{2} < a$. Si ahora tomamos $b = \frac{a}{2} > 0$ se tiene que $a < \frac{a}{2}$, lo cual es absurdo, y, por tanto, debe ser $a = 0$.

$\square$

A partir del axioma de tricotomía también se puede definir el valor absoluto de un número real.

Definición 2.7 (Valor absoluto)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se define el *valor absoluto* de a, y se denota $|a|$, como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1. $|1.5| = 1.5$ y $|-1/2| = 1/2$.

Como se verá en el próximo capítulo, el valor absoluto permite calcular la distancia entre dos números reales en la recta real.

Proposición 2.4 (Propiedades del valor absoluto)**.** *Se cumplen las siguientes propiedades del valor absoluto:*

a. El valor absoluto de un número real y de su opuesto es el mismo: $\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| = |-a|$.

b. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| = |b - a|$.

c. El valor absoluto del producto de dos números reales es igual que el producto de los valores absolutos de los números: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

d. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $b > 0$ *entonces* $|a| \leq b$ *si y solo si* $-b \leq a \leq b$.

e. $\forall a \in \mathbb{R}$, $|-a| \leq a \leq |a|$.

f. Desigualdad triangular: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

i Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$ entonces |0|=0=|-0|.

   Si $a > 0$ entonces $-a < 0$, de modo que por la propiedad algebraica g se tiene $|a|= a = -(-a) = |-a|.

   Y si $a < 0$ entonces $-a > 0$, de modo que $|a| = -a = |-a|$.

b. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
|a-b| &= |-(a-b)| && \text{(prop. valor absoluto a)}\\
&= |(-1)(a-b)| && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |((-1)\cdot a)+((-1)\cdot(-b))| && \text{(axioma 11)}\\
&= |-a+-(-b)| && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |-a+b| && \text{(prop. algebraica g)}\\
&= |b-a| && \text{(axioma 3)}
\end{aligned}$$

c. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se pueden dar varios casos:

- Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces, por el axioma 12, $a \cdot b > 0$ y $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$.
- Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces, por la propiedad de orden j, $a \cdot b < 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
|a\cdot b| &= -(a\cdot b)\\
&= (-1)\cdot(a\cdot b) && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= a\cdot((-1)\cdot b) && \text{(axioma 7)}\\
&= a\cdot -b && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |a|\cdot|b|.
\end{aligned}$$

- Si $a < 0$ y $b > 0$, la prueba es similar al caso anterior.
- Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces por la propiedad de orden i, $a \cdot b > 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
|a\cdot b| &= (a\cdot b)\\
&= 1\cdot(a\cdot b) && \text{(axioma 9)}\\
&= -(-1)\cdot(a\cdot b) && \text{(prop. algebraica g)}\\
&= (-1)\cdot(-1)\cdot(a\cdot b) && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b) && \text{(axioma 7)}\\
&= -a\cdot -b && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |a|\cdot|b|.
\end{aligned}$$

- $a = 0$ o $b = 0$, entonces por la propiedad algebraica e $a \cdot b = 0$ y es evidente que $|a \cdot b| = 0 = |a| \cdot |b|$.

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b > 0$. Si $|a| \leq b$, entonces $a \leq b$ y $-a \leq b$, y para esta última desigualdad, si $-a < b$ se tiene

$$\begin{aligned} -a < b &\Rightarrow (-1) \cdot (-a) > (-1) \cdot b && \text{(prop. orden g)} \\ &\Rightarrow -(-a) > -b && \text{(prop. algebraica f)} \\ &\Rightarrow a > -b && \text{(prop. algebraica g)} \end{aligned}$$

Y si $-a = b$ entonces $a = -b$, por lo que $a \geq -b$, y se concluye que $-b \leq a \leq b$.

Para probar la otra implicación supongamos que $-b \leq a \leq b$, entonces $a \leq b$ y por otro lado $a \geq -b$, de donde se tiene, si $a > -b$

$$\begin{aligned} a > -b &\Rightarrow (-1) \cdot a < (-1) \cdot (-b) && \text{(prop. orden g)} \\ &\Rightarrow -a < -(-b) && \text{(prop. algebraica f)} \\ &\Rightarrow -a < b. && \text{(prop. algebraica g)} \end{aligned}$$

Y si $a = -b$ entonces $-a = b$, por lo que $-a \leq b$, y como $b > 0$ se puede concluir que $|a| < b$.

e. Sea $a \in \mathbb{R}$. Como $|a| \leq |a|$, si $|a| > 0$, por la propiedad anterior, se tiene que $-|a| \leq a \leq |a|$, y si $|a| = 0$, entonces $a = 0$ y $-|0| \leq 0 \leq |0|$.

f. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Por la propiedad anterior se tiene que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ de manera que, por la propiedad de orden e, se cumple

$$(-|a|) + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

y por el axioma 11 se tiene

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

de lo que se deduce por la propiedad d que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

□

Veremos ahora una serie de consecuencias del axioma de completitud.

Proposición 2.5. *Si un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota inferior, entonces tiene un ínfimo $m \in \mathbb{R}$.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Teorema 2.3 (Propiedad arquimediana)**.** *Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$.*

Demostración

Demostración. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. Entonces, x es una cota superior de $\mathbb{N}$. Por tanto, por el axioma del supremo existe un número $s = \sup(\mathbb{N})$. Por ser supremo, se cumple que existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < m$, pero entonces se tiene que $s < m + 1$, y como $m \in \mathbb{N}$ también $m + 1 \in \mathbb{N}$, lo que contradice que s sea cota superior de $\mathbb{N}$. □

Corolario 2.1. *De la propiedad arquimediana se deducen las siguientes consecuencias:*

a. *Si $a > 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*
b. *Si $a > 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq a < n$.*

Teorema 2.4 (Raíz cuadrada)**.** *Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, existe un número real $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ y $x^2 = a$. A este número se le llama* raíz cuadrada *de a y se denota por $\sqrt{a}$ o $a^{1/2}$.*

Demostración

Demostración. Sea $A = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^2 < a\}$. A está acotado superiormente ya que si $a > 1$, el propio a es una cota superior y si no 1 es una cota superior. Por tanto, según el axioma del supremo, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sup(A) > 0$. Vamos a probar que $x^2 = a$.
Supongamos primero que $x^2 < a$. Entonces $a - x^2 > 0$ y $\frac{a-x^2}{2x+1} > 0$ ya que $2x + 1 > 0$ al ser $x > 0$. Por el Corolario 2.1 se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{a-x^2}{2x+1} > 0$. Por otro lado, se tiene

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 = x^2+\frac{1}{n^2}+\frac{2x}{n} = x^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+2x\right) \leq x^2+\frac{1}{n}(2x+1) <$$
$$< x^2+\frac{a-x^2}{2x+1}(2x+1) = x^2+(a-x^2) = a.$$

Por tanto, $x+\frac{1}{n}\in A$, pero $x+\frac{1}{n}>x$ lo que contradice que x sea cota superior de A.
Supongamos ahora que $x^2>a$. Entonces $x^2-a>0$ y $\frac{x^2-a}{2x}>0$ al ser $x>0$. Aplicando de nuevo el Corolario 2.1 se tiene que existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m}<\frac{x^2-a}{2x}$ y por tanto $\frac{2x}{m}<x^2-a$.
Por otro lado, se tiene

$$\left(x-\frac{1}{m}\right)^2 = x^2+\frac{1}{m^2}-\frac{2x}{m} > x^2-\frac{2x}{m} > x^2-(x^2-a) = a.$$

Por tanto, $x-\frac{1}{m}$ es una cota superior de A, pero $x>x-\frac{1}{m}$, lo que contradice que $x=\sup(A)$.
Así pues, $x^2\not< a$ y $x^2\not> a$, por lo que tiene que ser $x^2=a$.

□

Del mismo modo se puede probar que para cualquier número real $a\in\mathbb{R}$ con $a>0$ y para cualquier número natural $n\in\mathbb{N}$ existe un número real $x\in\mathbb{R}$ tal que $x>0$ y $x^n=a$. A este número se le llama *raíz n-ésima* de a.

Teorema 2.5 (Densidad de los números racionales)**.** *Dados dos números reales $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, existe un número racional $q\in\mathbb{Q}$ tal que $a<q<b$.*

Demostración

Demostración. Como $a<b$ se tiene que $b-a>0$, de manera que por la propiedad arquimediana existe un número natural $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}<b-a$. Por otro lado, como $a>0$ también na>0, y de nuevo por la propiedad arquimediana existe otro número real $m\in\mathbb{N}$ tal que $m-1\leq a<m$, de donde se deduce que $\frac{m-1}{\leq}a<\frac{m}{n}$. Consideremos ahora el número racional $q=\frac{m}{n}$. Acabamos de ver que $a<q$, por lo que solo falta probar que $q<b$. Para ello, volviendo de nuevo a que $\frac{1}{n}<b-a$, se tiene que

$$\frac{1}{n}<b-a \Rightarrow 1<nb-na \Rightarrow 1+na<nb$$

pero como habíamos visto que $m-1\leq na$ se deduce que $1+m-1<nb$, es decir

$m < nb$, y de aquí se concluye que $q = \frac{m}{n} < b$.

□

Corolario 2.2 (Densidad de los números irracionales)**.** *Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe un número irracional $p \in \mathbb{R}\ \ \mathbb{Q}$ tal que $a < p < b$.*

Demostración

Demostración. Sabemos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\ \ \mathbb{Q}$ y que $\sqrt{2} > 0$, por lo que al aplicar el teorema anterior a los números reales $\frac{a}{\sqrt{2}}$ y $\frac{b}{\sqrt{2}}$ se tiene que existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}$, lo que implica que $a < q\sqrt{2} < b$. Finalmente, si tomamos $p = q\sqrt{2}$, tenemos que es un número irracional que cumple que $a < p < q$.

□

2.6 Clasificación de los conjuntos numéricos

Con estas extensiones se obtiene la siguiente clasificación de los conjuntos numéricos (se ha incluido también el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ que no se verán en este manual.)

$$\text{Complejos } \mathbb{C} \begin{cases} \text{Reales } \mathbb{R} \begin{cases} \text{Racionales } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{Enteros } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{Naturales } \mathbb{N} \\ \text{Cero } 0 \\ \text{Enteros negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales} \end{cases} \\ \text{Imaginarios} \end{cases}$$

En particular se cumple que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3 Topología de la recta real

En este capítulo presentamos, sin profundizar demasiado, los principales conceptos topológicos del conjunto de los números reales, que se serán necesarios en futuros capítulos.

Los números reales pueden representarse geométricamente como puntos de una línea recta que se conoce como la *recta real*. Existe una biyección entre los puntos de una recta y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, de modo que a cada número real le corresponde un solo punto, y a cada punto, exactamente un número real. Para establecer esta correspondencia se fija un punto O en la recta correspondiente al número real 0 y otro punto A a la derecha de 0, correspondiente al número real 1, de manera que se dice que la *abscisa* de A es 1 y se denota $A(1)$. A partir de estos dos puntos, hy considerando la distancia entre O y A como unidad de medida, se pueden representar cualquier otro punto B correspondiente al número real x, dibujando a B a la derecha de O si $x > 0$ y a la izquierda si $x < 0$, a una distancia $|x|$ de O.

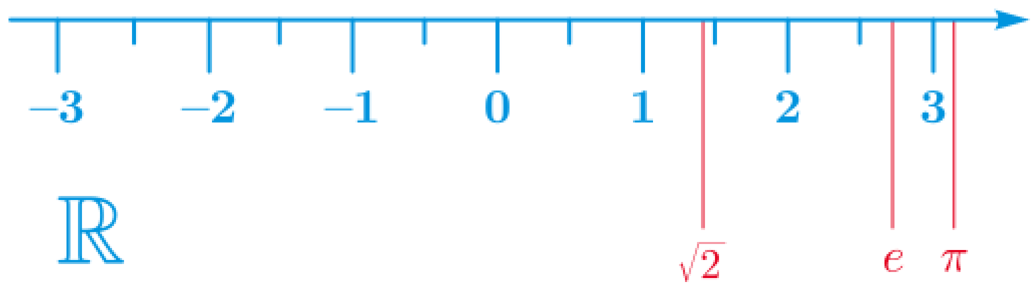

Figura 3.1: La recta real

3.1 Intervalos y entornos

Definición 3.1 (Intervalo abierto)**.** Dados dos números reales tales que $a \leq b$, se llama *intervalo abierto* de extremos a y b, y se denota (a, b) al conjunto de números reales comprendidos entre a y b

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Definición 3.2 (Intervalo cerrado)**.** Dados dos números reales tales que $a \leq b$, se llama *intervalo cerrado* de extremos a y b, y se denota $[a, b]$ al conjunto de números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

> ⚠ Advertencia
>
> Obsérvese que si $a = b$, $(a, a) = \emptyset$ y $[a, a] = \{a\}$.

Los intervalos también pueden ser abiertos por un lado y cerrados por el otro.

Definición 3.3 (Intervalo semiabierto o semicerrado)**.** Dados dos números reales tales que $a < b$, se definen los *intervalos semiabiertos* o *semicerrados* de extremos a y b de la siguiente manera:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{y} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Estos intervalos están *acotados* ya que a es una cota inferior y b una cota superior, pero también existen intervalos no acotados.

Definición 3.4 (Intervalo abierto no acotado)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes *intervalos abiertos no acotados*:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad \text{y} \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

Definición 3.5 (Intervalo semiabierto no acotado)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes *intervalos semiabiertos no acotados*:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \quad \text{y} \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

Definición 3.6 (Intervalos anidados)**.** Se dice que una sucesión de intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$ es una *sucesión de intervalos anidados* si se cumple que $I_{n+1} \subseteq I_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1. La sucesión de intervalos $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de intervalos anidados, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n < n+1$ y por tanto $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, de manera que $I_{n+1} = [0, \frac{1}{n+1}] \subseteq [0, \frac{1}{n}] = I_n$.

Teorema 3.1 (Intervalos anidados)**.** *Dada una sucesión de intervalos cerrados y anidados* $I_n = [a_n, b_n]$*,* $n \in \mathbb{N}$*, existe un número* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$*. Además, si el ínfimo de las longitudes* $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es* 0*, entonces* a *es único, es decir,* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$*.*

Demostración

Demostración. Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que los intervalos están anidados, A está acotado superiormente por b_1 ya que $a_n \leq b_n \leq b_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y B está acotado inferiormente por a_1 ya que $a_1 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, como A está acotado superiormente, por el axioma del supremo, existe $a = \sup(A)$, y como B está acotado inferiormente, existe $b = \inf(B)$.
Veamos ahora que $a \leq b$. Para ello basta probar que a es cota inferior de B. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que si $k \geq n$ entonces $a_k \leq b_k \leq b_n$ pues $I_n \subseteq I_k$, y si $k < n$, entonces $a_k \leq a_n \leq b_n$, pues $I_n \subseteq I_k$. Luego b_n es una cota superior de A, y por tanto, $a \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que a es cota inferior de B. Así pues, como a es cota superior de A e inferior de B, se tiene que $a_n \leq a \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $a \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.
De forma similar se puede probar que $b \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$, por lo que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$.
Finalmente, veamos que si $\inf(\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ entonces $a = b$. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, como $\inf(\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq b_k - a_k < \varepsilon$. Como $b \leq b_k$ y $a \geq a_k$, se tiene que $0 \leq b - a \leq b_k - a_k < \varepsilon$, de donde se deduce que $b - a = 0$ y por tanto $a = b$, así que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, a] = \{a\}$. $\square$

Definición 3.7 (Entorno)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se llama *entorno* de a a cualquier intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. El número ε se conoce como *radio del entorno.*

Para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)\ \ \{a\}$ se llama *entorno reducido* de a.

3.2 Clasificación de puntos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ clasifica los puntos de $\mathbb{R}$ en tres clases: puntos interiores, puntos exteriores y puntos fronteras de A.

Definición 3.8 (Punto interior)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto interior* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe un entorno de a contenido en A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$.

El conjunto de los puntos interiores de A se llama *interior* de A y se denota por $\mathrm{Int}(A)$.

Aunque la definición no lo hace explícito, es evidente que si a es un punto interior de A entonces $a \in A$.

Intuitivamente, un punto interior de un conjunto es un punto que no está en el borde del conjunto, es decir, que está rodeado por puntos del conjunto, y por tanto, podemos movernos un poco hacia la izquierda o hacia la derecha del punto sin salirnos del conjunto.

Ejemplo 3.2. 0.9 es un punto interior del intervalo $(0,1)$ ya que podemos tomar $\varepsilon = 0.01$ tal que el entorno $(0.9 - 0.01, 0.9 + 0.01) = (0.89, 0.91) \subset (0,1)$.

Sin embargo, 1 no es un punto interior del intervalo $(0,1)$ ya que por muy pequeño que tomemos $\varepsilon > 0$, $1 + \varepsilon > 1$ y, por tanto, el entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ siempre tendrá valores mayores que 1, de manera que $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subseteq (0,1)$.

Definición 3.9 (Punto exterior)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto exterior* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe un entorno de a contenido en el complementario de A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$.

El conjunto de los puntos exteriores de A se llama *exterior* de A y se denota por $\mathrm{Ext}(A)$.

Una definición equivalente es que un punto es punto exterior de un conjunto si es un punto interior de su complementario.

Ejemplo 3.3. 1.01 es un punto exterior del conjunto $(-\infty, 1)$ ya que tomando $\varepsilon = 0.001$ el entorno $(1.01 - 0.001, 1.01 + 0.001) = (1.009, 1.011) \in \overline{(-\infty, 1)} = [1, \infty)$.

Sin embargo, 1 no es un punto exterior del intervalo $(-\infty, 1)$, ya que no es un punto interior del intervalo $\overline{(-\infty, 1)} = [1, \infty)$, ya que $1 - \varepsilon < 1\ \forall \varepsilon > 0$, y, por tanto, el entorno $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ siempre tendrá valores menores que 1, de manera que $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \not\subseteq [1, \infty)$.

⚠ Advertencia

El que un punto no sea punto interior de un conjunto no significa que sea un punto exterior. Por ejemplo, 1 no es un punto interior del intervalo $(0, 1)$, y tampoco de su complementario $\overline{(0, 1)} = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Definición 3.10 (Punto frontera)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto frontera* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno de a contiene puntos de A y de su complementario.

El conjunto de los puntos frontera de A se llama *frontera* de A y se denota por $\mathrm{Fr}(A)$.

Una definición equivalente es que un punto es un punto frontera de un conjunto si no es un punto interior ni exterior del conjunto.

Ejemplo 3.4. El punto 1 es un punto frontera del intervalo $[1, \infty)$ ya que no es un punto interior de $[1, \infty)$ ni de su complementario $(-\infty, 1)$.

Proposición 3.1. *Todos los puntos de un intervalo abierto son puntos interiores suyos, es decir, dado un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que $\mathrm{Int}((a, b)) = (a, b)$.*

ℹ Demostración

Demostración. Tomemos cualquier punto $x \in (a, b)$, entonces se puede tomar $\varepsilon = \frac{\min\{|x-a|, |x-b|\}}{2}$ de manera que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$.

□

Proposición 3.2. *Todos los puntos de un intervalo cerrado, excepto sus extremos, son puntos interiores suyos, es decir, dado un intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que* $\mathrm{Int}([a, b]) = (a, b)$.

ℹ Demostración

Demostración. Par ver que a no es un punto interior de $[a, b]$, basta con ver que $a-\varepsilon < a$ para cualquier $\varepsilon > 0$, por lo que el intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ irremediablemente contendrá puntos menores que a y, por tanto, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subseteq [a, b]$.
Un razonamiento análogo se puede utilizar para demostrar que b tampoco es un punto interior de $[a, b]$.

□

A partir de estas proposiciones, es fácil ver que que para cualquier intervalo abierto (a, b), $\text{Int}((a, b)) = (a, b)$, $\text{Ext}((a, b)) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ y $\text{Fr}((a, b)) = \{a, b\}$. Y para cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, $\text{Int}([a, b]) = (a, b)$, $\text{Ext}([a, b]) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ y $\text{Fr}([a, b]) = \{a, b\}$.

Proposición 3.3. *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$*, los conjuntos* $\text{Int}(A)$*,* $\text{Ext}(A)$ *y* $\text{Fr}(A)$ *forman una partición de* $\mathbb{R}$*, es decir,*

a. $\text{Int}(A)$, $\text{Ext}(A)$ *y* $\text{Fr}(A)$ *son disjuntos entre sí.*
b. $\text{Int}(A) \cup \text{Ext}(A) \cup \text{Fr}(A) = \mathbb{R}$.

ℹ Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio.

□

A continuación se definen otros tipos de puntos que son útiles para definir conceptos que se verán más adelante como el de *límite*.

Definición 3.11 (Punto adherente)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto adherente* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno de a contiene puntos de A.

El conjunto de los puntos adherentes de A se llama *adherencia* de A y se denota por $\text{Adh}(A)$.

Resulta obvio que cualquier punto interior y frontera de un conjunto es también adherente, y que cualquier punto exterior no es adherente. Resulta evidente también que cualquier punto de un conjunto es un punto adherente, de manera que para cualquier conjunto A se tiene $A \subseteq \text{Adh}(A)$.

Definición 3.12 (Punto de acumulacion)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno reducido de a contiene puntos de A.

El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama *conjunto derivado* de A y se denota por $\mathrm{Ac}(A)$.

> ⚠ Advertencia
>
> Resulta obvio de la definición que cualquier punto de acumulación es también un punto de adherencia, es decir, $\mathrm{Ac}(A) \subseteq \mathrm{Adh}(A)$ para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Sin embargo no todo punto de adherencia es un punto de acumulación.

Es posible que un conjunto tenga puntos de acumulación que pertenezcan al conjunto y otros que no.

Ejemplo 3.5. Dado el conjunto $A = (0,1) \cup \{2\}$, se tiene que 2 es un punto de adherencia de A, pues para cualquier $\varepsilon > 0$ el entorno $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ contiene al propio 2 que es un punto de A. Sin embargo, 2 no es un punto de acumulación, porque para $\varepsilon = 0.5$, por ejemplo, el entorno reducido $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \quad \{2\} = (1.5, 2) \cup (2, 2.5)$ no contiene puntos de A.

En cambio el punto 0.5 es tanto un punto de adherencia como un punto de acumulación de A porque para cualquier $\varepsilon > 0$ el entorno reducido $(0.5-\varepsilon, 0.5+\varepsilon) \quad \{0.5\}$ siempre contiene puntos de A. De hecho, para cualquier $x \in (a,b)$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, el intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ contiene puntos de A, y lo mismo ocurre para a y b al ser puntos frontera, de manera que $\mathrm{Ac}(A) = [0,1]$, mientras que $\mathrm{Adh}(A) = [0,1] \cup \{2\}$.

Intuitivamente, un punto de acumulación de un conjunto A es un punto para el que podemos encontrar puntos de A, distintos de él mismo, tan próximos a él como queramos. Un punto de acumulación se diferencia de un punto de adherencia en que siempre está rodeado por puntos de A, mientras que un punto de adherencia puede estar aislado de los demás puntos de A.

Definición 3.13 (Punto aislado)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto de aislado* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si es un punto adherente de A, pero no de acumulación.

Proposición 3.4. *Para cualquier intervalo abierto* (a,b) *se tiene que* $\mathrm{Adh}((a,b)) = \mathrm{Ac}((a,b)) = [a,b]$.

ℹ Demostración

Demostración. Todos los puntos de (a,b) son interiores y, por tanto, para cualquier $x \in (a,b)$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$. Si ahora tomamos cualquier otro $\varepsilon' > 0$, se tiene que $(x-\varepsilon', x+\varepsilon') \quad \{x\} \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset$, pero como $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$, se concluye que $(x-\varepsilon', x+\varepsilon') \quad \{x\} \cap (a,b) \neq \emptyset$, por lo que x es un punto de acumulación de (a,b). Por otro lado, como a y b son puntos frontera, también se tiene que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset$ y $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset$ de manera que $[a,b] \subseteq \mathrm{Ac}((a,b)) \subseteq \mathrm{Adh}((a,b))$. Sea ahora cualquier $x > b$, y tomemos $\varepsilon = \frac{|x-b|}{2}$, entonces $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (a,b) = \emptyset$, de manera que x no es un punto de adherencia de (a,b). Del mismo modo se puede probar que si $x < a$, entonces x tampoco es un punto de adherencia de (a,b), por lo que $\mathrm{Adh}((a,b)) = [a,b]$ y como $\mathrm{Ac}((a,b)) \subseteq \mathrm{Adh}((a,b))$, también se concluye que $\mathrm{Ac}((a,b)) = [a,b]$.

□

Proposición 3.5. *Para cualquier conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$, *se tiene que* $\mathrm{Adh}(A) = A \cup \mathrm{Ac}(A)$.

ℹ Demostración

Demostración. Ya se ha visto que $A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$ y también $\mathrm{Ac}(A) \subseteq \mathrm{Adh}(A)$, por lo que $A \cup \mathrm{Ac}(A) \subseteq \mathrm{Adh}(A)$.
Veamos ahora que $\mathrm{Adh}(A) \subseteq A \cup \mathrm{Ac}(A)$. Sea x un punto de adherencia de A. Si $x \in A$ es obvio que $x \in A \cup \mathrm{Ac}(A)$, y si $x \notin A$, entonces $x \in \mathrm{Ac}(A)$, ya que, por ser x punto de adherencia de A, para cualquier $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pero como además $x \notin A$, también se cumple que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ contiene puntos de A. Así pues, $x \in A \cup \mathrm{Ac}(A)$, y por tanto $\mathrm{Adh}(A) \subseteq A \cup \mathrm{Ac}(A)$.

□

3.3 Conjuntos abiertos y cerrados

A continuación se generaliza la característica que diferencia los intervalos abiertos y cerrados, a cualquier conjunto.

Definición 3.14 (Conjunto abierto)**.** Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *abierto* cuando para cada $a \in A$ existe un entorno de a contenido en A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$.

> **!** Importante
>
> Obsérvese que un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.

Ejemplo 3.6. Cualquier intervalo abierto (a, b) es un conjunto abierto, ya que según se vio en la Proposición 3.1 $\text{Int}((a, b)) = (a, b)$. Por otro lado, un intervalo cerrado $[a, b]$ no es un conjunto abierto pues cualquier entorno de a o b no está contenido en $[a, b]$.

Una colección de conjuntos abiertos se llama *topología* y cualquier propiedad que pueda definirse en términos de conjuntos abiertos se llama *propiedad topológica*.

Definición 3.15 (Conjunto cerrado)**.** Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *cerrado* cuando su complementario $\overline{A} = \mathbb{R} \ \ A$ es abierto.

Ejemplo 3.7. Todo intervalo cerrado $[a, b]$ es cerrado, pues su complementario $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es abierto.

> **⚠** Advertencia
>
> Un subconjunto puede ser abierto y cerrado a la vez, como por ejemplo $\mathbb{R}$ y $\emptyset$. $\mathbb{R}$ es abierto ya que todos sus puntos son interiores, y por tanto $\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$ es cerrado. Pero, también $\emptyset$ es abierto, ya que para que un conjunto no sea abierto, al menos uno de sus puntos no debe ser interior, y en consecuencia $\overline{\emptyset} = \mathbb{R}$ es también cerrado.
> Un subconjunto también puede no ser abierto ni cerrado, como por ejemplo $(a, b]$, ya que b no es un punto interior de $(a, b]$, y a no es un punto interior de $\overline{(a, b]} = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$. Por tanto, no abierto no implica cerrado y no cerrado no implica abierto.

Proposición 3.6. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
2. *La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
3. *La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.*
4. *La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

Advertencia

La intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto, como por ejemplo la colección de conjuntos $I_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, ya que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 1]$.
Y la unión de una colección infinita de conjuntos cerrados puede no ser cerrada, como por ejemplo la colección de conjuntos $J_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, ya que $\cup_{n=1}^{\infty} J_n = (0, 1]$.

Teorema 3.2 (Existencia del máximo y mínimo)**.** *Cualquier conjunto no-vacío, cerrado y acotado superiormente tiene un máximo, y cualquier conjunto no-vacío, cerrado y acotado inferiormente tiene un mínimo.*

Demostración

Demostración. Sea A un conjunto no vacío, cerrado y acotado superiormente. Como A está acotado superiormente, por el axioma del supremo, existe $s = \sup(A)$. Probaremos que $s \in A$ por reducción al absurdo. Supongamos que $s \notin A$, entonces $s \in \overline{A}$, y como $\overline{A}$ es abierto al ser A cerrado, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$. Como ningún elemento de A puede ser mayor que s y $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \not\subseteq A$, se tiene que $s-\varepsilon$ es también una cota superior de A, pero $s-\varepsilon < s$, lo que contradice que s sea el supremo de A. Así, pues $s \in A$, y por tanto es el máximo de A.
De manera análoga se prueba que si A un conjunto no vacío, cerrado y acotado inferiormente, A tiene mínimo. $\square$

Teorema 3.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ acotado tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración

Demostración. Para demostrar el teorema construiremos una sucesión de intervalos cerrados y anidados y aplicaremos el Teorema 3.1.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto infinito y acotado. Como A está acotado, existe un intervalo cerrado tal que $A \subset I_1 = [a_1, b_1]$. Si I_1 se divide en dos intervalos $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ y $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, al menos uno de estos intervalos tendrá infinitos puntos de A, ya que de lo contrario A sería finito. Sea $I_2 = [a_2, b_2]$ cualquiera de los dos intervalos que tenga infinitos puntos de A. Si I_2 se divide en dos intervalos $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ y $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$, al menos uno de estos intervalos tendrá infinitos puntos de A, ya que de lo contrario A sería finito. Sea $I_3 = [a_3, b_3]$ cualquiera de los dos intervalos que tenga infinitos puntos de A. Siguiendo la misma lógica, se puede construir una sucesión de intervalos anidados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, con tamaños $\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$. Como $\inf\{\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N}\} = 0$, aplicando el Teorema 3.1, existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$.
Veremos ahora que a es un punto de acumulación de A. Para cualquier $\varepsilon > 0$, considérese el entorno reducido de a $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ \{a\}$. Como $\inf\{\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N}\} = 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b_1-a_1}{2^{m-1}} < \varepsilon$, y por tanto $I_m \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, y como I_m contiene infinitos puntos de A, el entorno reducido a también contiene puntos de A, por lo que a es un punto de acumulación de A.

$\square$

Teorema 3.4. *Cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

i Demostración

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Veamos por reducción al absurdo que $a \in A$.
Supongamos que $a \notin A$, entonces $a \in \overline{A}$. Como A es cerrado, $\overline{A}$ es abierto y existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \overline{A}$, pero entonces $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A = \emptyset$, lo que contradice que a sea punto de acumulación de A.
Veremos ahora el otro sentido de la implicación. Sea A un conjunto que contiene todos sus puntos de acumulación. Sea $x \in \overline{A}$, entonces $x \notin A$ y por tanto no es un punto de acumulación de A y existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno propio de x $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \{x\} \cap A = \emptyset$. Como $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \{x\} \subset \overline{A}$ y $x \in \overline{A}$ se concluye que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \overline{A}$, de manera que $\overline{A}$ es abierto y A es cerrado.

$\square$

4 Sucesiones de números reales

Las sucesiones de números reales son claves para comprender el concepto de límite que es fundamental en el Análisis Matemático. En este capítulo se presenta el concepto de sucesión de números reales, el concepto de límite y algunos resultados importantes sobre la convergencia de sucesiones.

4.1 Concepto de sucesión

Definición 4.1 (Sucesión de números reales)**.** Una *sucesión de números reales* es una aplicación $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número natural n un número real a_n, conocido como *término de la sucesión*.

Utilizaremos la notación $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $a_n = a(n)$ con $n \in \mathbb{N}$, o simplemente a_n, para referirnos a la sucesión definida por la aplicación a.

De manera informal, se puede decir que una sucesión es una lista ordenada de números reales.

Ejemplo 4.1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ está formada por los términos $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

Precaución

No hay que confundir los términos de una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, que tienen orden, con el conjunto de los valores de la sucesión $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ que no tiene orden.

Ejemplo 4.2. La sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ está formada por los términos $-1, 1, -1, 1, \ldots$, mientras que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

Una sucesión de números reales puede definirse dando una fórmula para el término general, de manera que aplicando la fórmula para cada $n \in \mathbb{N}$ se obtienen todos los términos de las sucesión, o bien de manera recursiva, dando el primer término de la sucesión y después dando una fórmula para construir el siguiente término de la sucesión en función del anterior o anteriores.

Ejemplo 4.3. La sucesión del ejemplo anterior también se puede definir recursivamente de la siguiente manera, $a_1 = -1$ y $a_{n+1} = (-1)a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Otro ejemplo es la famosa sucesión de Fibonacci, que se define recursivamente como $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Las operaciones aritméticas de los números reales se pueden extrapolar a las sucesiones aplicándolas término a término.

Definición 4.2 (Operaciones con sucesiones)**.** Dadas dos sucesiones de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, se definen las siguientes operaciones:

- *Suma:* $(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$.
- *Diferencia:* $(a_n)_{n=1}^{\infty} - (b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$.
- *Producto:* $(a_n)_{n=1}^{\infty}(b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$.
- *División:* $\dfrac{(a_n)_{n=1}^{\infty}}{(b_n)_{n=1}^{\infty}} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, siempre y cuando $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- *Producto por escalar:* $c(a_n)_{n=1}^{\infty} = (ca_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ejemplo 4.4. Dadas las sucesiones $(n)_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
(n)_{n=1}^{\infty} + ((-1)^n)_{n=1}^{\infty} &= (n + (-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (0, 3, 2, 5, 4, ...) \\
(n)_{n=1}^{\infty}((-1)^n)_{n=1}^{\infty} &= (n(-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 2, -3, 4, -5, ...)
\end{aligned}
$$

4.2 Límite de una sucesión

Definición 4.3 (Límite de una sucesión)**.** Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, se dice que un número $a \in \mathbb{R}$ es el *límite de la sucesión*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ a partir del cuál todos los términos de la sucesión caen en el entorno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, es decir, $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq k$.

Si a es el límite de la sucesión, se dice que la suceción *converge* a a, y se denota $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Si una sucesión tiene límite se dice que es *convergente*, y en caso contrario se dice que es *divergente*.

De manera informal podemos decir que una sucesión de números reales converge a un número a, si para cualquier entorno suyo, a partir de un determinado término, todos los siguientes caen dentro del entorno, tal y como se muestra en la siguiente figura.

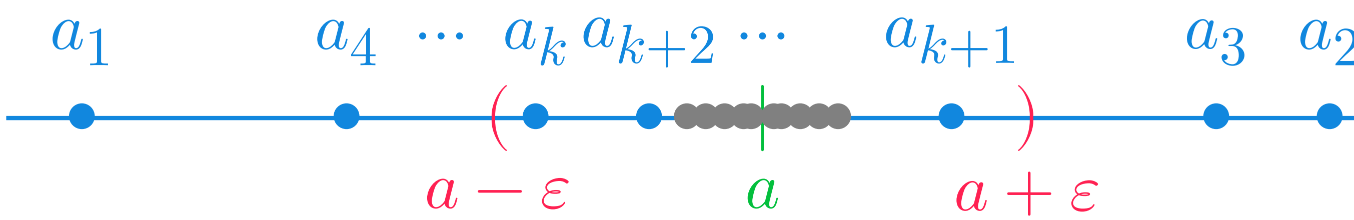

Figura 4.1: Límite de una sucesión

Esto es equivalente a decir que podemos encontrar términos de la sucesión tan cerca de a como queramos.

Ejemplo 4.5. La sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, se tiene que existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$, de manera que para cualquier $n > k$, se tiene $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Sin embargo, la sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Teorema 4.1. *Una sucesión de números reales puede tener a lo sumo un límite.*

Demostración

Demostración. Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a y b con $a \neq b$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que los entornos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ son disjuntos. Ahora bien, por ser $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $\forall n \geq k_1$, y por ser $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existe un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ $\forall n \geq k_2$. Basta tomar $k = \max(k_1, k_2)$ para ver que a_k pertenece a ambos entornos, lo cual contradice que sean disjuntos. Por tanto, debe ser $a = b$.

□

Definición 4.4 (Cola de una sucesión)**.** Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $m \in \mathbb{N}$, se define la *cola* m de la sucesión, como la sucesión $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty} = (a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots)$.

Proposición 4.1. *Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $m \in \mathbb{N}$, la cola $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y en tal caso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{m+n}$.*

Demostración

Demostración. Supongamos que la cola $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ converge a a. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{m+n} - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq k_1$. Tomando ahora $k = k_1 + m \in \mathbb{N}$ se tiene que para cualquier $l \geq k$ $|a_l - a| = |a_{l-m+m} - a| = |a_{m+n} - a| < \varepsilon$ siendo $n = l - m$, ya que $l \geq k_1 + m$ y $l - m \geq k_1$. Por tanto, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a.
Para probar la otra implicación, supongamos ahora que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq k$. Pero como $m \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$ también $m + n \geq k$, con lo que $|a_{m+n} - a| < \varepsilon$, y por consiguiente, $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ converge a a.

□

Proposición 4.2. *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Si existe $a, c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ tal que $|a_n - a| < c|b_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a.*

Demostración

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$. Como $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - 0| = |b_n| < \varepsilon'$ $\forall n \geq k$. Así pues, $\forall n \geq k$ se tiene que $|a_n - a| < c|b_n| < c\varepsilon' = c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$, por lo que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a.

□

Ejemplo 4.6. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $0 < n < 2^n$, de donde se deduce $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, lo que equivale a $|\frac{1}{2^n} - 0| < \frac{1}{n}$. Así pues, aplicando el teorema anterior, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, se cumple que $n^{1/n} > 1$, de manera que se puede escribir $n^{1/n} = 1 + k_n$, donde $k_n = n^{1/n} - 1$. Aplicando ahora el teorema del binomio, se tiene que $0 < k_n < \sqrt{2/n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $|n^{1/n} - 1| = k_n < \sqrt{2/n} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$, y como $\sqrt{2} > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, por el teorema anterior se tiene que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Definición 4.5 (Sucesión acotada)**.** Se dice que una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ está *acotada* si existe $c > 0$ tal que $|a_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2. *Toda sucesión de números reales convergente está acotada.*

Demostración

Demostración. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a a. Entonces, si tomamos $\varepsilon = 1$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < 1$ $\forall n \geq k$.
Por la desigualdad triangular (Proposición 2.4) se tiene que $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$, de donde se deduce que $|a_n| < |a| + 1$ $\forall n \geq k$. Si se toma $c = \max\{|a_1|, \dots, |a_{k-1}|, |a| + 1\}$ se tiene que si $n < k$ entonces $|a_n| \leq c$ y si $n \geq k$ entonces $|a_n| < |a| + 1 \leq c$, de modo que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq c$, por lo que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

□

Ejemplo 4.7. La sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ diverge ya que no está acotada. Si estuviese acotada existiría un $c > 0$ tal que $|n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que infringe la propiedad arquimediana.

Precaución

El otro sentido de la implicación no se cumple, es decir, no toda sucesión acotada es convergente. Por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 4.3. *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a b. Entonces se cumple:*

a. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ + $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $a+b$.

b. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ - $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $a-b$.

c. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a ab.

d. $c(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cx.

e. Si $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $b \neq 0$, $\frac{(a_n)_{n=1}^{\infty}}{(b_n)_{n=1}^{\infty}}$ converge a $\frac{a}{b}$.

Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada apartado.

a. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Por ser $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq k_1$, y por ser $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq k_2$.

   Tomando $k = \max(\{k_1, k_2\})$, para $n \geq k$, aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a+b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

   Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.

b. Se prueba de manera análoga.

c. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2|a|} > 0$. Por ser $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq k_1$. Y por el teorema anterior, como $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, está acotada, de modo que existe una cota $c > 0$ tal que $|b_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Sea ahora $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2c} > 0$. Por ser $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq k_2$.

