Manual de Análisis Matemático Real

para Ciencias e Ingenierías

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Indice de contenidos

Prefacio

¡Bienvenida/os al manual de Análisis Matemático de variable real!

Este libro es una introducción al Análisis Matemático de variable real y cubre los contenidos típicos de un grado en Matemáticas o Ingeniería Matemática.

Este libro se acompaña de una colección de problemas resueltos.

Licencia

1 Teoría de conjuntos

Los conjuntos son entes matemáticos que se usan habitualmente para modelar situaciones reales en las que aparecen colecciones de objetos de cualquier naturaleza, así como las relaciones entre ellos, y por tanto, aparecen en la mayor parte de los problemas de Ciencia o Ingeniería.

Al mismo tiempo, los conjuntos son una de las estructuras matemáticas más básicas sobre las que se construyen la mayoría de las teorías matemáticas.

En este capítulo se estudia el concepto de *conjunto* y sus principales propiedades y relaciones.

1.1 Conjuntos

Definición 1.1 (Conjunto)**.** Un *conjunto* es a una colección o agrupación bien definida de objetos que puede considerarse en sí misma otro objeto. Para representar un conjunto se indican sus elementos entre llaves y normalmente se utilizarán letras mayúsculas para referirse a ellos.

Ejemplo 1.1. Algunos ejemplos de conjuntos son:

- El conjunto de los días de la semana es $A = \{\text{L, M, X, J, V, S, D}\}$.
- El conjunto de los colores básicos es $B = \{\text{rojo, verde, azul}\}$.
- El conjunto de los puntos de un dado $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- El conjunto de los números naturales pares: $D = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

Definición 1.2 (Elementos)**.** Los objetos que componen un conjunto se llaman *elementos* o miembros del conjunto.

Los elementos de un conjunto pueden ser cualquier cosa (días, colores, personas, etc), pero en este curso nos centraremos los conjuntos numéricos, es decir, los conjuntos cuyos elementos son números, ya que son los que se estudian en el Análisis Matemático.

Existen dos formas de definir un conjunto: por *extensión* o por *comprensión*. La definición extensiva consiste en listar de manera explícita todos sus elementos, como por ejemplo $\{1, 2, 3\}$, mientras que la intensiva o por comprensión, consiste en dar una propiedad que cumplen los elementos del conjunto y solo ellos, como por ejemplo el conjunto de los números naturales menores que 4. En este último caso se suele utilizar la notación $\{x : P(x)\}$, donde $P(x)$ es la propiedad que cumple x.

Mientras que las definiciones por extensión no presentan problemas, hay que tener cuidado con las definiciones por comprensión, pues no todas las propiedades definen conjuntos válidos, tal y como demostró Bertrand Russell con su famosa paradoja del barbero.

Definición 1.3 (Pertenencia)**.** Si a es un elemento de un conjunto A, se dice que a *pertenence* a A y se denota $a \in A$. Por el contrario, si a no es un elemento del conjunto A, se dice que *no pertenece* a A y se denota $a \notin A$.

Ejemplo 1.2. Si A es el conjunto de los números naturales pares, $2 \in A$, pero $1 \notin A$.

Definición 1.4 (Igualdad)**.** Se dice que dos conjuntos A y B son iguales, y se denota $A = B$, si tienen exactamente los mismos elementos. En caso contrario se escribe $A \neq B$.

Conviene remarcar que en un conjunto no puede haber elementos repetidos y tampoco importa el orden en que se listan los elementos.

Ejemplo 1.3. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

Proposición 1.1. *La igualdad de conjuntos es una* relación de equivalencia*, es decir, satisface las propiedades:*

1. Reflexiva: $A = A$.
2. Simétrica: *Si* $A = B$ *entonces* $B = A$.
3. Transitiva: $A = B$ *y* $B = C$*, entonces* $A = C$.

Definición 1.5 (Subconjunto)**.** Se dice que un conjunto A es un *subconjunto* o está *incluído* en otro conjunto B, y se denota $A \subseteq B$, si todos los elementos de A pertenecen a B, es decir,

$$\forall x \in A, x \in B$$

Cuando $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ se dice que A está *estríctamente incluido* en B o que A es un *subconjunto propio* de B y se escribe $A \subsetneq B$.

Ejemplo 1.4. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{3, 1, 2\}$ y $\{1, 3\} \subsetneq \{3, 1, 2\}$.

Proposición 1.2. *La inclusión de conjuntos es una* relación de orden parcial*, es decir, satisface las propiedades:*

1. Reflexiva: $A \subseteq A$.
2. Antisimétrica: *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$*, entonces* $A = B$.
3. Transitiva: $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$*, entonces* $A \subseteq C$.

Definición 1.6 (Conjunto vacío)**.** El conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío y se denota $\emptyset$.

1.2 Álgebra de conjuntos

A continuación se definen las principales operaciones sobre conjuntos y sus propiedades.

Definición 1.7 (Unión)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B, y se denota $A \cup B$, al conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

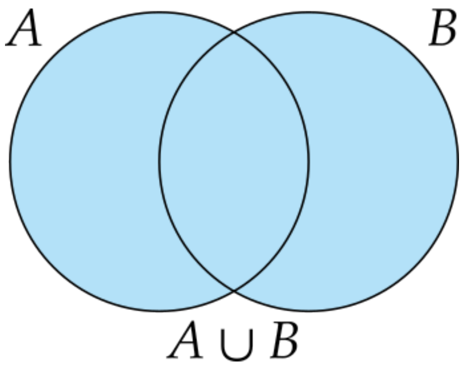

Figura 1.1: Unión de conjuntos

Definición 1.8 (Intersección)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *intersección* de A y B, y se denota $A \cap B$, al conjunto de todos los elementos comunes a A y B.

$$A \cap B = \{x \,:\, x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

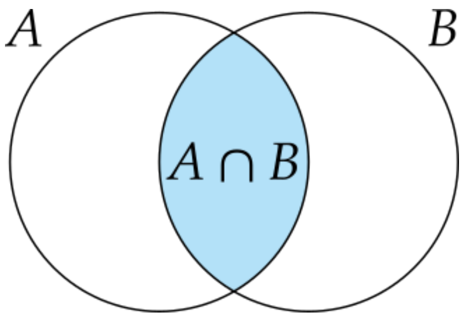

Figura 1.2: Intersección de conjuntos

Definición 1.9 (Complemento)**.** Dado un conjunto $A \subset \Omega$, se llama *complemento* de A con respecto a Ω, y se denota $\overline{A}$, al conjunto de todos los elementos de Ω que no pertenecen a A.