Tomando ahora $k = \max(\{k_1, k_2\})$, para $n \geq k$, aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned}
|(a_n b_n) - (ab)| &= |(a_n b_n - ab_n) + (ab_n - ab)| \\
&\leq |(a_n b_n - ab_n)| + |(ab_n - ab)| \\
&= |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \\
&= |(a_n - a)||b_n| + |a||(b_n - b)| \\
&< |(a_n - a)|c + |a||(b_n - b)| \\
&< c\varepsilon_2 + |a|\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2c}c + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

d. Se prueba a partir del resultado anterior, tomando la sucesión constante $(c)_{n=1}^{\infty}$.

e. Se deja como ejercicio.

$\square$

Ejemplo 4.8. Veamos que la sucesión $\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n}} = \\
= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2.
\end{aligned}$$

Teorema 4.3 (Compresión de sucesiones convergentes)**.** *Dadas tres sucesiones de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen a a, entonces $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a.*

Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$ y sea $\varepsilon > 0$. Si tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4} > 0$, como $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n - a| < \varepsilon_1$ $\forall n \geq k_1$. Y si tomamos $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon_2$ $\forall n \geq k_2$. Entonces, si se toma $k = \max(k_1, k_2)$, se cumple que para cualquier $n \geq k$,

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= |b_n - c_n + c_n - a| \\
&\leq |b_n - c_n| + |c_n - a| && \text{(prop.2.4 (f))} \\
&= c_n - b_n + |c_n - a| \\
&\leq c_n - a_n + |c_n - a| \\
&= |c_n - a_n| + |c_n - a| \\
&= |c_n - a + a - a_n| + |c_n - a| \\
&\leq |c_n - a| + |a - a_n| + |c_n - a| \\
&= 2|c_n - a| + |a - a_n| && \text{(prop.2.4 (f))} \\
&= 2|c_n - a| + |a_n - a| && \text{(prop.2.4 (b))} \\
&< 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

□

Ejemplo 4.9. Veamos que la sucesión $\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Para ello basta con ver que

$$0 \leq \frac{2n}{n^2+1} \leq \frac{2n}{n^2} \leq \frac{2}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y que $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, de manera que aplicando el teorema anterior de compresión se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0$.

Veamos ahora que la sucesión $\left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ también converge a 0. De nuevo basta con ver que, como $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y que $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, de manera que aplicando el teorema anterior de compresión se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$.

Proposición 4.4 (Criterio del cociente)**.** *Si* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de números reales estrictamente positivos tal que la sucesión* $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $a < 1$*, entonces* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a 0.*

Demostración

Demostración. Sea b tal que $a < b < 1$ y tomemos $\varepsilon = b - a > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - a| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq k$, y por tanto, se tiene que para cualquier $n \geq k$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - a\right| \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \leq \varepsilon \\ \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a + \varepsilon = a + b - a = b \\ \Rightarrow a_{n+1} < b a_n. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_{k+m} < b a_{k+m-1} < b^2 a_{k+m-2} < \cdots < b^m a_k$, de manera que $0 < a_{k+m} < b^m a_k$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Como $b < 1$, $\lim_{m\to\infty} b^m = 0$ y $\lim_{m\to\infty} b^m a_k = 0$, y por el teorema de compresión (Teorema 4.3) $\lim_{m\to\infty} a_{k+m} = 0$. Finalmente, como $(a_{k+m})_{m=1}^{\infty}$ es una cola de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

Ejemplo 4.10. Veamos que la sucesión $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Así pues, por la proposición anterior, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

4.3 Sucesiones monótonas

Veremos a continuación un tipo particular de sucesiones, cuyos términos siempre crecen o decrecen. Estas sucesiones son de especial importancia en aplicaciones del Análisis Matemático.

Definición 4.6 (Sucesión monónota)**.** Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

- Se dice que es una *sucesión creciente*, si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y se dice que es *estrictamente creciente* si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Se dice que es una *sucesión decreciente*, si $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y se dice que es *estrictamente decreciente* si $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Se dice que es una *sucesión monótona*, si es creciente o decreciente.

Ejemplo 4.11. Las sucesiones $(2n)_{n=1}^{\infty}$ y $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ son estrictamente crecientes y la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente.

La sucesión $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$. Si $a = 1$ la sucesión es, a la vez, creciente y decreciente, ya que en realidad es constante.

Sin embargo, la sucesión $((-2)^n)_{n=1}^{\infty}$ no es monótona.

Teorema 4.4 (Convergencia de una sucesión monótona)**.** *Una sucesión de números reales monótona $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si está acotada. Además se cumple que:*

- *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.*
- *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

ℹ Demostración

Demostración. Por el Teorema 4.2 ya se vio que toda sucesión convergente está acotada. Veamos ahora que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona acotada, entonces converge.
Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente y acotada, entonces el conjunto de los términos de la sucesión $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está vacío y está acotado, y por el axioma del

supremo, existe $s = \sup(A)$. Para ver que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a s, tomemos cualquier $\varepsilon > 0$. Como s es el supremo de A, $s - \varepsilon$ no es cota superior de A de manera que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k > s - \varepsilon$. Si tomamos ahora cualquier $n \geq k$, por ser la sucesión monótona, se tiene que $a_k \leq a_n$, y al mismo tiempo $a_n < s$ por ser s una cota superior de la sucesión. Por tanto, para cualquier $n \geq k$ se cumple

$$s - \varepsilon \leq a_k \leq a_n \leq s < s + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - s < \varepsilon \Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.
De forma similar se puede probar que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.

$\square$

Ejemplo 4.12. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. La sucesión es decreciente ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n < n + 1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Como además está acotada inferiormente por el 0, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \inf\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0$.

Ejemplo 4.13. Sea la sucesion definida recursivamente de la siguiente manera: $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Veamos que converge a 2.

En primer lugar, veremos que es una sucesión creciente por inducción. Para $n = 1$ se tiene que $a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2$. Supongamos ahora que $a_n < a_{n+1}$. Entonces, $a_{n+2} = \sqrt{2a_{n+1}} > \sqrt{2a_n} = a_{n+1}$, de manera que la sucesión es creciente.

En segundo lugar, veremos, también por inducción, que $a_n \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ se tiene que $a_1 = 1 < 2$. Supongamos ahora que $a_n < 2$. Entonces, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} = \sqrt{2}\sqrt{a_n} < \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. Luego, la sucesión está acotada, y por el teorema anterior, converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión, se tiene

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{2}\sqrt{a} = \sqrt{2a}. \end{aligned}$$

Así pues, se tiene que

$$a = \sqrt{2a} \Rightarrow a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0,$$

de donde se deduce, resolviendo la ecuación, que $a = 0$ o $a = 1$. Como $a = 0$ es imposible pues $a_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, se concluye que $a = 2$, y por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Ejemplo 4.14. Veamos ahora que la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, entonces por el desarrollo del binomio, se tiene

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \binom{n}{0}1^n\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Como se puede observar, el desarrollo de a_n tiene $n+1$ términos, mientras que el de a_{n+1} tiene $n+2$ términos. Además, cada uno de los términos que aparece en a_n es menor o igual que el termino correspondiente de a_{n+1}, de modo que se puede concluir que $a_n < a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, y la sucesión es creciente.

Por otro lado, como se cumple que $\left(1-\frac{k}{n}\right) < 1\ \forall k = 1, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

y como $2^{n-1} \leq n!\ \forall n \in \mathbb{N}$, finalmente se tiene

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Así pues, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada, de manera que por el teorema anterior, es convergente, y como además $2 < a_n < 3\ \forall n \in \mathbb{N}$, su límite es un número entre 2 y 3. A este número se le llama $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que es un número irracional.

4.4 Subsucesiones

Definición 4.7 (Subsucesión)**.** Se dice que una sucesión de números reales $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *subsucesión* de otra sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $b_n = a_{r_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.15. La sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, ya que tomando $(r_n)_{n=1}^{\infty} = 2n$, se cumple que $b_n = a_{r_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Del mismo modo, las sucesiones $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ también son subsucesiones de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 4.5 (Convergencia de las subsucesiones)**.** *Si una sucesión de números reales converge a a entonces cualquier subsucesión suya converge también a a.*

i Demostración

Demostración. Sea $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq k$.
Como $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, $r_n \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que si $n \geq k$, entonces $r_n \geq n \geq k$, y por tanto, $|a_{r_n} - a| < \varepsilon$, por lo que $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a a. $\square$

Ejemplo 4.16. Veamos que la sucesión $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 cuando $0 < a < 1$.

La sucesión es decreciente ya que $a_{n+1} = a^{n+1} = a^n a < a^n = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ al ser $0 < a < 1$, y también está acotada ya que $0 < a^n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que por el teorema de la convergencia de una sucesión monótona, se tiene que $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un número a.

Para averiguar el límite, como cualquier subsucesión suya también converge a a por el teorema anterior, en particular $(a^{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge a a, por lo que se tiene

$$a = \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} a^{2n} = \lim_{n\to\infty} (a^n)^2 = a^2.$$

Así pues, $a^2 = a$, de manera que, resolviendo la ecuación, $a = 0$ o $a = 1$. Como $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y $0 < a^n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tiene que ser $a = 0$.

Del teorema anterior se deduce que si una sucesión tiene dos subsucesiones que convergen a distintos límites, o una subsucesión que diverge, entonces dicha sucesión diverge.

Ejemplo 4.17. La sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge pues la subsucesión $((-1)^{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge a 1 y la subsucesión $((-1)^{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ converge a -1.

Teorema 4.6 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión de números reales acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Demostración

Demostración. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales acotada. Entonces, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado.
Si A es finito, existe un $c \in A$ y un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = c$ $\forall n \geq k$, de manera que la subsucesión $a_{n+k} = c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y al ser constante, converge a c.
Si A es infinito, como está acotado, por el Teorema 3.3, existe un $a \in \mathbb{R}$ que es punto de acumulación de A. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, y de hecho es infinito. Tomando como r_1 el primer número natural tal que $a_{r_1} \in A_n$, r_2 el primer número natural tal que $r_2 > r_1$ y $a_{r_2} \in A_2$, y así sucesivamente, se puede construir una sucesión de números naturales $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ estrictamente creciente, de manera que $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Además, como $a_{r_n} \in A_n$, se tiene que $|a_{r_n} - a| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a a.

□

Teorema 4.7. *Cualquier conjunto de número reales $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si toda sucesión de números reales en A que converge, lo hace a un número de A.*

Demostración

Demostración. Supongamos que A es un conjunto cerrado y sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales en A tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Veremos que $a \in A$ por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que $a \notin A$. Entonces $a \in \overline{A}$. Como A es cerrado, $\overline{A}$ es abierto, y entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \overline{A}$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ se tiene $|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \overline{A}$, de manera que $a_n \notin A$ $\forall n \geq k$, lo que contradice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión de números en A. Por tanto, debe ser $a \in A$.

Veamos ahora el otro sentido de la implicación. Supongamos que cualquier sucesión de números en A que converge, lo hace a un número de A. Si A no es cerrado, entonces $\overline{A}$ no es abierto, de manera que existe $a \in \overline{A}$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar $a_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap A$ de manera que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en A y además $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así que, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \notin A$, lo que contradice la hipótesis de partida, por lo que A debe ser cerrado.

$\square$

Corolario 4.1. *Cualquier sucesión de números reales en un conjunto cerrado y acotado tiene una subsucesión convergente a un número del conjunto.*

Demostración

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado, y sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A. Como A está acotado, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ también lo está, y por el Teorema 4.6 tiene una subsucesión $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ convergente. Ahora bien, como $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge y está definida en A que es cerrado, por el teorema anterior, se concluye que $\lim_{n\to\infty} a_{r_n} \in A$.

$\square$

4.5 Sucesiones propiamente divergentes

Ya hemos visto que una sucesión que no converge es divergente, pero existen distintos motivos por los que una sucesión puede no converger. En esta sección estudiamos un tipo particular de sucesiones que divergen porque no paran de crecer o decrecer.

Definición 4.8 (Sucesiones propiamente divergentes)**.** Se dice que una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene a ∞, y se denota $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, si para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq \varepsilon \ \forall n \geq k$.

Del mismo modo, se dice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene a $-\infty$, y se denota $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, si para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq \varepsilon \ \forall n \geq k$.

Y se dice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es *propiamente divergente* cuando $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

Ejemplo 4.18. La sucesión $(-n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a $-\infty$, ya que dado $\varepsilon < 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $-\varepsilon < k$, de manera $\varepsilon > -k$, y por tanto, $\forall n \geq k$, $-n \leq -k < \varepsilon$.

La sucesión $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞, ya que dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\varepsilon} < k$, de manera que $\forall n \geq k$, $n^2 \geq k^2 > \varepsilon$.

Proposición 4.5. *Una sucesión monótona de números reales es propiamente divergente si y solo si no está acotada. Además, si la sucesión es creciente entonces tiende a ∞, y si es decreciente tiende a $-\infty$.*

Demostración

Demostración. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente y no acotada. Entonces dado $\varepsilon > 0$, como ε no es cota de la sucesión, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k > \varepsilon$. Por tanto, $\forall n \geq k$, como la sucesión es creciente, se tiene que $a_n \geq a_k > \varepsilon$. Luego $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. De forma análoga se prueba que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y no acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. $\square$

Proposición 4.6. *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ también tiende a ∞, y si $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a $-\infty$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ también tiende a $-\infty$.*

Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > \varepsilon\ \forall n \geq k$, y por tanto también se cumple que $b_n \geq a_n > \varepsilon\ \forall n \geq k$, de manera que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
De forma análoga se prueba que si $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. □

Proposición 4.7. *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, entonces*

a. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
b. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.
c. $\lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) = -\infty$.
d. $\lim_{n\to\infty} ka_n = \infty\ \forall k > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} ka_n = -\infty\ \forall k < 0$.
e. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Proposición 4.8. *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales estrictamente positivos tales que la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a $l \neq 0$. Entonces, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞ si y solo si $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞.*

Demostración

Demostración. Sea $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ ya que $l > 0$ al ser las sucesiones estrictamente positivas. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n - l| < \varepsilon = \frac{l}{2} &\Rightarrow \frac{-l}{2} < \frac{a_n}{b_n} - l < \frac{l}{2} \\ &\Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2} \\ &\Rightarrow \frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n. \end{aligned}$$

Ahora, si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, por el teorema anterior, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{3l}{2} b_n = \infty$, y como $\frac{3l}{2} > 0$ se concluye que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
Del mismo modo, si $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{l}{2} b_n = \infty$, y por el teorema anterior, se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$\square$

4.6 Sucesiones de Cauchy

En la última sección de este capítulo, se introducen un tipo particular de sucesiones convergente que son de especial importancia para la definición de los números reales.

Definición 4.9 (Sucesión de Cauchy). Se dice que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq k$.

Teorema 4.8 (Criterio de convergencia de Cauchy). *Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración

Demostración. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a a. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon'$ $\forall n \geq k$.
Ahora, si se toma $n, m \geq k$, se tiene, aplicando la desigualdad triangular,

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon,$$

por lo que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.
Veamos ahora al implicación en el otro sentido. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy. Entonces, dado $\varepsilon = 1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < 1$ $\forall n, m \geq k$. Así pues, si $n \geq k$, se tiene, aplicando de nuevo la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |a_n - a_k + a_k| \leq |a_n - a_k| + |a_k| < 1 + |a_k|.$$

Si se toma $c = \max(\{|a_1|, \dots, |a_{k-1}|, 1 + |a_k|\})$ entonces c es una cota de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Aplicando ahora el Teorema 4.6 existe una subsucesión convergente $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Sea $\lim_{n\to\infty} a_{r_n} = a$. Veamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon'$ $\forall n, m \geq k_1$. Por otro lado, como $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a a, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$|a_{r_n} - a| < \varepsilon' \ \forall n \geq k_2$. Tomando $k = \max(\{k_1, k_2\})$, para cualquier $n \geq k$ se tiene, de nuevo por la desigualdad triangular,

$$|a_n - a| = |a_n - a_{r_k} + a_{r_k} - a| \leq |a_n - a_{r_k}| + |a_{r_k} - a| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon,$$

pues $r_k \geq k \geq k_1$. Por consiguiente, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a.

$\square$

Ejemplo 4.19. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\frac{2}{\varepsilon} > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\varepsilon} < k$ y, por tanto, $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Ahora, para cualquier $n, m \geq k$ se tiene

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon.$$

Sin embargo, la sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ no es de Cauchy, ya que, dado $\varepsilon = 1$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si tomamos $n = k \geq k$ y $m = k + 2 \geq k$, se tiene que $|a_n - a_m| > |k - (k+2)| = 2 > 1 = \varepsilon$.

Las sucesiones de Cauchy juegan un papel clave en la construcción de cuerpos completos, en particular el cuerpo de los números Reales, ya que el hecho de que sus términos estén cada vez más cerca los unos de los otros, hace que aquellos cuerpos en los que cualquier sucesión de Cauchy converge a un elemento del cuerpo sean cuerpos sin huecos o completos.

Ejemplo 4.20. El cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es completo ya que existen sucesiones de Cauchy de números racionales, como $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$, que converge al número e que no es racional.

El conjunto de los números irracionales $\mathbb{R} \ \mathbb{Q}$ tampoco es completo, pues existen sucesiones de Cauchy de números irracionales, como $(2^{1/(n+1)})_{n=1}^{\infty}$, que converge a 1 que no es irracional.

4.7 Sucesiones de funciones

De igual modo que hemos estudiado las sucesiones de números reales, en Análisis también se estudian sucesiones de funciones. Como se verá más adelante, en el capítulo de series, estas sucesiones juegan un papel fundamental en el estudio de funciones complicadas mediante aproximaciones de funciones simples.

Definición 4.10. Una *sucesión de funciones reales* o *sucesion funcional* es una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que asigna a cada número natural n una función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Utilizaremos la notación $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ para referirnos a la sucesión funcional definida por f.

Ejemplo 4.21. Los primeros términos de la sucesión funcional $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ son las funciones $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x^2}{1+x^2}$, $\frac{x^3}{1+x^3}$, ...

Definición 4.11 (Convergencia puntual)**.** Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y un número $x \in \mathrm{Dom}(f_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, se dice que la sucesión *converge puntualmente* en x, si la sucesión de números reales $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge.

El conjunto $\mathcal{C}$ de todos los puntos en los que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente se llama *dominio de convergencia puntual*, y la función $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

se llama *función límite puntual* de la sucesión.

> **!** Importante
>
> Es importante no confundir la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ con la sucesión de números reales $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ que se obtiene al evaluar cada función de la sucesión funcional en x.

Definición 4.12 (Convergencia uniforme)**.** Dada una sucesión funcional $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ con dominio de convergencia puntual $\mathcal{C}$ y la función límite puntual f, y un intervalo no vacío $I \subseteq \mathcal{C}$, se dice que la sucesión *converge uniformemente* a f en I, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon\ \forall n \geq k$.

5 Funciones reales de variable real

El concepto de función es fundamental para poder modelizar las relaciones que se dan en muchos fenómenos del mundo real, donde una magnitud depende de otras de acuerdo a un determinado patrón, y por ello, gran parte del Análisis Matemático se centra en estudiar las características de las funciones.

En el capítulo sobre teoría de conjuntos se introdujo ya el concepto de función y se estudiaron algunas de sus propiedades desde el enfoque de una relación entre conjuntos. En este capítulo se estudian las principales propiedades de una función y se introducen varias funciones básicas que se conocen como *funciones elementales*.

5.1 El concepto de función

Definición 5.1 (Función de una variable)**.** Una *función* f de un conjunto A en otro B es una *relación* que asocia cada elemento $a \in A$, con un *único* elemento de B que se denota $f(a)$, y se llama *imagen* de a mediante f.

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

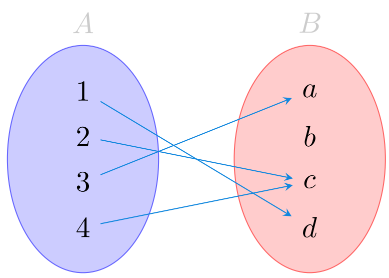

Figura 5.1: Ejemplo de función.

Cuando el conjunto inicial y final es el de los números reales $\mathbb{R}$, entonces se dice que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función real de variable real.*

5.1.1 Formas de representar una función

Existen distintas formas de representar los pares de elementos que forman parte de una función.

Por extensión

- **Representación en forma de tabla**. Se escriben los pares (x, y) de la función de forma explícita en una tabla.

x	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	4	1	0	1	4	$\cdots$

- **Representación gráfica**. Se representan los pares (x, y) de la función mediante puntos con las correspondientes coordenadas en el plano Real cartesiano.

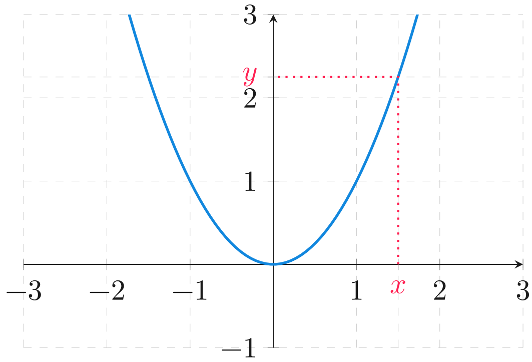

Figura 5.2: Gráfica de una función.

Por Intensión

- **Representación algebraica explícita**. Se da fórmula o expresión $f(x)$ que determina el valor de y asociado a cada x mediante la función.

$$y = x^2$$

- **Representación algebraica implícita**. Se da una ecuación que relaciona dos variables x e y, que satisfacen todos los pares (x, y) de la función y solo ellos.

$$y - x^2 = 0$$

- **Representación algebraica paramétrica**

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t \end{cases}$$

> Precaución
>
> La representación algebraica paramétrica puede dar lugar a relaciones que no son funciones. Por ejemplo
> $$\begin{cases} y = t \\ x = t^2 \end{cases}$$
> que no es una función al asignar a los valores de x dos imágenes distintas.

5.2 Dominio de una función

Definición 5.2 (Dominio de una función)**.** El *dominio* de una función f es el conjunto de valores para los que la función está definida

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 5.1. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Para determinar su dominio hay que eliminar los valores en los que no está definida la función. En este caso hay que eliminar los valores que hacen negativo el radicando de la raíz del denominador, es decir, los valores de x tales que $x^2 - 1 < 0$, que son los valores que cumplen $-1 < x < 1$, pero también hay que eliminar del dominio los valores que anulan el denominador, es decir, los valores de x tales que $\sqrt{x^2 - 1} = 0$, que son $x = -1$ y $x = 1$. Por tanto, su dominio es

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

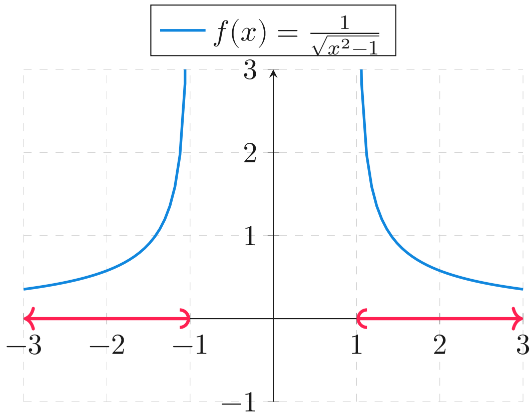

Figura 5.3: Dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

5.3 Imagen de una función

Definición 5.3 (Imagenñ de una función)**.** La *imagen* de una función f es el conjunto de valores que la función puede tomar

$$Img(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 5.2. Dada la función $f(x) = x^2 - 2$

Su imagen es

$$\mathrm{Img}(f) = [-2, \infty)$$

ya que la función cuadrática x^2 puede tomar cualquier valor de 0 a ∞ (no toma nunca valores negativos), y al restarle 2, el mínimo valor que puede tomar la función f es -2.

5.4 Álgebra de funciones

5.4.1 Función constante

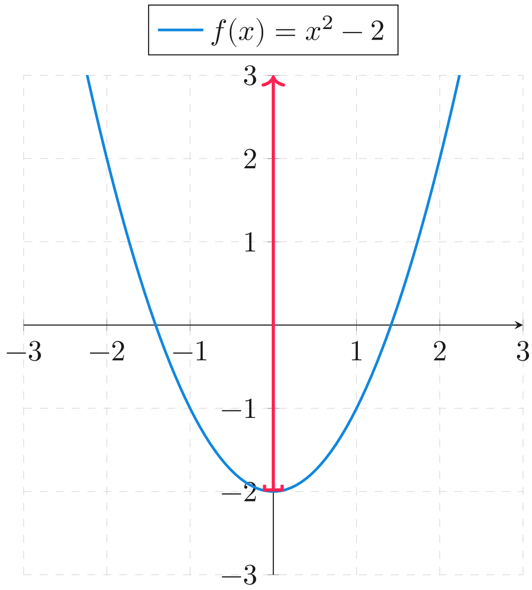

Figura 5.4: Imagen de la función $f(x) = x^2 - 2$.

Definición 5.4 (Función constante)**.** Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *funcion constante*, cuando asocia cada elemento $x \in \mathbb{R}$ con el mismo número $c \in \mathbb{R}$, es decir,

$$f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

El dominio de la función constante $f(x) = c$ es $\mathbb{R}$ y su imagen $\{c\}$.

5.4.2 Función identidad

Definición 5.5 (Función Identidad)**.** Se llama *función identidad*, a la función $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que asocia cada elemento $x \in \mathbb{R}$ con sigo mismo, es decir,

$$Id(x) = x.$$

El dominio y la imagen de la función identidad es $\mathbb{R}$.

Definición 5.6 (Funciones suma, resta, producto y cociente)**.** Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se definen las siguientes funciones:

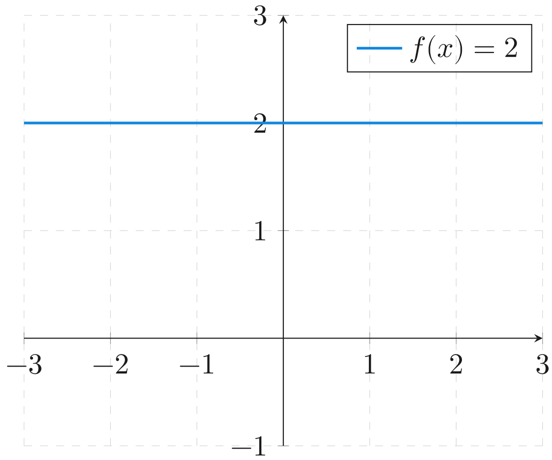

Figura 5.5: Gráfica de una función constante.

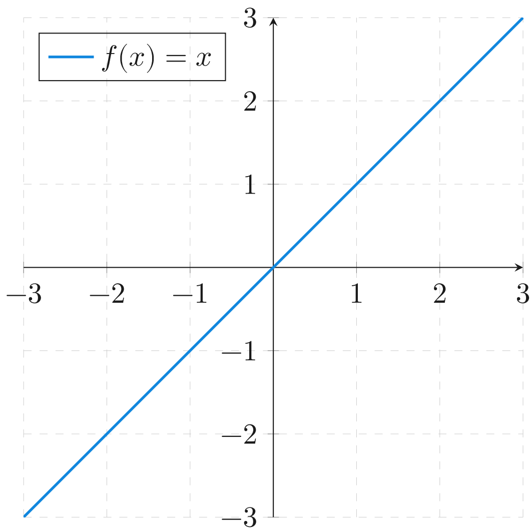

Figura 5.6: Gráfica de la función identidad.

- *Función suma*: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- *Función resta*: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- *Función producto*: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- *Función cociente*: $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ \forall x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$.

Proposición 5.1. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple:*

- $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
- $\mathrm{Dom}(f-g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
- $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
- $\mathrm{Dom}(f/g) = (\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g))\quad \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$.

Definición 5.7 (Función raíz)**.** Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se definen la _función raíz n-ésima, como

$$\sqrt[n]{f}(x) = \sqrt[n]{f(x)}\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposición 5.2. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que*

$$\mathrm{Dom}(\sqrt[n]{f}) = \begin{cases} \mathrm{Dom}(f) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \mathrm{Dom}(f) \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

5.5 Composición de funciones

Definición 5.8 (Composición de funciones)**.** Dadas dos funciones $g : A \to B$ y $f : B \to C$, se define la *función compuesta* $f \circ g$, (leído g compuesto con f) como la función

$$\begin{aligned} f \circ g : A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow f(g(x)) \end{aligned}$$

Para calcular la función compuesta $f \circ g(x)$, primero se aplica g sobre x y luego, se aplica f sobre $g(x)$:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Ejemplo 5.3. Si $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \operatorname{sen} \sqrt{x}.$$

5.6 Función inversa

Definición 5.9 (Función inversa)**.** Se llama *función inversa* de $f : A \to B$ a la función $f^{-1} : B \to A$ (cuando exista) que cumple

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id(x)$$

La función inversa de f deshace o revierte el efecto de f. Es decir, si $f : A \to B$ asocia un elemento $x \in A$ con otro $y \in B$, entonces f^{-1} asocia el elemento y con el x.

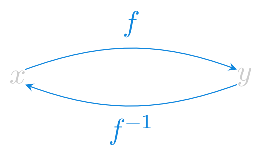

Figura 5.7: Función inversa.

Ejemplo 5.4. La inversa de $f(x) = x^3$ es la función $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Sin embargo, la inversa de la función x^2 no es $\sqrt{x}$ ya que la raíz tiene dos imágenes, una positiva y otra negativa, y por tanto no sería una función. [1]

[1] Para que exista la inversa de la función cuadrática es necesario restringir el dominio a los reales positivos para que sea inyectiva. En tal caso, la inversa es $+\sqrt{x}$.

5.7 Crecimiento de una función

Definición 5.10 (Función creciente y decreciente)**.** Se dice que una función f es *creciente* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Se dice que una función f es *decreciente* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$.

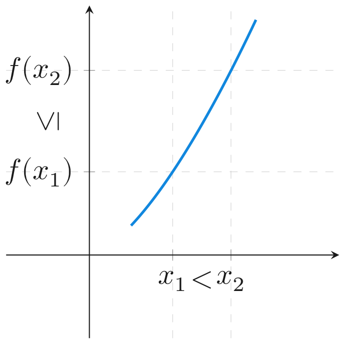

Figura 5.8: Función creciente.

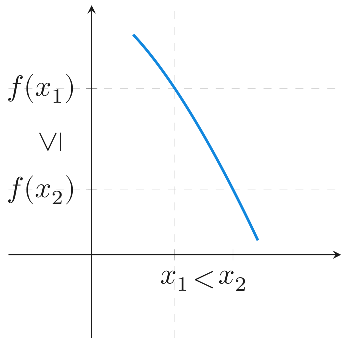

Figura 5.9: Función decreciente.

5.8 Extremos de una función

Definición 5.11 (Máximo y mínimo relativo)**.** Se dice que una función $f :$ $mathbbR \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en a, si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$ se cumple $f(a) \geq f(x)$.

Y se dice que f tiene un *mínimo relativo* en a, si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$ se cumple $f(a) \leq f(x)$.

5.9 Concavidad de una función

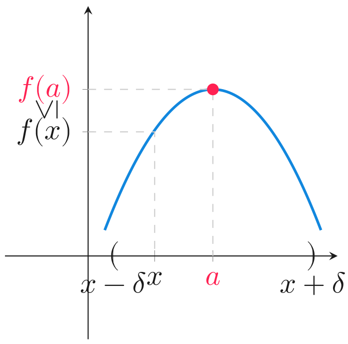

Figura 5.10: Máximo relativo.

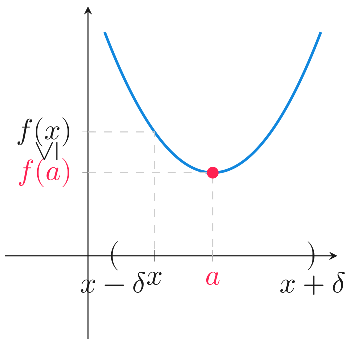

Figura 5.11: Mínimo relativo.

Definición 5.12 (Función cóncava hacia arriba y hacia abajo)**.** Se dice que una función f es *cóncava hacia arriba* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de f.

Se dice que una función f es *cóncava hacia abajo* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica de f.

Al punto donde cambia la concavidad de una función se le llama *punto de inflexión*.

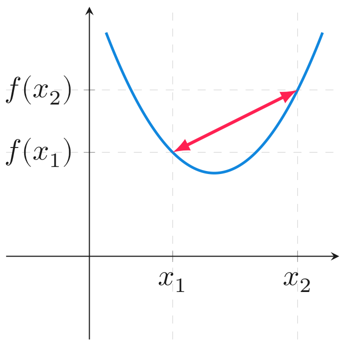

Figura 5.12: Función cóncava hacia arriba.

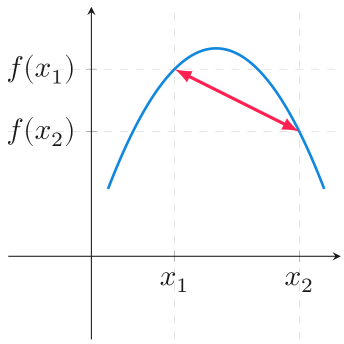

Figura 5.13: Función cóncava hacia abajo.

5.10 Funciones periódicas

Definición 5.13 (Función periódica y periodo)**.** Se dice que una función f es *periódica* si existe un valor $h > 0$ tal que

$$f(x + h) = f(x)$$

para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Al menor valor de h que verifica la igualdad anterior se le llama *periodo* de f, y a la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función se le llama *amplitud* de f.

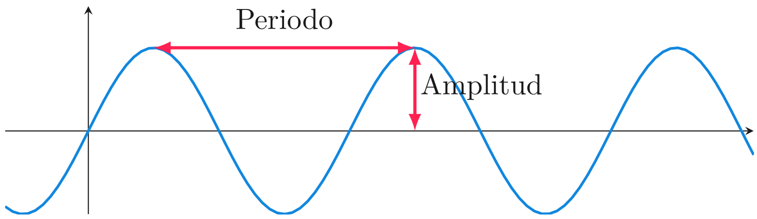

Figura 5.14: Periodo y amplitud de una función periódica.

5.11 Funciones polinómicas

Definición 5.14 (Función polinómica)**.** Una *función polinómica* es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde n es un entero no negativo que se llama *grado del polinomio*, y $a_0, \dots, a_n$ son constantes reales ($a_n \neq 0$) que se llaman *coeficientes del polinomio.*

Ejemplo 5.5.

5.11.1 Propiedades de las funciones polinómicas

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Si el grado es impar, su imagen es $\mathbb{R}$.
- La función identidad $Id(x) = x$ es un polinomio de grado 1.
- Las funciones constantes $f(x) = c$ son polinomios de grado 0.
- Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces (puntos donde $f(x) = 0$).

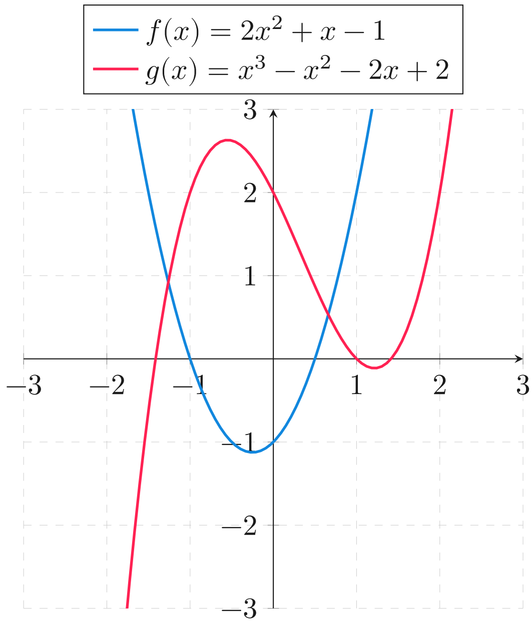

Figura 5.15: Gráficas de funciones polinómicas.

5.12 Funciones racionales

Definición 5.15 (Función racional)**.** Una *función racional* es una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funcione polinómicas con $q(x) \neq 0$.

Ejemplo 5.6.

5.12.1 Propiedades de las funciones racionales

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del polinomio del denominador. En estos puntos suele haber asíntotas verticales.
- La tendencia en ∞ y $-\infty$ depende del grado del numerador y del denominador. Si $f(x) = \dfrac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}$, entonces

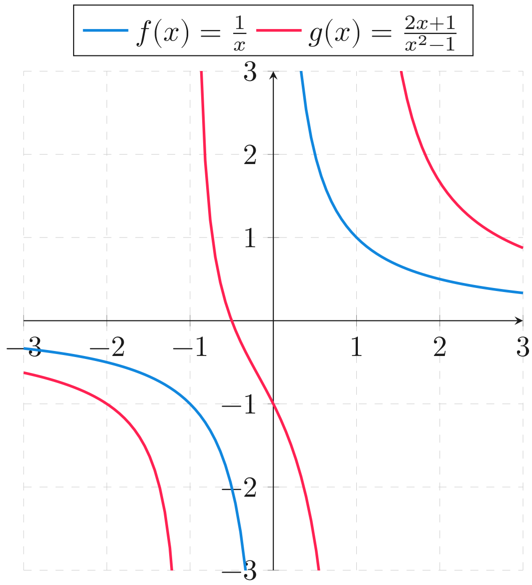

Figura 5.16: Gráficas de funciones racionales.

  - Si $n > m \to f(\pm\infty) = \pm\infty$.
  - Si $n < m \to f(\pm\infty) = 0$.
  - Si $n = m \to f(\pm\infty) = \dfrac{a_n}{b_m}$.

- Los polinomios son casos particulares de funciones racionales.
- Pueden descomponerse en suma de fracciones simples.

5.13 Funciones potenciales

Definición 5.16 (Función potencial)**.** Una *función potencial* es una función de la forma

$$f(x) = x^r,$$

donde r es un número real.

Ejemplo 5.7.

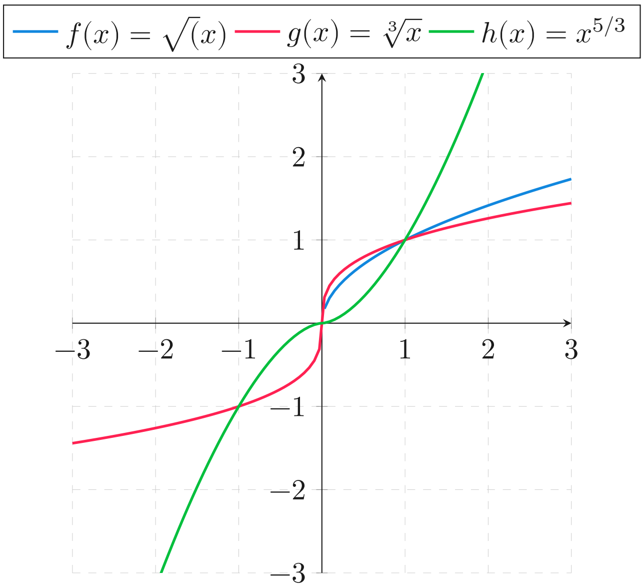

Figura 5.17: Gráficas de funciones potenciales.

5.13.1 Propiedades de las funciones potenciales

- Si el exponente es un número racional n/m, entonces
$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}.$$
Estas funciones se llaman *irracionales*. En este caso,
  - si m es impar el dominio es $\mathbb{R}$,
  - si m es par el dominio es $\mathbb{R}^+$.
- Todas pasan por el punto $(1, 1)$.
- El crecimiento depende del exponente. Si $x > 0$ entonces:
  - Exponente positivo $\Rightarrow$ función creciente.
  - Exponente negativo $\Rightarrow$ función decreciente.
    Además, si $f(x) = x^r$ y $g(x) = x^s$, entonces:
  - Si $r < s \Rightarrow f(x) > g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) < g(x)$ si $x > 1$.
  - Si $r > s \Rightarrow f(x) < g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) > g(x)$ si $x > 1$.
- Los polinomios de la forma $f(x) = x^n$ son un caso particular de funciones potenciales.

5.14 Funciones exponenciales

Definición 5.17 (Función exponencial)**.** Una *función exponencial* de base a es una función de la forma

$$f(x) = a^x,$$

donde a es un valor real positivo distinto de 1.

Ejemplo 5.8.

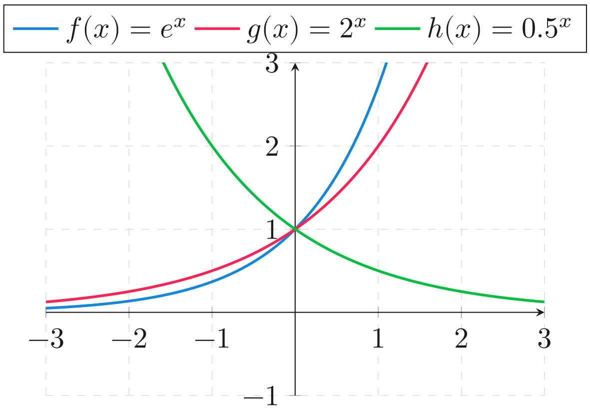

Figura 5.18: Gráficas de funciones exponenciales.

5.14.1 Propiedades de las funciones exponenciales

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}^+$.
- Todas pasan por el punto $(0, 1)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = a^x$ entonces
  - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.
  - Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente. Además, si $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ con $a < b$, entonces
  - Si $x < 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$.
  - Si $x > 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
- Un caso particular sería $a = 1$ que es una función constante.

5.15 Funciones logarítmicas

Definición 5.18 (Función logarítmica)**.** Dada una función exponencial $f(x) = a^x$, se define la *función logarítmica* de base a como la función inversa de f, y se denota

$$f^{-1}(x) = \log_a x,$$

donde a es un valor real positivo distinto de 1.

Ejemplo 5.9.

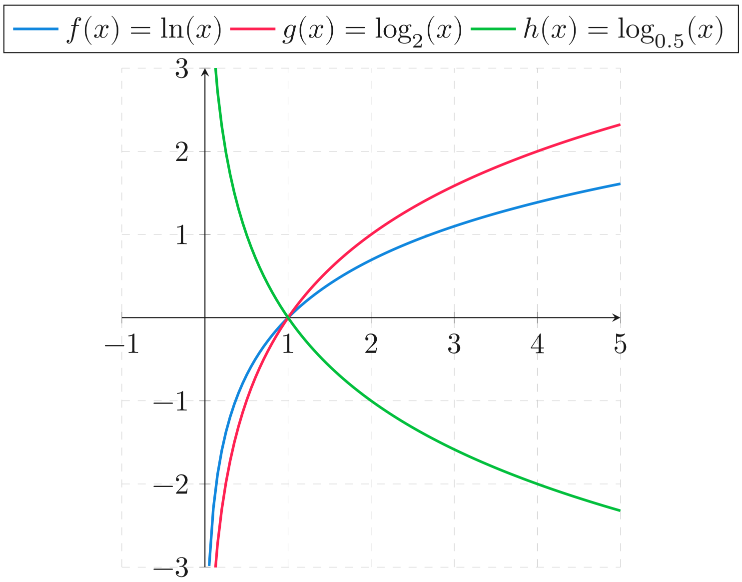

Figura 5.19: Gráficas de funciones logaritmicas.

5.15.1 Propiedades de las funciones logarítmicas

- Por ser la inversa de la función exponencial, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}^+$.
  - Su imagen es el dominio de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}$.
- Todas pasan por el punto $(1, 0)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = \log_a x$ entonces
  - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.
  - Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente. Además, si $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_b x$ con $a < b$, entonces

- Si $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$

- No tiene sentido para $a = 1$ por que sería una función constante.

5.16 Funciones trigonométricas

Surgen en geometría al medir las relaciones entre los catetos de un triángulo rectángulo, que dependen del ángulo del cateto contiguo y la hipotenusa de dicho triángulo. No obstante, esta no es la única definición posible, sino que también pueden definirse a partir de la función exponencial compleja.

- Seno
- Coseno
- Tangente
- Arcoseno
- Arcocoseno
- Arcotangente

5.16.1 Seno de un ángulo

Definición 5.19 (Seno de un ángulo)**.** Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *seno* de α, y se nota $\operatorname{sen}\alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

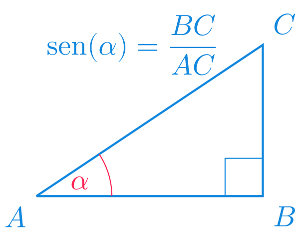

Figura 5.20: Seno de un ángulo de un triángulo rectángulo.

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la ordenada de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.

5.16.2 Función seno

Definición 5.20 (Función seno)**.** Se define la función *seno*,

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su seno.

Ejemplo 5.10.

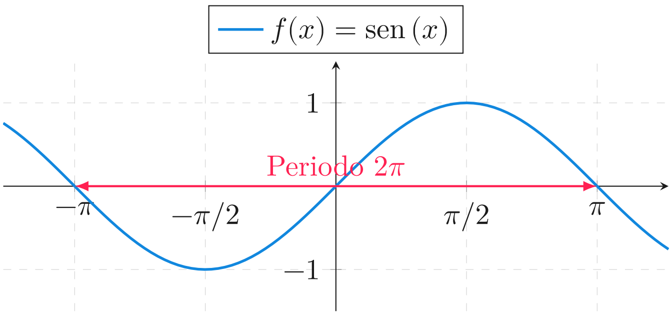

Figura 5.21: Gráfica de la función seno.

5.16.3 Propiedades de la función seno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$, $\operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\operatorname{sen} 3\pi/2 = -1$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$.
- Es una función impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

5.16.4 Coseno de un ángulo

Definición 5.21 (Coseno de un ángulo)**.** Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *coseno* de α, y se nota $\cos\alpha$, como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa.

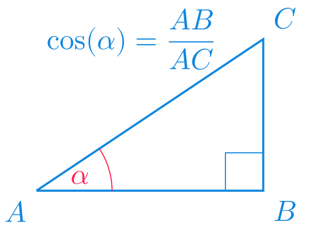

Figura 5.22: Coseno de un ángulo de un triángulo rectángulo.

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la abscisa de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.

5.16.5 Función coseno

Definición 5.22 (Función coseno)**.** Se define la función *coseno*,

$$f(x) = \cos(x)$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su coseno.

Ejemplo 5.11.

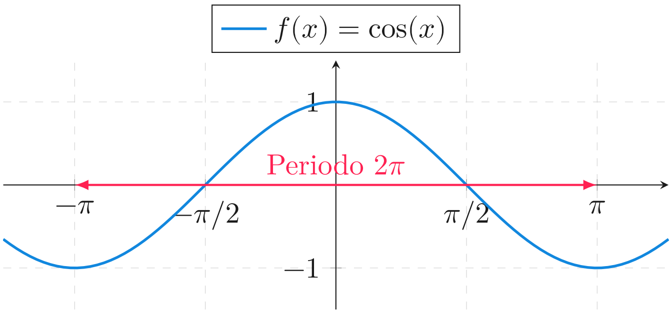

Figura 5.23: Gráfica de la función coseno.

5.16.6 Propiedades de la función coseno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar: $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\cos \pi/3 = \sqrt{2}/2$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$, $\cos 2\pi = 1$.
- Es una función par: $\cos(-x) = \cos x$.

5.16.7 Tangente de un ángulo

Definición 5.23 (Tangente de un ángulo)**.** Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define la *tangente* de α, y se nota $\operatorname{tg} \alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.

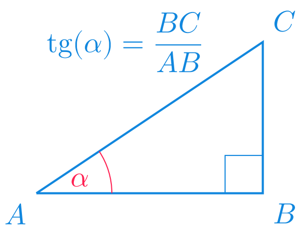

Figura 5.24: Tangente de un ángulo de un triángulo rectángulo.

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la ordenada y la abscisa de cualquier punto del otro lado.

5.16.8 Función tangente

Definición 5.24 (Función tangente)**.** Se define la función *tangente*,

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su tangente.

Ejemplo 5.12.

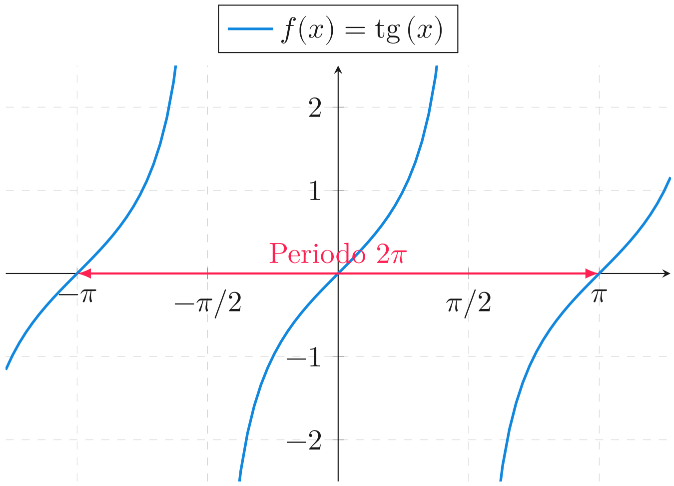

Figura 5.25: Gráfica de la función tangente.

5.16.9 Propiedades de la función tangente

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del coseno, es decir $\mathbb{R} - \{2k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}$.

- Es periódica, con periodo 2π

$$\operatorname{tg}(x + 2k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar: $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} \pi/6 = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, $\operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{tg} 2\pi = 0$.

5.16.10 Función arcoseno

Definición 5.25 (Función arcoseno)**.** Se define la función *arcoseno*,

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$$

como la función inversa de la función seno.

Ejemplo 5.13.

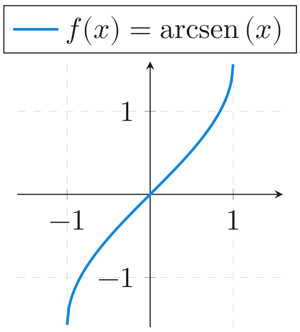

Figura 5.26: Gráfica de la función arcoseno.

5.16.11 Propiedades de la función arcoseno

- Por ser la inversa de la función seno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función seno, es decir $[-1, 1]$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función seno, es decir $[-\pi/2, \pi/2]$.[2]
- Es creciente en todo el dominio.

[2] Se pude simplificar porque aunque $x \to 1$, $x \neq 1$ y por tanto el denominador no se anula.

5.16.12 Función arcocoseno

Definición 5.26 (Función arcocoseno)**.** Se define la función *arcocoseno*,

$$f(x) = \arccos(x)$$

como la función inversa de la función coseno.

Ejemplo 5.14.

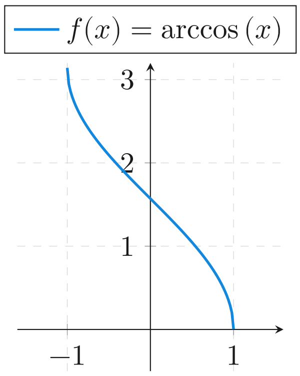

Figura 5.27: Gráfica de la función arcocoseno.

5.16.13 Propiedades de la función arcoseno

- Por ser la inversa de la función coseno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función coseno, es decir $[-1, 1]$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función coseno, es decir $[0, \pi]$. [3]
- Es decreciente en todo el dominio.

[3] Para que exista la inversa de la función coseno, es necesario restringir su dominio a $[0, \pi]$ para que sea inyectiva.

5.16.14 Función arcotangente

Definición 5.27 (Función arcotangente)**.** Se define la función *arcotangente*,

$$f(x) = \text{arctg}(x)$$

como la función inversa de la función tangente.

Ejemplo 5.15.

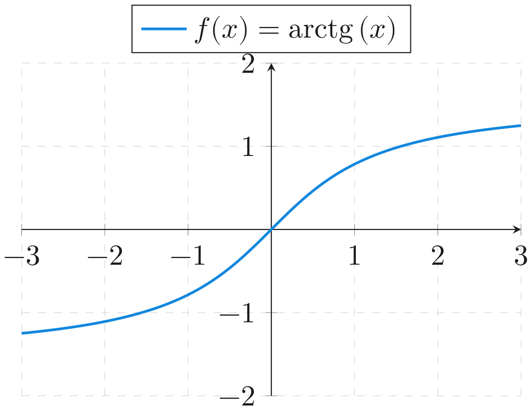

Figura 5.28: Gráfica de la función arcotangente.

5.16.15 Propiedades de la función arcotangente

- Por ser la inversa de la función tangente, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función tangente, es decir $\mathbb{R}$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función tangente, es decir $(-\pi/2, \pi/2)$. [4]
- Es creciente en todo el dominio.

[4] Para que exista la inversa de la función tangente, es necesario restringir su dominio a $(\pi/2, \pi/2)$ para que sea inyectiva.

5.16.16 Algunas relaciones trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
- $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
- $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$

Notas

6 Límites de funciones

En este capítulo se introduce el concepto de límite de una función real de variable real, que es parecido al que ya se vio para sucesiones de números reales, y resulta imprescindible para llegar al concepto de derivada que se verá en el siguiente capítulo.

Se presentan también algunas propiedades de los límites, distintas técnicas para calcularlos y algunas aplicaciones importantes. Finalmente se introduce también el concepto de continuidad y se estudian los distintos tipos de discontinuidades que puede presentar una función.

6.1 El concepto de límite

6.1.1 Aproximación al concepto de límite

El concepto de límite está ligado al de tendencia.

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que $x \in A$ *tiende* a un número $a \in \mathbb{R}$, y lo escribimos $x \to a$, si se pueden tomar valores de x tan próximos a a como se quiera, pero sin llegar a valer a.

> ⚠ Advertencia
>
> Para que $x \in A$ tienda a a, es necesario que a sea un punto de acumulación de A.

Si la aproximación es por defecto (con valores menores que a) se dice que x tiende a a por la izquierda, y se escribe $x \to a^-$, y si es por exceso (con valores mayores que a) se dice que x tiende a a por la derecha, y se escribe $x \to a^+$.

Cuando la variable x de una función f tiende a un valor a, cabe preguntarse si sus imágenes mediante f tienden a otro valor concreto:

Si $f(x)$ tiende a un valor l cuando x tiende a a, se dice que l es el *límite* de $f(x)$ cuando $x \to a$, y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

6.1.2 Límites laterales

Si $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a a por la izquierda, entonces se dice que l es el *límite por la izquierda* de $f(x)$ cuando $x \to a^-$, y se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x se aproxima a a por exceso, entonces se dice que l es el *límite por la derecha* de $f(x)$ cuando $x \to a^-$, y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

Ejemplo 6.1. Consideremos la función $f(x) = x^2$ y veamos que pasa cuando $x \to 2$:

Aproximación por defecto

x	$f(x) = x^2$
1.9	3.61
1.99	3.9601
1.999	3.996001
1.9999	3.99960001

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

Aproximación por exceso

x	$f(x) = x^2$
2.1	4.41
2.01	4.0401
2.001	4.004001
2.0001	4.00040001

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

6.1.3 Límites que no existen (I)

Si la función no está definida entorno a un punto, entonces no existe el límite en dicho punto.

Ejemplo 6.2. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	No exite
-0.01	No existe
-0.001	No existe

$$\Downarrow$$

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	No existe
0.01	No existe
0.001	No existe

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\text{No existe } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \text{No existe } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

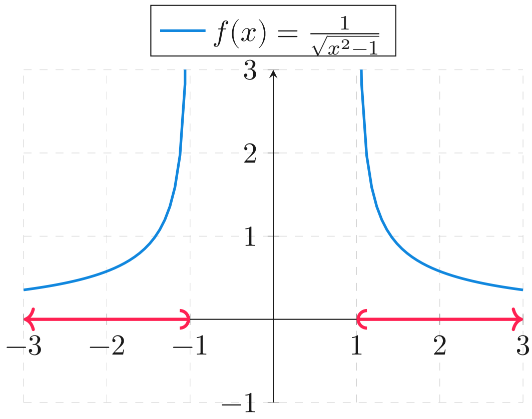

Figura 6.1: Límite que no existe en $x = 0$.

6.1.4 Límites que no existen (II)

Cuando los límites laterales no coinciden entonces no existe el límite.

Ejemplo 6.3. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	-1
-0.01	-1
-0.001	-1

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	1
0.01	1
0.001	1

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

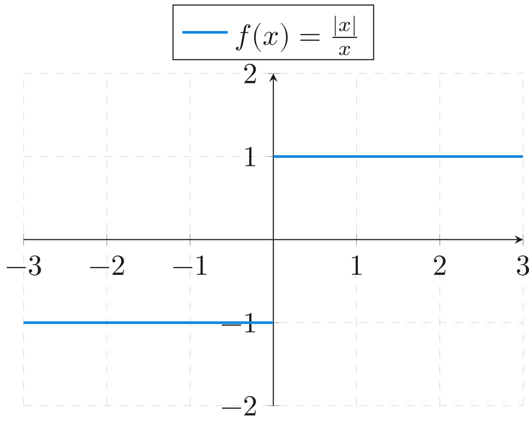

Figura 6.2: Límite que no existe en $x = 0$.

6.1.5 Límites que no existen (III)

A veces, cuando $x \to a$ los valores de $f(x)$ crecen o decrecen infinitamente y entonces no existe el límite. En este caso se dice que la función *diverge* y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty.$$

Ejemplo 6.4. Veamos la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	100
-0.01	10000
-0.001	1000000

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	100
0.01	10000
0.001	1000000

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

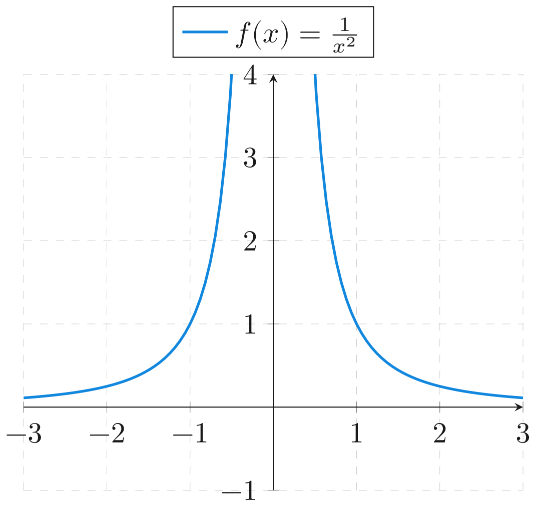

Figura 6.3: Límite que no existe en $x = 0$.

6.1.6 Límites que no existen (IV)

A veces, el límite de un función en un punto puede no existir porque la función oscila rápidamente al acercarnos a dicho punto.

Ejemplo 6.5. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	-0.1736
-0.01	-0.9848
-0.005	0.3420
-0.001	0.9848
-0.0005	0.3420
-0.0001	0.9848

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	0.1736
0.01	0.9848
0.005	-0.3420
0.001	-0.9848
0.0005	-0.3420
0.0001	-0.9848

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ \text{No existe } \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{No existe } \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

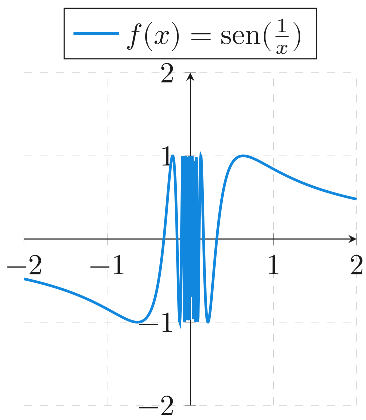

Figura 6.4: Límite que no existe en $x = 0$.

6.1.7 Límites en el infinito

Si $f(x)$ tiende a l cuando x crece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$, y se escribe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x decrece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$, y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

Ejemplo 6.6. Estudiemos la tendencia de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando $x \to \pm\infty$:

$x \to +\infty$

x	$f(x) = 1/x$
1000	0.001
10000	0.0001
100000	0.00001

$\Downarrow$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$x \to -\infty$

x	$f(x) = 1/x$
-1000	-0.001
-10000	-0.0001
-100000	-0.00001

$\Downarrow$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

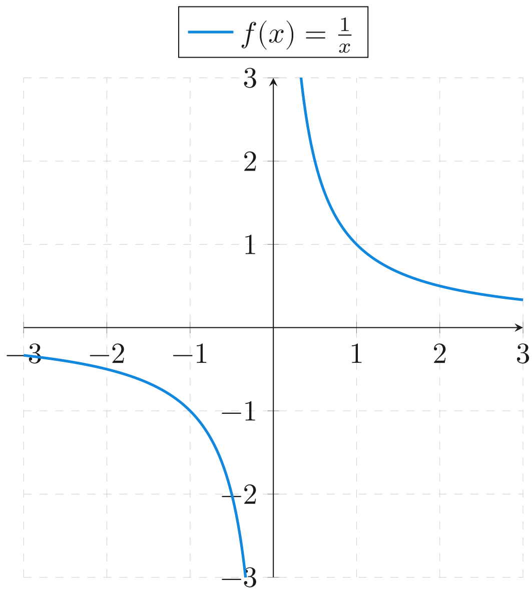

Figura 6.5: Límites en el infinito.

6.2 Definición de límite

Definición 6.1 (Límite de una función en un punto)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el *límite* de f en a y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ $\forall x \in A \ \{a\}$ con $|x-a| < \delta$.

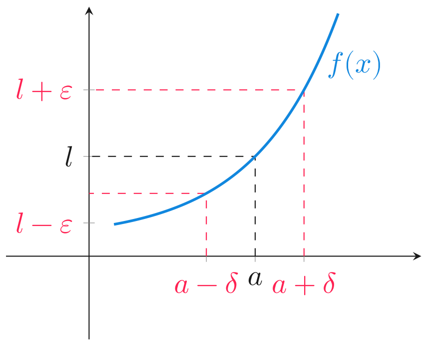

Figura 6.6: Límite de una función.

Advertencia

Obsérvese que en la definición anterior $x \neq a$, es decir, no es necesario que $|f(a)-l| < \varepsilon$.

Ejemplo 6.7. Sea $f(x) = x^2$. Veamos que $\lim_{n\to a} f(x) = a^2$. Para ello, dado cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\} > 0$ de manera $\forall x \neq a$ si $|x-a| < \delta$, entonces $|x-a| < 1$ y, por tanto, $|x+a| = |x-a+2a| \leq |x-a| + 2|a| < 1+2|a|$, y además,

$$\begin{aligned} |f(x)-a^2| &= |x^2-a^2| = |(x+a)(x-a)| = |x+a||x-a| \\ &< (1+2|a|)\delta < (1+2|a|)\frac{\varepsilon}{1+2|a|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Teorema 6.1 (Unicidad del límite)**.** *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, si existe el límite de f en a, entonces es único.*

Demostración

Demostración. Haremos la prueba por reducción al absurdo. Supongamos que l_1 y l_2 son límites de f en a, y que $l_1 \neq l_2$. Entonces, existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $(l_1-\varepsilon_1, l_1+\varepsilon_1) \cap (l_2-\varepsilon_2, l_2+\varepsilon_2) = \emptyset$.
Como $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, $\forall x \in A \ \{a\}$ con $|x-a| < \delta_1$ se tiene que $f(x) \in (l_1-\varepsilon_1, l_1+\varepsilon_1)$.

Del mismo modo, como $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que, $\forall x \in A \quad \{a\}$ con $|x-a| < \delta_2$ se tiene que $f(x) \in (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2)$.
Tomando ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que si $x \in A \quad \{a\}$ y $|x-a| < \delta$, $f(x) \in (l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1)$ y $f(x) \in (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2)$, lo que contradice que $(l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1) \cap (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2) = \emptyset$. Por consiguiente, tiene que ser $l_1 = l_2$.

$\square$

Teorema 6.2 (Criterio de las sucesiones). *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si y solo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $A \quad \{a\}$ que converge a a, se tiene que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a l.*

Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $A \quad \{a\}$ que converge a a. Veamos que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a l. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{x\to a} f(x) = l$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in A \ \{a\}$ con $|x-a| < \delta$ se tiene $|f(x)-l| < \varepsilon$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, para este δ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \delta$ $\forall n \geq k$.
Así pues, si $n \geq k$, como $x_n \in A \quad \{a\}$ y $|x_n - a| < \delta$, se tiene que $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{x\to a} f(x_n) = l$.
Para probar el otro sentido de la implicación, utilizaremos la reducción al absurdo. Supongamos que para cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $A \quad \{a\}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq l$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ existe $x_\delta \in A \quad \{a\}$ con $|x_\delta - a| < \delta$, pero $|f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$ y $x_n = x_\delta$, se construye una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a a pero tal que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge a l, lo que contradice que $\lim_{x\to a} f(x_n) = l$. Por tanto, se tiene que cumplir que $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

$\square$

Importante

Este criterio se puede utilizar tanto para demostrar que un número es el límite de una función en un punto como, para demostrar que no lo es.

Ejemplo 6.8. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$ y sea $a \neq 0$. Entonces, para cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente a a con $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{a},$$

por lo que, aplicando el criterio anterior se tiene $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{a}$.

Del mismo modo, si $a = 0$, tomando la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0, $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, por lo que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejemplo 6.9. Sea $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\ \forall x \neq 0$. Tomando la sucesión $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n=1}^{\infty}$, que converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n\pi) = 0.$$

Y tomando la sucesión $\left(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right)_{n=1}^{\infty}$, que también converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(2n\pi+\pi/2) = 1.$$

Por tanto, el límite de la función aplicada a estas dos sucesiones es distinto, y por el criterio anterior, no existe el límite de f en 0.

Definición 6.2 (Función acotada en un entorno de un punto)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, se dice que f está *acotada* en el entorno de a si existe un $\delta > 0$ y un $c > 0$ tal que $|f(x)| < c\ \forall x \in A$ con $|x - a| < \delta$.

Definición 6.3 (Función acotada)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que f está *acotada* en A, si existe un $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c\ \forall x \in A$.

Proposición 6.1. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, si existe el límite de f en a, entonces f está acotada en un entorno de a.*

Demostración

Demostración. Sea $\lim_{x\to a} f(x)) = l$. Entonces, dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < 1\ \forall x \in A\ \ \{a\}$ con $|x - a| < \delta$, y por tanto,

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$$

$\forall x \in A\ \ \{a\}$ con $|x - a| < \delta$.
Tomando ahora $c = \max\{1 + |l|, |f(a)|\}$, se tiene que $|f(x)| < c\ \forall x \in A$ con $|x - a| < \delta$, y por tanto, f está acotada en un entorno de a.

□

Ejemplo 6.10. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está acotada en un entorno de 0, por lo que no existe el límite de f en 0.

6.3 Álgebra de límites

Proposición 6.2. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, tales que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces se cumple que*

1. $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$, $\forall c \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
4. *Si* $g(x) \neq 0\ \forall x \in A$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, *entonces* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Demostración

Demostración. Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a a. Entonces $\lim_{x\to a} f(x_n) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x_n) = m$, y por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = l + m,$$

por lo que $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = l + m$.
El resto son similares y se dejan como ejercicio.

□

Ejemplo 6.11. Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
&= \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 1 \\
&= 2^3 + 2^2 - 2 * 2 - 1 = 7.
\end{aligned}$$

Sea ahora $g(x) = \frac{x^2-4}{3x-6}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} g(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{3} = \frac{\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2}{\lim_{x\to 2} 3} \qquad (x \neq 2) \\
&= \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Teorema 6.3 (Compresión de funciones)**.** *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, tres funciones $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in A$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = l$.*

ℹ Demostración

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $A \ \{a\}$ convergente a a. Entonces $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y además $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = l$. Así pues, por el teorema de compresión de sucesiones, se tiene que $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l$, y por tanto, $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

□

Ejemplo 6.12. Sea $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\forall x \neq 0$. Entonces $0 \leq \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ $\forall x \neq 0$. Como $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, aplicando el teorema de compresión de funciones se tiene que $\lim_{x\to 0} \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$ y por tanto $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Teorema 6.4 (Límite de la composición de funciones)**.** *Dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subseteq B$, un punto de acumulación a de A y un punto de acumulación b de B, si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to b} g(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$.*

Demostración

Demostración. Como $\lim_{x\to b} g(x) = l$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si $|x - b| < \delta'$ entonces $|g(x) - l)| < \varepsilon$.
Por otro lado, como $\lim_{x\to a} f(x) = b$, para $\delta' > 0$ existe otro $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \delta'$.
Así pues, si $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - b| < \delta'$ y $|g(f(x)) - l)| < \varepsilon$, por lo que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = l$.

□

Ejemplo 6.13. Si tomamos las funciones $f(x) = x^2 - 5$ y $g(y) = \sqrt{y}$, se cumple que $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ y $\lim_{y\to 4} g(y) = 2$. Entonces, aplicando el teorema anterior se tiene

$$\lim_{x\to 3} g \circ f(x) = \lim_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 5} = \lim_{y\to 4} \sqrt{y} = 2.$$

Proposición 6.3. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, si existe el límite de f en a entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$.*

Demostración

Demostración. Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Por las propiedades del valor absoluto se cumple que $0 \leq ||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$ $\forall x \in A$. Como además $\lim_{x\to a} |f(x) - l| = 0$, por el teorema de compresión de funciones se tiene que

$$\lim_{x\to a} ||f(x)| - |l|| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| - |l| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = |l|.$$

□

Proposición 6.4. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, si existe el límite de f en a entonces $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$.*

i Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio usando el teorema del límite de la composición de funciones.

□

Teorema 6.5 (Criterio de Cauchy)**.** *Dado un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$*, una función* $f : A \to \mathbb{R}$ *y un punto de acumulación* a *de* A*, entonces* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *si y solo si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in A\ \ \{a\}$ *con* $|x - a| < \delta|$ *y* $|y - a| < \delta$*.*

i Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in A\ \ \{a\}$ con $|x - a| < \delta$. Por tanto, para cualquier $x, y \in A\ \ \{a\}$ con $|x - a| < \delta$ y $|y - a| < \delta$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - l + l - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in A\ \ \{a\}$ con $|x - a| < \delta|$ y $|y - a| < \delta$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $A\ \ \{a\}$ convergente a a. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \delta\ \forall n \geq k$, y por tanto, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon\ \forall m, n \geq k$. Así pues, $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y por el criterio de convergencia de Cauchy para sucesiones (Teorema 4.8), existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
Veamos ahora que l es el límite de f en a, usando el criterio de las sucesiones. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ otra una sucesión en $A\ \{a\}$ convergente a a. Por el mismo razonamiento de antes, se tiene que existe $l' \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = l'$. Tomando ahora $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ de antes, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \delta$ y $|y_n - a| < \delta\ \forall n \geq k$, de manera que $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon\ \forall n \geq k$. Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = |\lim_{n\to\infty} f(x_n) - \lim_{n\to\infty} f(y_n)| = |l - l'| < \varepsilon.$$

Y como esto es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$ se concluye que $l = l'$, es decir, para cualquier sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $A\ \ \{a\}$ convergente a a, se tiene %$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = l$, por lo que se concluye que $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

□

6.4 Límites laterales

Definición 6.4. Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : A \to \mathbb{R}$,

1. Si a es un punto de acumulación de $\{x \in A : x > a\}$, se dice que l es el *límite por la derecha* de f en a y se denota $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ con $0 < x - a < \delta$.
2. Si a es un punto de acumulación de $\{x \in A : x < a\}$, se dice que l es el *límite por la izquierda* de f en a y se denota $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ con $0 < a - x < \delta$.

Teorema 6.6 (Límites laterales)**.** *Dado un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y una función* $f : A \to \mathbb{R}$*, y sea* a *un punto de acumulación de los conjuntos* $\{x \in A : x > a\}$ *y* $\{x \in A : x < a\}$*, entonces* $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *si y solo si* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$*.*

i Demostración

Demostración. Sea $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in A \quad \{a\}$ con $|x - a| < \delta$. Así pues, si $x \in A$ y $0 < x - c < \delta$ se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$ por lo que $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$, y si $x \in A$ y $0 < c - x < \delta$ también se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$ por lo que $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$.
Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos ahora que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ con $0 < x - c < \delta_1$, y también existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ con $0 < c - x < \delta_2$. Así pues, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para cualquier $x \in A \quad \{a\}$ con $|x - a| < \delta$, si $x > a$ se tiene que $0 < x - a < \delta < \delta_1$ y, por tanto, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Y si $x < a$ se tiene que $0 < a - x < \delta < \delta_2$ y, por tanto, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Por consiguiente, $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

□

Ejemplo 6.14. Sea

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Entonces, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, y como los límites son distintos, por el teorema anterior, se tiene que no existe el límite de la función en 0.

6.5 Límites infinitos

Definición 6.5 (Límite infinito)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : A \to \mathbb{R}$, y sea a un punto de acumulación de A:

1. Se dice que f tiende a ∞ cuando x tiende a a, y se denota $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > \varepsilon \ \forall x \in A \quad \{a\}$ con $|x - a| < \delta$.
2. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a a, y se denota $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si para cada $\varepsilon < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < \varepsilon \ \forall x \in A \quad \{a\}$ con $|x - a| < \delta$.

Ejemplo 6.15. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$, se tiene que si $0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ entonces

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Proposición 6.5. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto de acumulación a de A y dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in A \quad \{a\}$:*

1. *Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.*
2. *Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

i Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > \varepsilon \ \forall x \in A \quad \{a\}$ con $|x - a| < \delta$, y como $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A \quad \{a\}$ también tiene que $g(x) \geq f(x) > \varepsilon$, por lo que $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.
La segunda parte se prueba de forma análoga.

□

6.6 Límites en el infinito

Definición 6.6 (Límite de una función en el infinito)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(a, \infty) \subset A$ para algún $a \in \mathbb{R}$, y una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que f tiende a l cuando x tiende ∞, y se denota $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > a$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x > \delta$.

Y dado un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(-\infty, b) \subset B$ para algún $b \in \mathbb{R}$, y una función $g : B \to \mathbb{R}$, se dice que g tiende a l cuando x tiende $-\infty$, y se denota $\lim_{x\to-\infty} g(x) = l$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta < b$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x < \delta$.

Ejemplo 6.16. Sea $f(x) = \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0$. Veamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ tal que si $x > \delta = \frac{1}{\varepsilon}$ se tiene $|f(x) - 0| = |f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Del mismo modo se puede probar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Teorema 6.7 (Criterio de las sucesiones divergentes)**.** *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(a, \infty) \subset A$ para algún $a \in \mathbb{R}$, y una función $f : A \to \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si y solo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en (a, ∞) que diverja a ∞, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.*

Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > a$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x > \delta$.
Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, existe $k_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \delta \ \forall n \geq k_\delta$. Así pues, si $n \geq k_\delta$ se tiene que como $x_n \in A$ y $x_n > \delta$, $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, por lo que $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = l$.
Para ver el otro sentido de la implicación, procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que ahora que para cualquier $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en (a, ∞) que diverja a ∞, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$, pero $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq l$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > a$ existe $x_\delta > \delta$ con $|f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$.
Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n > a$ tal que $x_n > n$ y $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $(a\infty) \subset A$ que diverge a ∞ y tal que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge a l, lo que contradice la hipótesis de partida. Por consiguiente, debe ser $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

$\square$

Definición 6.7 (Límite infinito en el infinito)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(a, \infty) \subset A$ para algún $a \in \mathbb{R}$, y una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que f tiende a ∞ cuando x tiende ∞, y se denota $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > a$ tal que $f(x) > \varepsilon$ $\forall x > \delta$.

Y dado un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(-\infty, b) \subset B$ para algún $b \in \mathbb{R}$, y una función $g : B \to \mathbb{R}$, se dice que g tiende a ∞ cuando x tiende $-\infty$, y se denota $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta < b$ tal que $f(x) < \varepsilon$ $\forall x < \delta$.

Ejemplo 6.17. Sea $f(x) = x^2$. Veamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$ tal que si $x > \delta$, entonces $f(x) = x^2 > (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$.

Del mismo modo se puede probar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Proposición 6.6. *Dado un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $(a, \infty) \subset A$ *para algún* $a \in \mathbb{R}$*, y dos funciones* $f, g : A \to \mathbb{R}$*, tales que* $g(x) > 0$ $\forall x \in A$ *y* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$*, entonces:*

1. *Si* $l > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *si y solo si* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.
2. *Si* $l < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *si y solo si* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$. Entonces, dado $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ existe $\delta > a$ tal que $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon = \frac{l}{2}$ $\forall x > \delta$. Así pues, si $x > \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \frac{l}{2} &\Rightarrow \frac{-l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \frac{l}{2} \\
&\Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2} \\
&\Rightarrow \frac{l}{2} g(x) < f(x) < \frac{3l}{2} g(x).
\end{aligned}$$

Por tanto, por la Proposición 6.5 se tiene que si $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.
La segunda parte se prueba de forma análoga.

$\square$

6.7 Límites de las funciones elementales

Proposición 6.7 (Límite de una función polinómica)**.** *Si f es una función polinómica, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Proposición 6.8 (Límite de una función racional)**.** *Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ funciones polinómicas, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea una raíz de $q(x)$, y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Si a es una raíz de $q(x)$ entonces el límite puede existir o no.

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Proposición 6.9 (Límite de una función potencial)**.** *Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto a tal que exista un intervalo $(a-\delta, a+\delta) \subset Dom(f)$ para algún $\delta > 0$, y en ese caso, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Proposición 6.10 (Límite de una función exponencial)**.** *Si $f(x) = c^x$ con $c \in \mathbb{R}$ entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

Proposición 6.11 (Límite de una función logarítmica)**.** *Si* $f(x) = \log_c(x)$ *con* $c \in \mathbb{R}$, *entonces existe el límite de* f *en cualquier punto* $a \in \mathbb{R}^+$ *y* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

Proposición 6.12. *Si* $f(x)$ *es una función trigonométrica, entonces existe el límite de* f *en cualquier punto* $a \in Dom(f)$ *y* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

6.8 Indeterminaciones y su resolución

6.8.1 Tipos de indeterminaciones

Al calcular límites pueden aparecer las siguientes indeterminaciones:

- **Tipo cociente**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ cuando $x \to a$.

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$.

- **Tipo producto**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $f(x) \cdot g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0 \cdot \pm\infty$ cuando $x \to a$.

- **Tipo potencia**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^∞ cuando $x \to a$.

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 0^0 cuando $x \to a$.

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo ∞^0 cuando $x \to a$.
- **Tipo diferencia**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x) - g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ cuando $x \to a$.

6.8.2 Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Existen diferentes técnicas para resolver una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

- Factorización de polinomios en funciones racionales.
- División por el términos de mayor orden en funciones racionales.
- Infinitésimos equivalentes.
- Regla de L'Hôpital.

6.8.2.1 Factorización de polinomios en funciones racionales

Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \to a$, y a es una raíz de $p(x)$ y $q(x)$, se puede resolver la indeterminación factorizando los polinomios y simplificando.

Ejemplo 6.18. La función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \to \frac{0}{0}$ cuando $x \to 1$.

Para resolver la indeterminación factorizamos los polinomios

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= (x+2)(x-1)^2, \\ x^4 - 4x + 3 &= (x^2 + 2x + 3)(x-1)^2. \end{aligned}$$

Como el factor $(x-1)^2$ es común, podemos simplificar la función en el cálculo del límite:[1]

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x^2+2x+3)(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)} = \frac{3}{6} = 0.5.$$

[1]Se pude simplificar porque aunque $x \to 1$, $x \neq 1$ y por tanto el denominador no se anula.

6.8.2.2 División por el término de mayor orden en funciones racionales

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \to \pm\infty$, entonces se puede resolver dividendo $p(x)$ y $q(x)$ por el término de mayor grado de ambos polinomios.

Ejemplo 6.19. La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to \infty$.

Para resolver la indeterminación dividimos numerador y denominador por x^4 que es el término de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-3x+2}{x^4}}{\frac{x^4-4x+3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

En general, si $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$, entonces:

- Si $n > m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Si $n < m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
- Si $n = m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$.

6.8.2.3 Cambio de variable

El teorema del límite de la composición de funciones nos permite calcular límites haciendo un cambio de variable por medio de la composición de funciones.