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \,:\, x \notin A\}.$$

Definición 1.10 (Diferencia)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia* de A y B, y se denota $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir,

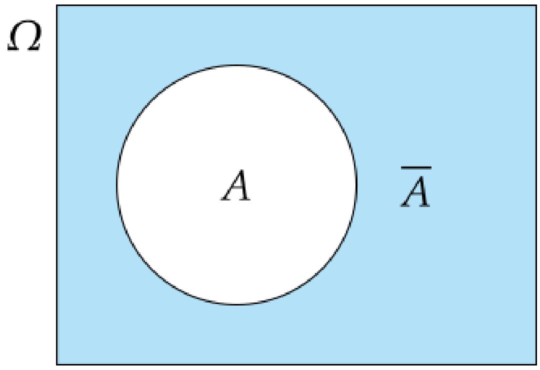

Figura 1.3: Complemento de un conjunto

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

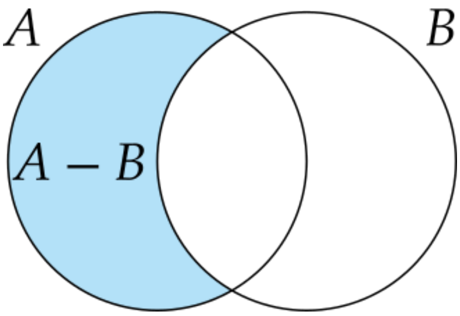

Figura 1.4: Diferencia de conjuntos

Definición 1.11 (Diferencia simétrica)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia simétrica* de A y B, y se denota $A \triangle B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B, pero no a ambos a la vez, es decir,

$$\begin{aligned} A \triangle B &= \{x : x \in A - B \text{ o } x \in B - A\} \\ &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

- La unión de A y B es $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

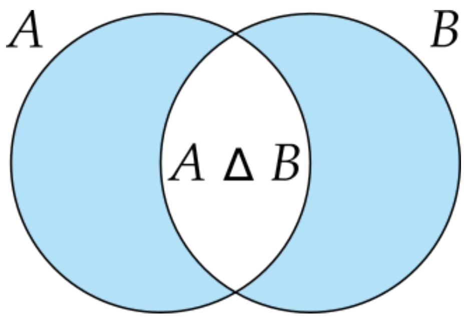

Figura 1.5: Diferencia simétrica de conjuntos

- La intersección de A y B es $A \cap B = \{2, 4\}$.
- El contrario de A con respecto a Ω es $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.
- La diferencia de A y B es $A - B = \{6\}$, y la diferencia de B y A es $B - A = \{1, 3\}$.
- La diferencia simétrica de A y B es $A \triangle B = \{1, 3, 6\}$.

Proposición 1.3. *Dado un conjunto universo Ω y los conjuntos $A, B, C \subseteq \Omega$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Idempotencia: $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$.*
2. *Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.*
3. *Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.*
4. *Distributiva: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.*
5. *Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \Omega = A$.*
6. *Elemento absorvente: $A \cup \Omega = \Omega$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.*
7. *Elemento simétrico complementario: $A \cup \overline{A} = E$ y $A \cap \overline{A} = \emptyset$.*
8. *Doble complemento: $\overline{\overline{A}} = A$.*
9. *Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*
10. *$A \cap B \subseteq A \cup B$.*
11. *$A - B = A \cap \overline{B}$.*
12. *$A - B \subseteq A$ y $B - A \subseteq B$.*
13. *$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.*
14. *$\overline{\Omega} = \emptyset$ y $\overline{\emptyset} = \Omega$.*

Definición 1.12 (Conjuntos disjuntos)**.** Dados dos conjuntos A y B, se dice que son *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Definición 1.13 (Conjunto potencia)**.** Dado un conjunto A, se llama *conjunto potencia* o *conjunto de las partes* de A, y se denota $\mathcal{P}(A)$, al conjunto de todos los subconjuntos de A, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \,:\, X \subseteq A\}$$

Ejemplo 1.6. El conjunto potencia del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

1.3 Relaciones entre conjuntos

Definición 1.14 (Par ordenado)**.** Dados dos elementos a y b se define el *par ordenado* (a, b) como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

De manera más general, se define una *n-tupla ordenada* como

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

De forma mas informal, decimos que (a, b) es un par ordenado si el primer elemento (a) se distingue del segundo elemento (b). Por eso, se tiene que $(a, b) \neq (b, a)$, mientras que para conjuntos $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definición 1.15 (Producto cartesiano)**.** Dados dos conjuntos A y B, se llama *producto cartesiano* de A y B, y se denota $A \times B$, al conjunto de los pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) \,:\, a \in A \text{ y } b \in B\}$$

De manera más general, si se tienen n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el *producto cartesiano generalizado* es

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \,:\, a_i \in A_i \ \forall i = 1, \ldots n\}$$

Definición 1.16 (Relación binaria)**.** Dados dos conjuntos A y B, se dice que R es una *relación binaria* sobre A y B si es un subconjunto del producto cartesiano de A y B, es decir,

$$R \subseteq A \times B$$

Si A y B son el mismo conjunto, se dice que R es una *relación binaria homogénea.*

Cuando un par ordenado pertenece a una relación, $(a, b) \in R$, también se suele escribir aRb.