Ejemplo 6.20. Sea $f(x) = \frac{(x+8)^{1/3}-2}{x}$. Cuando $x \to 0$, $f(x) \to \frac{0}{0}$. Aplicando el cambio de variable $y = (x+8)^{1/3}$, se tiene que $y^3 = x + 8$ y $x = y^3 - 8$. Como $\lim_{x\to 0}(x+8)^{1/3} = 2$, aplicando el teorema del límite de la composición de funciones, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+8)^{1/3} - 2}{x} = \lim_{y\to 2} \frac{y-2}{y^3 - 8} = \lim_{y\to 2} \frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \lim_{y\to 2} \frac{1}{y^2+2y+4} = \frac{2}{12}.$$

6.8.2.4 Infinitésimos equivalentes

Definición 6.8. Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$, y un punto de acumulación a de A, se dice que f es un infinitésimo en a si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

De manera informal, se puede decir que un infinitésimo es una cantidad infinitamente pequeña.

Ejemplo 6.21. La función identidad $f(x) = x$ es un infinitésimo en $x = 0$, ya que $\lim_{x\to 0} x = 0$.

Del mismo modo, la función $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ es otro infinitésimo en $x = 0$ ya que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$.

Y la función $h(x) = x^2 - 4$ es un infinitésimo en $x = 2$, ya que $\lim_{x\to 2} x^2 - 4 = 0$.

Proposición 6.13 (Propiedades de los infinitésimos)**.** *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, y un punto de acumulación a de A, tales que f y g son infinitésimos en a. Entonces se cumple*

1. *$f + g$ es un infinitésimo en a.*
2. *$f \cdot g$ es un infinitésimo en a.*
3. *$c \cdot f$ es un infinitésimo en a $\forall c \in \mathbb{R}$.*
4. *Si h es una función acotada en un entorno de a, $f \cdot h$ es un infinitésimo en a.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Definición 6.9 (Infinitésimos equivalentes)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, y un punto de acumulación a de A, tales que f y g son infitésimos en a, se dice que f y g son *infinitésimos equivalentes* en a, se denota $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to a$, si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Si $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to a$ entonces $f(x)$ y $g(x)$ son magnitudes equivalentes cuando $x \to a$.

Ejemplo 6.22. Los siguientes infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$:

$$\begin{gathered}
\operatorname{sen}(x) \approx x \approx \operatorname{tg}(x) \\
1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{arctg}(x) \approx x \\
e^x - 1 \approx x \\
\log(1+x) \approx x
\end{gathered}$$

A veces se puede resolver una indeterminación cuando $x \to a$ sustituyendo cualquier subexpresión de la función por un infinitésimo equivalente cuando $x \to a$.

Ejemplo 6.23. La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{x^3} \to \dfrac{0}{0}$ cuando $x \to 0$.

Como $\operatorname{sen}(x) \approx x$ y $1 - \cos(x) \approx \dfrac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$, para resolver la indeterminación sustituimos $\operatorname{sen}(x)$ por x y $1-\cos(x)$ por $\dfrac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = 0.5.$$

6.8.2.5 Regla de L'Hôpital

Teorema 6.8 (Regla de L'Hôpital)**.** *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, y un punto de acumulación a de A, tales que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se cumple que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración

Demostración. Se verá en el siguiente $\square$

Advertencia

Para que exista $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ es necesario que que f y g sean derivables en un entorno de a.

Ejemplo 6.24. Sea $f(x) = \dfrac{\log(x^2-1)}{x+2} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to \infty$.

Para resolver la indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\log(x^2-1)\right)'}{(x+2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0.\end{aligned}$$

6.8.3 Resolución de una indeterminación de tipo producto

Si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to a$, entonces la indeterminación $f(x)\cdot g(x) \to 0\cdot\pm\infty$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \to \frac{0}{0}.$$

Ejemplo 6.25. Sea $f(x) = x^2 e^{1/x^2} \to 0\cdot\infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} \to \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x^2}}{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{1/x^2}\right)'}{\left(1/x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x^2}\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{1/x^2}=\infty.$$

6.8.4 Resolución de una indeterminación de tipo potencia

Si $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación de tipo potencia cuando $x\to a$, entonces la indeterminación puede convertirse en una de tipo producto mediante la transformación:

$$\exp\left(\log f(x)^{g(x)}\right)=\exp\left(g(x)\cdot\log f(x)\right).$$

Ejemplo 6.26. Sea $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\to 1^\infty$ cuando $x\to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)\\ &=\exp\left(\lim_{x\to 0}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\ &=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}\right)\end{aligned}$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\begin{aligned}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(1/x\right)'}\right) &=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+1/x}\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\right)\\ &=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)=\exp(1)=e.\end{aligned}$$

6.8.5 Resolución de una indeterminación de tipo diferencia

Si $f(x)\to\infty$ y $g(x)\to\infty$ cuando $x\to a$, entonces la indeterminación $f(x)-g(x)$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}\to\frac{0}{0}.$$

Ejemplo 6.27. Sea $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \to \infty - \infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0}.$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\operatorname{sen} x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \\
&= \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

6.9 Asíntotas de una función

Una asíntota de una función es una recta a la que tiende la función en el infinito, es decir, que la distancia entre la recta y la función es cada vez menor.

Existen tres tipos de asíntotas:

- **Asíntota vertical**: $x = a$,
- **Asíntota horizontal**: $y = a$,
- **Asíntota oblicua**: $y = a + bx$.

6.9.1 Asíntotas verticales

Definición 6.10 (Asíntota vertical)**.** Se dice que una recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Las asíntotas verticales deben buscarse en los puntos donde no está definida la función, pero si lo está en las proximidades.

Ejemplo 6.28. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty, \text{ y } \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \infty.$$

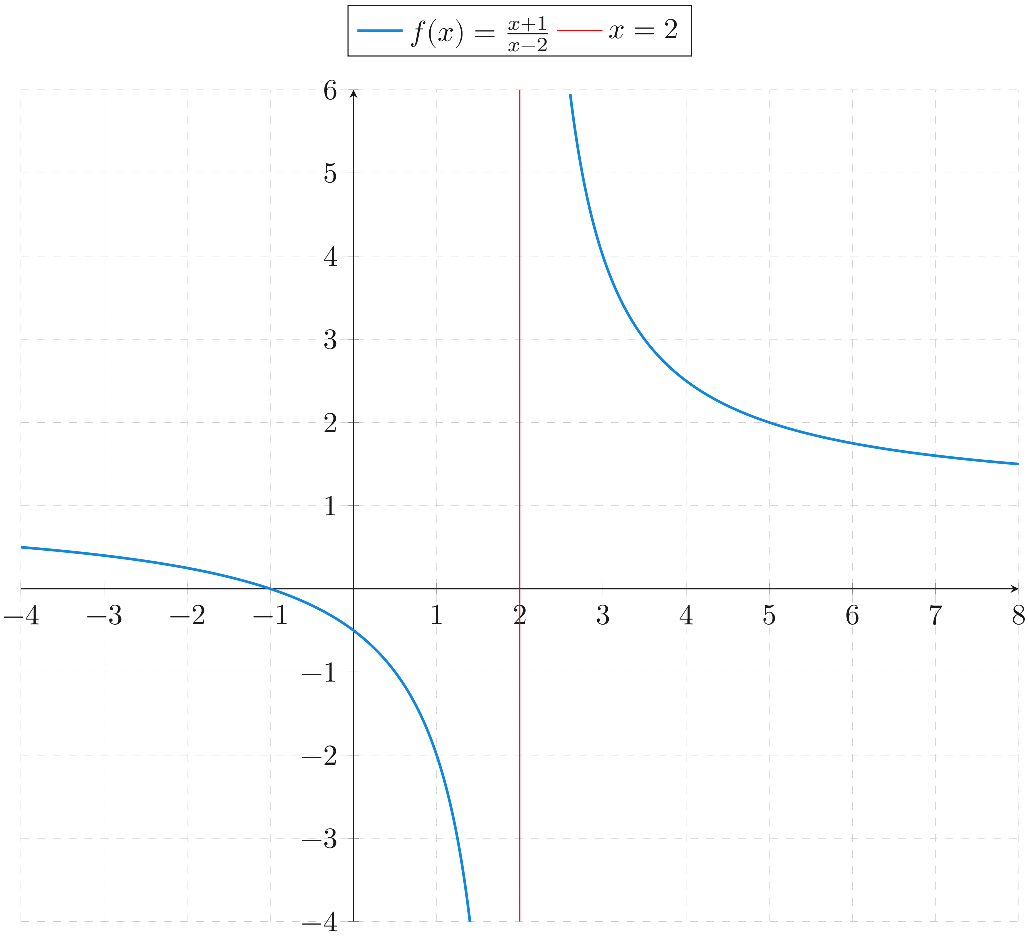

Figura 6.7: Asíntota vertical.

6.9.2 Asíntotas horizontales

Definición 6.11 (Asíntota horizontal)**.** Se dice que una recta $y = a$ es una *asíntota horizontal* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

Ejemplo 6.29. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1.$$

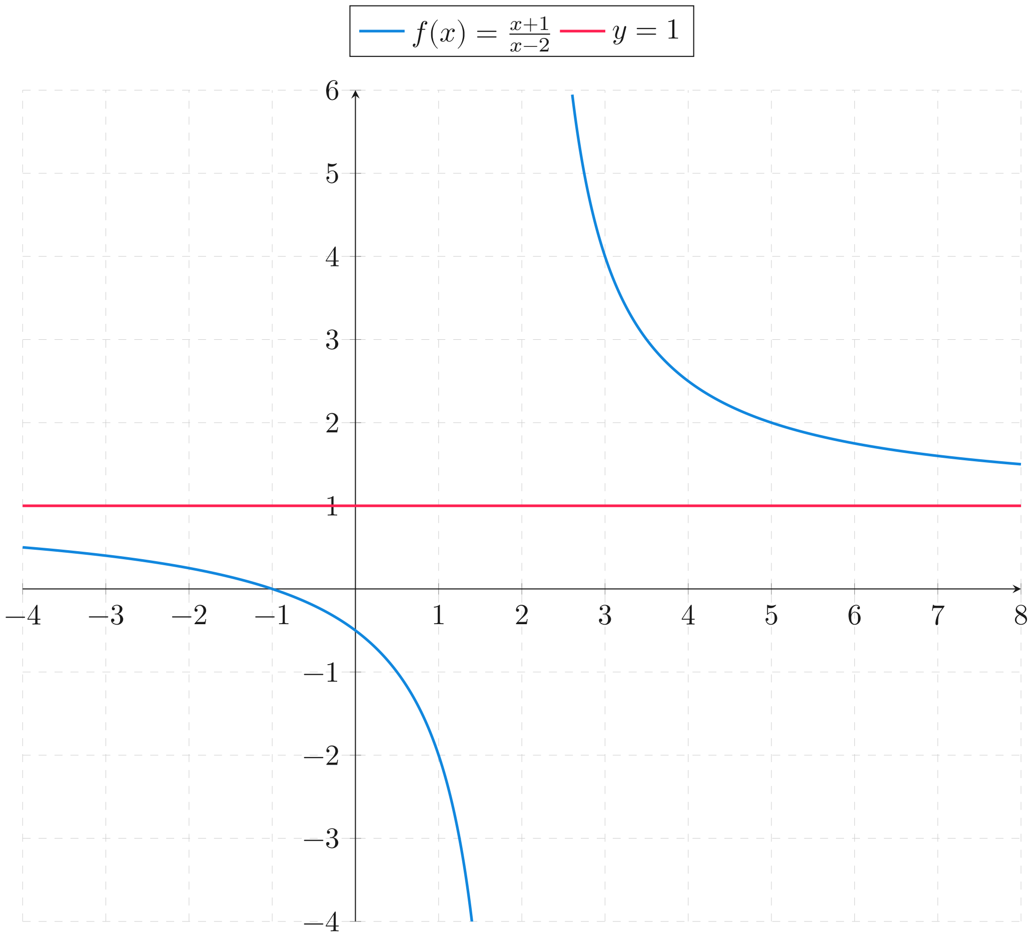

Figura 6.8: Asíntota horizontal.

6.9.3 Asíntotas oblicuas

Definición 6.12 (Asíntota oblicua)**.** Se dice que una recta $y = a + bx$ es una *asíntota oblicua* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - bx = a.$$

Ejemplo 6.30. La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{x}{x-1} = 1$$

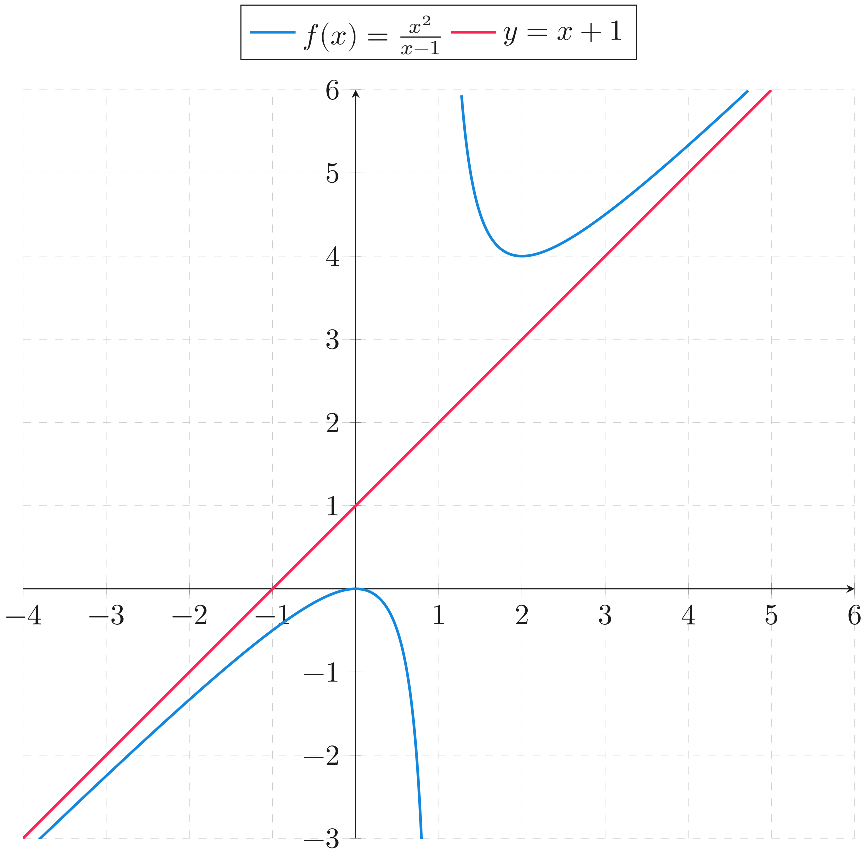

Figura 6.9: Asíntota oblicua.

6.10 Continuidad

Definición 6.13 (Función continua en un punto)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, se dice que la función f es *continua* en el punto a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ejemplo 6.31. La función $f(x) = x^2$ es continua en 2 ya que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4 = f(2)$.

Definición 6.14 (Función continua en un intervalo)**.** Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que función f es *continua* en un intervalo $I \subseteq A$, si lo es en cada uno de los puntos de I.

De manera informal, se puede decir que una una función es continua en un intervalo, si puede dibujarse su gráfica en ese intervalo sin levantar el lápiz.

Ejemplo 6.32. La función constante $f(x) = c$ es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que $\lim_{x\to a} c = c = f(a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

La función identidad $\mathrm{Id}(x) = x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que $\lim_{x\to a} x = a = \mathrm{Id}(a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Del mismo modo, función $f(x) = x^2$ es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que $\lim_{x\to a} x^2 = a^2 = f(a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$,

Ejemplo 6.33. Veamos que la $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Sea $a \in \mathbb{R}$. Usando propiedades trigonométricas se tiene

$$|\,\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(a)| = |2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)| = 2|\,\mathrm{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)||\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)| \leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|,$$

ya que $\operatorname{sen}(x) \leq x \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $\cos(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que si $|x-a| < \delta = \varepsilon$, entonces $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| < |x-a| = \varepsilon$.

De aquí se puede deducir que todas las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

De la definición de continuidad se deducen tres condiciones necesarias para la continuidad:

1. $f(a) \in \operatorname{Dom}(f)$.
2. Existe $\lim_{x\to a} f(x)$.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si se rompe alguna de estas condiciones, se dice que la función presenta una discontinuidad en a.

6.11 Tipos de discontinuidades

Dependiendo de la condición de continuidad que se rompa, existen distintos tipos de discontinuidades:

- Discontinuidad evitable.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
- Discontinuidad de 2ª especie.

6.11.1 Discontinuidad evitable

Definición 6.15 (Discontinuidad evitable)**.** Se dice que una función f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a si existe el límite de f en a pero $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Ejemplo 6.34. La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ ya que la función no está definida en $x = 1$ pero

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 2} x+1 = 2.$$

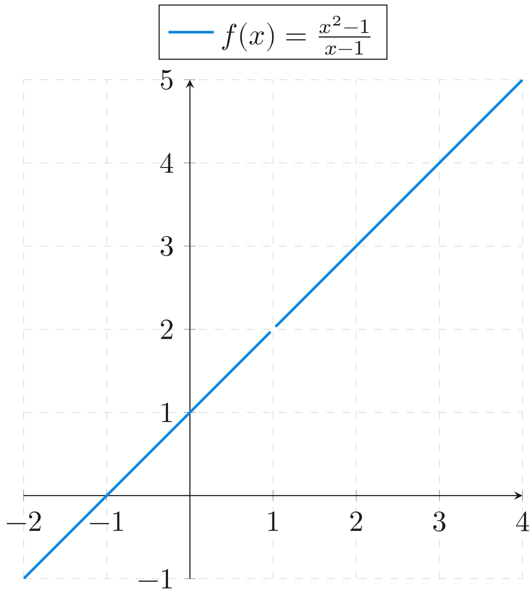

Figura 6.10: Discontinuidad evitable en $x = 1$

6.11.2 Discontinuidad de 1ª especie de salto finito

Definición 6.16 (Discontinuidad de 1ª especie de salto finito)**.** Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto finito* en el punto a si existen los límites laterales de f en a pero

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

A la diferencia entre ambos límite se le lama *salto* de la discontinuidad.

Ejemplo 6.35. La función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Salto $= 1 - (-1) = 2$.

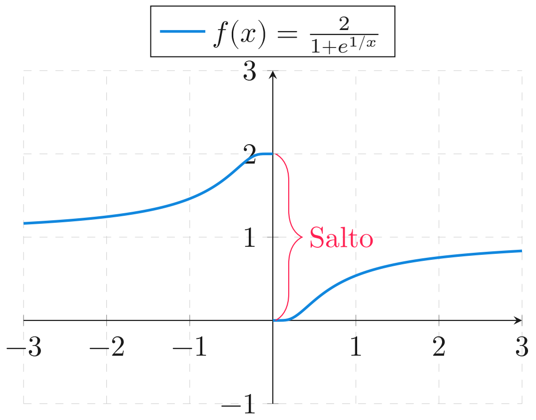

Figura 6.11: Discontinuidad de primera especie de salto finito en $x = 0$

6.11.3 Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito

Definición 6.17 (Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito)**.** Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto infinito* en el punto a si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Si f tienen una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en un punto a, entonces f tienen una asíntota vertical $x = a$.

Ejemplo 6.36. La función $f(x) = e^{1/x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$

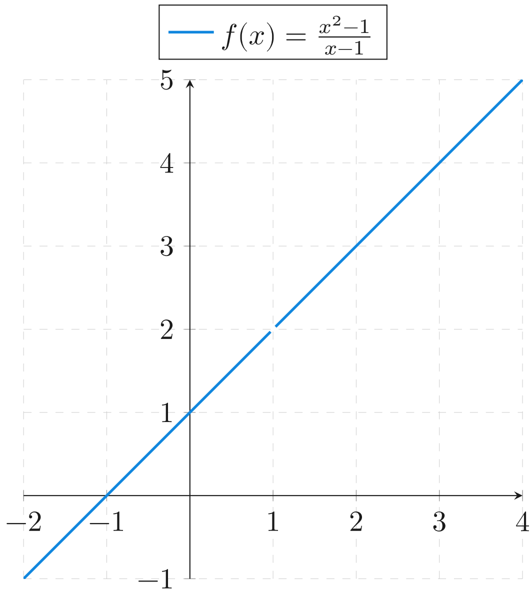

Figura 6.12: Discontinuidad de primera especie de salto infinito en $x = 0$

6.11.4 Discontinuidad de 2ª especie

Definición 6.18 (Discontinuidad de 2ª especie)**.** Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 2ª especie* en el punto a si no existe alguno de los límites laterales y tampoco se trata de una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

Normalmente la discontinuidades de 2ª especie se dan en puntos donde la función no definida en sus proximidades.

Ejemplo 6.37. La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ tiene una discontinuidad de 2ª especie en $x = 1$ ya que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ no existe}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$$

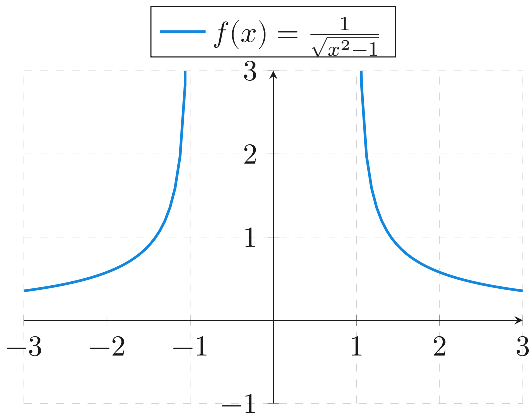

Figura 6.13: Discontinuidad de segunda especie en $x = 0$

Proposición 6.14. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación a de A, si f y g son continuas en a, entonces*

a. $f \pm g$ *es continua en* a.
b. $f \cdot g$ *es continua en* a.
c. cf *es continua en* a $\forall c \in \mathbb{R}$.
d. $\frac{f}{g}$ *es continua en* a *si* $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Demostración. Es una consecuencia inmediata del álgebra de límites. □

Ejemplo 6.38. El polinomio $p(x) = 2x^2 - x + 3$ es continuo en todo $\mathbb{R}$ ya que las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ y $h(x) = 3$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.

De hecho, se puede demostrar de manera similar que cualquier polinomio es continuo en todo $\mathbb{R}$.

Proposición 6.15. *Dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subseteq B$ y un punto de acumulación a de A, si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.*

Demostración

Demostración. Como f es continua en a, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y como g es continua en $f(a)$, $\lim_{x\to f(a)} g(x) = g(f(a))$, de manera que, aplicando el teorema del límite de la composición de funciones, se tiene que $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = g\circ f(a)$, y por tanto, $g\circ f$ es continua en a.

$\square$

Ejemplo 6.39. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, que es continua en $\mathbb{R}\ \{0\}$ y $g(x) = \cos(x)$ que es continua en todo $\mathbb{R}$. Entonces $g\circ f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es continua en $\mathbb{R}\ \{0\}$, mientras que $f\circ g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ es continua en $\mathbb{R}\ \ \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$.

6.12 Funciones continuas en intervalos

Teorema 6.9. *Dado un intervalo cerrado y acotado $I = [a,b]$, y una función $f : I \to \mathbb{R}$, si f es continua en I, entonces f está acotada en I.*

Demostración

Demostración. Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que f no está acotada en I. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in I$ tal que $|f(x_n)| > n$. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ y como I está acotado, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también está acotada, de manera que, por el Teorema 4.6 existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge.
Sea $c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Como $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset I$, y I es cerrado, por el Teorema 3.4, contiene a todos sus puntos de acumulación, y por tanto $c \in I$.
Como f es continua en I, lo es, en particular, en c, de modo que como $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a c, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ y, por el Teorema 4.2, $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ está acotada, pero $|f(x_{n_k})| > n_k > k\ \forall k \in \mathbb{N}$, lo que contradice que esté acotada. Así pues, f está acotada en I.

$\square$

Ejemplo 6.40. La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no está acotada en el intervalo $[0,1]$, luego no es continua en este intervalo.

Teorema 6.10. *Dado un intervalo cerrado y acotado $I=[a,b]$, y una función $f:I\to\mathbb{R}$, si f es continua en I, entonces f alcanza el máximo y el mínimo en I, es decir, existen $c,d\in I$ tales que $c\leq f(x)\leq d$ $\forall x\in I$.*

Demostración

Demostración. Como $I=[a,b]$ es cerrado y acotado, y f es continua en I, por el teorema anterior se tiene que f está acotada en I.
Como $f(I)\neq\emptyset$ pues $f(a)\in f(I)$, por el axioma de completitud de los números reales, existe el supremo $s=\sup\{f(I)\}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, $s-\frac{1}{n}$ no es cota superior de $f(I)$, y por tanto, existe $x_n\in I$ tal que $s-\frac{1}{n}<f(x_n)<s$. Podemos construir así una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset I$. Como I está acotado, por el por el Teorema 4.6 existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge.
Sea $d=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$. Como $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}\subset I$, y I es cerrado, por el Teorema 3.4, contiene a todos sus puntos de acumulación, y por tanto $d\in I$.
Como f es continua en I, lo es, en particular, en d, de modo que como $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a d, $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(d)$. Además se tiene que $s-\frac{1}{k}<s-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})<s$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Así pues, por el teorema de compresión de funciones, se tiene que $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=s$, y por tanto $f(d)=s$ de modo que $f(d)\geq f(x)$ $\forall x\in I$.
Si ahora consideramos la función $-f$, que también es continua en I al ser la composición de funciones continuas, por lo que acabamos de demostrar, $-f$ alcanza el máximo en I, es decir, existe $c\in I$ tal que $-f(c)\geq -f(x)$ $\forall x\in I$, de donde se deduce que $f(c)\leq f(x)$ $\forall x\in I$.

□

Teorema 6.11 (Bolzano)**.** *Dado un intervalo cerrado y acotado $I=[a,b]$, y una función $f:I\to\mathbb{R}$, si f es continua en I, y $f(a)<0<f(b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.*

Demostración

Demostración. Sea $A=\{x\in I: f(x)<0\}$. $A\subset I$ y como I está acotado, también A está acotado. $A\neq\emptyset$ ya que $a\in A$, de manera que, por el axioma del supremo existe $c=\sup(A)$.
Veamos ahora que $c\in(a,b)$. Como f es continua en I, $\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)<0$, de modo que existe $\delta_1>0$ tal que $f(x)<0$ $\forall x\in[a,a+\delta_1)$, y por tanto, $[a,a+\delta_1)\subset A$,

por lo que $c > a$.
Del mismo modo, $\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b) > 0$, de modo que existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) > 0 \ \forall x \in (b - \delta_2, b]$, y por tanto, $(b - \delta_2, b] \subset \overline{A}$, por lo que $c < b$.
Finalmente, veamos que $f(c) = 0$ por reducción al absurdo. Si suponemos que $f(c) > 0$, entonces $f(c) = \lim_{x \to c} f(x) > 0$, de manera que existe $\delta > 0$ tal que si $f(x) > 0 \ \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$, lo que contradice que c sea el supremo de A. Del mismo modo, si suponemos que $f(c) < 0$, entonces $f(c) = \lim_{x \to c} f(x) < 0$, de manera que existe $\delta > 0$ tal que si $f(x) < 0 \ \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$, y entonces, $f\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < 0$, por lo que $c + \frac{\delta}{2} \in A$ y $c + \frac{\delta}{2} > c$, lo que contradice que c sea cota superior de A. Por consiguiente, debe ser $f(c) = 0$.

$\square$

Teorema 6.12 (Valores intermedios)**.** *Dado un intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$, y una función $f : I \to \mathbb{R}$, si f es continua en I y si $c, d \in I$, entonces para cualquier $k\mathbb{R}$ con $f(c) < k < f(d)$, existe $e \in I$ entre c y d tal que $f(e) = k$.*

i Demostración

Demostración. Supongamos que $c < d$ y tomemos la función $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - k \ \forall x \in [c, d]$. Puesto que f es continua en $[c, d]$, g también lo es. Además $g(c) = f(c) - k < 0$ y $g(d) = f(d) - k > 0$. Por tanto, por el teorema de Bolzano, existe $e \in (c, d)$ tal que $g(e) = 0$, y por consiguiente, $g(e) = f(e) - k = 0$, de donde se deduce que $f(e) = k$.
De forma análoga se procede si $d < c$.

$\square$

Teorema 6.13. *Dado un intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$, y una función $f : I \to \mathbb{R}$, si f es continua en I y $k \in \mathbb{R}$ es tal que $\inf(f(I)) \leq k \leq \sup(f(I))$, entonces existe $e \in I$ tal que $f(e) = k$.*

i Demostración

Demostración. Por el Teorema 6.10 existe $c, d \in I$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ $\forall x \in I$. $f(c) = \min(f(I)) = \inf(f(I)) \leq k \leq \sup(f(I)) = \max(f(I)) = f(d)$.
Si $k = f(c)$ o $k = f(d)$ el resultado es trivial, y si $f(c) < k < f(d)$, por el teorema de los valores intermedios, existe $e \in I$ entre c y d tal que $f(e) = k$.

$\square$

Teorema 6.14. *Dado un intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$, y una función $f : I \to \mathbb{R}$, si f es continua en I entonces $f(I)$ es un intervalo cerrado y acotado.*

Demostración

Demostración. Por el Teorema 6.10 existe $c, d \in I$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ $\forall x \in I$, por lo que $f(I) \subseteq [f(c), f(d)]$.
Veamos ahora que también se cumple el otro sentido de la inclusión. Si $k \in [f(c), f(d)]$, por el teorema anterior, se tiene que existe $e \in I$ tal que $f(e) = k$, y por tanto $k \in f(I)$, por lo que $[f(c), f(d)] \subset f(I)$.
Por consiguiente, $f(I) = [f(c), f(d)]$ que es un intervalo cerrado y acotado.

□

Notas

7 Derivadas de funciones

7.1 El concepto de derivada

7.1.1 Tasa de variación media

Definición 7.1 (Incremento)**.** Dada una función $y = f(x)$, se llama *incremento* de f en un intervalo $[a, b]$ a la diferencia entre el valor de f en cada uno de los extremos del intervalo, y se nota

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Cuando f es la función identidad $y = x$, se cumple que

$$\Delta x = \Delta y = f(b) - f(a) = b - a,$$

y por tanto, el incremento de x en un intervalo es la amplitud del intervalo. Esto nos permite escribir el intervalo $[a, b]$ como $[a, a + \Delta x]$.

Definición 7.2 (Tasa de variación media)**.** Dada una función $y = f(x)$, se llama *tasa de variación media* de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$, al cociente entre el incremento de y y el incremento de x en dicho intervalo, y se escribe

$$\mathrm{TVM}(f, [a, a + \Delta x]) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Ejemplo 7.1. Consideremos la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x.

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a, y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado una cantidad Δx, ¿en cuánto se incrementará el área del cuadrado?

$$\begin{aligned}\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) = (a+\Delta x)^2 - a^2 = \\ = a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2 = 2a\Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

¿Cuál será la tasa de variación media del área en el intervalo $[a, a+\Delta x]$?

$$\text{TVM}\, f[a, a+\Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x.$$

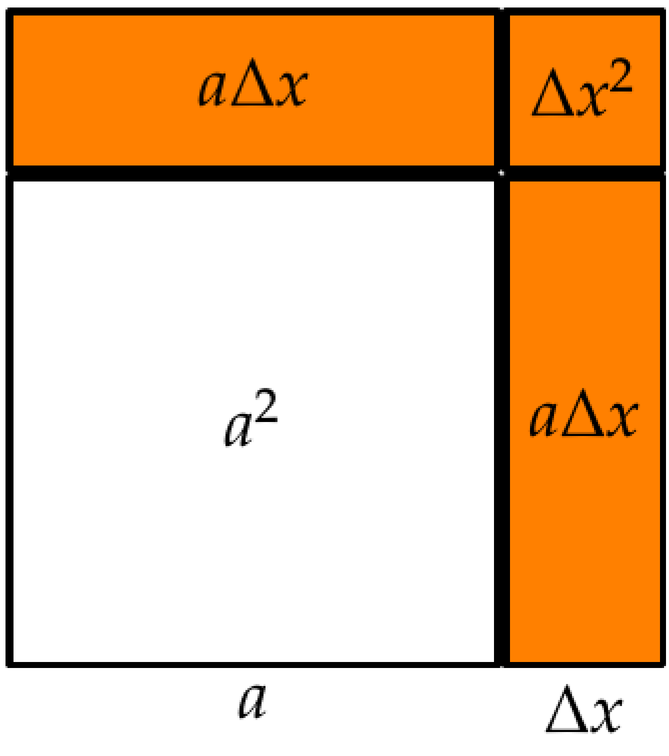

Figura 7.1: Variación que experimenta el area de un cuadrado al variar el lado

7.1.2 Interpretación geométrica de la tasa de variación media

La tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$ es la pendiente de la recta *secante* a f en los puntos $(a, f(a))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$.

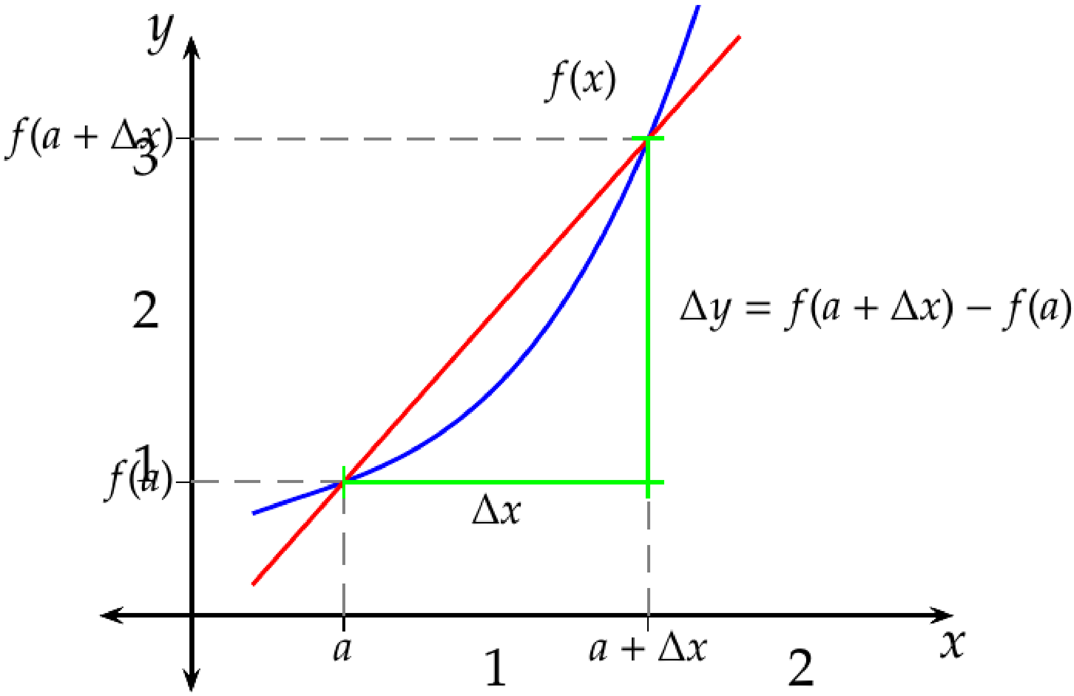

Figura 7.2: Gráfica de la recta secante a una función en dos puntos.

7.1.3 Tasa de variación instantánea

En muchas ocasiones, es interesante estudiar la tasa de variación que experimenta una función, no en intervalo, sino en un punto.

Conocer la tendencia de variación de una función en un instante puede ayudarnos a predecir valores en instantes próximos.

Definición 7.3 (Tasa de variación instantánea y derivada)**.** Dada una función $y = f(x)$, se llama *tasa de variación instantánea* de f en un punto a, al límite de la tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$, cuando Δx tiende a 0, y se denota

$$\begin{aligned}\mathrm{TVI}(f,a) &= \lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{TVM}(f,[a,a+\Delta x]) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Cuando este límite existe, se dice que la función f es derivable en el punto a, y al valor del mismo se le llama derivada de f en a, y se nota como

$$f'(a) \text{ o bien } \frac{df}{dx}(a)$$

Ejemplo 7.2. Consideremos de nuevo la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x.

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a, y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado, ¿cuál es la tasa de variación instantánea del área del cuadrado en dicho instante?

$$\begin{aligned}\mathrm{TVI}(f(a)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2a\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2a+\Delta x = 2a.\end{aligned}$$

Así pues, $f'(a) = 2a$, lo que indica que la tendencia de crecimiento el área es del doble del valor del lado.

El signo de $f'(a)$ indica la tendencia de crecimiento de f en el punto a:

- $f'(a) > 0$ indica que la tendencia es creciente.
- $f'(a) < 0$ indica que la tendencia es decreciente.

7.1.4 Interpretación geométrica de la tasa de variación instantánea

La tasa de variación instantánea de f en el punto a es la pendiente de la recta *tangente* a f en el punto $(a, f(a))$.

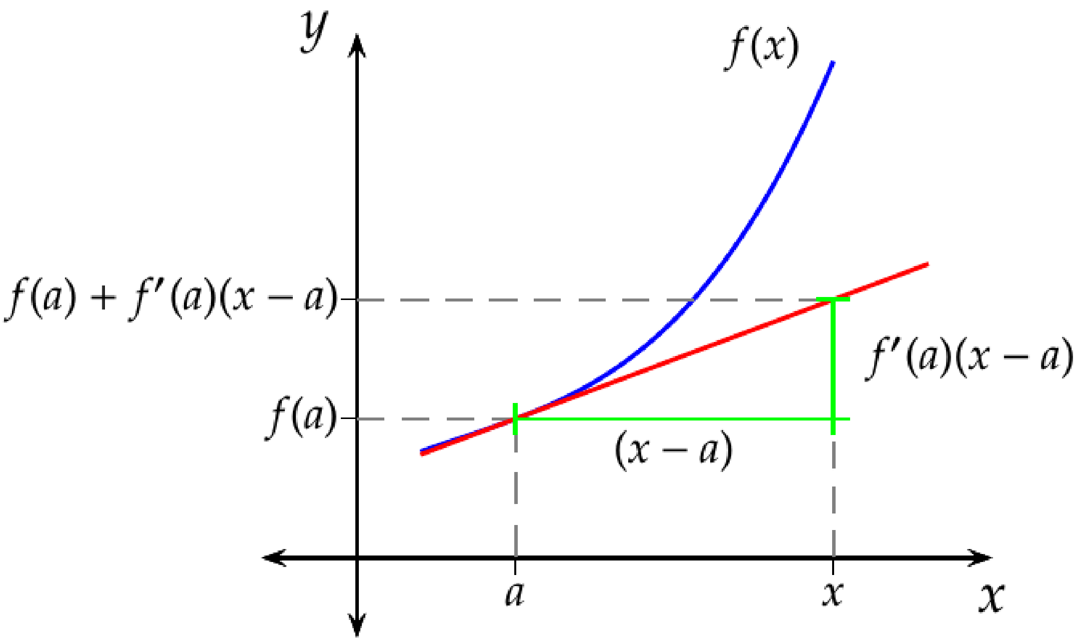

Figura 7.3: Gráfica de la recta tangente a una función en un punto.

7.2 Diferenciabilidad

Definición 7.4. Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in I$, se dice que f es *diferenciable* o *derivable* en a, si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En tal caso, al valor del límite se le llama *derivada* de f en a y se denota $f'(a)$.

Se dice que f es *diferenciable* en el intervalo I, si f es diferenciable en todos los puntos de I.

> **Nota**
>
> Si en la definición anterior llamamos $h = x - a$, resulta
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
>
> que es otra definición equivalente de la derivada de f en a.

Definición 7.5. Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$, se define la *función derivada* de f, y se denota f', a la función cuyo dominio es el conjunto de los puntos de I donde f es diferenciable y el valor de f' es el valor de la derivada en cada uno de esos puntos.

> **Nota**
>
> La notación $f'(a)$ para la derivada de f se debe a Lagrange, pero también es común en Ciencias e Ingenierías utilizar la notación de $\frac{df}{dx}$ debida a Leibniz. En esta última notación df y dx se conocen como *diferenciales* de f y x, y representan variaciones infinitesimales de f y x respectivamente.

Ejemplo 7.3. Sea $f(x) = Id(x) = x$ la función identidad. Entonces, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 1 = 1.$$

Por tanto, $Id(x)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y $Id'(a) = a$.

Con la notación de Leibniz, el cálculo de la derivada es, si cabe, más sencillo, pues se puede obtener algebraicamente,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Sea ahora $f(x) = x^2$. Entonces, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \to a} x + a = 2a.$$

Por tanto, $f(x)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(a) = 2a$.

Ejemplo 7.4. Sea la función $f(x) = |x|$. Veamos si f es diferenciable en 0. Para ello calculamos los límites laterales.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \\
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,
\end{aligned}$$

Por tanto, como los límites laterales no coinciden, f no es diferenciable en 0.

Definición 7.6. Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in I$, si f es diferenciable en a, se define la *recta tangente* a la gráfica de f en a como la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$, es decir, la recta con ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Definición 7.7. Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in I$, si f es diferenciable en a, se define la *recta normal* a la gráfica de f en a como la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y es perpendicular a la recta tangente a la gráfica de f en a, es decir, la recta con ecuación

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Ejemplo 7.5. Dada la función $y = f(x) = x^2$, la recta tangente a f en 1 es

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1,$$

y la recta normal es

$$y = f(1) - \frac{1}{f'(1)}(x - 1) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2}.$$

Teorema 7.1. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in I$, si f es diferenciable en a entonces f es continua en a.*

Demostración

Demostración. Sea $x \in I$ y $x \neq a$. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x-a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x\to a} x-a = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

Así pues,

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) = f(a),$$

y, por tanto, f es continua en a. □

Precaución

El recíproco de este teorema no es cierto, es decir, pueden existir funciones continuas en un punto que no sean derivables en ese punto, como por ejemplo la función

$f(x) = |x|$ que es continua en 0 pero, como se ha visto, no es derivable en 0.

7.3 Álgebra de derivadas

Proposición 7.1. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y dos funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$, si f y g son diferenciables en $a \in I$, entonces*

a. $f + g$ *es diferenciable en a y* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

b. $f - g$ *es diferenciable en a y* $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.

c. $c \cdot f$ *es diferenciable en a y* $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)\ \forall c \in \mathbb{R}$.

d. $f \cdot g$ *es diferenciable en a y* $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

e. Si $g(c) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *es diferenciable en a y* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Demostración

Demostración. Veamos la demostración de cada caso usando la definición de derivada.

a. Derivada de la suma de funciones.

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

b. Derivada de la resta de funciones. Se prueba del mismo modo que la suma.

c. Derivada del producto de una función por un escalar.

$$\begin{aligned}(c \cdot f)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(c\cdot f)(x) - (c \cdot f)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c \cdot f(a) - c \cdot f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{c(f(x) - f(a))}{x-a} = c \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c \cdot f'(a).\end{aligned}$$

d. Derivada del producto de funciones.

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)+f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))\cdot g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a} g(x)+\lim_{x\to a} f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)g(a)+f(a)g'(a).
\end{aligned}
$$

e. Derivada del cociente de funciones.

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f/g)(x)-(f/g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)/g(x)-f(a)/g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\lim_{x\to a} g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a} f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\
&= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2},
\end{aligned}
$$

ya que $g(a)\neq 0$ y como g es continua en a al ser derivable en a, también se puede afirmar que existe un $\delta>0$ tal que $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\cap I$, por lo que

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}=\frac{1}{g(a)^2}.$$

$\square$

Ejemplo 7.6. Veamos cuál es la función derivada de la función racional $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x+1)'x-(x^2-2x+1)x'}{x^2} = \frac{((x^2)'-(2x)'+1')x-(x^2-2x+1)}{x^2} =$$
$$= \frac{(2x-2)x-(x^2-2x+1)}{x^2} = \frac{2x^2-2x-x^2+2x-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}\forall x \neq 0.$$

7.4 Regla de la cadena

El resultado anterior permite calcular la derivada de cualquier función algebraica. A continuación se presenta otro importante resultado que nos permitirá calcular la derivada de una composición de funciones.

Teorema 7.2 (Regla de la cadena)**.** *Dados dos intervalos $I, J \subseteq \mathbb{R}$ y dos funciones $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ tales que $f(I) \subseteq J$, si f es diferenciable en en a y g es diferenciable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Demostración

Demostración. Sea

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{si } y \in J \text{ y } y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } y = f(a) \end{cases}$$

Veamos que h es continua en $f(a)$. Como g es diferenciable en $f(a)$, se tiene que $\lim_{x\to f(a)} \frac{g(x)-g(f(a))}{x-f(a)} = g'(f(a))$, de modo que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in J\ \{f(a)\}$ y $|x-f(a)| < \delta$, entonces $\left|\frac{g(x)-g(f(a))}{x-f(a)} - g'(f(a))\right| < \varepsilon$. Así pues, si $y \in J$, $y \neq f(a)$ y $|y - f(a)| < \delta$ entonces $|h(y) - g'(f(a))| < \varepsilon$, y si $y = f(a)$, entonces $|y - f(a)| = 0 < \delta$ y $|h(y) - g'(f(a))| = |g'(f(a)) - g'(f(a))| = 0 < \varepsilon$. Por consiguiente, h es continua en $f(a)$ y $\lim_{y\to f(a)} h(y) = h(f(a)) = g'(f(a))$.
Por otro lado, de la definición de h se tiene que $g(y) - g(f(a)) = h(y)(y - f(a))$ $\forall y \in J$, de manera que si $x \in I\ \{a\}$ y $y = f(x) \in J$ entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{h(f(x))(f(x)-f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} h(f(x)) \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= h(f(a))f'(a) = g'(f(a))f'(a).\end{aligned}$$

Nota

La demostración es mucho sencilla usando la notación diferencial de Leibniz para la derivada. Si $y = g(z)$ y $z = f(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = g'(z)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

$\square$

Ejemplo 7.7. Si $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $f(x) = x^2$, entonces $g \circ f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ y, aplicando la regla de la cadena, su derivada vale

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos(g(x))2x = \cos(x^2)2x.$$

Por otro lado, $f \circ g(x) = (\sin(x))^2$ y, de nuevo aplicando la regla de la cadena, su derivada vale

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(z))g'(z) = 2g(x)\cos(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x).$$

7.4.1 Derivada de la función inversa

La regla de la cadena nos permite calcular la derivada de la función inversa de una función.

Teorema 7.3 (Derivada de la función inversa)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva en I, y sea $J = f(I)$ y $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ la función inversa de f. Si f es diferenciable en $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es diferenciable en $f(a)$ y*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demostración

Demostración. Como f es continua en I, $J = f(I)$ es un intervalo. Como además f es inyectiva, necesariamente f es monótona. Sea la función $g(y) = \frac{y-f(a)}{f^{-1}(y)-a}$ $\forall y \in J\ \{f(a)\}$. g está bien definida pues f^{-1} es inyectiva, y además, si $y \neq f(a)$ entonces

$f^{-1}(y) \neq f^{-1}(f(a)) = a$, por lo que el denominador no se anula. Veamos que $\lim_{y\to f(a)} g(y) = f'(a)$.
Como f es diferenciable en a, es decir, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si $|x-a| < \delta'$ entonces $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$.
Por otro lado, como f es continua en I, f^{-1} es continua en J, y en particular en $f(a)$, es decir, $\lim_{y\to f(a)} f^{-1}(y) = f^{-1}(f(a)) = a$, de manera que para cualquier $\delta' > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in J\ \ \{f(a)\}$ y $|y - f(a)| < \delta$ entonces $|f^{-1}(y) - a| < \delta'$, y por tanto,

$$\left|\frac{f(f-1(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} - f'(a)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a} - f'(a)\right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |g(y) - f'(a)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{y\to f(a)} g(y) = f'(a).$$

Como además

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} &= \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} \\ &= \frac{1}{\frac{y-f(a)}{f^{-1}(y)-a}} = \frac{1}{g(y)},\end{aligned}$$

y como $\lim_{y\to f(a)} \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{f'(a)}$, finalmente se tiene que

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Nota

De nuevo, podemos realizar la demostración del teorema de manera más sencilla utilizando la notación de diferencial de Leibniz.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}$$

Precaución

Si en las condiciones del teorema anterior quitamos la condición $f'(a) \neq 0$, el resultado no es cierto y f^{-1} no es diferenciable en $f(a)$. Vamos a probarlo por reducción al absurdo. Supongamos que $f'(a) = 0$, entonces, aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a))f'(a) = (f^{-1})'(f(a))0 = 0.$$

Pero, por otro lado, $(f^{-1} \circ f)'(a) = \mathrm{Id}'(a) = 1$, lo que supone una contradicción, por lo que f^{-1} no puede ser derivable en $f(a)$.

□

Corolario 7.1. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ inyectiva en I, y sea $J = f(I)$ y $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ la función inversa de f. Si f es derivable en I y $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, entonces f^{-1} es derivable en I y $\forall y \in J$,*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Demostración

Demostración. Si f es diferenciable en I entonces es continua en I y se puede aplicar el teorema anterior.

□

Ejemplo 7.8. La inversa de la función exponencial $y = f(x) = e^x$ es el logaritmo neperiano $x = f^{-1}(y) = \ln y$, de modo que, aplicando el teorema anterior, la función derivada del logaritmo es

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Ejemplo 7.9. Si $n \in \mathbb{N}$ es par, la función $f(x) = x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ es inyectiva y derivable, con $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Por tanto, la función $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ es derivable en $\mathbb{R}^+$ y $\forall y \in \mathbb{R}^+$,

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{y})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si $n \in \mathbb{N}$ es impar, la función $f(x) = x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$ es inyectiva y derivable, con $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ $\forall x \neq 0$. Por tanto, la función $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ es derivable en $\mathbb{R}\ \{0\}$ y, al igual que antes, $\forall y \in \mathbb{R}^+$,

$$
(f^{-1})'(y) = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.
$$

7.5 Derivadas implícitas

Hasta hora siempre hemos trabajado con funciones de la forma $y = f(x)$ donde la variable y depende de la variable x según la función $f(x)$. Esta representación se conoce como explícita, por que la variable dependiente y aparece despejada en el lado izquierdo de la igualdad. Sin embargo, como ya se vió en la Definición 1.27, una una función real de variable real es una relación formada por pares $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de modo que también se puede representar de manera intensiva mediante una ecuación $F(x, y) = 0$, que cumplen los puntos de la función y solo ellos.

Ejemplo 7.10. La función $y = x^2$ también se puede expresar implícitamente mediante la ecuación $y - x^2 = 0$.

> Precaución
>
> El problema de la representación implícita es que no toda ecuación en x e y define una función. Por ejemplo, la ecuación $y^2 - x = 0$ no define una función, ya que si se despeja y de la ecuación se obtiene $y = \pm\sqrt{x}$, que no es una función ya que para cualquier valor de $x > 0$, y puede tomar dos valores, lo cual no está permitido en una función.

Dada una ecuación $F(x, y) = 0$, que define implícitamente y como función de x, si y es derivable en un punto (x_0, y_0), se puede calcular la derivada mediante el siguiente procedimiento:

1. Calcular la derivada de las expresiones de ambos lados de la ecuación. $F'(x, y) = 0$. En el cálculo de estas derivadas hay que tener en cuenta que y es una función que depende de x y aplicar la regla de la cadena para derivarla.

2. Reescribir la ecuación de manera que los términos donde aparezca y' queden a un lado de la ecuación y el resto al otro.
3. Sacar y' factor común en el lado de la ecuación donde aparezca.
4. Resolver la ecuación para y'.
5. Sustituir $x = x_0$, $y = y_0$.

Ejemplo 7.11. Dada la ecuación $e^y - x^2 = 0$ que define a y como función implícita de x, veamos cómo calcular su derivada en el punto $(1, 0)$ implícitamente

$$(e^y - x^2)' = 0' \Rightarrow e^y y' - 2x = 0 \Rightarrow e^y y' = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{e^y}.$$

Sustituyendo $x = 1$ e $y = 0$, se tiene $y'(1) = \frac{2\cdot 1}{e^0} = 2$.

En este caso, es posible obtener la representación explícita de la función, ya que $e^y - x^2 = 0 \Rightarrow e^y = x^2 \Rightarrow y = \ln(x^2) = 2\ln(x)$. Si calculamos su derivada explícitamente, se tiene $y' = \frac{2}{x}$, y para $x = 1$ se tiene $y'(1) = \frac{2}{1} = 2$, que coincide con el resultado anterior.

Aún cuando la ecuación $F(x, y) = 0$ no defina implícitamente a y como función de x, es posible utiliza el procedimiento anterior para estudiar la tasa de variación instantánea de y con respecto a x en un punto (x_0, y_0) que cumpla la ecuación.

Ejemplo 7.12. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 1$ no define a y como función explícita de x, ya que para $x = 0$ se obtienen dos posibles valores de y, $0^2 - 0 \cdot y + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. No obstante, en el punto $(0, 1)$, se puede calcular la tasa de variación instantánea de y con respecto a x,

$$\begin{gathered}(x^2 - xy + y^2)' = 1' \Rightarrow (x^2)' - (xy)' + (y^2)' = 0 \\ \Rightarrow 2x - (1 \cdot y + xy') + 2yy' = 0 \Rightarrow 2x - y - xy' + 2yy' = 0 \\ \Rightarrow y'(-x + 2y) = -2x + y \Rightarrow y' = \frac{-2x + y}{-x + 2y},\end{gathered}$$

y sustituyendo $x = 0$, $y = 1$ se tiene $y'(0) = \frac{-2\cdot 0 + 1}{-0 + 2\cdot 1} = \frac{1}{2}$.

Si dibujamos la gráfica de los puntos que cumplen la ecuación, se puede comprobar que la recta tangente a la gráfica en el punto $(0, 1)$ tiene pendiente $1/2$.

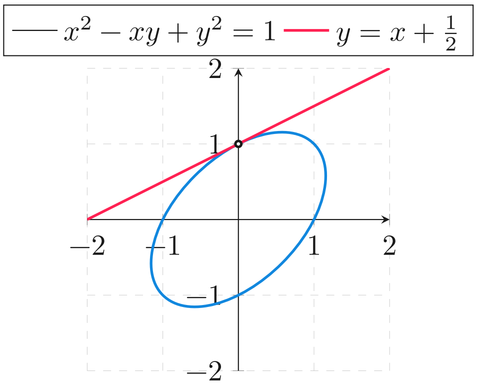

Figura 7.4: Recta tangente a la curva implícita $x^2 - xy + y^2 = 1$ en el punto $(0, 1)$.

7.6 Teorema del valor medio y aplicaciones

Teorema 7.4 (Extremo interior)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ con un extremo relativo en un punto interior $a \in I$, si f es diferenciable en a, entonces $f'(a) = 0$.*

Demostración

Demostración. Supongamos que f tiene un máximo relativo en $a \in I$. Por ser a un punto interior de I, existe un $\delta > 0$ tal que el entorno $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ y $f(x) < f(a)$ $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$.
Supongamos ahora que $f'(a) > 0$. Como $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe un $0 < \delta' < \delta$ tal que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ $\forall x \in (a - \delta', a + \delta') \ \{a\}$. Por tanto, si $x \in (a, a + \delta')$, $f(x) - f(a) > 0$ de donde se deduce que $f(x) > f(a)$ lo que contradice que f tenga un máximo relativo en a. Así que no puede ser $f'(c) > 0$.
Del mismo modo se puede probar que no puede ser $f'(a) < 0$. Por lo que necesariamente tiene que ser $f'(a) = 0$.
Si f tiene un mínimo relativo en a, la demostración es análoga.

□

Precaución

El resultado anterior no es cierto si el punto a no es interior de I. Para verlo, basta considerar $f(x) = x$ $\forall x \in [0, 1]$. Se observa que f tiene un máximo relativo en 1, pero $f'(1) \neq 0$.

Corolario 7.2. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ con un extremo relativo en un punto $a \in I$, entonces $f'(a)$ no existe o $f'(a) = 0$.*

Ejemplo 7.13. La función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo relativo en 0 que es un punto interior de $\mathbb{R}$. Sin embargo, $f'(0)$ no existe.

Definición 7.8 (Punto crítico)**.** Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que a es un *punto crítico* o *punto singular* de f, si $f'(a) = 0$.

Gráficamente, los puntos críticos son puntos donde la tangente a la gráfica de la función es horizontal.

Como veremos más adelante, los puntos críticos juegan un papel clave en la determinación de los extremos relativos de una función.

Teorema 7.5 (Rolle)**.** *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), si $f(a) = f(b)$, entonces f tiene al menos un punto crítico en (a, b), es decir, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, por el Teorema 6.10 f alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$. Si existe $c \in (a, b)$ tal que f alcanza el máximo o el mínimo en c, por el teorema anterior se tiene $f'(c) = 0$. En caso contrario, si no existe $c \in (a, b)$ tal que f alcanza el máximo o el mínimo en c, entonces f alcanza el máximo o el mínimo en los extremos del intervalo, pero como $f(a) = f(b)$, se deduce que que f es constante en $[a, b]$ y, por tanto, $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$.

□

Teorema 7.6 (Valor medio)**.** *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

i Demostración

Demostración. Sea $g(x)$ la recta secante a f en los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Entonces $g(x) = f(a) + \text{TVM}(f, [a, b])(x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Si tomamos la función que mide la distancia entre f y g, es decir, $\forall x \in [a, b]$

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

h es continua en $[a, b]$ por ser la diferencia de dos funciones continuas en ese intervalo, también es derivable en (a, b) al ser f y g derivables en el intervalo. Además

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0, \\ h(b) &= f(a) - f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Como

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \forall x \in (a, b),$$

en particular se tiene

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

7.6.1 Estudio del crecimiento de una función

La principal aplicación de la derivada es el estudio del crecimiento de una función mediante el signo de la derivada.

Teorema 7.7 (Signo de la derivada)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en I, entonces:*

a. f es creciente en I si y sólo si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
b. f es decreciente en I si y sólo si $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.

Demostración

Demostración. Probaremos solo el primer apartado, ya que el segundo se prueba de forma análoga.
Supongamos que f es creciente en I y sea $a \in I$. Si $x \in I$ y $x > a$, por ser f creciente, $f(x) > f(a)$, por lo que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Y si $x < a$, $f(x) < f(a)$, por lo que también se tiene $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Así pues, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.
Para ver el otro sentido de la implicación, supongamos que $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, y sean $a, b \in I$ con $a < b$. Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[a, b]$, se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$, y como $b - a > 0$, se tiene que $f(b) - f(a) > 0$ por lo que $f(b) > f(a)$ y, por tanto, f es creciente en I.

$\square$

Ejemplo 7.14. La función $f(x) = x^3$ es creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq 0$.

Advertencia

Una función puede ser creciente o decreciente en un intervalo y no tener derivada.

Ejemplo 7.15. Consideremos la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.

7.6.2 Determinación de los extremos relativos de una función

Como consecuencia del resultado anterior, la derivada también sirve para determinar los extremos relativos de una función.

Teorema 7.8 (Criterio de la primera derivada)**.** *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, c) \cup (c, b)$ para un punto $c \in (a, b)$.*

a. Si existe un $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subseteq [a, b]$ y $f'(x) \geq 0$ y $\forall x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (c, c + \delta)$, entonces f tiene un máximo relativo *en c.*
b. Si existe un $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subseteq [a, b]$ y $f'(x) \leq 0$ y $\forall x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (c, c + \delta)$, entonces f tiene un mínimo relativo *en c.*

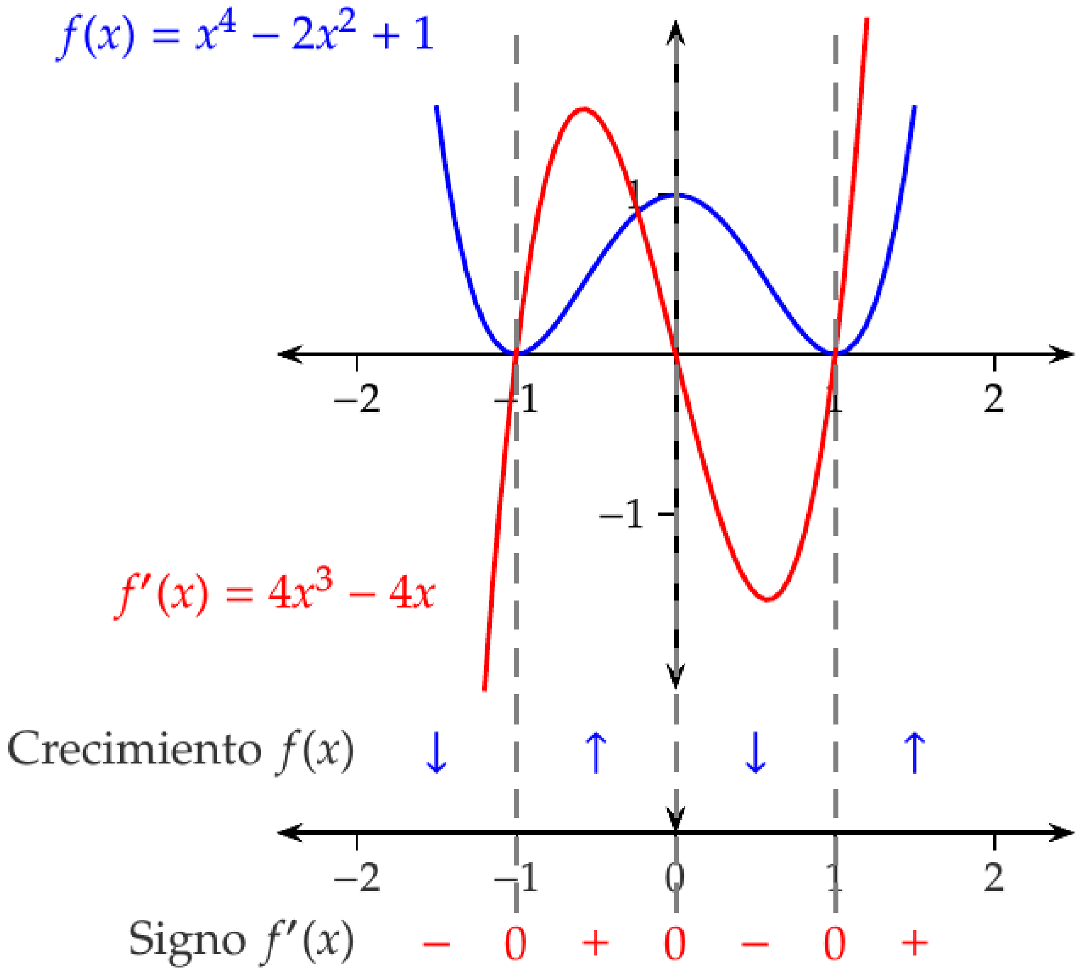

Figura 7.5: Estudio del crecimiento de una función.

Demostración

Demostración. Demostraremos solo el caso de un máximo, ya que el otro caso es análogo. Para ver que f tiene un máximo local en c basta con probar que si $x \in (c-\delta, c+\delta)$ entonces $f(x) \leq f(c)$.
Si $x \in (c-\delta, c)$ entonces $f'(x) \geq 0$. Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x, c]$ se tiene que existe $u \in (x, c)$ tal que $f'(u) = \frac{f(c)-f(x)}{c-x} \geq 0$, y como $c - x > 0$ se concluye que $f(c) - f(x) \geq 0$, y por tanto, $f(x) \leq f(c)$.
Y si Si $x \in (c, c+\delta)$ entonces $f'(x) \leq 0$. Aplicando de nuevo el teorema del valor medio a f en el intervalo $[c, x]$ se tiene que existe $v \in (c, x)$ tal que $f'(v) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, y como $x - c > 0$ se concluye que $f(x) - f(c) \leq 0$, y por tanto, $f(x) \leq f(c)$.

$\square$

Ejemplo 7.16. Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.

Precaución

El recíproco de las implicaciones del teorema anterior no tiene por qué ser cierto. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

tiene un mínimo relativo y absoluto en $x = 0$, pero su derivada toma valores positivos y negativos en cualquier entorno de 0.

Teorema 7.9 (Darboux)**.** *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si f es diferenciable en $[a, b]$ y $f'(a) < k < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = k$.*

Demostración

Demostración. Definimos $g(x) = k(x-a) - f(x)\ \forall x \in [a, b]$. g es diferenciable en $[a, b]$ al serlo f y $g'(x) = k - f'(x)\ \forall x \in [a, b]$. Por tanto, g es continua en $[a, b]$, y entonces tiene un máximo y un mínimo relativos en $[a, b]$.
Por otro lado, $g'(a) = k - f'(a) > 0$, de manera que g no tiene un máximo relativo en a, y $g'(b) = k - f'(b) < 0$, de manera que g tampoco tiene un máximo relativo en

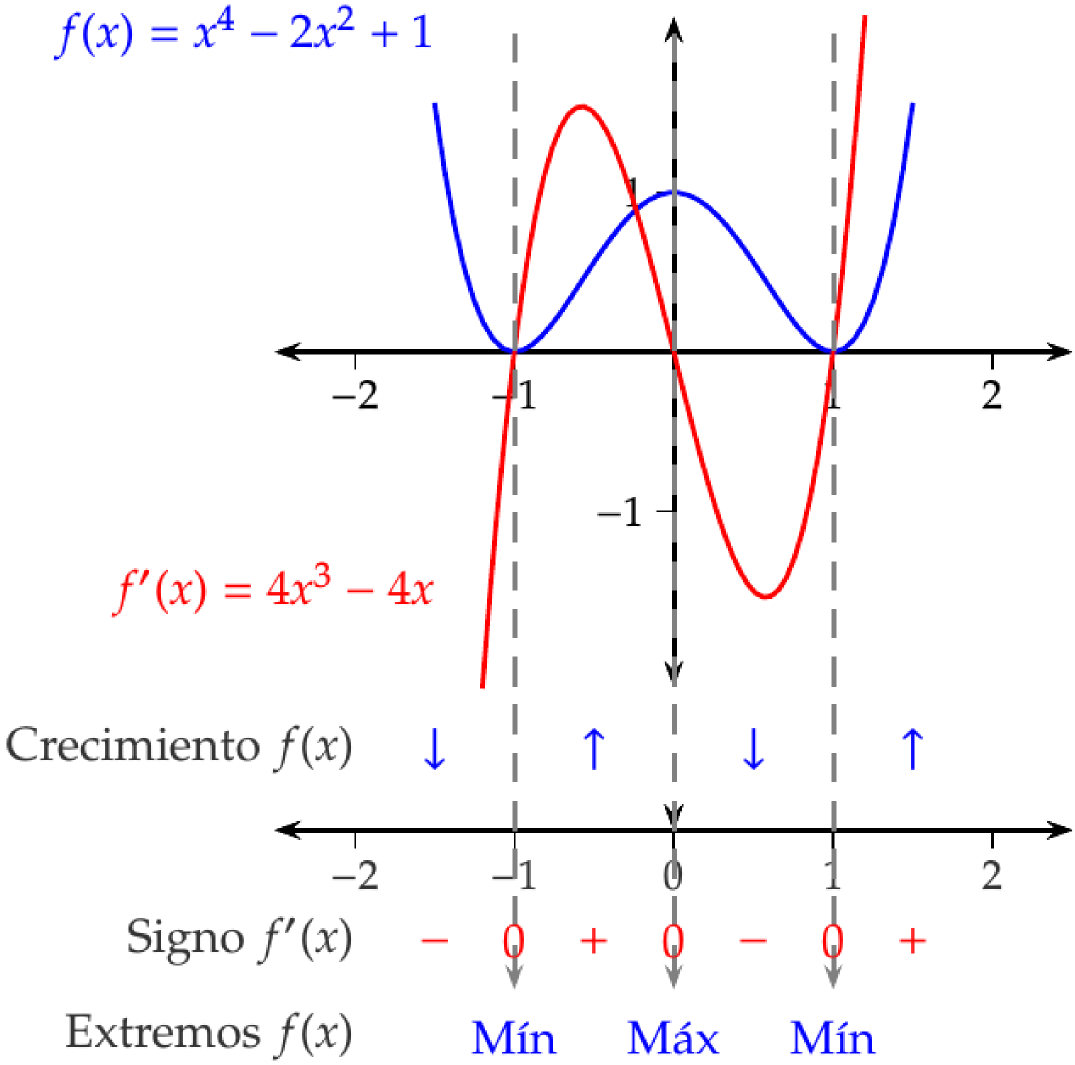

Figura 7.6: Estudio de los extremos de una función

b. Por tanto, g alcanza el máximo relativo en un punto $c \in (a, b)$, y por el teorema del extremo interior, $g'(c) = 0$, de donde se deduce que $k - f(c) = 0$, y $f'(c) = k$. $\square$

7.6.3 Determinación de los extremos absolutos de una función

Ya se vió, por el Teorema 6.10, que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza el máximo y el mínimo absolutos en ese intervalo. Así pues, para encontrar los extremos absolutos de una función f derivable en $[a, b]$, basta con seguir el siguiente procedimiento:

1. Calcular los puntos críticos de f.
2. Calcular los valores de f en los puntos críticos.
3. Calcular el valor de f en los extremos del intervalo, a y b.
4. El máximo absoluto será el mayor de los valores obtenidos en los pasos 2 y 3, y el mínimo absoluto será el menor de los valores obtenidos en esos mismos pasos.

Ejemplo 7.17. Veamos cuáles son los extremos absolutos de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 2]$. Seguiremos el procedimiento anterior para la determinación de los extremos absolutos.

1. En el Ejemplo 7.16 se vió que f tenía tres puntos críticos en -1, 0 y 1. El punto crítico en -1 se puede descartar al no pertenecer al intervalo $[0, 2]$.
2. El valor de la función en los puntos críticos del intervalo $[0, 2]$ son $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$.
3. El valor de la función en los extremos del intervalo $[0, 2]$ es $f(0) = 1$ y $f(2) = 9$.
4. El máximo absoluto de f en $[a, b]$ es $\max\{f(0), f(1), f(2)\} = \max\{1, 0, 9\} = 9$ y el mínimo absoluto es $\min\{f(0), f(1), f(2)\} = \max\{1, 0, 9\} = 0$.

7.6.4 Otras aplicaciones del teorema del valor medio

Además del estudio del crecimiento de una función y de la determinación de sus extremos relativos, el teorema del valor medio tiene otras muchas aplicaciones como las que se enumeran a continuación.

7.6.4.1 Localización de raíces

Si una función g es la derivada de otra función f, el teorema de Rolle nos asegura que entre dos raíces cualesquiera de f existe al menos una raíz de g.

Ejemplo 7.18. La función $g(x) = \cos(x)$ es la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, de manera que, entre dos raíces cualesquiera de $\operatorname{sen}(x)$ existe al menos una raíz de $\cos(x)$.

7.6.4.2 Desigualdades

El teorema del valor medio se puede usar en la obtención de desigualdades tales como $-x \leq \operatorname{sen}(x) \leq x$, donde la igualdad se da para $x = 0$ y la desigualdad se cumple para $x > 0$.

Ejemplo 7.19. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ cuya derivada es $f'(x) = \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[0, x]$ para $x > 0$, se tiene que $\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(0)}{x-0} = \cos(c)$ para algún $c \in (0, x)$. Como $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $-1 \leq \cos(x) \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene $\operatorname{sen}(x) = \cos(c)x$ para algún $c \in (0, x)$, de lo que se deduce que $-x \leq \operatorname{sen}(x) \leq x$.

7.6.4.3 Estimación de errores

Otra interesante aplicación es el cálculo aproximado del valor de una función en un punto $c \in (a, b)$, si se conoce el valor de la función en a y b.

Ejemplo 7.20. Veamos cómo calcular $\sqrt{105}$ de manera aproximada. Para ello tomamos la función $f(x) = \sqrt{x}$ que es derivable en todo $\mathbb{R}$ con derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[100, 105]$ se tiene que $\frac{\sqrt{105}-\sqrt{100}}{105-100} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ para algún $c \in (100, 105)$.

Por otro lado, como f es creciente, se tiene que $10 = \sqrt{100} < \sqrt{c} < \sqrt{121} = 11$. Así pues, se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{105}-\sqrt{100}}{105-100} = \frac{1}{2\sqrt{c}} &\Rightarrow \sqrt{105} - 10 = \frac{5}{2\sqrt{c}} \\
&\Rightarrow \frac{5}{2 \cdot 11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2 \cdot 10} \\
&\Rightarrow 10.22 < \sqrt{105} < 10.25.
\end{aligned}
$$

7.7 Estudio de la concavidad de una función

Como se ha visto, la derivada de una función puede utilizarse para estudiar el crecimiento de la función en un intervalo, de manera que si la función es dos veces derivable en el intervalo, es decir, si existe la derivada de la derivada de la función, la segunda derivada puede utilizarse para estudiar el crecimiento de la primera, y esto permite estudiar la concavidad de la función.

Teorema 7.10 (Criterio de la segunda derivada)**.** *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto y una función $f : I \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en I. Entonces,*

1. *f es cóncava hacia arriba en I, si y sólo si, $f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$.*
2. *f es cóncava hacia abajo en I, si y sólo si, $f''(x) \leq 0\ \forall x \in I$.*

Demostración

Demostración. Daremos un prueba informal del primer apartado, ya que el segundo se prueba de manera análoga por simetría, ya que si f es cóncava hacia abajo, $-f$ es cóncava hacia arriba.
Si f es cóncava hacia arriba en I, para cualquier $a, b \in I$ con $a < b$, la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$ es menor que la pendiente de la recta tangente en $(b, f(b))$, por lo que las pendientes crecen. Como la pendiente de la recta tangente es la derivada, se concluye que f' es creciente en I y, por tanto, $f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$. □

Ejemplo 7.21. La función $f(x) = x^2$ tiene segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$ y por tanto es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

Advertencia

Una función puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo en un intervalo y no tener derivada.

Ejemplo 7.22. Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 4$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.

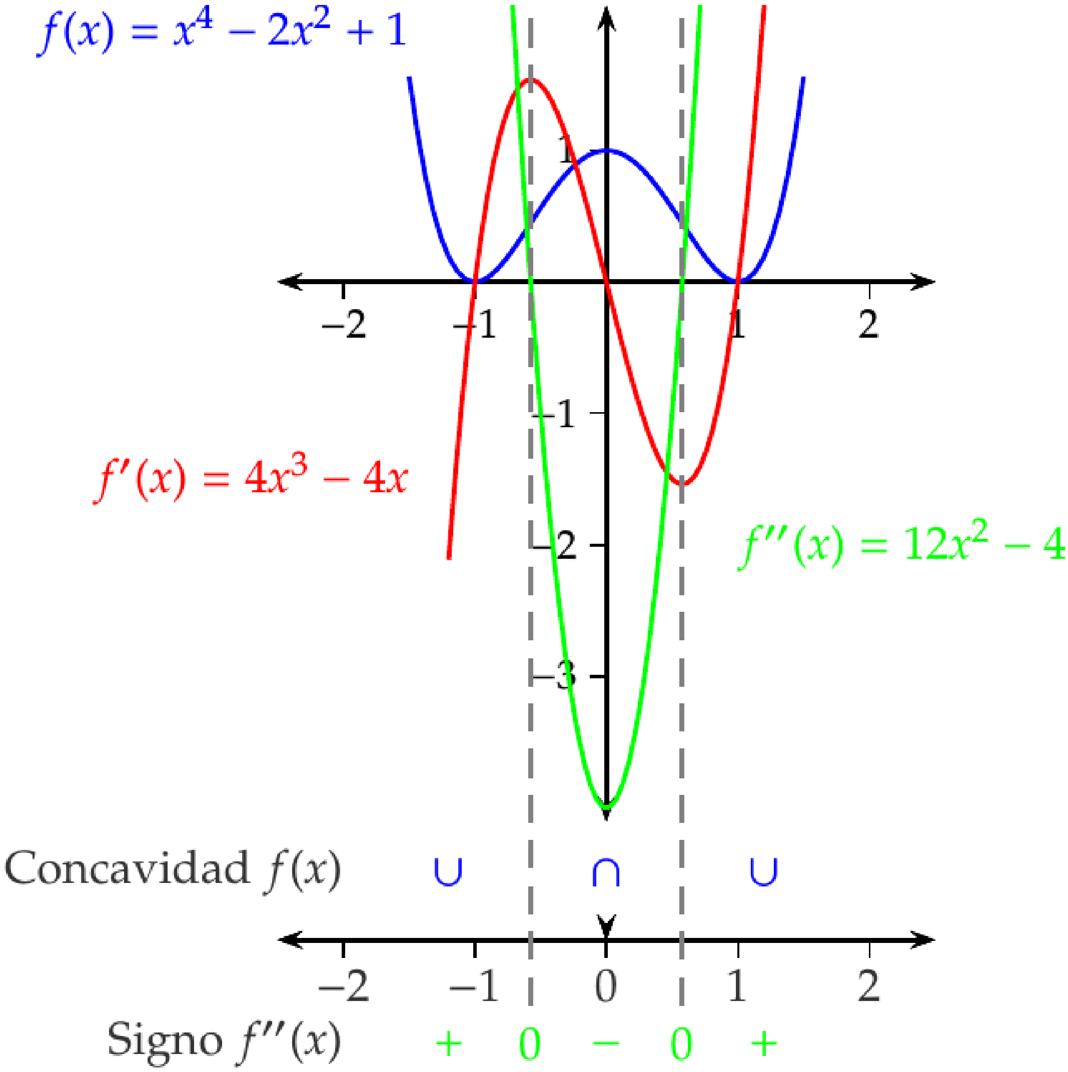

Figura 7.7: Estudio de la concavidad de una función.

7.8 Interpretación cinemática de la derivada

7.8.1 Movimiento rectilíneo

Cuando una función $f(t)$ describe la posición de un objeto móvil sobre la recta real en el instante t, tomando como referencia el origen de coordenadas O y el vector unitario $\mathbf{i} = (1)$, se puede representar la posición P del móvil en cada instante t mediante un vector $\vec{OP} = x\mathbf{i}$ donde $x = f(t)$.

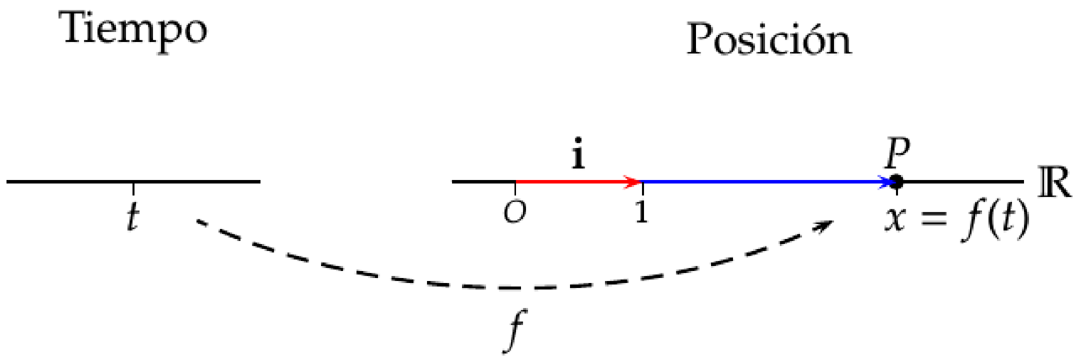

Figura 7.8: Interpretación cinemática del movimiento rectilíneo.

En este contexto, si se toman los instantes $t = t_0$ y $t = t_0 + \Delta t$, ambos del dominio I de f, el vector

$$\mathbf{v}_m = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

que se conoce como *velocidad media* del espacio recorrido por f entre los instantes t_0 y $t_0 + \Delta t$.

Ejemplo 7.23. Un vehículo realiza un viaje de Madrid a Barcelona. Sea $f(t)$ la función que da la posición el vehículo en cada instante t. Si el vehículo parte de Madrid (km 0) a las 8 y llega a Barcelona (km 600) a las 14 horas, entonces la velocidad media del vehículo en el trayecto es

$$\mathbf{v}_m = \frac{f(14) - f(8)}{14 - 8} = \frac{600 - 0}{6} = 100 \text{ km/h}.$$

Siguiendo en este mismo contexto del movimiento rectilíneo, la derivada de f en el instante $t = t_0$ es el vector

$$\mathbf{v} = f'(t_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

que se conoce, siempre que exista el límite, como *velocidad instantánea* o simplemente la *velocidad* del espacio recorrido por f en el instante t_0.