Dependiendo de las propiedades que cumpla una relación tenemos los siguientes tipos de relaciones:

- **Reflexiva**: $\forall a \in A, (a, a) \in R$
- **Irreflexiva**: $\forall a \in A, (a, a) \notin R.$
- **Simétrica**: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R.$
- **Asimétrica**: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R.$
- **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b.$
- **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R.$
- **Total**: $\forall a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R.$

Definición 1.17 (Relación de equivalencia)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $R \subseteq A \times A$, se dice que R es una *relación de equivalencia*, y se denota $(A, \sim)$, si es que cumple que R es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, si cumple las propiedades

- *Reflexiva:* $\forall a \in A, a \sim a.$
- *Simétrica:* $\forall a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $b \sim a.$
- *Transitiva:* $\forall a, b, c \in A$, si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c.$

Ejemplo 1.7. Ya hemos visto que la relación de igualdad matemática entre los elementos de un conjunto es una relación de equivalencia.

Definición 1.18 (Relación de orden)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que $\preceq$ es una *relación de orden*, si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, si cumple las propiedades

- *Reflexiva:* $\forall a \in A, a \preceq a.$

- *Antisimétrica:* $\forall a, b \in A$, si $a \preceq b$ y $b \preceq a$, entonces $a = b$.
- *Transitiva:* $\forall a, b, c \in A$, si $a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$.

Definición 1.19 (Relación de orden parcial)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que $\preceq$ es una *relación de orden parcial*, si es una relación de orden y al menos dos elementos de A están relacionados mediante $\preceq$, es decir,

$$\exists x, y \in A, \; x \preceq y \text{ o } y \preceq x.$$

Al conjunto A con la relación de orden parcial $\preceq$ se le llama *conjunto parcialmente ordenado*, y se denota $(A, \preceq)$.

Ejemplo 1.8. El conjunto potencia de un conjunto A con la relación de inclusión es un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Definición 1.20 (Relación de orden total)**.** Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que $\preceq$ es una *relación de orden total*, si es una relación de orden y todos los elementos de A se relacionan entre sí mediante $\preceq$, es decir,

$$\forall x, y \in A, \; x \preceq y \text{ o } y \preceq x.$$

Al conjunto A con la relación de orden total $\preceq$ se le llama *conjunto totalmente ordenado*, y se denota $(A, \preceq)$.

Ejemplo 1.9. La relación de orden de los números naturales $(\mathbb{N}, \leq)$ es un orden totalmente ordenado. Sin embargo, la relación de inclusión en el conjunto potencia de un conjunto A $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ no es un orden parcialmente ordenado, ya que dados dos elementos $a \neq b$ de A, se cumple que $\{a\} \subsetneq \{b\}$ y $\{b\} \subsetneq \{a\}$.

1.4 Cotas y extremos

Definición 1.21 (Cota superior)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se dice que un elemento $c \in A$ es una *cota superior* de B, si todos los elementos de B son menores o iguales a c según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in B, x \preceq c.$$

Definición 1.22 (Cota inferior)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se dice que un elemento $c \in A$ es una *cota inferior* de B, si todos los elementos de B son mayores o iguales a c según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in B, c \preceq x.$$

Definición 1.23 (Máximo)**.** Dado un conjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$, se dice que un elemento $m \in A$ es un *máximo* de A, si cualquier otro elemento de A es mayor o igual que él según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in A, x \preceq m.$$

Definición 1.24 (Mínimo)**.** Dado un conjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$, se dice que un elemento $m \in A$ es un *mínimo* de A, si y cualquier otro elemento de A es menor o igual que él según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in A, m \preceq x.$$

Teorema 1.1 (Unicidad de los extremos)**.** *Dado un conjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$, si existe el máximo de A entonces es único. Lo mismo es cierto para el mínimo.*

i Demostración

Demostración. Supongamos que el conjunto A tienen dos máximos $m_1 \neq m_2$. Puesto que m_1 es un máximo de A, se cumple que $\forall x \in A, x \preceq m_1$. y, en particular, $m_2 \preceq m_1$. Del mismo modo, como m_2 es un máximo de A, se cumple que $\forall x \in A, x \preceq m_2$. y, en particular, $m_1 \preceq m_2$.
Así pues, se tiene que

$$m_2 \preceq m_1 \text{ y } m_1 \preceq m_2,$$

pero como $\preceq$ es un orden parcial, por la propiedad antisimétrica se concluye que $m_1 = m_2$, por lo que el máximo es único.
De manera análoga se puede probar que el mínimo es único.

□

Dado que el máximo y mínimo de un conjunto, cuando existen, son únicos, es común referirse a ellos como *max* y *min* respectivamente. Obsérvese, no obstante, que un conjunto puede no tener máximo o mínimo.

Definición 1.25 (Supremo)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se llama *supremo* de B y se denota $\sup(B)$ a la menor de las cotas superiores de B.

Definición 1.26 (Ínfimo)**.** Dado un subconjunto con una relación de orden parcial $(A, \preceq)$ y un subconjunto $B \subseteq A$, se llama *ínfimo* de B y se denota $\inf(B)$ a la mayor de las cotas inferiores de B.

Obsérvese que un conjunto puede no tener supremo o ínfimo.

Ejemplo 1.10. Si se toma el conjunto de los números naturales con la relación de orden total $(\mathbb{N}, \leq)$, para el conjunto $B = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que cualquier $x \in \mathbb{N}$ tal que $3 \leq x$ es una cota superior de B, por tanto 3 es el supremo de B, y además es un máximo puesto que $3 \in B$.