Es decir, la derivada de la posición respecto del tiempo, es un campo de vectores que recibe el nombre de *velocidad a lo largo de la trayectoria f*.

Siguiendo con el ejemplo anterior, lo que marca el velocímetro en un determinado instante sería el módulo del vector velocidad en ese instante.

> **i Nota**
>
> También tiene sentido pensar en $f(t)$ como una función que mide otras magnitudes como por ejemplo la temperatura de un cuerpo, la concentración de un gas, la cantidad de un compuesto en una reacción química o el precio de las acciones de una compañía en cada instante t.

7.8.2 Generalización al movimiento curvilíneo

La derivada como velocidad a lo largo de una trayectoria en la recta real puede generalizarse a trayectorias en cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Para el caso del plano real $\mathbb{R}^2$, si $f(t)$ describe la posición de un objeto móvil en el plano en el instante t, tomando como referencia el origen de coordenadas O y los vectores coordenados $\{\mathbf{i} = (1,0), \mathbf{j} = (0,1)\}$, se puede representar la posición P del móvil en cada instante t mediante un vector $\vec{OP} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ cuyas coordenadas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

se conocen como *funciones coordenadas* de f y se escribe $f(t) = (x(t), y(t))$.

7.8.2.1 Velocidad en una trayectoria curvilínea en el plano

En este contexto de una trayectoria $f(t) = (x(t), y(t))$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, para un instante $t = t_0$, si existe el vector

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

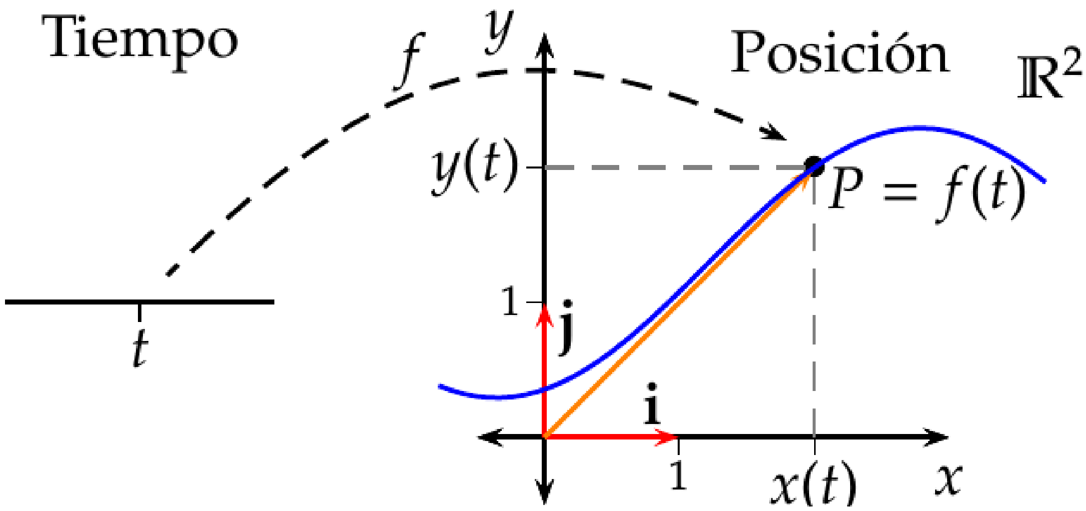

Figura 7.9: Interpretación cinemática del movimiento curvilineo.

entonces f es derivable en el instante $t = t_0$ y el vector $\mathbf{v} = f'(t_0)$ se conoce como *velocidad* de f en ese instante.

Como $f(t) = (x(t), y(t))$,

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - (x(t_0), y(t_0))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) = \\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) \\
&= (x'(t_0), y'(t_0)).
\end{aligned}
$$

luego

$$\mathbf{v} = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j}.$$

Ejemplo 7.24. Dada la trayectoria $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, cuya imagen es la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1, sus funciones coordenadas son $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, y su velocidad es

$$\mathbf{v} = f'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t).$$

En el instante $t = \pi/4$, el móvil estará en la posición $f(\pi/4) = (\cos(\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/4)) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y se moverá con una velocidad $\mathbf{v} = f'(\pi/4) = (-\operatorname{sen}(\pi/4), \cos(\pi/4)) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

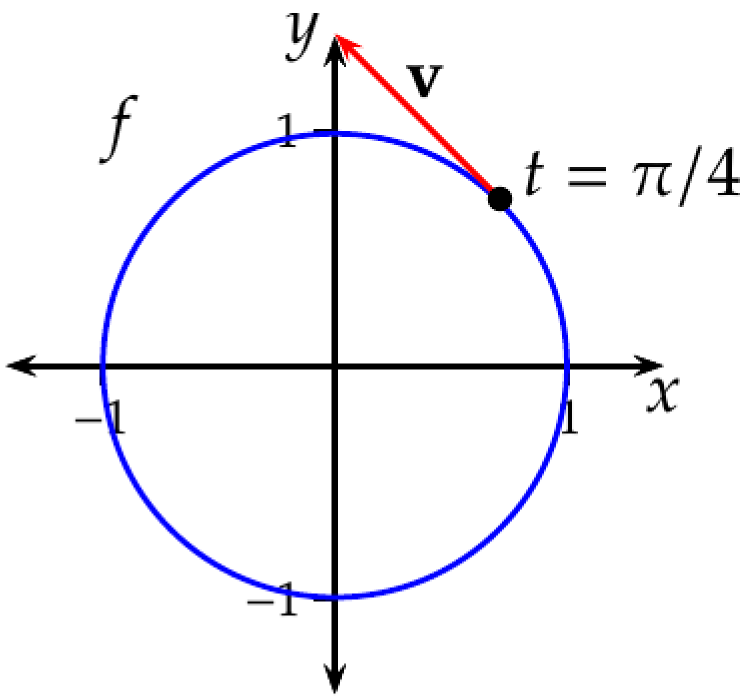

Figura 7.10: Trayectoria de la circunferencia.

Obsérvese que el módulo del vector velocidad siempre será 1 ya que $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1$.

7.9 Recta tangente a una trayectoria

7.9.1 Recta tangente a una trayectoria en el plano

Los vectores paralelos a la velocidad $\mathbf{v}$ se denominan *vectores tangentes* a la trayectoria f en el instante $t = t_0$, y la recta que pasa por $P = f(t_0)$ dirigida por $\mathbf{v}$ es la recta tangente a f cuando $t = t_0$.

Definición 7.9 (Recta tangente a una trayectoria)**.** Dada una trayectoria f sobre el plano real $\mathbb{R}^2$, se llama *recta tangente* a f en $t = t_0$ a la recta de ecuación

$$\begin{aligned} l : (x, y) &= f(t_0) + tf'(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) + t(x'(t_0), y'(t_0)) \\ &= (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0)). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.25. Se ha visto que para la trayectoria $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, cuya imagen es la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1, en el instante $t = \pi/4$ la posición del móvil era $f(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y su velocidad $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, de modo que la recta tangente a f en ese instante es

$$\begin{aligned} l : X = f(\pi/2) + t\mathbf{v} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

De la ecuación vectorial de la recta tangente a f para $t = t_0$, se obtiene que sus funciones cartesianas son

$$s \begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

y despejando t en ambas ecuaciones e igualando se llega a la ecuación cartesiana de la recta tangente

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)},$$

si $x'(t_0) \neq 0$ e $y'(t_0) \neq 0$, y de ahí a la ecuación en la forma punto-pendiente

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Partiendo de la ecuación vectorial de la tangente del ejemplo anterior $l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, su ecuación cartesiana es

$$
\begin{aligned}
\frac{x-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \frac{y-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} &\Rightarrow \\
y-\sqrt{2}/2 = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x-\sqrt{2}/2) &\Rightarrow \\
y = -x+\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

7.9.2 Recta normal a una trayectoria en el plano

Se ha visto que la recta tangente a una trayectoria f cuando $t = t_0$ es la recta que pasa por el punto el punto $P = f(t_0)$ dirigida por el vector velocidad $\mathbf{v} = f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. Si en lugar de tomar ese vector se toma como vector director el vector $\mathbf{w} = (y'(t_0), -x'(t_0))$, que es ortogonal a $\mathbf{v}$, se obtiene otra recta que se conoce como *recta normal* a la trayectoria f cuanto $t = t_0$.

Definición 7.10 (Recta normal a una trayectoria)**.** Dada una trayectoria f sobre el plano real $\mathbb{R}^2$, se llama *recta normal* a f en $t = t_0$ a la recta de ecuación

$$
\begin{aligned}
l : (x, y) &= (x(t_0), y(t_0)) + t(y'(t_0), -x'(t_0)) = \\
&= (x(t_0) + ty'(t_0), y(t_0) - tx'(t_0)).
\end{aligned}
$$

Su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - x(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{-x'(t_0)},$$

y su ecuación en la forma punto pendiente

$$y - y(t_0) = \frac{-x'(t_0)}{y'(t_0)}(x - x(t_0)).$$

> **!** Importante
>
> La recta normal es perpendicular a la recta tangente ya que sus vectores directores son ortogonales.

Ejemplo 7.26. Siguiendo con el ejemplo de la trayectoria $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, la recta normal en el instante $t = \pi/4$ es

$$l : (x, y) = (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)) + t(\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)) =$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

y su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow y - \sqrt{2}/2 = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x - \sqrt{2}/2) \Rightarrow y = x.$$

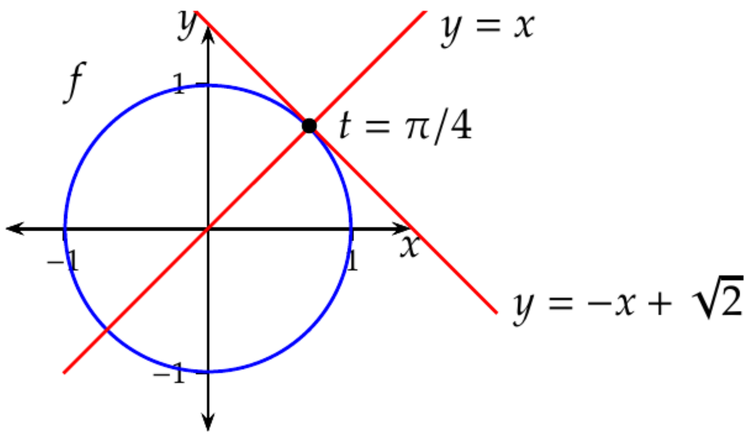

Figura 7.11: Tangente y normal a la trayectoria de una circunferencia.

7.9.3 Rectas tangente y normal a una función

Un caso particular de las recta tangente y normal a una trayectoria son la recta tangente y normal a una función de una variable real. Si se tiene la función $y = f(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, una trayectoria que traza la gráfica de f es $g(t) = (t, f(t)) \quad t \in I$, y su velocidad es $g'(t) = (1, f'(t))$, de modo que la recta tangente para $t = a$ es

$$\frac{x - a}{1} = \frac{y - f(a)}{f'(a)} \Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

y la recta normal es

$$\frac{x-a}{f'(a)} = \frac{y-f(a)}{-1} \Rightarrow y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a),$$

Ejemplo 7.27. Dada la función $y = f(x) = x^2$, la trayectoria que dibuja la gráfica de esta función es $g(t) = (t, t^2)$ y su velocidad es $g'(t) = (1, 2t)$, de modo que en el punto $(1, 1)$, que se alcanza en el instante $t = 1$, la recta tangente es

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 1,$$

y la recta normal es

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2}.$$

7.9.4 Recta tangente a una trayectoria en el espacio

El concepto de recta tangente a una trayectoria en el plano real puede extenderse fácilmente a trayectorias en el espacio real $\mathbb{R}^3$.

Si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, es una trayectoria en el espacio real $\mathbb{R}^3$, entonces el móvil que recorre esta trayectoria en el instante $t = t_0$, ocupará la posición $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ y tendrá una velocidad $\mathbf{v} = f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, de manera que la recta tangente a f en ese instante será

$$\begin{aligned} l : (x, y, z) &= (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) + t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \\ &= (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0), z(t_0) + tz'(t_0)), \end{aligned}$$

cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)},$$

siempre que $x'(t_0) \neq 0$, $y'(t_0) \neq 0$ y $z'(t_0) \neq 0$.

Ejemplo 7.28. Dada la trayectoria del espacio $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el instante $t = \pi/2$, la trayectoria pasará por el punto

$$f(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2), \pi/2) = (0, 1, \pi/2),$$

con una velocidad

$$\mathbf{v} = f'(\pi/2) = (-\operatorname{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2), 1) = (-1, 0, 1),$$

y la tangente en ese punto es

$$l : (x, y, z) = (0, 1, \pi/2) + t(-1, 0, 1) = (-t, 1, t + \pi/2).$$

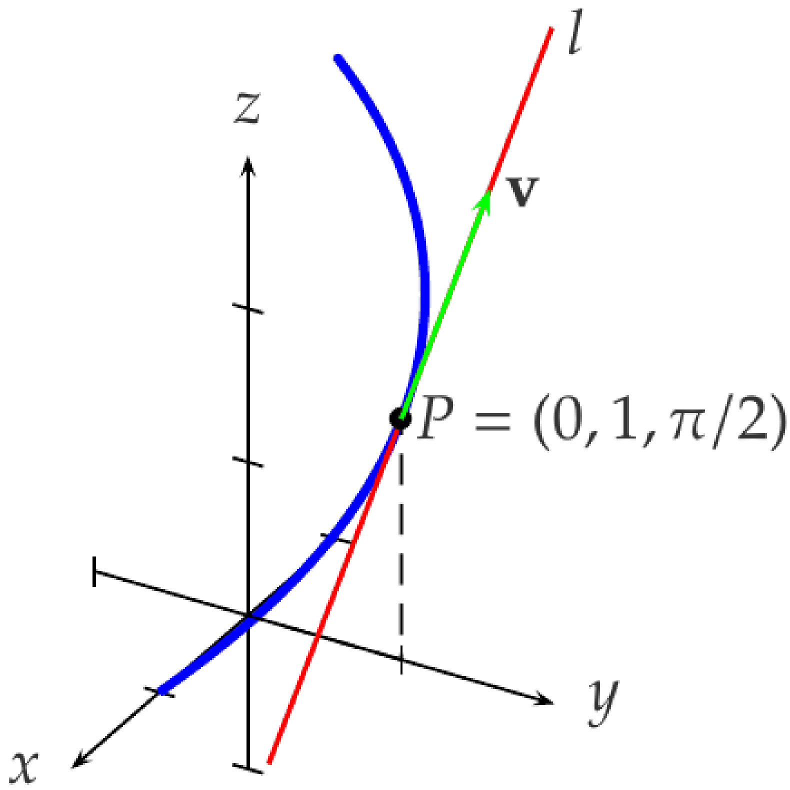

Figura 7.12: Gráfica de la tangente a una trayectoria en el espacio.

Ejemplo interactivo

7.10 Polinomios de Taylor

7.10.1 Aproximación de una función mediante un polinomio

Una aplicación muy útil de la derivada es la aproximación de funciones mediante polinomios.

Los polinomios son funciones sencillas de calcular (mediante sumas y productos), que tienen muy buenas propiedades:

- Están definidos en todos los números reales.
- Son funciones continuas.
- Son derivables hasta cualquier orden y sus derivadas son continuas.

En esta sección veremos cómo aproximar una función $f(x)$ mediante un polinomio $p(x)$ cerca de un valor $x = a$.

7.10.1.1 Aproximación mediante un polinomio de grado 0

Un polinomio de grado 0 tiene ecuación

$$p(x) = c_0,$$

donde c_0 es una constante.

Como el polinomio debe valer lo que la función en el punto a, debe cumplir

$$p(a) = c_0 = f(a).$$

En consecuencia, el polinomio de grado 0 que mejor aproxima a f en un entorno de a es

$$p(x) = f(a).$$

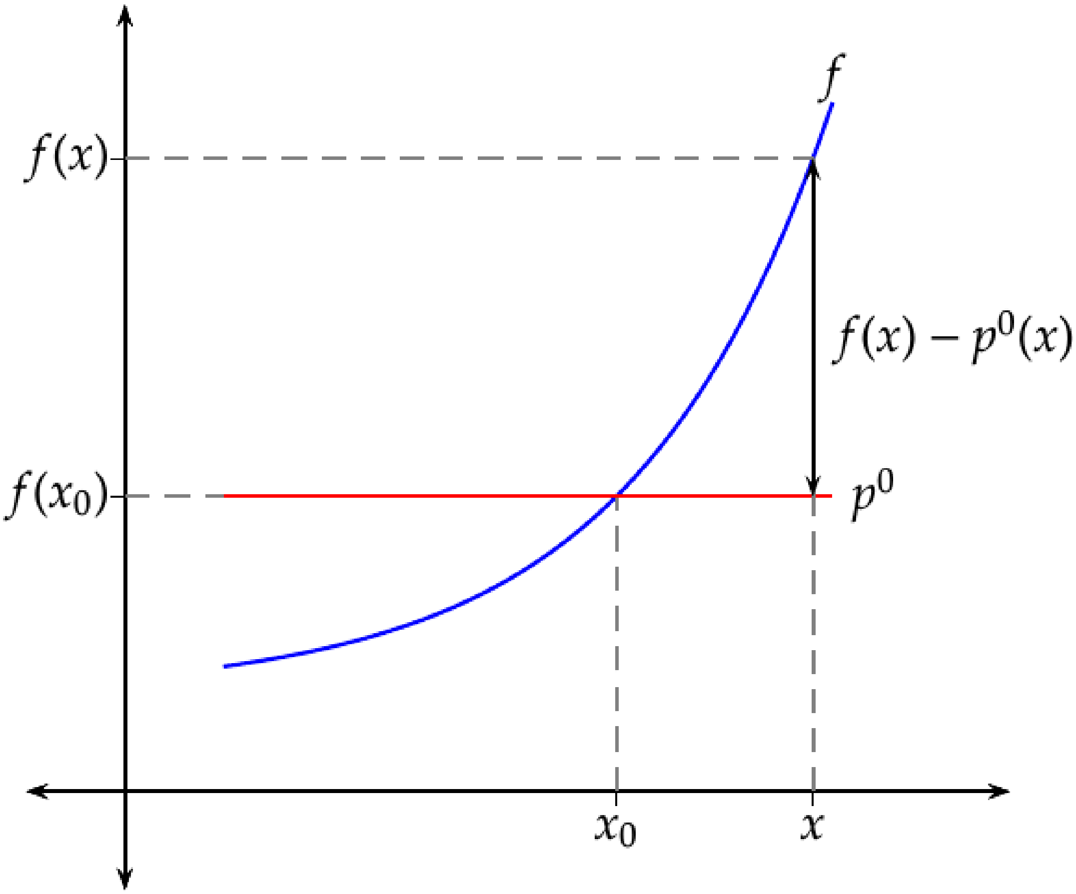

Figura 7.13: Gráfica del polinomio de Taylor de grado 0

7.10.1.2 Aproximación mediante un polinomio de grado 1

Un polinomio de grado 1 es una recta y tiene ecuación

$$p(x) = c_0 + c_1 x,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = c_0 + c_1(x - a).$$

De entre todos los polinomios de grado 1, el que mejor aproxima a f en entorno de a será el que cumpla las dos condiciones siguientes:

- p y f valen lo mismo en a: $p(a) = f(a)$,
- p y f tienen la misma tasa de crecimiento en a: $p'(a) = f'(a)$.

Esta última condición nos asegura que en un entorno de a, p y f tienen aproximadamente la misma tendencia de crecimiento, pero requiere que la función f sea derivable en a.

Imponiendo las condiciones anteriores tenemos

- $p(x) = c_0 + c_1(x - a) \Rightarrow p(a) = c_0 + c_1(a - a) = c_0 = f(a)$,
- $p'(x) = c_1 \Rightarrow p'(a) = c_1 = f'(a)$.

Así pues, el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a f en un entorno de a es

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

que resulta ser la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$.

7.10.1.3 Aproximación mediante un polinomio de grado 2

Un polinomio de grado 2 es una parábola y tiene ecuación

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2.$$

De entre todos los polinomio de grado 2, el que mejor aproxima a f en entorno de a será el que cumpla las tres condiciones siguientes:

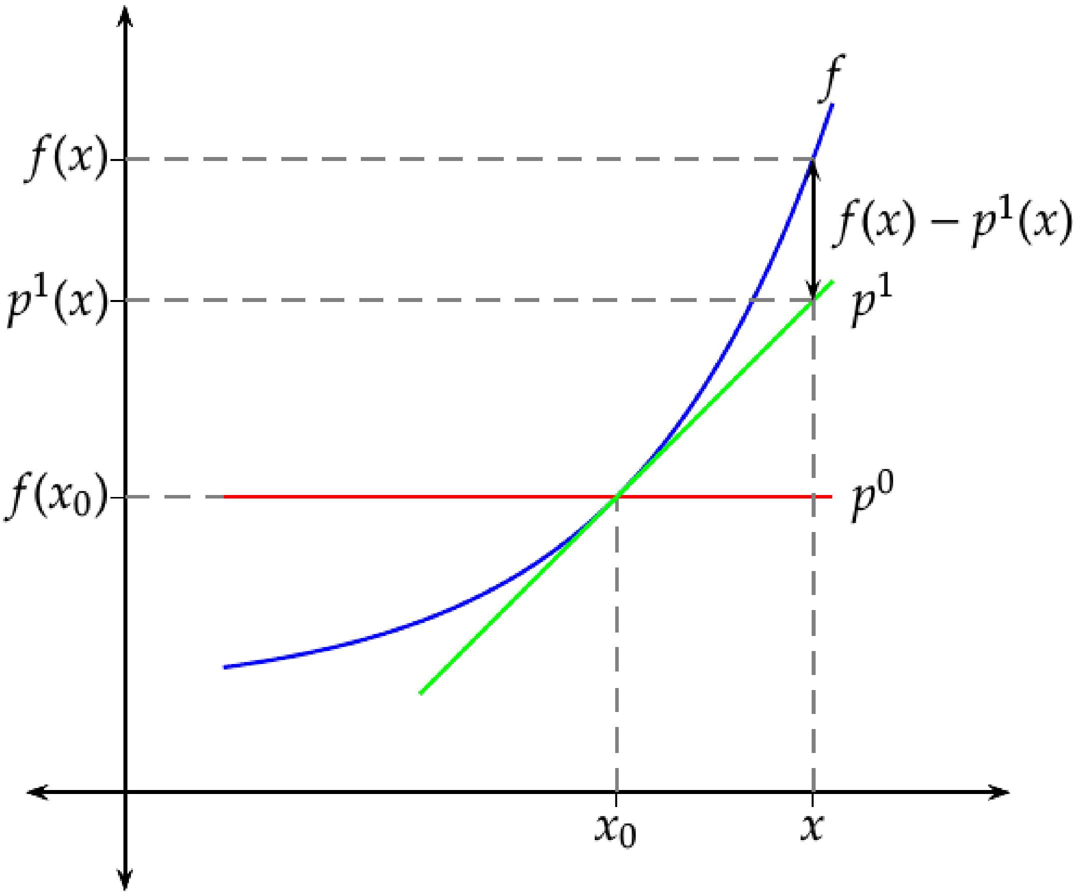

Figura 7.14: Gráfica del polinomio de Taylor de grado 1

- p y f valen lo mismo en a: $p(a) = f(a)$,
- p y f tienen la misma tasa de crecimiento en a: $p'(a) = f'(a)$.
- p y f tienen la misma curvatura en a: $p''(a) = f''(a)$.

Esta última condición requiere que la función f sea dos veces derivable en a.

Imponiendo las condiciones anteriores tenemos

- $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \Rightarrow p(a) = c_0 = f(a)$,
- $p'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) \Rightarrow p'(a) = c_1 + 2c_2(a-a) = c_1 = f'(a)$,
- $p''(x) = 2c_2 \Rightarrow p''(a) = 2c_2 = f''(a) \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

Así pues, el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a f en un entorno de a es

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

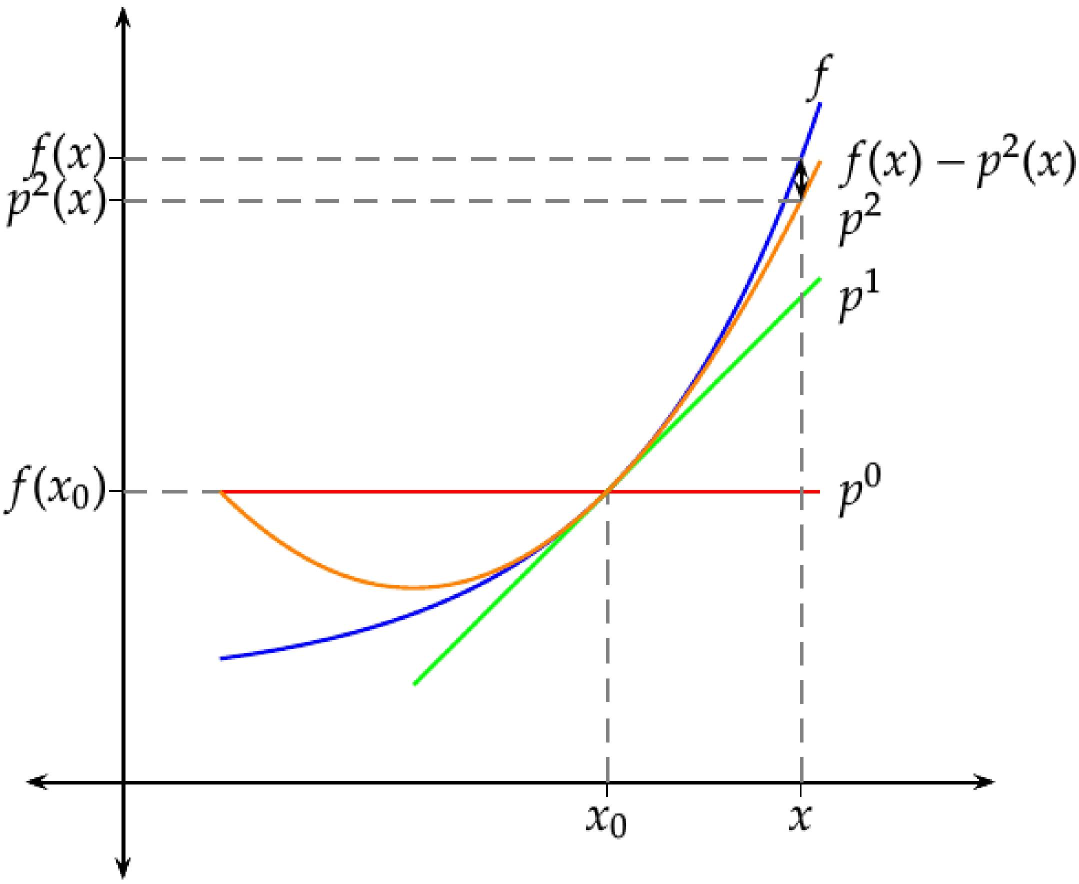

Figura 7.15: Gráfica del polinomio de Taylor de grado 2

7.10.1.4 Aproximación mediante un polinomio de grado n

Un polinomio de grado n tiene ecuación

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

De entre todos los polinomio de grado n, el que mejor aproxima a f en entorno de a será el que cumpla las $n+1$ condiciones siguientes:

- $p(a) = f(a)$,
- $p'(a) = f'(a)$,
- $p''(a) = f''(a)$,
- $\cdots$
- $p^{(n}(a) = f^{(n}(a)$.

Las sucesivas derivadas de p valen

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n,\\
p'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1},\\
p''(x) &= 2c_2 + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},\\
&\vdots\\
p^{(n}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 1c_n = n!c_n.
\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones anteriores se tiene

- $p(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots + c_n(a-a)^n = c_0 = f(a)$,
- $p'(a) = c_1 + 2c_2(a-a) + \cdots + nc_n(a-a)^{n-1} = c_1 = f'(a)$,
- $p''(a) = 2c_2 + \cdots + n(n-1)c_n(a-a)^{n-2} = 2c_2 = f''(a) \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2}$,
- $\cdots$
- $p^{(n}(a) = n!c_n = f^{(n}(a) = c_n = \frac{f^{(n}(a)}{n!}$.

Definición 7.11 (Polinomio de Taylor de orden n para f en el punto a)**.** Dada una función f, n veces derivable en $x=a$, se define el *polinomio de Taylor* de orden n para f en a como

$$
\begin{aligned}
p_{f,a}^n(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n = \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i}(a)}{i!}(x-a)^i,
\end{aligned}
$$

o bien, escribiendo $x=a+h$

$$
\begin{aligned}
p_f^n(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}h^n = \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i}(a)}{i!}h^i.
\end{aligned}
$$

! Importante

El polinomio de Taylor de orden n para f en a es el polinomio de orden n que mejor aproxima a f alrededor de a, ya que es el único que cumple las $n+1$ condiciones anteriores.

Ejemplo 7.29. Vamos a aproximar la función $f(x)=\log x$ en un entorno del punto 1 mediante un polinomio de grado 3.

La ecuación del polinomio de Taylor de orden 3 para f en el punto 1 es

$$
p_{f,1}^3(x) = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.
$$

Calculamos las tres primeras derivadas de f en 1:

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=\log x & f(1)=\log 1=0, \\
f'(x)=1/x & f'(1)=1/1=1, \\
f''(x)=-1/x^2 & f''(1)=-1/1^2=-1, \\
f'''(x)=2/x^3 & f'''(1)=2/1^3=2.
\end{array}
$$

Sustituyendo en la ecuación del polinomio se tiene

$$p_{f,1}^3(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}.$$

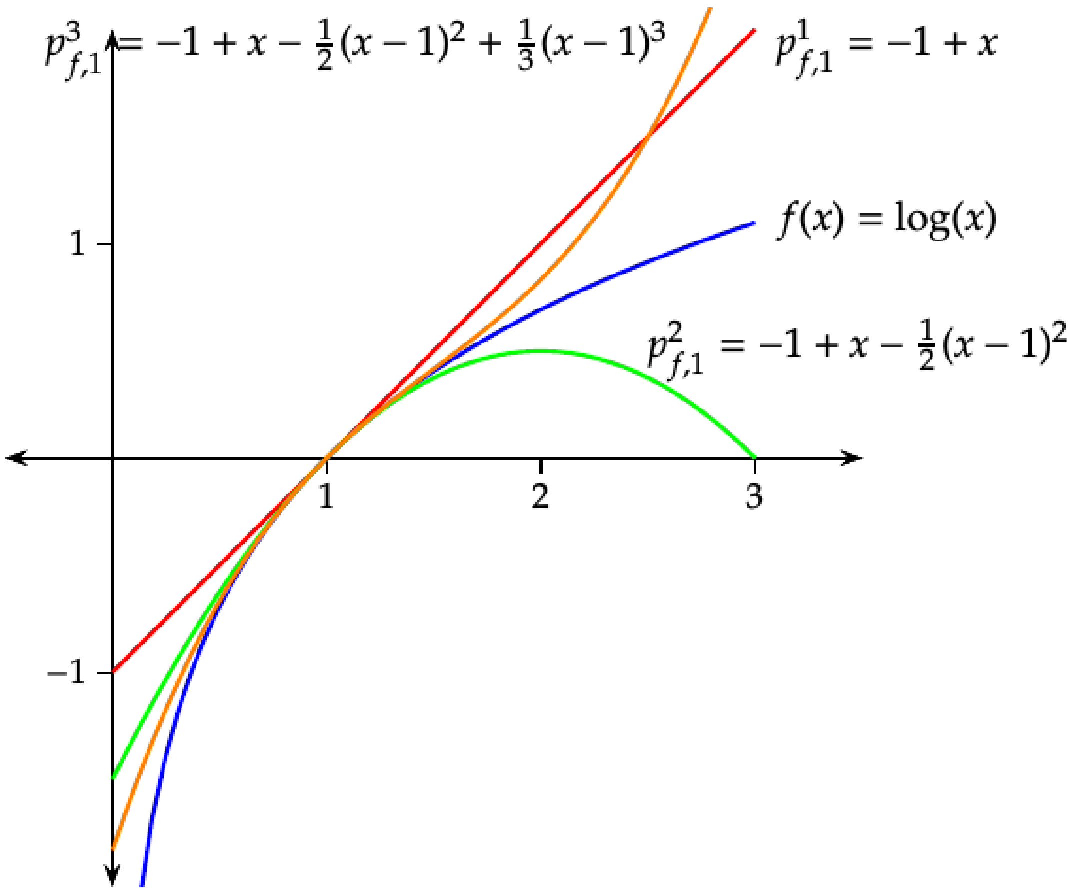

Figura 7.16: Gráfica del polinomio de Taylor del logaritmo

7.10.2 Polinomio de Maclaurin de orden n

La ecuación del polinomio de Taylor se simplifica cuando el punto en torno al cual queremos aproximar es el 0.

Definición 7.12 (Polinomio de Maclaurin de orden n para f)**.** Dada una función f, n veces derivable en 0, se define el *polinomio de Maclaurin* de orden n para f como

$$
\begin{aligned}
p^n_{f,0}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}x^i.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7.30. Vamos a aproximar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en un entorno del punto 0 mediante un polinomio de grado 3.

La ecuación del polinomio de Maclaurin de orden 3 para f es

$$
p^3_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.
$$

Calculamos las tres primeras derivadas de f en 0:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0, \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = \cos 0 = 1, \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0, \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -\cos 0 = -1.
\end{array}
$$

Sustituyendo en la ecuación del polinomio obtenemos

$$
p^3_{f,0}(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.
$$

7.10.3 Polinomios de Maclaurin de funciones elementales

La siguiente tabla recoge los polinomios de Taylor de orden n de algunas funciones elementales habituales.

$f(x)$	$p^n_{f,0}(x)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}$

$f(x)$	$p_{f,0}^n(x)$
$\operatorname{sen}(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} =$
	$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$ si $n = 2k$ o $n = 2k-1$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} =$
	$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$ si $n = 2k$ o $n = 2k+1$
$\operatorname{arctg}(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)} =$
	$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)}$ si $n = 2k$ o $n = 2k-1$

7.10.4 Resto de Taylor

Los polinomios de Taylor permiten calcular el valor aproximado de una función cerca de un valor a, pero siempre se comete un error en dicha aproximación.

Definición 7.13 (Resto de Taylor)**.** Si f es una función para la que existe el su polinomio de Taylor de orden n en a, $p_{f,a}^n$, entonces se define el *resto de Taylor* de orden n para f en a como

$$r_{f,a}^n(x) = f(x) - p_{f,a}^n(x).$$

El resto mide el error cometido al aproximar $f(x)$ mediante $p_{f,a}^n(x)$ y permite expresar la función f como la suma de un polinomio de Taylor más su resto correspondiente:

$$f(x) = p_{f,a}^n(x) + r_{f,a}^n(x).$$

Esta expresión se conoce como *fórmula de Taylor* de orden n para f en a. Se pude demostrar, además, que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r_{f,a}^n(a+h)}{h^n} = 0,$$

lo cual indica que el resto $r_{f,a}^n(a+h)$ es mucho menor que h^n.

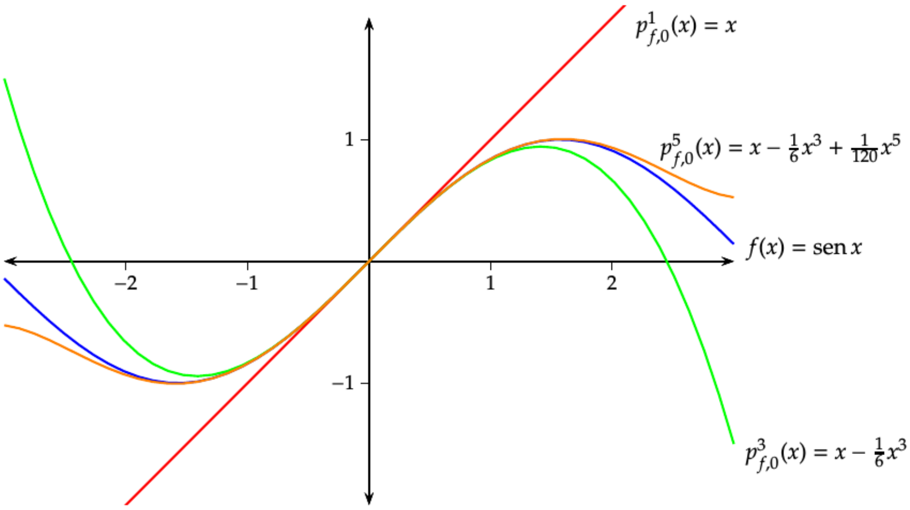

Figura 7.17: Gráfica del polinomio de Maclaurin del seno

Teorema 7.11 (Forma de Lagrange del resto de Taylor)**.** *Si f es una función tal que $f^{(n+1}(t)$ es continua en un intervalo que incluye a a y x, entonces*

$$R^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algún c entre a y x.

La forma de Lagrange del resto de Taylor permite, en muchas ocasiones, dar una cota de las aproximaciones realizadas mediante un polinomio de Taylor.

Ejemplo 7.31. Dada la función $f(x) = \cos(x)$ el polinomio de MacLaurin de cuarto grado de f es

$$P^4_{f,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Sustituyendo en $x = 0.1$ se tiene que $\cos(0.1) \approx P^2_{f,0}(0.1) = 1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^4}{4!} = 0.9950041667$.

Para obtener una cota del error cometido, aplicando el teorema anterior se tiene que

$$R^4_{f,0}(0.1) = \frac{f^5(c)}{5!}0.1^5 = \frac{-\operatorname{sen}(c)}{5!}0.1^5 \text{ con } c \in [0, 0.1].$$

Como $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|R_{f,0}^4(0.1)| \leq \frac{0.1^5}{5!} = 8.3 \cdot 10^{-8},$$

que es una cota del error cometido en la aproximación.

8 Series de números reales

En este capítulo se estudian las *series* de números reales, un tipo especial de sucesiones que se construyen a partir de la suma de los términos de otras sucesiones. Este tipo de sucesiones son las más importantes del Análisis pues, como se verá más adelante, aparecen en multitud de contextos reales.

Como ejemplo introductorio puede servir la paradoja de la dicotomía de Zenon, que establece que para que un corredor pueda recorrer una distancia hasta la meta, primero tiene que recorrer la mitad de la distancia, después la mitad de la distancia restante, después la mitad de la distancia restante, y así hasta el infinito, por lo que, aparentemente, nunca llegaría a la meta.

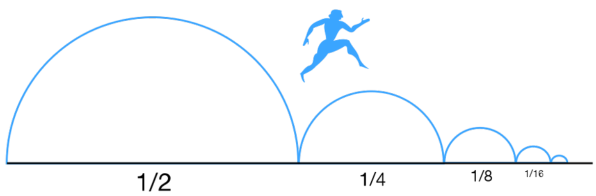

Figura 8.1: Paradoja de la dicotomía de Zenon.(imagen tomada de Wikipedia)

La distancia recorrida por el corredor puede expresarse como una suma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

que puede representarse, de manera más concisa, mediante el sumatorio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Por supuesto, por experiencia, sabemos que el corredor acaba llegando a la meta, por lo que la suma de estas distancias debe ser la distancia total, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

En este capítulo estudiaremos estas sumas infinitas y veremos técnicas para calcularlas cuando existan.

Definición 8.1 (Serie)**.** Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, se llama *serie* de término general a_n a la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los n primeros términos de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, es decir,

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)_{n=1}^{\infty}.$$

El número $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ se llama *suma parcial de orden* n de la serie, y habitualmente utilizaremos la notación $\sum a_n$ para referirnos a la serie de término general n.

> **!** Importante
>
> Debe quedar claro que una serie no es una suma, sino una sucesión cuyos términos se forman mediante sumas de los términos de otra sucesión. Por tanto, todos lo visto en el capítulo de sucesiones es válido también para series.