Por otro lado, si se considera el conjunto de los números reales con la relación de orden total $(\mathbb{R}, \leq)$, para el intervalo $(0, 1)$ se tiene que cualquier $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 0$ es una cota inferior y $x \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq x$ es una cota superior, de modo que 0 es el ínfimo y 1 el supremo. Sin embargo, este conjunto no tiene mínimo ni tampoco máximo puesto que $0 \notin (0, 1)$ y $1 \notin (0, 1)$.

Finalmente, si se considera el conjunto de los números enteros con la relación de orden total $(\mathbb{Z}, \leq)$, para el conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par}\}$, no existen cotas superiores ni inferiores, y por tanto tampoco tiene supremo, ínfimo, máximo ni mínimo.

1.5 Funciones

El concepto de función es uno de los más importantes en el Análisis Matemático, ya que muchos de los fenómenos naturales en los que una magnitud depende de otra se modelizan mediante funciones.

Definición 1.27 (Función)**.** Se dice que una relación binaria $f \subseteq A \times B$, con A y B conjuntos no vacios, es una *función* o *aplicación*, y se denota $f : A \to B$, si f no contiene dos pares ordenados distintos con la misma primera componente, es decir,

$$\forall a \in A, \forall b_1, b_2 \in B, \text{ si } (a, b_1) \in f \text{ y } (a, b_2) \in f, \text{ entonces } b_1 = b_2.$$

Es habitual representar los pares de una función con la notación $y = f(x)$ donde x es la primera componente del par e y la segunda.

Ejemplo 1.11. La relación binaria $f = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, b)\}$ es una función, pero la relación $g = \{(1, a), (2, c), (3, c), (2, b)\}$ no lo es porque existen dos pares cuya primera componente es 2. Del mismo modo la función raíz cuadrada $y = f(x) = \sqrt{x}$ no es una función en el conjunto de los números reales, ya que, por ejemplo $\sqrt{1} = \pm 1$.

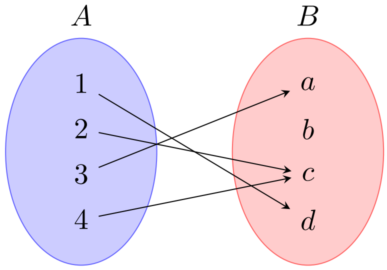

Figura 1.6: Ejemplo de función

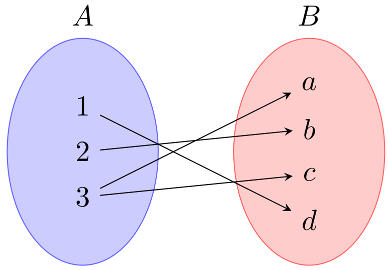

Figura 1.7: Ejemplo de no función

Definición 1.28 (Dominio)**.** Dada una función $f : A \to B$, se llama *dominio* de f, y se denota $FrDom(f)$ al conjunto de las primeras componentes de los pares de f, es decir,

$$FrDom(f) = \{a \in A : \exists b \in B, (a, b) \in f\}$$

Definición 1.29 (Imagen)**.** Dada una función $f : A \to B$, se llama *imagen* de f, y se denota $FrIm(f)$ al conjunto de las segundas componentes de los pares de f, es decir,

$$FrIm(f) = \{b \in B : \exists a \in A, (a, b) \in f\}$$

Definición 1.30 (Función inyectiva)**.** Dada una función $f : A \to B$, se dice que f es *inyectiva* si no existen dos elementos de A con la misma imagen, es decir,

$$\forall a_1, a_2 \in A, \text{ si } f(a_1) = f(a_2), \text{ entonces } a_1 = a_2.$$

Definición 1.31 (Función sobreyectiva)**.** Dada una función $f : A \to B$, se dice que f es *sobreyectiva* si todo elemento de B tiene una preimagen (está relacionado con algún elemento de A mediante f), es decir,

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$$

Definición 1.32 (Función biyectiva)**.** Dada una función $f : A \to B$, se dice que f es *biyectiva*, si f es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva.

Definición 1.33 (Función identidad)**.** Dado un conjunto A, se llama *función identidad* de A, y se denota $Frid_A : A \to A$, a la función que empareja cada elemento de A consigo mismo, es decir,

$$Frid_A(a) = a, \forall a \in A.$$

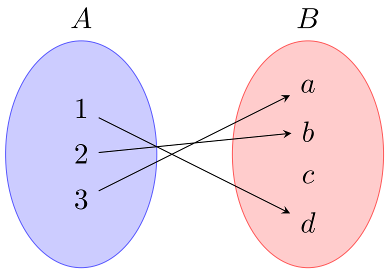

Figura 1.8: Función inyectiva y no sobreyectiva

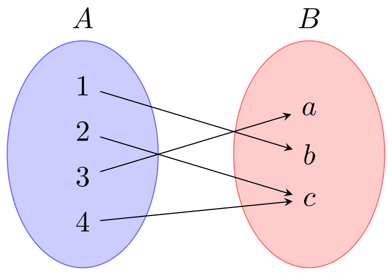

Figura 1.9: Función sobreyectiva y no inyectiva

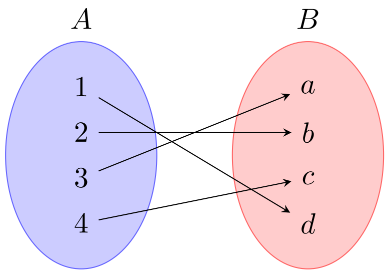

Figura 1.10: Función biyectiva

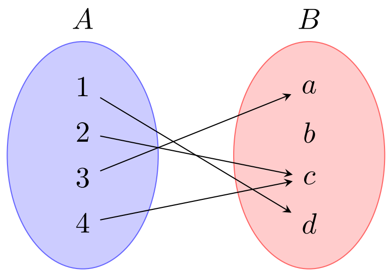

Figura 1.11: Función no inyectiva y no sobreyectiva

Definición 1.34 (Función inversa)**.** Dada una función $f : A \to B$, se llama *función inversa* de f, y se denota $f^{-1} : B \to A$, a la función que resulta de revertir el orden de los pares de f, es decir,

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}.$$

Obsérvese que para que exista la función inversa de f, f debe ser inyectiva.

En muchas ocasiones, el valor de salida de una función se puede utilizar como la entrada de otra función, concatenando la aplicación de las dos funciones.

Definición 1.35 (Composición de funciones)**.** Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, tales que $FrIm(f) \subseteq FrDom(g)$, se llama *composición* de f con g, y se denota $g \circ f : A \to D$, a la funcion que a cada elemento del dominio de A le asocia el elemento que resulta de aplicar g a la imagen de a mediante f, es decir,

$$g \circ f(a) = g(f(a)), \forall a \in A.$$

Proposición 1.4. *Dada una función $f : A \to B$, si existe \$^{-1}, entonces $f \circ f^{-1} = Frid_A$ y $f^{-1} \circ f = Frid_B$.*

1.6 Cardinalidad de un conjunto

Definición 1.36 (Cardinal)**.** Dado un conjunto A, se llama *cardinal* de A, y se denota $|A|$, al número de elementos de A.

De manera informal, se puede decir Que el cardinal de un conjunto es su tamaño.

Ejemplo 1.12. El cardinal del conjunto $A = \{a, b, c\}$ es $|A| = 3$.

Proposición 1.5. *El cardinal del conjunto potencia de un conjunto A es $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.*

Demostración

Demostración. Se puede dar una prueba mediante coeficientes binomiales. Si A tiene n elementos, es decir, $|\mathrm{A}| = n$, el número de subconjuntos distintos con k elementos es igual al número combinatorio

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Como un subconjunto de A puede tener desde 0 hasta n elementos, en total, el número de posibles subconjuntos de A será

$$|\mathcal{P}(A)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

y según el teorema del binomio de Newton se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = 2^{|A|}.$$

$\square$

Definición 1.37 (Conjuntos equipotentes)**.** Se dice que dos conjuntos A y B son *equipotentes*, y se denota $A \approx B$, si tienen la misma cantidad de elementos, es decir, si $|A| = |B|$.

Proposición 1.6. *Dos conjuntos A y B son equipotentes si y solo si cada elemento de A puede emparejarse con uno de B, de manera que todos los elementos de B sean pareja de uno de A y solo de uno, es decir, existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$.*

Proposición 1.7. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia, es decir, satisface las siguientes propiedades:*

- Reflexiva: *$A \approx A$ para todo conjunto A.*
- Simétrica: *Si $A \approx B$, entonces $B \approx A$, para cualesquiera conjuntos A y B.*
- Transitiva: *Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$ para cualesquiera conjuntos A, B y C.*

De igual modo se puede definir una relación que capture la noción de que un conjunto es de menor tamaño que otro.

Definición 1.38 (Conjunto minuspotente)**.** Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es *minuspotente* a B, y se denota $A \preceq B$, si el cardinal de A es menor o igual que el de B, es decir, si $|A| \leq |B|$.

Proposición 1.8. *El conjunto A es minuspotente al conjunto B si y solo si existe una aplicación inyectiva $f : A \to B$.*

Proposición 1.9. *La relación de minuspotencia es una relación de orden, es decir, satisface las siguientes propiedades:*

- *Reflexiva: $A \preceq A$ para todo conjunto A.*
- *Simétrica: Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \approx B$, para cualesquiera conjuntos A y B.*
- *Transitiva: Si $A \preceq B$ y $B \preceq C$, entonces $A \preceq C$ para cualesquiera conjuntos A, B y C.*

Definición 1.39 (Conjunto finito)**.** Se dice que un conjunto A es *finito* si es que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\{1, 2, 3, \ldots, n\}|$. Cuando esto ocurre, el cardinal de A es $|A| = n$.

Definición 1.40 (Conjunto infinito)**.** Se dice que un conjunto A es *infinito* si no es finito. En tal caso su cardinal se denota $|A| = \infty$.

Hay que dejar claro que el símbolo ∞ es una notación de conveniencia que no es ningún número.

Ejemplo 1.13. El conjunto $A = \{a, b, c\}$ es finito ya que puede definirse una aplicación biyectiva $f : A \to \{1, 2, 3\}$ con los pares $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$, y por tanto, $|A| = 3$.

Por otro lado, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es infinito, ya que no puede ponerse en correspondencia biyectiva con ningún conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, $|\mathbb{N}| = \infty$.

Cabe preguntarse si dos conjuntos infinitos son siempre del mismo tamaño. Para responder a la pregunta basta con aplicar la Proposición 1.6.

Ejemplo 1.14. El conjunto de los números naturales pares P es infinito y también lo es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Además ambos son equipotentes pues se puede definir una aplicación biyectiva $f(n) = 2n \; \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $\mathbb{N} \approx P$.

Sin embargo, como se verá más adelante, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es equipotente al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, sino minuspotente. Por tanto, existen conjuntos infinitos de distintos tamaños. Para demostrarlo se necesita introducir un nuevo concepto.

Definición 1.41 (Conjunto numerable)**.** Se dice que un conjunto A es *numerable* si tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Corolario 1.1. *Un conjunto A es numerable si existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \to A$.*

En otras palabras, un conjunto es infinito numerable si tiene correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

La prueba de este resultado es inmediata aplicando la Proposición 1.6.