Ejemplo 8.1. A partir de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, se puede construir la serie $\sum \frac{1}{n} = (A_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1 \\
A_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
A_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&\vdots \\
A_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Esta serie se conoce como *serie armónica*. En la siguiente gráfica se puede apreciar cómo evoluciona la sucesión de sus sumas parciales.

En ocasiones es posible expresar el valor de la suma parcial de orden n mediante una fórmula explícita que depende de n y que se conoce como *forma cerrada* de la serie. Si una serie puede expresarse mediante una forma cerrada, resulta más rápido calcular el valor de la suma parcial de orden n mediante la forma cerrada, que haciendo la propia suma de los n primeros términos de la sucesión.

Ejemplo 8.2. Dada la serie $\sum n$, su suma parcial de orden n $A_n = \sum_{i=1}^{n} n$ puede expresarse mediante la forma cerrada $A_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

8.1 Convergencia de series

Definición 8.2 (Serie convergente)**.** Se dice que una serie $\sum a_n$ es *convergente*, o que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es sumable, si la sucesión de las sumas parciales $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, y en tal caso, utilizaremos la notación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para referirnos a su límite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Si una serie no es convergente, se dice que es *divergente*.

A veces interesa considerar series que empiezan en un índice distinto de 1. En tal caso, se usará la notación $\sum_{n\geq k} a_n$ para referirse a la serie, y $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ para referirse a su límite.

Ejemplo 8.3. Veamos que la serie $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ de la paradoja de la dicotomía de Zenon converge.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{2^n} = 2.$$

Ejemplo 8.4. La serie $\sum(-1)^n$ diverge. Para probarlo, basta con ver que las sumas parciales de orden n forman una sucesión alternada.

$$\begin{aligned}
A_1 &= -1 \\
A_2 &= -1 + (-1)^2 = 0 \\
A_3 &= -1 + (-1)^2 + (-1)^3 = -1 \\
A_4 &= -1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y por tanto, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Ejemplo 8.5. La serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Una prueba bastante intuitiva se debe a Nicole Oresme y se basa en agrupar los términos de la serie en potencias de 2 de la siguiente manera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \cdots$$

Es fácil ver que los términos de esta serie son mayores que los de esta otra

$$\begin{gathered}
1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \cdots \\
= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots
\end{gathered}$$

que claramente diverge, por lo que la serie armónica también diverge.

Sin embargo, la serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. La prueba es una consecuencia de la serie de Taylor para el logaritmo y se deja como ejercicio.

Proposición 8.1. *Dadas dos sucesiones* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *tales que* $a_n = b_n \ \forall n > k \in \mathbb{N}$. *Entonces,* $\sum a_n$ *converge si y solo si* $\sum b_n$ *converge, y en caso de converger se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Demostración

Demostración. Pongamos $A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$, $B_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$, $\alpha = \sum_{i=1}^{k} a_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{k} b_i$. Las afirmaciones hechas se deducen todas de que para todo $n \geq q+1$ se verifica la igualdad:
Como $a_n = b_n$ $\forall n > k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i = \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i = \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

□

Proposición 8.2. *Dadas dos series convergentes $\sum a_n$ y $\sum b_n$, entonces se cumple*

a. La serie $\sum(a_n+b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
b. La serie $\sum(c \cdot a_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración

Demostración. Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones de las sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$ respectivamente. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, entonces $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen y, por las propiedades de las sucesiones convergentes, $(A_n + B_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y además

$$\lim_{n\to\infty} A_n + B_n = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n.$$

En consecuencia, $\sum(a_n+b_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □

Teorema 8.1 (Criterio de Cauchy)**.** *La serie $\sum a_n$ converge si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon \ \forall m > n \geq k.$$

Demostración

Demostración. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de las sumas parciales de $\sum a_n$. Entonces, $\sum a_n$ converge si y solo si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y por el criterio de convergencia de Cauchy para sucesiones (Teorema 4.8) esto es equivalente a que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, de manera que se cumple que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|A_m - A_n| < \varepsilon\ \forall m > n \geq k$, lo que es equivalente a que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon\ \forall m > n \geq k$.

□

El siguiente teorema establece una condición necesaria para la convergencia de una serie.

Teorema 8.2 (Criterio de divergencia)**.** *Dada una serie* $\sum a_n$*, si* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, entonces la serie diverge.*

Demostración

Demostración. Probaremos que si la serie converge, entonces $\lim_{n\to\infty} = 0$.
Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de las sumas parciales de de $\sum a_n$. Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces existe $\lim_{n\to\infty} A_n = l$, y por las propiedades de las colas de sucesiones, también se cumple que $\lim_{n\to\infty} A_{n-1} = l$.
Por otro lado, como $a_n = A_n - A_{n-1}\ \forall n \geq 2$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n - A_{n-1} = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = l - l = 0.$$

□

Advertencia

El teorema anterior permite establecer la divergencia de una serie cuando $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pero no dice nada cuando $\lim_{n\to\infty} a_0 = 0$. De hecho, en este último caso, puede ocurrir que la serie converja, como ocurre con la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ o que diverja como ocurre con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$.

Ejemplo 8.6. Ya hemos visto antes que la serie $\sum(-1)^n$ no converge, porque la sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

La serie $\sum \frac{2n^2}{3n^2+n}$ tampoco converge, pues $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n^2+n} = \frac{2}{3} \neq 0$.

Corolario 8.1. *Dada una serie* $\sum a_n$ *convergente, si* $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *entonces la serie de los términos inversos* $\sum a_n^{-1}$ *diverge.*

ℹ Demostración

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata del criterio de divergencia, ya que si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \infty$, por lo que la serie $\sum a_n^{-1}$ diverge.

□

8.2 Series geométricas

En muchas casos de la vida real, aparecen sucesiones cuyo término n se obtiene multiplicando el término anterior por un mismo valor.

Definición 8.3 (Series geométricas)**.** Dados dos números $a, r \in \mathbb{R}$, la sucesión $(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n)_{n=1}^{\infty}$ se llama *serie geométrica* de razón r y se representa $\sum ar^n$.

Ejemplo 8.7. La serie $\sum \frac{1}{2^n}$ de la paradoja de la dicotomía de Zenon es una serie geométrica de razón $1/2$.

Proposición 8.3. *La suma parcial de orden* n *de una serie geométrica* $\sum ar^n$ *es*

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

ℹ Demostración

Demostración. La suma parcial de orden n de la serie geométrica de razón r es

$$A_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

Si multiplicamos A_n por la razón de las serie se obtiene

$$rA_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + a^{n+1}.$$

Y si restamos las dos expresiones anteriores se obtiene

$$A_n - rA_n = a - a^{n+1} \Leftrightarrow A_n = \frac{a - a^{n+1}}{1-r}.$$

□

Ejemplo 8.8. La suma parcial de orden 10 de la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ es $A_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{11}}}{1-\frac{1}{2}} \approx$ 1.9990234375.

Corolario 8.2. *Una serie geométrica $\sum ar^n$ de razón r converge si y solo si $|r| < 1$.*

Demostración

Demostración. La demostración es fácil a partir de la proposición anterior y se deja como ejercicio.

□

Ejemplo 8.9. La serie geométrica $\sum \frac{1}{2^n}$ converge ya que su razón es $\frac{1}{2} < 1$. Sin embargo, la serie geométrica $\sum \left(\frac{3}{2}\right)^n$ no converge, ya que $\frac{3}{2} \geq 1$.

8.3 Series p

Otro tipo de series que aparece con bastante frecuencia en contextos reales son las llamadas series p, de las que la serie armónica es un caso particular.

Definición 8.4 (Series p)**.** Dado un número $p \in \mathbb{R}$, la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ se conoce como serie p.

Ejemplo 8.10. La serie armónica $\frac{1}{n}$ es una serie p con $p = 1$, y la serie de los inversos de los cuadrados $\frac{1}{n^2}$ es otra serie p con $p = 2$.

Proposición 8.4. *Una serie p $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.*

ℹ Demostración

Demostración. Usando el criterio de divergencia, es fácil probar que la serie diverge para $p \leq 0$, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ si $p < 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 1$ si $p = 0$.
Más adelante se probará también que la serie p diverge para $0 < p \leq 1$ y converge para $p > 1$.

□

Ejemplo 8.11. Ya se ha visto que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, ya que $p = 1$, mientras que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge al ser $p = 2 > 1$. De hecho, la suma exacta de esta última serie es el famoso problema de Basilea que consiguió resolver Euler, demostrando que que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (la demostración se escapa de los conocimientos de este curso y puede verse en el enlace anterior).

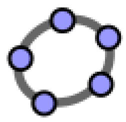

Figura 8.2: Graficador de Series

8.4 Series telescópicas

Otro tipo de serie, menos frecuente, pero también interesante, son las series cuyos términos se van cancelando sucesivamente, de manera que la serie colapsa.

Definición 8.5. Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, las series de la forma $\sum(a_n - a_{n+1})$ se llaman *series telescópicas.*

Ejemplo 8.12. La serie $\sum \frac{1}{n^2+n}$ es una serie telescópica, ya que

$$\sum \frac{1}{n^2+1} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Proposición 8.5. *Una serie telescópica $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge si y solo si la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.*

Demostración

Demostración. Es fácil ver que la suma parcial de los n primeros términos es

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a_1 - a_{n+1} = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1},$$

de manera que si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, la serie telescópica converge y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - l$, y si no existe $\lim_{n\to\infty} a_n$, la serie diverge.

□

Ejemplo 8.13. La serie telescópica $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, y por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} = 1$.

8.5 Convergencia de series de términos positivos

En esta sección se presentan algunos criterios para estudiar la convergencia de series $\sum a_n$ tales que todos sus términos son positivos, es decir, $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Este tipo de series aparecen de manera frecuente en muchos problemas donde siempre se suman cantidades positivas.

Teorema 8.3 (Criterio de acotación)**.** *Una serie $\sum a_n$ de términos positivos converge si y solo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada.*

i Demostración

Demostración. Como $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de las sumas parciales de $\sum a_n$ es monótona creciente y por el teorema de la convergencia monótona para sucesiones se tiene que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si está acotada. $\square$

Teorema 8.4 (Criterio de comparación de series)**.** *Dadas dos series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tales que $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:*

a. Si $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge.
b. Si $\sum a_n$ diverge, $\sum b_n$ diverge.

i Demostración

Demostración. Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones de las sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$ respectivamente. Como $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n < B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Supongamos que $\sum b_n$ converge. Entonces, por el teorema anterior, la sucesión de sus sumas parciales $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada. Sea k una cota de $(B_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $A_n < B_n \leq k$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada y, por el teorema anterior converge.
Supongamos ahora que $\sum a_n$ diverge. Entonces, por el teorema anterior, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada y como $A_n < B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ tampoco está acotada, así que, de nuevo por el teorema anterior, se concluye que $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge. $\square$

Ejemplo 8.14. Veamos que la serie $\sum \frac{2+\operatorname{sen}(n+1)}{2^n+n^2}$ converge.

Para ello basta ver que se trata de una serie de términos positivos, y que

$$\frac{2+\operatorname{sen}(n+1)}{2^n+n^2} \leq \frac{3}{2^n+n^2} \leq \frac{3}{2^n}$$

Como se ha visto antes, la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, de manera que $\sum \frac{3}{2^n}$ también converge, y por el teorema anterior, $\sum \frac{2+\operatorname{sen}(n+1)}{2^n+n^2}$ también converge.

Teorema 8.5 (Criterio del cociente). *Dadas dos series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$, si existe el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

con $l > 0$, entonces $\sum a_n$ converge si y solo si $\sum b_n$ converge.

Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$. Entonces, por la definición de límite, dado un $\varepsilon = l/2$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ se tiene

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \frac{l}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n.$$

Así pues, si $\sum b_n$ converge, también converge $\sum \frac{3l}{2} b_n$, y como $a_n < \frac{3l}{2} b_n$ $\forall n \geq k$, por el criterio de comparación de series, se tiene que $\sum a_n$ también converge.
Por otro lado, si $\sum b_n$ diverge, también diverge $\sum \frac{l}{2} b_n$, y como $\frac{l}{2} b_n < a_n$ $\forall n \geq k$, por el criterio de comparación de series, se tiene que $\sum a_n$ también diverge.

$\square$

Ejemplo 8.15. Veamos que la serie $\sum \frac{1}{2^n - n}$ converge. Ya hemos visto que la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, pero no podemos usar directamente el criterio de comparación de series porque $\frac{1}{2^n - n} > \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, usando el criterio del cociente se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1 > 0,$$

por lo que, como $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, $\sum \frac{1}{2^n - n}$ también.

Advertencia

Para poder aplicar el criterio del cociente, es necesario que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ exista y sea estrictamente positivo, ya que si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, es posible que una sucesión converja y la otra no.

Ejemplo 8.16. Si tomamos la serie geométrica $\sum \frac{1}{2^n}$ y la serie armónica $\frac{1}{n}$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Sin embargo, ya hemos visto que una converge y la otra no.

8.6 Convergencia de series alternadas

Los resultados de la sección anterior solo se aplican a series de términos positivos, pero en ocasiones, la sucesión a partir de la que se construye la serie es de términos alternados, es decir, el signo de los sucesivos términos va cambiando. Un ejemplo es la serie armónica alternada que ya se ha tratado. A continuación se presentan algunos resultados para estudiar este tipo de series.

Teorema 8.6 (Criterio de la serie alternada (Leibniz))**.** *Dada una serie alternada $\sum(-1)^{n-1}a_n$, con $a_n > 0$, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie converge.*

Demostración

Demostración. Supongamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente, es decir, $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, y además $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces, si construimos la sucesión de las sumas parciales de orden par, se tiene

$$\begin{aligned}
A_2 &= a_1 - a_2 \geq 0 \\
A_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = A_2 + (a_3 - a_4) \geq A_2 \\
A_6 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = A_4 + (a_5 - a_6) \geq A_4 \\
&\vdots \\
A_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = A_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \geq A_{2n-2},
\end{aligned}$$

de manera que se obtiene una sucesión monótona creciente.
Por otro lado, si agrupamos los términos de la sucesión de la siguiente manera,

$$A_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

es fácil ver que $A_{2n} \leq a_1$, ya que todos los términos entre paréntesis son positivos, y también a_{2n}. Así pues, por el Teorema 8.3 la serie converge y $\lim_{n\to\infty} A_{2n} = l$.

Si calculamos ahora el límite de la sucesión de las sumas parciales de orden impar, se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} A_{2n} + a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} A_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = l + 0 = l.$$

Por consiguiente, como las subsucesiones de los términos pares e impares convergen al mismo número, la sucesión de las sumas parciales de orden n también converge a ese número, es decir $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = l$.

$\square$

Ejemplo 8.17. La serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ cumple las condiciones del teorema anterior, ya que, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y además $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, por lo que converge.

Veamos ahora que la serie $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ también cumple las condiciones del teorema. La primera condición se cumple ya que,

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2+1}{n} \\ &\Leftrightarrow (n+1) + \frac{1}{n+1} \geq n + \frac{1}{n},\end{aligned}$$

lo cual es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$, por que, en particular, $n+1 \geq n + \frac{1}{n}$.

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0,$$

de manera que la segunda condición también se cumple, y por tanto, las serie converge.

8.7 Convergencia absoluta

Hemos visto en el caso de series de términos positivos que una serie converge cuando sus términos se hacen pequeños lo suficientemente rápido, o en el caso de series alternadas, cuando, a pesar de que los términos no decrezcan los suficiente mente rápido, los términos positivos se van cancelando con los negativos para obtener una suma finita. En general, si los términos de una serie decrecen lo suficiente mente rápido sin tener en cuenta su signo, es decir, en valor absoluto, se puede asegurar que la serie converge, independientemente de qué términos de la serie son positivos o negativos.

Definición 8.6 (Serie absolutamente convergente)**.** Una serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie de los valores absolutos de sus términos $\sum |a_n|$ converge.

Si la serie es de términos positivos, entonces $|a_n| = a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, la convergencia y la convergencia absoluta son equivalentes. Pero si la serie es alternante o tiene tanto términos positivos como negativos, puede ocurrir que la serie sea convergente pero no absolutamente convergente.

Ejemplo 8.18. La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ es absolutamente convergente ya que $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$, que es convergente al ser una serie p con $p = 2$.

Que una serie sea absolutamente convergente quiere decir que sus términos se hacen pequeños (en valor absoluto) lo suficientemente rápido para garantizar que la suma converge sin tener en cuenta su signo.

Definición 8.7 (Serie condicionalmente convergente)**.** Una serie $\sum a_n$ es *condicionalmente convergente* si es convergente pero no absolutamente convergente.

Ejemplo 8.19. Ya hemos visto que la serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente, pero no es absolutamente convergente, ya que $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$, que se trata de la serie armónica, y por tanto, no converge. Por tanto la serie armónica alternada es condicionalmente convergente.

Teorema 8.7. *Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

i Demostración

Demostración. Partimos del hecho de que $a_n = |a_n|$ o $a_n = -|a_n|$, y por tanto, $a_n + |a_n| = 2|a_n|$ o $a_n + |a_n| = 0$, y se tiene que $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\sum |a_n|$ converge, $\sum 2|a_n|$ también converge, y por el criterio de comparación de series se tiene que $\sum a_n + |a_n|$ converge. De aquí se deduce fácilmente que

$$\sum a_n = \sum a_n + |a_n| - |a_n| = \sum (a_n + |a_n|) - |a_n| = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|,$$

que converge por ser la resta de dos series convergentes.

□

Teorema 8.8 (Criterio de la razón (D'Alembert)). *Dada una serie* $\sum a_n$*, se cumple:*

a. Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$*, entonces la serie es absolutamente convergente.*

b. Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1$ *o* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$*, entonces la serie es divergente.*

Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada caso.

a. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$ y sea r tal que $l < r < 1$. Por la definición de límite se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \ \forall n \geq k$, es decir, $|a_{n+1}| < |a_n| r \ \forall n \geq k$. De aquí se deduce que

$$\begin{aligned}
|a_{k+1}| &< |a_k| r \\
|a_{k+2}| &< |a_{k+1}| r < |a_k| r^2 \\
|a_{k+3}1 &< |a_{k+2}| r < |a_{k+1}| r^2 < |a_k| r^3 \\
&\vdots \\
|a_{k+n}| &< |a_k| r^n.
\end{aligned}$$

Así pues, como $\sum |a_k| r^n$ es una serie geométrica con $r < 1$, converge, y aplicando el criterio de comparación de series de términos positivos, $\sum_{n\geq k} |a_n|$ también converge, y como un número finito de sumandos no influye en la convergencia de la serie, se concluye que $\sum a_n$ converge.

b. Supongamos ahora $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \ \forall n \geq k$, es decir, $|a_{n+1}| > |a_n| \ \forall n \geq k$, de donde se deduce que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, y según el criterio de la divergencia, $\sum a_n$ diverge.
El mismo razonamiento se puede aplicar si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.

□

Ejemplo 8.20. Veamos que la serie $\sum (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$ es absolutamente convergente aplicando el criterio de la razón.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^2}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1,$$

y por tanto, la serie es absolutamente convergente.

Advertencia

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, el criterio de la razón no garantiza nada, es decir, la serie podría ser convergente o divergente.

Teorema 8.9 (Criterio de la raíz (Cauchy))**.** *Dada una serie $\sum a_n$, se cumple:*

a. *Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.*
b. *Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$, o $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie es divergente.*

Demostración

Demostración. La demostración es similar a la del criterio de la razón.

a. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$ y sea r tal que $l < r < 1$. Por la definición de límite se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r\ \forall n \geq k$, es decir, $|a_n| < r^n\ \forall n \geq k$. Como $\sum r^n$ es una serie geométrica con $r < 1$, converge, y aplicando el criterio de comparación de series de términos positivos, $\sum_{n\geq k}|a_n|$ también converge, y como un número finito de sumandos no influye en la convergencia de la serie, se concluye que $\sum a_n$ converge.

b. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$ y sea r tal que $1 < r < l$. Por la definición de límite se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} > r\ \forall n \geq k$, es decir, $|a_n| > r^n\ \forall n \geq k$. Como $\sum r^n$ es una serie geométrica con $r > 1$, diverge, y aplicando el criterio de comparación de series de términos positivos, $\sum_{n\geq k}|a_n|$ también diverge, y por tanto $\sum a_n$ diverge.

$\square$

Ejemplo 8.21. Veamos que la serie $\sum \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$ diverge aplicando el criterio de la raíz. Para ello basta ver que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} > 1.$$

8.8 Series de potencias

Del mismo modo que hemos estudiado las series que se obtienen a partir de una sucesión numérica, en Análisis resulta también interesante estudiar las series que se obtienen a partir de una sucesión de funciones.

Definición 8.8 (Serie funcional)**.** Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, se llama *serie de funciones* o *serie funcional* de término general f_n a la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente las n primeras funciones de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, es decir,

$$(F_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)_{n=1}^{\infty}.$$

El número $F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ se llama *suma funcional parcial de orden* n de la serie funcional, y habitualmente utilizaremos la notación $\sum f_n$ para referirnos a la serie funcional de término general f_n.

Las primeras sumas funcionales parciales de la serie funcional $\sum \frac{x}{n^2}$ son

$$\begin{aligned}
F_1 &= x\\
F_2 &= x + \frac{x}{4}\\
F_3 &= x + \frac{x}{4} + \frac{x}{9}\\
&\vdots\\
F_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{i^2}
\end{aligned}$$

❗ Importante

Debe quedar claro que una serie funcional es una sucesión funcional, y por tanto, todos los resultados vistos para sucesiones funcionales son válidos para las series funcionales.

Una serie funcional puede ser convergente para algunos valores de x y divergente para otros.

Ejemplo 8.22. La serie funcional $\sum x^n$ es una serie geométrica de razón x, de modo que, será convergente cuando $|x| < 1$ y divergente en caso contrario.

Definición 8.9 (Dominio de convergencia puntual de una serie funcional)**.** Dada una serie funcional $\sum f_n$, se llama *dominio de convergencia puntual* de las serie al conjunto $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} : \sum f_n(x) \text{ converge}\}$

Definición 8.10 (Función suma de una serie funcional)**.** Dada una serie funcional $\sum f_n$ con dominio de convergencia puntual $\mathcal{C}$, se llama *función suma* de la serie, a la función $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \ \forall x \in \mathcal{C}.$$

Ejemplo 8.23. El dominio de convergencia puntual de la serie funcional $\sum \frac{x}{n^2}$ es $\mathbb{R}$, ya que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x}{n^2} = x \sum \frac{1}{n^2}$, que converge al ser $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente. Además, como vimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, se tiene que su su función suma es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} x$.

De particular interés son las series que se obtienen a partir de sucesiones de la forma $(c_n x^n)_{n=1}^{\infty}$ que dan lugar a polinomios. Como ya vimos con los polinomios de Taylor, estas series nos permitirán estudiar funciones complicadas mediante simples polinomios.

Definición 8.11 (Serie de potencias)**.** Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ y una sucesión de números reales $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, se llama *serie de potencias centrada en a* a la serie $\sum c_n (x-a)^n$.

La sucesión $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ se llama *sucesión de coeficientes de la serie*, y al término c_0 se le llama *término independiente*.

Ejemplo 8.24. Tomando $a = 0$ y la sucesión de coeficientes $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, se tiene la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n}$, cuyas primeras sumas funcionales parciales son

$$\begin{aligned} F_1 &= x \\ F_2 &= x + \frac{x^2}{2} \\ F_3 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ &\vdots \\ F_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i} \end{aligned}$$

Para cualquier serie de potencias $\sum c_n (x-a)^n$, está claro que a pertenece al dominio de convergencia puntual de la serie, pues para $x = a$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (a-a)^n = c_0$. Veremos a continuación un par resultados que nos ayudarán a ver para qué otros valores de x la serie de potencias converge.

Proposición 8.6. *Dada una serie de potencias $\sum c_n x^n$ centrada en el 0,*

a. Si la serie converge para $x = b \neq 0$, entonces converge para cualquier x tal que $|x| < |b|$.
b. Si la serie diverge para $x = d \neq 0$, entonces diverge para cualquier x con $|x| > |d|$.

i Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada parte.

a. Supongamos $\sum c_n b^n$ converge. Entonces, por el criterio de divergencia se tiene que $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$, y, por tanto, tomando $\varepsilon = 1$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n b^n| < 1 \ \forall n \geq k$. De esta manera se cumple

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b_n| \left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n,$$

Como $\sum \left(\frac{x}{b}\right)^n$ es una serie geométrica, converge para $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$, es decir, $|x| < |b|$, y en tal caso, por el criterio de comparación de series, $\sum |c_n x^n|$ converge, de modo que $\sum c_n x^n$ es absolutamente convergente.

b. Supongamos ahora que $\sum c_n d^n$ diverge. Entonces para cualquier $|x| > |d|$ la serie $\sum c_n x^n$ no puede converger porque por el resultado anterior, si $\sum c_n x^n$ converge, también debería converger $\sum c_n d^n$ al ser $|d| < |x|$.

$\square$

Ejemplo 8.25. Ya se vio que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, y por tanto, la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n}$ es divergente para $x = 1$, lo que significa, según la proposición anterior, que también diverge para $|x| > 1$. Por otro lado, para $x = 1/2$, se tiene la serie

$$\sum \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum \frac{1}{n2^n},$$

que, por el criterio de comparación de series, converge al ser $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y ser $\sum \frac{1}{2^n}$ convergente. Eso significa que la serie de potencias también converge para $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Más adelante se mostrará que el dominio de convergencia puntual de esta serie de potencias es el intervalo $[-1, 1)$.

Corolario 8.3. *Dada una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ centrada en el a,*

a. Si la serie converge para $x = b \neq a$, entonces converge para cualquier x tal que $|x-a| < |b-a|$.
b. Si la serie diverge para $x = d \neq a$, entonces diverge para cualquier x con $|x-a| > |d-a|$.

i Demostración

Demostración. La demostración es sencilla a partir de la proposición anterior haciendo el cambio de variable $y = x - a$, y se deja como ejercicio.

$\square$

El siguiente teorema resulta de gran utilidad a la hora de determinar el dominio de convergencia puntual de una serie de potencias.

Teorema 8.10 (Radio de convergencia)**.** *Dada una serie de potencias* $\sum c_n(x-a)^n$*, se cumple que, o bien el dominio de convergencia puntual es* $\mathbb{R}$*, o bien existe un número* $R \geq 0$*, llamado* radio de convergencia *tal que la serie converge si* $|x-a| < R$ *y diverge si* $|x-a| > R$*.*

Demostración

Demostración. Sea el conjunto $A = \{x - a : \sum c_n(x-a)^n \text{ converge}\}$. Entonces $A \neq \emptyset$ ya que $\sum c_n(x-a)^n$ converge, al menos, para $x = a$, y por tanto $0 \in A$. Supongamos además que $A \neq \mathbb{R}$. Entonces existe un número $d \neq a$ tal que la serie $\sum c_n(d-a)^n$ diverge, y por el corolario anterior, también diverge para $|x-a| > |d-a|$, de manera que $|x-a| \leq |d-a|$ $\forall (x-a) \in A$, y por el axioma de completitud se tiene que existe el supremo de A.
Sea $R = \sup(A)$. Si $|x-a| > R$, entonces $(x-a) \notin A$, por lo que $\sum c_n(x-a)^n$ diverge. Y si $|x-a| < R$, entonces $|x-a|$ no es una cota superior de A, de manera que existe $(b-a) \in A$ tal que $b-a > |x-a|$. Como $b-a \in A$, $\sum c_n(b-a)^n$ converge, y por el corolario anterior, $\sum c_n(x-a)^n$ también converge.

□

Advertencia

El teorema anterior no afirma nada sobre los puntos $|x-a| = R$. De hecho, en estos los puntos la serie puede converger o divergir. Y tampoco proporciona un procedimiento para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias. Afortunadamente, los siguientes teoremas permitirán su cálculo la mayoría de las veces.

Teorema 8.11. *Dada una serie de potencias* $\sum c_n(x-a)^n$*, si la sucesión* $(\sqrt[n]{|c_n|})_{n=1}^{\infty}$ *converge, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio usando el criterio de la raíz.

□

Ejemplo 8.26. Veamos cuál es el dominio de convergencia puntual de la serie de potencias $\sum \frac{(x-2)^n}{n}$. Utilizando el teorema anterior, el radio de convergencia de la serie es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|}} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, la serie converge para todo $|x-2| < 1$, es decir, $1 < x < 3$. En $x = 1$ y $x = 3$ el teorema del radio de convergencia no dice nada, pero podemos estudiar la convergencia de estos dos casos particulares. En $x = 1$ tenemos la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ que es la serie armónica alternada, y por tanto, converge. Y en $x = 3$ tenemos la serie $\sum \frac{1}{n}$ que es la serie armónica, y por tanto diverge.

Así pues, el dominio de convergencia puntal de la serie de potencias es el intervalo $[1, 3)$.

Teorema 8.12. *Dada una serie de potencias* $\sum c_n(x-a)^n$*, si* $c_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *y la sucesión* $\left(\frac{c_n}{c_{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ *converge, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio usando el criterio de la razón. □

Ejemplo 8.27. Veamos cuál es el dominio de convergencia puntual de la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n}$. Utilizando el teorema anterior, el radio de convergencia de la serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Por tanto, la serie converge para $|x| < 1$. En $x = 1$ la serie que resulta es la serie armónica, que es divergente, y en $x = -1$ la serie que resulta es la serie armónica alternada que converge.

Así pues, el domino de convergencia puntual de la serie de potencias es el intervalo $[-1, 1)$.

Las funciones que pueden representarse mediante una serie de potencias en un intervalo de su dominio tienen propiedades muy interesantes, como que son infinitamente derivables en ese intervalo.

Definición 8.12 (Función analítica)**.** Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que f es *analítica* en un intervalo I, si para cualquier $a \in I$ f se puede expresar como una serie de potencias centrada en a, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

para cualquier x en un entorno de a.

Ejemplo 8.28. Cualquier polinomio de grado n una función analítica en todo $\mathbb{R}$ ya que puede representarse trivialmente como una serie de potencias tomando coeficientes nulos para los términos de grado mayor que n.

Otras funciones elementales como la función exponencial, la función logarítmica y las trigonométricas son también analíticas en cualquier intervalo abierto de su dominio.

8.9 Series de Taylor

En la sección Sección 7.10 se vio como aproximar el valor de una función en un punto mediante un polinomio de grado n. En esta sección veremos como explotar la misma idea para expresar funciones mediante series de potencias. Esta técnica resulta útil para estudiar funciones complicadas usando su expresión como serie de potencias.

Definición 8.13 (Serie de Taylor)**.** Dada una función $f(x)$ con derivadas de orden n en a $\forall n \in \mathbb{N}$, se define la *serie de Taylor* de f centrada en a, como

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ejemplo 8.29. Veamos cuál es la serie de Taylor de la función $f(x) = \ln(x)$ en $a = 1$. Para ello calculamos las primeras derivadas de f en $a = 1$.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \log x & f(1) = \log 1 = 0, \\
f'(x) = 1/x & f'(1) = 1/1 = 1, \\
f''(x) = -1/x^2 & f''(1) = -1/1^2 = -1, \\
f'''(x) = 2/x^3 & f'''(1) = 2/1^3 = 2, \\
f''''(x) = -3!/x^4 & f''''(1) = -3! \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n & f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

Sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

Su suma parcial de orden n es

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}(x-1)^i \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n,
\end{aligned}$$

que resulta ser el polinomio de Taylor de orden n de f en $a = 1$.

Un caso particular bastante habitual es la serie de Taylor en $a = 0$.

Definición 8.14 (Serie de Maclaurin)**.** Dada una función $f(x)$ con derivadas de orden n en 0 $\forall n \in \mathbb{N}$, se define la *serie de Maclaurin* de f, como

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ejemplo 8.30. Veamos cuál es la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Para ello calculamos las primeras derivadas de f en 0.

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \frac{1}{1-x} & f(0) = 1, \\
f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} & f'(0) = 1, \\
f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} & f''(0) = 2, \\
f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4} & f'''(0) = 3!, \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^(n+1)} & f^{(n)}(0) = n!
\end{array}
$$

Sustituyendo en la fórmula de la serie de Maclaurin se tiene

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum \frac{n!}{n!} x^n = \sum x^n$$

que es una serie geométrica de razón x, y por tanto, converge para $|x| < 1$, con suma $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, es decir, $f(x)$ coincide con la suma de sus serie de Maclaurin para $|x| < 1$.

Teorema 8.13. *Si f es una función analítica en un intervalo I, entonces para cualquier $a \in I$ se cumple que*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}$$

$\forall x \in \mathcal{C}$.

Demostración

Demostración. Supongamos que f es analítica en el intervalo I. Entonces, para cualquier $a \in I$, f puede expresarse mediante una serie de potencias centrada en a,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

$\forall x \in \mathcal{C}$. En particular, para $x = a$ se tiene

$$f(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + c_3(a-a)^3 + \cdots = c_0.$$

Como las series de potencias se pueden derivar término a término (como si fuesen polinomios) en el interior del dominio de convergencia, es decir, son infinitamente derivables en $|x-a| < R$, se tiene que la primera derivada de f vale

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^4 \cdots$$

y en $x = a$ se tiene

$$f'(a) = c_1 + 2c_2(a-a) + 3c_3(a-a)^2 + 4c_4(a-a)^4 \cdots = c_1$$

La segunda derivada de f vale

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 \cdots$$

y en $x = a$ se tiene

$$f''(a) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(a-a) + 4 \cdot 3c_4(a-a)^2 \cdots = 2c_2 \to c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

La tercera derivada de f vale

$$f'''(x) = 3!c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(x-a)^2 \cdots$$

y en $x = a$ se tiene

$$f'''(a) = 3!c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(a-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(a-a)^2 \cdots = 3!c_3 \to \frac{f'''(a)}{3!}$$

Continuando con este proceso, se deduce que

$$c_n = \frac{f^{(n)}}{n!},$$

por lo que la suma que se obtiene es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!},$$

que es la serie de Taylor de f centrada en a.

□

Advertencia

El teorema anterior garantiza que si una función es analítica en un intervalo I, entonces puede representarse mediante la serie es la serie de Taylor en a, $\forall a \in I$, pero no todas las funciones son analíticas.

Ejemplo 8.31. La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es infinitamente derivable en $x = 0$ y $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que su serie de Maclaurin es $\sum 0$, que obviamente, converge para cualquier número $x \in \mathbb{R}$, pero su suma, que es nula, no coincide con f salvo en $x = 0$.

Cabe preguntarse, ¿cuándo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}$?

Evidentemente, esta igualdad no se cumple para los valores de x fuera del dominio de f, y tampoco para los valores fuera del dominio de convergencia puntual de la serie. Pero además se tiene que cumplir la siguiente condición.

Teorema 8.14. *Si $f(x) = p_{f,a}^n(x) + r_{f,a}^n(x)$, donde $p_{f,a}^n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f en a y $r_{f,a}^n(x)$ es su resto, y*

$$\lim_{n\to\infty} r_{f,a}^n(x) = 0$$

para $|x-a| < R$, entonces $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor centrada en a en el intervalo $|x-a| < R$.

Demostración

Demostración. Sea $f(x) = p_{f,a}^n(x) + r_{f,a}^n(x)$ y supongamos que $\lim_{n\to\infty} r_{f,a}^n(x) = 0$. Entonces $p_{f,a}^n(x) = f(x) - r_{f,a}^n(x)$, y tomando límites se tiene

$$\lim_{n\to\infty} p_{f,a}^n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) - r_{f,a}^n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} r_{f,a}^n(x) = f(x).$$

$\square$

Ejemplo 8.32. Veamos que $\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

El polinomio de Maclaurin de grado $2n+1$ para la función $\operatorname{sen}(x)$ es

$$p_{f,0}^{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

y su resto en la forma de Lagrange es

$$r_{f,a}^{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos(c),$$

donde $c \in (0,x)$ si $x > 0$ y $c \in (x,0)$ si $x < 0$.

Como $|\cos(c)| \leq 1\ \forall c \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$-(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos(c) \leq (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} -(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0,$$

por el teorema de compresión de límites, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} r_{f,a}^{2n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos(c) = 0.$$

8.9.1 Series de Maclaurin de funciones elementales

La siguiente tabla recoge las series de Maclaurin de algunas funciones elementales habituales.

$f(x)$	$\sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$	Dominio convergencia
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{n=0}^\infty x^n$	$(-1,1)$
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n}$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$(-1,1]$
$\operatorname{sen}(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arctg}(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$	$(-1,1)$

$f(x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$	Dominio convergencia
$(1+x)^k$	$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$(-1, 1)$

9 Integrales de funciones

En este capítulo se estudian las *integrales* de números reales, que junto a las derivadas son las dos ramas del Análisis más importantes. Veremos también el *teorema fundamental del cálculo*, uno de los resultados más importantes del Análisis que relaciona el cálculo diferencial con el integral, al cuál llegaron de manera simultanea Newton y Leibniz.

Históricamente el concepto de integral surge a partir del estudio de áreas, inicialmente de figuras geométricas, y después, de figuras curvas. En la antigua Grecia ya se utilizaba el *método por agotamiento* para calcular áreas de figuras no geométricas, y Arquímedes fue capaz de aproximar el área encerrada por una circunferencia usando este método.

Para llegar a la definición de integral explotaremos este método aproximando el area bajo una función usando rectángulos. El precursor de esta idea fue Bernhard Riemann.

Definición 9.1 (Partición de un intervalo)**.** Dado un intervalo $I = [a, b]$ cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, una *partición* de I es un conjunto ordenado y finito $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de puntos de I tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

El conjunto de todas las particiones de un intervalo I se denota $\mathcal{P}(I)$.

Definición 9.2 (Suma inferior de Riemann)**.** Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada en el intervalo $I = [a, b]$ y una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de I, se define la *suma inferior* de f respecto de P, y se denota $s(f, P)$, como

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

donde $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ para $i = 1, \dots, n$.

Gráficamente, si f es una función positiva, la suma inferior se puede interpretar como la suma de las areas de los rectángulos con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura m_i.

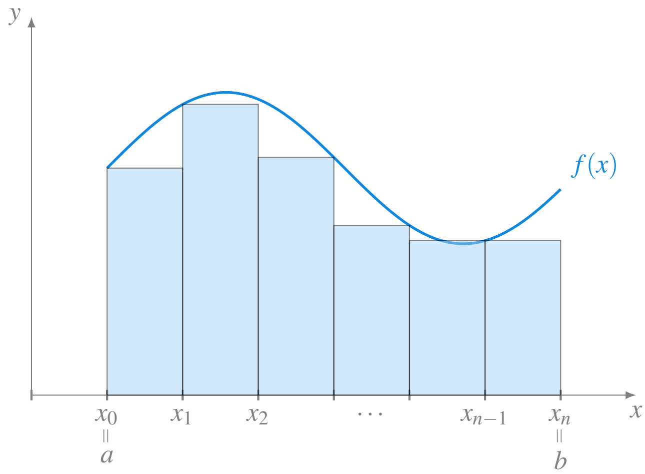

Figura 9.1: Suma inferior de Riemann

Definición 9.3 (Suma superior de Riemann)**.** Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada en el intervalo $I = [a, b]$ y una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de I, se define la *suma superior* de f respecto de P, y se denota $S(f, P)$, como

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ para $i = 1, \dots, n$.

Gráficamente, si f es una función positiva, la suma superior se puede interpretar como la suma de las areas de los rectángulos con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura M_i.