Ejemplo 1.15. En el ejemplo anterior hemos visto que el conjunto de los números pares es equipotente al conjunto de los números naturales, y por consiguiente, es numerable.

Del mismo modo se puede probar que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ también es numerable, pues se puede definir una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera

$$f(n) = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es impar,} \\ -n/2 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es par.} \end{cases}$$

Sin embargo, existen conjuntos infinitos que no son numerables, como por ejemplo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

David Hilbert, propuso una interesante paradoja para probar este hecho, conocida como la paradoja del hotel infinito

Georg Cantor dio una prueba formal de esto mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Cantor)**.** *El conjunto potencia de cualquier conjunto A tiene un cardinal estrictamente mayor que el cardinal de A, es decir, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demostración

Demostración. Basta con demostrar que no existe una aplicación $f : A \to \mathcal{P}(A)$ sobreyectiva, y para ello basta con encontrar un subconjunto B de A que no sea la imagen mediante f de ningún elemento de A.
Tomando el siguiente subconjunto de A

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

es decir, el conjunto de los elementos de A que no están contenidos en el subconjunto de A que le corresponde mediante f, se puede probar por reducción al absurdo que B no puede ser la imagen mediante f de ningún elemento de A.
Sunpóngase que que existe $a \in A$ tal que $B = f(a)$. Como B es un subconjunto de A, pueden darse dos casos:

- Si $a \in B$, entonces por la definición de B se tiene que $a \notin f(a) = B$, lo cual es contradictorio.

- Si $a \notin B$, entonces por la definición de B se tiene que $a \in f(a) = B$, que también es contradictorio.

Así pues, en ambos casos se llega a una contradicción y, por tanto, se concluye que no existe $a = f(B)$, por lo que f no es sobreyectiva y $|A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

$\square$

Teorema 1.3 (Cardinalidad del continuo)**.** *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene un cardinal igual al del conjunto potencia del conjunto de los números naturales $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, es decir, $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$.*

i Demostración

Demostración. Daremos una demostración partiendo del hecho de que cada número real tiene una expansión decimal infinita de la forma $e.d$ donde e es la parte entera y d la decimal infinita (por ejemplo, $3/2$ se puede representar por la expansión decimal infinita $1.5000\ldots$).
El número de dígitos en la parte decimal es numerable ya que pueden ponerse fácilmente en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$ y, por tanto, cualquier número real tendrá $|\mathbb{N}|$ dígitos en su parte decimal, lo que nos da, al ser nuestro sistema de numeración en base 10, un total de $10^{|\mathbb{N}|}$ posibles combinaciones en la parte decimal.
En cuanto a la parte entera, ya se ha visto que el conjunto de los números enteros es equipotente al de los números naturales, por lo que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
Así pues, el número total de expansiones decimales infinitas es $|\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|}$, y como todo número real tienen una expansión decimal infinita, se tiene

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|}.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 1.2, $|\mathbb{N}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$, por lo que finalmente se tiene $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|} \leq 2^{|\mathbb{N}|}10^{|\mathbb{N}|} \leq 2^{|\mathbb{N}|}(2^4)^{|\mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{N}|+4|\mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{N}|}$, ya que por aritmética de las cardinalidades se tiene que $|\mathbb{N}| + 4|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
Para probar el otro sentido de la desigualdad, basta tomar el conjunto de las fracciones decimales de la forma $0.d_1d_2d_3\ldots$ donde $d_i \in \{0, 1\}$ (por ejemplo $0.101000\ldots$) que claramente es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Puesto que cada número de este conjunto tiene infinitos dígitos decimales, de nuevo, se puede poner en correspondencia biyectiva cada dígito con un número natural, y como para cada posición hay dos posibles dígitos (0 y 1), el número total de números en este conjunto es $2^{|\mathbb{N}|}$, por lo que se tiene que $2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{R}|$.
Así pues, como $|\mathbb{R}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$ y $2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{R}|$, se concluye que $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$.

$\square$

Tomando iterativamente el conjunto potencia de un conjunto infinito y aplicando el teorema de Cantor, obtenemos una jerarquía infinita de cardinales infinitos, cada uno estrictamente mayor que el anterior.

2 El sistema de los números reales

En este capítulo se estudia el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ ya que el Análisis Matemático estudia conceptos y construcciones realizadas a partir de este conjunto de números y sus propiedades.

Antes de presentar el conjunto de los números reales se presentan otros subconjuntos suyos más elementales que suelen introducirse antes. Iremos ampliando sucesivamente estos conjuntos para dotarlos de nuevas propiedades hasta llegar al conjunto de los números reales.

2.1 El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

El primer conjunto de números que tradicionalmente suele estudiarse en el colegio son los números *naturales* $\mathbb{N}$, ya que sirven para contar.

En los números naturales se define una relación de orden $<$ $(1 < 2 < 3 < \cdots)$, y dos operaciones binarias, la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$, con una serie de propiedades que dotan al conjunto de una estructura de *semianillo unitario conmutativo bien ordenado*:

a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{N}\ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
b. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a\ \forall a, b \in \mathbb{N}$. d.Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{N}\ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
d. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
e. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a\ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
f. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{N}$.
g. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

En el conjunto de los números naturales todo número tiene un posterior, pero no un anterior.

2.2 El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

Los números naturales no tienen simétrico (opuesto) para la suma, de manera que no puede definirse la resta. Para ello es necesario extender el conjunto de los naturales con los números negativos $(-1, -2, -3, \ldots)$, y el cero (0).