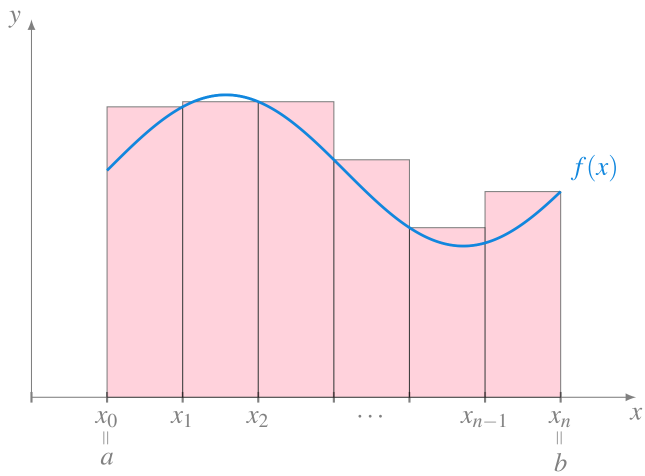

Figura 9.2: Suma inferior de Riemann

Advertencia

Obsérvese que si una función es negativa en un intervalo I, sus sumas de Riemann son negativas, ya que las alturas de los rectángulos son negativas.

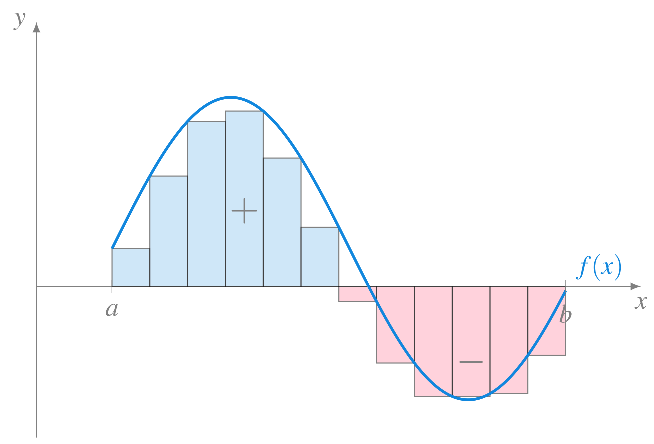

Figura 9.3: Sumas de Riemann de una función con valores positivos y negativos en un intervalo.

Calculadora de sumas de Riemann

Proposición 9.1. *Si $f: I \to \mathbb{R}$ es una función acotada en el intervalo $I = [a, b]$ y $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ es una partición de I, entonces $s(f, P) \leq S(f, P)$.*

Demostración

Demostración. Para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene que

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i,$$

de manera que

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, P),$$

ya que $(x_i - x_{i-1}) > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$. $\square$

Definición 9.4 (Refinamiento de una partición)**.** Dadas dos particiones $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y $Q = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ de un intervalo $I = [a, b]$, se dice que Q es un refinamiento de P si todos los puntos de P están en Q, es decir, $P \subseteq Q$.

Proposición 9.2. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada en el intervalo $I = [a, b]$, P es una partición de I y Q es un refinamiento de P, entonces*

a. $s(f, P) \leq S(f, Q)$
b. $s(f, Q) \leq S(f, P)$

Demostración

Demostración. Veremos solo la prueba para las sumas inferiores.

a. Probaremos primero el resultado para un refinamiento con un punto más. Sea $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ y supongamos que Q solo tiene un punto c más que P. Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $c \in [x_{k-1}, x_k]$ y tomemos $m'_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$ y $m''_k = \inf\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$. Como $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ resulta evidente que $m_k \leq m'_k$ y $m_k \leq m''_k$, por lo que

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - c) + m_k(c - x_{k-1}) \leq m''_k(x_k - c) + m'_k(c - x_{k-1})$$

y entonces

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m''_k(x_k - c) + m'_k(c - x_{k-1}) = s(f, Q). \end{aligned}$$

Para probar el caso general, si Q es un refinamiento cualquiera de P, entonces existe una sucesión finita de particiones de I, $P_1, P_2, \dots, P_r$ tales que $P = P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_r = Q$ y cada P_i tiene solo un punto más que P_{i-1}. Así pues, por el resultado anterior,

$$s(f, P) \leq s(f, P_2) \leq \cdots \leq s(f, Q).$$

b. La prueba para las sumas superiores es análoga y se deja como ejercicio.

$\square$

Proposición 9.3. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada en el intervalo $I = [a, b]$ y P y Q son dos particiones de I, entonces $s(f, P) \leq S(f, Q)$ y $s(f, Q) \leq S(f, P)$.*

Demostración

Demostración. Tomando la partición de I $P' = P \cup Q$, se tiene que P' es un refinamiento de P y Q, de manera que, según las proposiciones anteriores se tiene

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, Q)$$

y

$$s(f, Q) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

□

9.1 Integrales de Riemann

Como acabamos de ver, dada una función f positiva en un intervalo I, para cualquier partición P de I, la suma inferior de Riemann es una aproximación por defecto del área encerrada entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo I, mientras que la suma superior de Riemann es una aproximación por exceso. Si al hacer refinamientos de la partición P, cada vez con un mayor número de subintervalos, las sumas inferiores crecen y las superiores decrecen, se obtienen aproximaciones cada vez mejores. Podemos explotar esta idea para calcular el area área encerrada entre la gráfica de f y el eje x tomando particiones con subintervalos cada vez más pequeños.

Definición 9.5 (Integral inferior de Riemann)**.** Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada en el intervalo $I = [a, b]$, se define la *integral inferior* de f en I como el número $\underline{\int_a^b} f = \inf\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(I)\}$.

Definición 9.6 (Integral superior de Riemann)**.** Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada en el intervalo $I = [a, b]$, se define la *integral superior* de f en I como el número $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(I)\}$.

Proposición 9.4. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada en el intervalo $I = [a, b]$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.*

ℹ Demostración

Demostración. Sean P y Q dos particiones cualesquiera de I. Por la proposición anterior, $s(f, P) \leq S(f, Q)\ \forall P \in (P)(I)$, de modo que $S(f, Q)$ es una cota superior de todas las sumas inferiores, y por tanto,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(I)\} \leq S(f, Q)$$

Como esto es cierto para cualquier partición Q, se tiene que $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior de todas las sumas superiores, y por tanto,

$$\underline{\int_a^b} f \leq \inf\{S(f, Q) : Q \in \mathcal{P}(I)\} = \overline{\int_a^b} f.$$

□

Definición 9.7. Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada en el intervalo $I = [a, b]$, se dice que f es *integrable Riemann* en I si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

y a este valor se le llama *integral de Riemann* o *integral definida* de f en I y se denota por $\int_a^b f$, o bien

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

ℹ Nota

Si f es integrable Riemann en I, el número $\int_a^b f(x)\, dx$ es el único número real que verifica $s(f, P) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S(f, P)\ \forall P \in \mathcal{P}(I)$.

En ocasiones, omitiremos el “de Riemann” para referirnos a una integral de Riemann y simplemente se escribirá integral, cuando en el contexto esté claro que se trata de la integral de Riemann.

Ejemplo 9.1.

a. Veamos que si $f(x) = c$, es una función constante en $I = [a, b]$, entonces f es integrable en I.

   Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) \\ &= c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

   Del mismo modo,

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) \\ &= c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

   Así pues, $s(f, P) = S(f, P) = c(b - a)$ $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ y $\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a)$.

b. Veamos que $f(x) = x$ es integrable en $[0, 1]$.

   Sea $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ una partición de $[0, 1]$. Vamos a probar primero que $\sup\{s(f, P_n) : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{S(f, P_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Como f es creciente y continua en $[0, 1]$, se cumple que

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}), \\ M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i), \end{aligned}$$

   y por tanto,

$$
\begin{aligned}
s(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right), \\
S(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$
\begin{aligned}
\sup\{s(f,P_n) : n\in\mathbb{N}\} = \sup\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}\right\} = \frac{1}{2} \\
= \inf\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}\right\} = \inf\{S(f,P_n) : n\in\mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como

$$
\begin{aligned}
\sup\{s(f,P_n) : n\in\mathbb{N}\} \le \sup\{s(f,P) : P\in\mathcal{P}(I)\} = \underline{\int_0^1} f \\
\le \overline{\int_0^1} f = \inf\{S(f,P) : P\in\mathcal{P}(I)\} \le \inf\{S(f,P_n) : n\in\mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

se puede concluir que $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f$, y por tanto $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 9.2. La función

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\ \ \mathbb{Q}\cap[0,1] \end{cases}
$$

no es integrable Riemann ya que para cualquier partición $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ del intervalo $[0,1]$ se tiene que

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0,$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1,$$

por lo que $s(f,P) = 0$ y $S(f,P) = 1\ \forall P \in \mathcal{P}([0,1])$.

Así pues, $\underline{\int_a^b} f = 0 \neq \overline{\int_a^b} f = 1$.

Teorema 9.1 (Criterio de integrabilidad de Riemann). *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada en el intervalo $I = [a,b]$ es integrable en I si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.*

Demostración

Demostración. Supongamos que f es integrable Riemann en I, es decir, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.
Dado $\varepsilon > 0$ existe $P_1 \in \mathcal{P}(I)$ tal que $\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, P_1)$ por ser $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\}$.
Del mismo modo, por ser $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\}$, existe una partición $P_2 \in \mathcal{P}(I)$ tal que $\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} \geq S(f, P_2)$.
Tomando $P = P_1 \cup P_2$, se tiene que $s(f,P_1) \leq s(f,P)$ y $S(f,P) \leq S(f,P_2)$. Así pues,

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P_2) - s(f,P_1) \leq \left(\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Entonces,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon,$$

y como esto es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ y f es integrable Riemann.

$\square$

Corolario 9.1. *Dada una función* $f : I \to \mathbb{R}$ *acotada en el intervalo* $I = [a, b]$*, si existe una sucesión de particiones* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* I *tal que* $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) - s(f, P_n) = 0$*, entonces* f *es integrable Riemann en* I *y*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

ℹ Demostración

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) - s(f, P_n) = 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S(f, P_k) = s(f, P_k) < \varepsilon$, luego, por el criterio de integrabilidad de Riemann, se tiene que f es integrable en I.
Para calcular el valor de la integral, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) \leq \sup\{s(f, P) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(I)\} = \int_a^b f(x)\,dx \\ = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(I)\} \leq \inf\{S(f, P_n) : n \in \mathbb{N}\} \leq \lim_{n\to\infty} S(f, P_n),\end{aligned}$$

y como $\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$, las desigualdades anteriores se convierten en igualdades y por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

□

! Importante

Este último resultado nos permite calcular una integral como el límite de las sumas de Riemann tomando una sucesión de particiones cada vez más refinada.

9.2 Propiedades de la integral de Riemann

Teorema 9.2. *Si* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *son dos funciones integrables Riemann en* $I = [a, b]$*, entonces*

a. $f + g$ *es integrable Riemann en* I *y* $\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$.

b. Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, cf *es integrable Riemann en* I *y* $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

Demostración

Demostración. Veamos la demostración de cada apartado.

a. En primer lugar, resulta sencillo ver que para cualquier subintervalo J de I se cumple

$$\begin{aligned} \inf\{(f+g)(x) : x \in J\} &\geq \inf\{f(x) : x \in J\} + \inf\{g(x) : x \in J\} \\ \sup\{(f+g)(x) : x \in J\} &\leq \sup\{f(x) : x \in J\} + \sup\{g(x) : x \in J\} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como f y g son integrables, existen dos particiones $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(I)$ tales que

$$\begin{aligned} S(f, P_1) - s(f, P_1) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ S(g, P_2) - s(g, P_2) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Tomando ahora el refinamiento $P = P_1 \cup P_2$ de P_1 y P_2 y la Ecuación 9.1 se tiene

$$\begin{aligned} s(f+g, P) &\geq s(f, P) + s(g, P) \geq s(f, P_1) + s(g, P_2) \\ S(f+g, P) &\leq S(f, P) + S(g, P) \leq S(f, P_1) + S(g, P_2) \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} S(f+g, P) - s(f+g, P) &\leq (S(f, P_1) + S(g, P_2)) - (s(f, P_1) + s(g, P_2)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Y, por tanto, $f+g$ es integrable Riemann en I.

Además,

$$s(f, P) + s(g, P) \leq s(f+g, P) \leq \int_a^b (f+g) \leq S(f+g, P) \leq S(f, P) + S(g, P)$$

y

$$s(f, P) + s(g, P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq S(f, P) + S(g, P),$$

por lo que se tiene

$$0 \leq \left| \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \leq (S(f,P)+S(g,P))-(s(f,P)+s(g,P)) \leq \varepsilon,$$

y por consiguiente, $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

b. Si $c = 0$ entonces $cf = 0$, y por tanto, cf es integrable y además $\int_a^b cf = 0 = c\int_a^b f$.

Supongamos ahora que $c > 0$. Resulta sencillo ver que para cualquier subintervalo J de I se cumple

$$\begin{aligned} \inf\{(cf)(x) : x \in J\} &= c\inf\{f(x) : x \in J\} \\ \sup\{(cf)(x) : x \in J\} &= c\sup\{f(x) : x \in J\} \end{aligned} \tag{9.2}$$

de manera que si P es una partición de I, entonces $s(cf,P) = cs(f,P)$ y $S(cf,P) = cS(f,P)$.

Como f es integrable Riemann, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) \leq \frac{\varepsilon}{c} > 0$. Por otro lado, según la Ecuación 9.2,

$$S(cf,P) - s(cf,P) = cS(f,P) - cs(f,P) = c(S(f,P) - s(f,P)) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

de manera que cf es integrable en I, y además,

$$\begin{aligned} \int_a^b cf &= \inf\{S(cf,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} = \inf\{cS(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} \\ &= c\inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} = c\int_a^b f. \end{aligned}$$

Finalmente, si $c < 0$, resulta sencillo ver que para cualquier subintervalo J de I se cumple

$$\begin{aligned} \inf\{(cf)(x) : x \in J\} &= c\sup\{f(x) : x \in J\} \\ \sup\{(cf)(x) : x \in J\} &= c\inf\{f(x) : x \in J\} \end{aligned} \tag{9.3}$$

de manera que si P es una partición de I, entonces $s(cf,P) = cS(f,P)$ y $S(cf,P) = cs(f,P)$.

Como f es integrable Riemann, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) \leq \frac{\varepsilon}{-c} > 0$. Por otro lado, según la Ecuación 9.3,

$$\begin{aligned} S(cf,P) - s(cf,P) &= cs(f,P) - cS(f,P) = c(s(f,P) - S(f,P)) \\ &= c(S(f,P) - s(f,P)) < -c\frac{\varepsilon}{-c} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de manera que cf es integrable en I, y además,

$$\begin{aligned} \int_a^b cf &= \inf\{S(cf,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} = \inf\{cs(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} \\ &= c\sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} = c\int_a^b f. \end{aligned}$$

□

Proposición 9.5. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann en $I = [a,b]$ y $f(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*

Demostración

Demostración. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}(I)$ se tiene que $f(x)$ es positiva en cualquier intervalo de la partición y por tanto $s(f,P) \geq 0$. Así pues, $\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} \geq 0$.

□

Corolario 9.2. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann en $I = [a,b]$ y $f(x) \leq 0$ $\forall x \in I$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.*

Demostración

Demostración. Consideremos la función $-f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Como f es integrable en I, también lo es $(-1)f$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-1)(-f(x))\,dx = -\int_a^b -f(x)\,dx \leq 0,$$

ya que por la proposición anterior $\int_a^b -f(x)\,dx \geq 0$.

$\square$

Precaución

Este resultado nos advierte de que no se puede utilizar directamente la integral de Riemann para calcular el area entre la gráfica de la función y el eje x si la función presenta valores negativos en el intervalo de integración I.
En estos casos, el recurso habitual para calcular el área es calcular la integral del valor absoluto de la función.

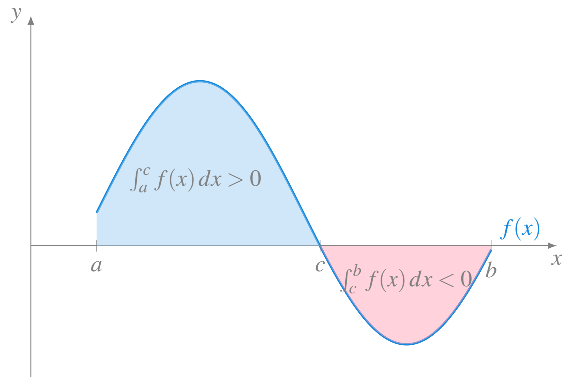

Figura 9.4: Integral de una función con valores positivos y negativos en un intervalo I

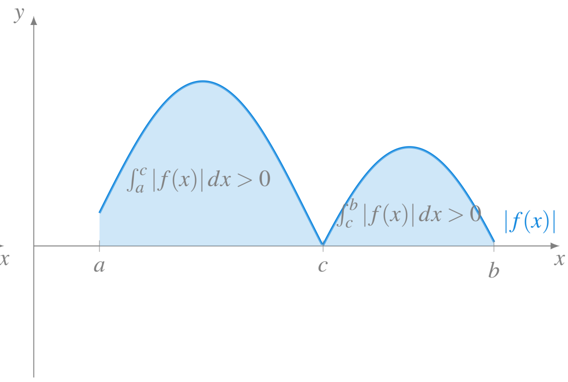

Figura 9.5: Cálculo del area encerrada entre una función de una función y el eje x mediante la integral del valor absoluto de la función.

Corolario 9.3. *Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables Riemann en $I = [a, b]$ y $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in I$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

Demostración

Demostración. Consideremos la función $g(x) - f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Como f y g son integrables en I, también lo es $g - f$ y

$$\int_a^b g(x) - f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Corolario 9.4. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann en $I = [a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in I$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.*

Demostración

Demostración. Por el corolario anterior se tiene $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$. Por otro lado, como $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ y $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$ por tratarse de funciones constantes, sustituyendo en la desigualdad anterior se tiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

□

Teorema 9.3 (Aditividad de la integral respecto del intervalo de integración)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada en $I = [a, b]$ y $c \in (a, b)$, entonces f es integrable Riemann en I si y sólo si f es integrable Riemann en $[a, c]$ y $[c, b]$. Además, en este caso,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Demostración

Demostración. Supongamos que f es integrable en I. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.
Sea $Q = P \cup \{c\} \in \mathcal{P}(I)$. Como Q es un refinamiento de P, se cumple

$$S(f, Q) - s(f, Q) \leq S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$$

Tomando ahora las subparticiones $Q_1 = \{t \in Q : t \leq c\}$ y $Q_2 = \{t \in Q : t \geq c\}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&(S(f,Q_1) - s(f,Q_1)) + (S(f,Q_2) - s(f,Q_2)) \\
&= (S(f,Q_1) + S(f,Q_2)) - (s(f,Q_1) + s(f,Q_2)) \\
&= S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,Q) - s(f,Q) < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

de manera que $S(f,Q_1) - s(f,Q_1) < \varepsilon$ y $S(f,Q_2) - s(f,Q_2) < \varepsilon$, y por tanto, f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Además,

$$
s(f,Q) = s(f,Q_1) + s(f,Q_2) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq S(f,Q_1) + S(f,Q_2) = S(f,Q)
$$

para cualquier $Q \in \mathcal{P}(I)$ y $c \in Q$. Si $P \in \mathcal{P}(I)$, tomando $Q = P \cup \{c\}$, Q es un refinamiento de P, y por tanto,

$$
\begin{aligned}
s(f,P) \leq s(f,Q) = s(f,Q_1) + s(f,Q_2) &\leq \int_a^c f + \int_c^b f \\
&\leq S(f,Q_1) + S(f,Q_2) = S(f,Q) \leq S(f,P),
\end{aligned}
$$

por lo que se concluye que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $P_1 \in \mathcal{P}([a,c])$ tal que $S(f,P_1) - s(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ y existe $P_2 \in \mathcal{P}([c,b])$ tal que $S(f,P_2) - s(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tomando ahora $P = P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}(I)$, se cumple

$$
S(f,P) - s(f,P) = s(f,P_1) + S(f,P_2) - (s(f,P_1) + s(f,P_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
$$

por lo que f es integrable en I.

□

A pesar de que la demostración es bastante larga, cuando f es positiva, es obvio que el área entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[a,b]$ puede descomponerse en la suma de las áreas en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ para cualquier $c \in (a,b)$.

9.3 Clase de las funciones integrables

A continuación trataremos de estudiar qué tipo de funciones son integrables.

Teorema 9.4. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada y monótona en $I = [a,b]$, entonces f es integrable en I.*

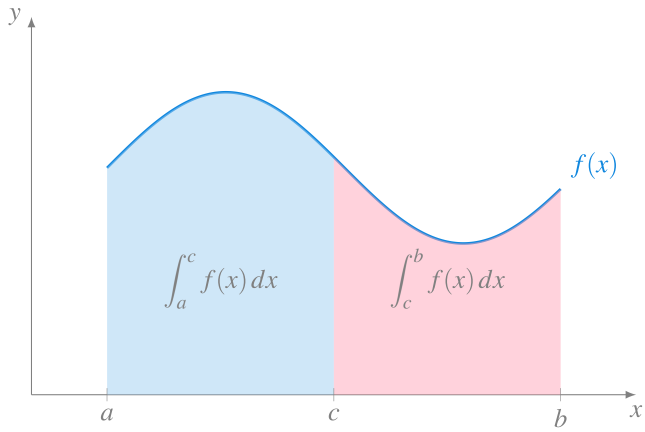

Figura 9.6: Aditividad de la integral respecto del intervalo de integración

Demostración

Demostración. Supongamos que f es creciente en I. Dado $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n} < \varepsilon.$$

Sea ahora $P_n \in \mathcal{P}(I)$ la partición que divide I en n subintervalos de igual longitud, es decir, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$.
Como f es creciente en I se tiene

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) \\ M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$, de manera que

$$\begin{aligned} S(f, P_n) - s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-1}{n}(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \cdots \\ &\cdots + (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + (f(x_n) - f(x_{n-1}))) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así pues, f es integrable en I.

□

Teorema 9.5. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en $I = [a, b]$, entonces f es integrable en I.*

Demostración

Demostración. Observemos primero que como f es continua en I, entonces es uniformemente continua en I al ser I un intervalo cerrado.
Dado $\varepsilon > 0$, como f es uniformemente continua en I, para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon'$.
Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición que divide I en subintervalos de longitud menor que δ. Entonces, para cad $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$M_i - m_i = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \varepsilon',$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \varepsilon' \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon'(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 9.6. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en $I = [a, b]$, salvo en un punto $c \in I$, entonces f es integrable en I.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio.

□

Corolario 9.5. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en $I = [a, b]$, salvo en un conjunto finito de puntos de I, entonces f es integrable en I.*

Demostración

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre el número de puntos de discontinuidad.
El caso para un solo punto de discontinuidad se ha probado en el teorema anterior. Supongamos que si f tiene n puntos de discontinuidad en I entonces es integrable Riemann en I, y supongamos ahora que f tiene $n+1$ puntos de discontinuidad. Sea c el mayor de los puntos de discontinuidad. Tomando $\delta > 0$ se tiene que f tiene n puntos de discontinuidad en el intervalo $[a, c-\delta]$, por lo que es integrable en este intervalo.
Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como f es integrable en $[a, c-\delta]$ existe una partición P_1 de $[a, c-\delta]$ tal que $S(f, P_1) - s(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, f está acotada en el intervalo $[c-\delta, b]$ y solo tiene una discontinuidad, por el teorema anterior, f es integrable en $[c-\delta, b]$, por lo que existe otra partición P_2 de $[c-\delta, b]$ tal que $S(f, P_2) - s(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tomando la partición $P = P_1 \cup P_2$ que es un refinamiento de P_1 y P_2, se tiene

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_1) + S(f, P_2) - s(f, P_1) - s(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por consiguiente f es integrable Riemann con $n+1$ discontinuidades, y aplicando el principio de inducción queda probado el resultado.

□

Teorema 9.7. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $I = [a, b]$ y $g : J \to \mathbb{R}$ es una función continua en $J = [c, d]$ con $f(I) \subseteq J$, entonces $g \circ f$ es integrable en I.*

Demostración

Demostración. Como g es continua en J, está acotada en J, de manera que podemos tomar $k > \sup\{g(x) : x \in J\} - \inf\{f(x) : x \in J\}$.
Por otro lado, como J es cerrado, g es uniformemente continua en J y dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta < \varepsilon$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Como f es integrable en I podemos tomar una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de I, tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \frac{\delta^2}{2k}.$$

Para $i = 1, \dots, n$, sea

$$
\begin{aligned}
m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
m_i' &= \inf\{g \circ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
M_i' &= \sup\{g \circ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}
\end{aligned}
$$

y sea

$$
\begin{aligned}
A &= \{i \in \{1, \dots, n\} : M_i - m_i < \delta\} \\
B &= \{i \in \{1, \dots, n\} : M_i - m_i \geq \delta\}
\end{aligned}
$$

Entonces se cumple que

$$
\delta \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\delta^2}{2k}
$$

de donde se deduce que

$$
\sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\delta}{2k}.
$$

Y utilizando los resultados anteriores se tiene

$$
\begin{aligned}
S(g \circ f, P) - s(g \circ f, P) &= \sum_{i \in A} (M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i \in A} (x_i - x_{i-1}) + k \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

por lo que $g \circ f$ es integrable en I.

□

Corolario 9.6. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $I = [a, b]$, entonces la función $|f|$ es integrable en I.*

Demostración

Demostración. Como f es integrable en I, f está acotada en I, así que, tomando $c = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$, basta aplicar el teorema anterior con $g = |x|$ en el intervalo $J = [-c, c]$.

$\square$

Corolario 9.7. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $I = [a, b]$, entonces la función f^n es integrable en I para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración

Demostración. Como f es integrable en I, f está acotada en I, así que, tomando $c = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$, basta aplicar el teorema anterior con $g = x^n$ en el intervalo $J = [-c, c]$.

$\square$

Corolario 9.8. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $I = [a, b]$ tal que $f(x) > 0$ $\forall x \in I$, entonces la función $\frac{1}{f}$ es integrable en I.*

Demostración

Demostración. Como f es integrable en I, f está acotada en I, así que, tomando $c = \inf\{f(x) : x \in I\}$ y $d = \sup\{f(x) : x \in I\}$, basta aplicar el teorema anterior con $g = \frac{1}{f}$ en el intervalo $J = [c, d]$.

$\square$

Corolario 9.9. *Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrable en $I = [a, b]$, entonces la función fg es integrable en I.*

Demostración

Demostración. Basta tener en cuenta los resultados anteriores y que

$$fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$$

$\square$

9.4 Teorema fundamental del cálculo

En las secciones anteriores se ha definido la integral de Riemann y hemos estudiado los tipos de funciones integrables, pero, en general, el cálculo de integrales mediante sumas de Riemann suele ser complicado. En esta sección se presenta un importante teorema, al que llegaron Newton y Leibniz de manera simultánea, que relaciona el cálculo integral con el cálculo diferencial y que nos facilitará enormemente el cálculo de integrales sin tener que recurrir a la aproximación mediante sumas de Riemann. Este teorema es tan importante para el Análisis que se ha denominado *teorema fundamental del Cálculo.*

Definición 9.8. Dada $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en $I = [a, b]$, se define la *integral indefinida* de f en I como la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$\forall x \in I$.

Antes de enunciar el teorema, presentamos un resultado necesario para su demostración.

Proposición 9.6. *Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *integrable en* $I = [a, b]$*, entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Demostración

Demostración. Como f es integrable en I, por el Corolario 9.6 $|f|$ también es integrable en I.
Por otro lado, $-|f| \leq f \leq |f|$, y por las propiedades de la integral se tiene

$$(-1)\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

de donde se deduce que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Teorema 9.8. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en $I = [a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es la integral indefinida de f en I, entonces F es continua en I.*

Demostración

Demostración. Como f es integrable en I, está acotada en I, así que sea $c = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.
Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, de manera que si $x, y \in I$ con $x < y$ y $|x - y| < \delta$ se tiene, por la proposición anterior,

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(x)| &= \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq c(y - x) < c\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego F es uniformemente continua en I y, por tanto, F es continua en I.

□

Ejemplo 9.3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

f es integrable pues es monótona, y su integral indefinida es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

ya que para $0 < x < 1$ se tiene

$$F(x) = \int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{x} f = \int_{0}^{x} f = \int_{0}^{1} 1 = x.$$

Presentamos primero una primera versión del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 9.9 (Teorema fundamental del Cálculo I)**.** *Dada $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en $I = [a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ la integral indefinida de f en I, si f es continua en $c \in I$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Demostración

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, como f es continua en c, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.
Tomando $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \delta$ y tal que $c + h \in I$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{\int_a^{c+h} f(t)\, dt - \int_a^c f(t)\, dt}{h} - f(c) \right| \\
&= \left| \left(\frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(t)\, dt \right) - f(c) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \left(\int_c^{c+h} f(t)\, dt - hf(c) \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \left(\int_c^{c+h} f(t)\, dt - \int_c^{c+h} f(c)\, dt \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\, dt \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$.

□

La importancia de este teorema radica en que conecta el concepto de derivada, al cuál se llegó mediante el estudio de las tangentes a la gráfica de una función, y el concepto de integral, al cuál hemos llegado mediante el estudio del área encerrada entre la gráfica de la función y el eje x.

> ⚠ Advertencia
>
> Este teorema nos garantiza que si f es continua en en el punto c, la integral indefinida F es derivable en ese punto y su derivada coincide con $f(c)$, pero no nos permite calcular la integral definida, ya que, como veremos a continuación, existen infinitas funciones con derivada $f(c)$.

Definición 9.9 (Primitiva de una función)**.** Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en I, a cualquier función F que cumple $F' = f$ se le llama *primitiva* de f.

> ⚠ Advertencia
>
> Si F es una primitiva de f, entonces f tiene infinitas primitivas, ya que $(F+C)' = F' + C' = F' + 0 = F' = f$, y por tanto, $(F + C)$ también es una primitiva de f $\forall C \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 9.4. Dada la función $f(x) = 2x$, es fácil ver que $F(x) = x^2+C$ es una primitiva de f para cualquier $C \in \mathbb{R}$.

En el Ejemplo 9.1 vimos que $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, de modo que

$$\int_0^1 2x\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\frac{1}{2} = 1.$$

Si queremos llegar a este resultado usando primitivas, es necesario tomar la primitiva adecuada, es decir, necesitamos saber el valor concreto de la constante C que permite calcular la integral definida. En este caso particular, como F tiene que cumplir que $F(1) = 1 + C = 1 = \int_0^1 2x\,dx$, resulta evidente que debe ser $C = 0$, pero si tomamos cualquier otra constante, como por ejemplo $C = 1$, entonces $F(1) = 1 + 1 = 2 \neq 1 = \int_0^1 2x\,dx$.

Afortunadamente, la segunda parte del teorema fundamental del cálculo resuelve este inconveniente.

Teorema 9.10 (Teorema fundamental del cálculo II)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es integrable en $I = [a, b]$ y F es una primitiva de f en I, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de I tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.
Como F es continua en I, por el Teorema 7.6, para $i = 1, \dots, n$, existe $t_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Pero,

$$s(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, P),$$

por lo que

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

y por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

□

Este teorema, que también se conoce como al *regla de Barrow*, nos permitirá calcular la integral definida de una función a partir de cualquier primitiva suya, sin necesidad de usar las sumas de Riemann.

Ejemplo 9.5. Dada la función $f(x) = x^2$, la función $F_0(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de f, y por tanto, podemos usarla para calcular la siguiente integral

$$\int_0^1 x^2\,dx = F_0(1) - F_0(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pero podríamos haber utilizado cualquier primitiva de f, como por ejemplo $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, ya que

$$\int_0^1 x^2\,dx = F_1(1) - F_1(0) = \frac{1^3}{3} + 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 9.6. Dada la función $f(x) = \cos(x)$, la función $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una primitiva de f, y por tanto, podemos usarla para calcular la siguiente integral

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x)\,dx = F(\pi) - F(\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(\pi/2) = 0 - 1 = -1.$$

Hemos visto que si f es continua en un intervalo $I = [a,b]$, entonces f tiene primitiva en I, pero no toda función integrable en I tiene primitiva.

Ejemplo 9.7. La función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/2 \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \quad \{1/2\} \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[0,1]$, y $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, sin embargo, f no es continua en $[0,1]$ y no verifica el teorema de los valores intermedios, ya que para cualquier $y \in (0,1/2)$, no existe $x \in [0,1/2]$ tal que $f(x) = y$. Por tanto, según el teorema de Darboux (Teorema 7.9), f no es la derivada de ninguna función en $[0,1]$, por lo que no tiene primitiva.

También puede darse el caso de que f tenga primitiva, y sin embargo, no sea integrable.

Ejemplo 9.8. La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \in [-1,1] \quad \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable en cualquier punto de $[-1,1]$ y $f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{x}$, que no está acotada en $[-1,1]$, y por tanto no es integrable en $[-1,1]$.

9.5 Cálculo de areas

Tal y como se ha definido la integral de una función a partir de las sumas de Riemann, no resulta extraño que la principal aplicación de las integrales definidas sea el cálculo del areas encerrada por la gráfica de una función y el eje x en un intervalo de I. Ya hemos visto que cuando $f(x) \geq 0\ \forall x \in I$, si f es integrable en $I = [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ es el área encerrada entre la gráfica de la función f y el eje x en el intervalo I. En esta sección veremos cómo calcular áreas de funciones que también presentan valores negativos en el intervalo de integración y generalizamos el resultado para calcular áreas encerradas entre las gráficas de dos funciones.

9.5.1 Cálculo del area encerrada por una función y el eje x.

Ya hemos visto que cuando una función $f(x) < 0\ \forall x \in I = [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx < 0$, de manera que no puede interpretarse como un área porque geométricamente no tienen sentido las áreas negativas. En general, para evitar este problema, si queremos calcular el área encerrada por la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $I = [a,b]$ debemos calcular la integral definida en I del valor absoluto de la función, es decir,

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ahora bien, para calcular esta integral mediante primitivas, haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, normalmente se recurre a descomponer el intervalo de integración en subintervalos donde la función sea positiva o negativa, integrar f en los intervalos donde la función es positiva, integrar $-f$ en los intervalos donde la función es negativa, y finalmente, sumar las areas correspondientes a cada subintervalo.

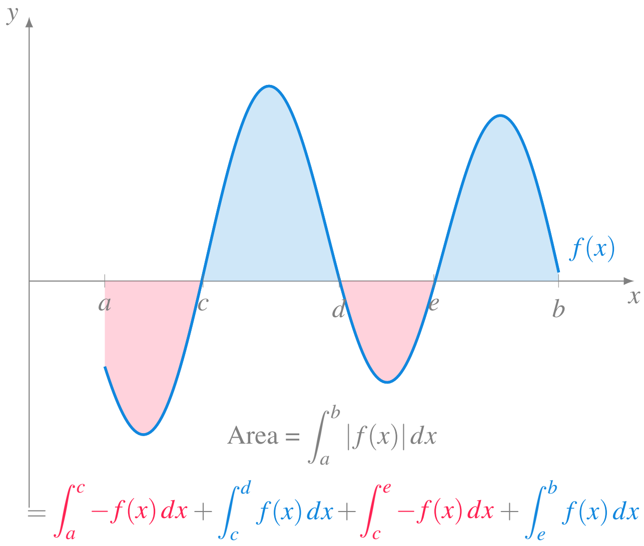

Figura 9.7: Area encerrada por una función positiva y negativa.

Ejemplo 9.9. Veamos cómo calcular el area encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y el eje x en el intervalo $[0, 4]$.

Si resolvemos la ecuación $f(x) = 0$ obtenemos dos raíces $x = 1$ y $x = 3$, de manera que la función es positiva en el intervalo $(0, 1)$ y $(3, 4)$ y negativa en el intervalo $(1, 3)$. Por tanto, el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje x es

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 |f(x)|\,dx &= \int_0^1 x^2 - 4x + 3\,dx - \int_1^3 x^2 - 4x + 3\,dx + \int_3^4 x^2 + 4x + 3\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_3^4 \\
&= \frac{4}{3} - \frac{-4}{3} + \frac{4}{3} = 4
\end{aligned}
$$

9.5.2 Area encerrada entre dos funciones

Si en lugar de calcular el área encerrada entre la gráfica de una función f y el eje x en un intervalo $I = [a, b]$, se quiere calcular el area encerrada entre dos funciones f y g en un intervalo $I = [a, b]$, basta con integrar la diferencia entre las dos funciones $f - g$. Pero como f puede ser mayor que g en algún subintervalo de I y menor en otros, para asegurarnos de calcular el area correcta, hay que integrar el valor absoluto de la diferencia, es decir,

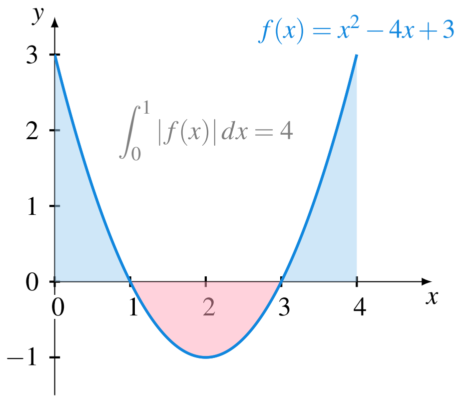

Figura 9.8: Area encerrada por la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Al igual que antes, para calcular esta integral mediante primitivas, haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, tendremos que descomponer el intervalo de integración en subintervalos donde la diferencia $f - g$ sea sea positiva o negativa, integrar $f - g$ en los intervalos donde la diferencia es positiva, integrar $-(f - g) = g - f$ en los intervalos donde la diferencia es negativa, y finalmente, sumar las areas correspondientes a cada subintervalo.

Ejemplo 9.10. Veamos cómo calcular el area encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Si resolvemos la ecuación $f(x) - g(x) = 0$ obtenemos una raíz en $x = \pi/4$ en el intervalo de integración. Se cumple que $f(x) < g(x)$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{4})$ y $f(x) > g(x)$ $\forall x \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$. Por tanto, el área comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo $[0, \pi]$ es

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi |f(x) - g(x)|\, dx &= \int_0^{\pi/4} \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\, dx + \int_{\pi/4}^\pi \operatorname{sen}(x) - \cos(x)\, dx \\
&= [\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]_0^{\pi/4} + [-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]_{\pi/4}^\pi \\
&= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

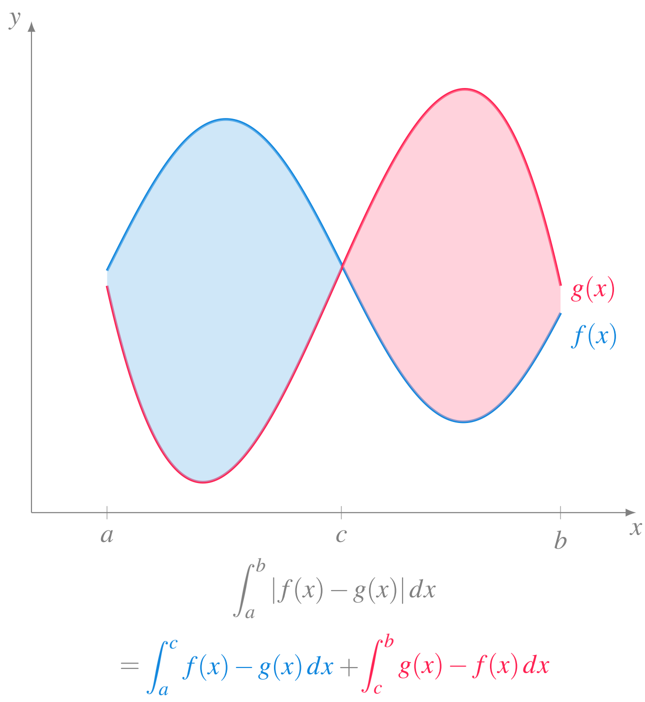

Figura 9.9: Area encerrada entre dos funciones.

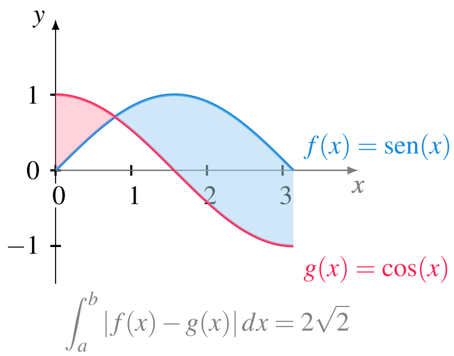

Figura 9.10: Area encerrada entre el seno y el coseno.