Extendiendo el orden y las operaciones de los naturales a estos números se obtiene el conjunto de los números *enteros* $\mathbb{Z}$ con las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de *anillo conmutativo unitario y totalmente ordenado*:

a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{Z}\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
b. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
d. Elemento neutro de la suma: $0 + a = a\ \forall a \in \mathbb{Z}$.
e. Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $a + (-a) = 0\ \forall a \in \mathbb{Z}$.
f. Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{Z}\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
g. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
h. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
i. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{Z}$.
j. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Al introducir el opuesto de la suma, se puede definir bien la resta como $a - b = a + (-b)\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

En el conjunto de los enteros todo número tiene un anterior y un posterior.

2.3 El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$

Los números enteros (salvo el -1 y 1) no tienen elemento simétrico (inverso) para el producto, de manera que no puede definirse la división. Para ello es necesario extender el conjunto de los enteros con los números fraccionarios, que se definen de la forma a/b donde el numerador a y el denominador b son números enteros primos entre si (por ejemplo $1/2$ o $-5/3$).

Extendiendo el orden y las operaciones de los enteros a estos números se obtiene el conjunto de los números *racionales* $\mathbb{Q}$ con las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de *cuerpo conmutativo totalmente ordenado*:

a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{Q}\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
b. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.
c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
d. Elemento neutro de la suma: $0 + a = a\ \forall a \in \mathbb{Q}$.
e. Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $a + (-a) = 0\ \forall a \in \mathbb{Q}$.

f. Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{Q}\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
g. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.
h. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
i. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{Q}$.
j. Elemento simétrico (inverso) del producto: $a \cdot a^{-1} = 1\ \forall a \neq 0 \in \mathbb{Q}$.
k. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Al introducir el inverso del producto, se puede definir la división como $a/b = a \cdot b^{-1}\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.

A diferencia de los enteros, aunque los racionales también tienen un orden total, el orden es *denso*, es decir, entre dos números racionales cualesquiera siempre existe otro número racional (en realidad infinitos), por lo que no existe el anterior y el posterior de cualquier número racional.

2.4 El conjunto de los números irracionales

Muy pronto los griegos se dieron cuenta de que había otra clase de números que no podían representarse como cociente de números enteros y por tanto no pertenecían al conjunto de los números racionales, de manera que este conjunto es incompleto. El ejemplo clásico es el número $\sqrt{2}$ que se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con ambos lados de longitud 1.

Teorema 2.1 (Irracionalidad de $\sqrt{2}$). *El número $\sqrt{2}$ no es racional.*

Demostración

Demostración. Probar que $\sqrt{2}$ no es racional es equivalente a probar que no existe un número racional m/n tal que $(m/n)^2 = 2$. La demostración de este último resultado es sencilla por reducción al absurdo.
Supongamos que existe un número m/n con $n, m \in \mathbb{Z}$ primos entre si, tal que $(m/n)^2 = 2$, o lo que es lo mismo,

$$m^2 = 2n^2.$$

De aquí se puede deducir que m^2 es par, lo que implica que m también es par, pues si m fuese impar, su cuadrado también sería impar. En tal caso, m podría escribirse como $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y se tendría $m^2 = 4k^2$. Sustituyendo ahora en la ecuación inicial se tiene $4k^2 = 2n^2$, lo que implica que $2k^2 = n^2$. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, se tendría que n también sería un número par, por lo se obtiene un absurdo ya que partimos de que m y n eran primos entre sí.

□

Estos números que no son racionales se denominan *irracionales*, y, al igual que los números racionales, es un conjunto denso.

Teorema 2.2. *Entre dos números racionales siempre existe un número irracional.*

Demostración

Demostración. Tomemos para empezar un número irracional entre 0 y 1, como por ejemplo, $1/\sqrt{2} = 0.7071\ldots$, y consideremos dos números racionales cualesquiera $a, b \in \mathbb{Q}$, tales que $a < b$. Como $0 < 1/\sqrt{2} < 1$ y $b - a > 0$, se tiene que

$$0(b-a) < \frac{b-a}{\sqrt{2}} < 1(b-a),$$

o lo que es lo mismo, simplificando

$$0 < \frac{b-a}{\sqrt{2}} < (b-a).$$

Si ahora sumamos a a cada término de la desigualdad se tiene

$$a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b,$$

de manera que el número $a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ está entre a y b, pero además, se trata de un número irracional, ya que es el producto de un número irracional $1/\sqrt{2}$ por un racional $b - a$ y más otro racional a.

□

En realidad, se puede probar que entre dos números racionales no solo existe un número irracional, sino una infinidad de ellos. Y del mismo modo, se puede probar que entre dos números irracionales existe una infinidad de números racionales.

2.5 El conjunto de los números reales

La extensión de los números racionales con los irracionales da lugar al conjunto de los números *reales*. Su construcción formal puede realizarse de distintas maneras (cortaduras de Dedekind o sucesiones de Cauchy), pero todas ellas satisfacen la siguiente definición axiomática:

Definición 2.1 (Números reales)**.** El sistema de los números *reales* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ está formado por un conjunto no vacío de números $\mathbb{R}$, sobre los que se definen dos operaciones binarias, suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, que satisfacen los siguientes axiomas:

Axiomas de cuerpo algebraico.$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo abeliano:

- *Axioma 1.* Propiedad de cierre de la suma: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$.
- *Axioma 2.* Propiedad asociativa de la suma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- *Axioma 3.* Propiedad conmutativa de la suma: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.
- *Axioma 4.* Elemento neutro de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, tal que $0 + a = a$.
- *Axioma 5.* Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un número $-a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = 0$.
- *Axioma 6.* Propiedad de cierre del producto: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \in \mathbb{R}$.
- *Axioma 7.* Propiedad asociativa del producto: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- *Axioma 8.* Propiedad conmutativa del producto: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- *Axioma 9.* Elemento neutro del producto: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un número $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $1 \cdot a = a$.
- *Axioma 10.* Elemento simétrico (o inverso) del producto: $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un número $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
- *Axioma 11.* Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Axiomas de orden. Existe un subconjunto no vacío $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado el conjunto de los *números reales positivos*, que verifica los siguientes axiomas:

- *Axioma 12.* Cierre del la suma en los reales positivos: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $a + b \in \mathbb{R}^+$.
- *Axioma 13.* Cierre del producto en los reales positivos: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.
- *Axioma 14.* Propiedad de tricotomía: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes alternativas es cierta: $a \in \mathbb{R}^+$, $a = 0$ o $-a \in \mathbb{R}^+$.

Axioma de completitud

- *Axioma 15.* Axioma del supremo: Si un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota superior, entonces tiene un supremo $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

El último axioma es el que diferencia el conjunto de los números reales de otros cuerpos totalmente ordenados como los racionales.

A partir de las propiedades de las suma y el producto se pueden definir nos nuevas operaciones en $\mathbb{R}$.

Definición 2.2 (Resta)**.** Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$, se define la *resta* de a y b, y se denota $a - b$, como la suma de a y el opuesto de b,

$$a - b = a + (-b).$$

Definición 2.3 (División)**.** Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$, se define la *división* de a y b, y se denota a/b, como el producto de a y el inverso de b,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Definición 2.4 (Potencia)**.** Dado un número reale $a \in \mathbb{R}$ y un número $n \in \mathbb{N}$, se define la *potencia* de a elevado a n, y se denota a^n, como el producto de a por sí mismo n veces,

$$a^n = a \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot a.$$

A a se le llama la *base* y a n el *exponente* de la potencia.

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Proposición 2.1 (Propiedades de algebraicas)**.** *De los axiomas de cuerpo algebraico de los números reales se deducen las siguientes propiedades:*

a. *El elemento neutro de la suma* (0) *es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a + b = a$, *entonces* $b = 0$.
b. *El elemento neutro del producto* (1) *es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a \cdot b = a$, *entonces* $b = 1$.
c. *El elemento opuesto de un número real es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a + b = 0$, *entonces* $b = -a$.

d. *El elemento inverso de un número real es único:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*, si* $a \cdot b = 1$*, entonces* $b = a^{-1}$.

e. *El producto de cualquier número real por el elemento neutro de la suma, es el elemento neutro de la suma:* $\forall a \in \mathbb{R}$*,* $a \cdot 0 = 0$.

f. *El producto de cualquier número real por el opuesto de* 1 *es el opuesto del número:* $\forall a \in \mathbb{R}\ (-1) \cdot a = -a$.

g. *El opuesto del opuesto de un número real es el propio número:* $\forall a \in \mathbb{R}$*,* $-(-a) = a$.

h. *El producto de los opestos de dos números reales es igual al producto de los números:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*,* $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

i. *El inverso de un número real distinto de* 0 *también es distinto de* 0*:* $\forall a, \in \mathbb{R}$*, si* $a \neq 0$*, entonces* $a^{-1} \neq 0$.

j. *El inverso del inverso de un número real distinto de 0 es el propio número:* $\forall a \in \mathbb{R}$*, si* $a \neq 0$*, entonces* $(a^{-1})^{-1} = a$.

k. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$*, si* $a \cdot b = a \cdot c$ *y* $a \neq 0$*, entonces* $b = c$.

l. *Si el producto de dos números reales es* 0*, entonces alguno de los dos números es* 0*:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*, si* $a \cdot b = 0$*, entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$.

m. *El inverso del producto de dos números distintos de* 0 *es el producto de los inversos:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*, si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$*, entonces* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b + a = a\ \forall a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} b + a = a &\Leftrightarrow b + a + (-a) = a + (-a) \\ &\Leftrightarrow b + 0 = 0 && \text{(axioma 5)} \\ &\Leftrightarrow b = 0 && \text{(axioma 4)} \end{aligned}$$

b. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} b \cdot a = a &\Leftrightarrow b \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} \\ &\Leftrightarrow b \cdot 1 = 1 && \text{(axioma 10)} \\ &\Leftrightarrow b = 1 && \text{(axioma 9)} \end{aligned}$$

c. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a + b = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} a+b=0 &\Leftrightarrow (-a)+a+b=(-a)+0 \\ &\Leftrightarrow (-a)+a+b=-a && \text{(axioma 4)} \\ &\Leftrightarrow 0+b=-a && \text{(axioma 5)} \\ &\Leftrightarrow b=-a && \text{(axioma 4)} \end{aligned}$$

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} a\cdot b=1 &\Leftrightarrow a^{-1}\cdot a\cdot b=a^{-1}\cdot 1 \\ &\Leftrightarrow a^{-1}\cdot a\cdot b=a^{-1} && \text{(axioma 9)} \\ &\Leftrightarrow 1\cdot b=a^{-1} && \text{(axioma 10)} \\ &\Leftrightarrow b=a^{-1} && \text{(axioma 9)} \end{aligned}$$

e. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} a &= a\cdot 1 && \text{(axioma 9)} \\ &= a\cdot(1+0) && \text{(axioma 4)} \\ &= (a\cdot 1)+(a\cdot 0) && \text{(axioma 11)} \\ &= a+(a\cdot 0) && \text{(axioma 9)} \end{aligned}$$

Así pues, por la propiedad (a) se tiene que $a \cdot 0 = 0$.

f. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} a+(-1)\cdot a &= 1\cdot a+(-1)\cdot a && \text{(axioma 9)} \\ &= (1+(-1))\cdot a && \text{(axioma 11)} \\ &= 0\cdot a && \text{(axioma 5)} \\ &= 0 && \text{(prop. e)} \end{aligned}$$

Como $a + (-1) \cdot a = 0$, aplicando la propiedad (c) se tiene $(-1) \cdot a = -a$.

g. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} a+(-a)=0 &\Leftrightarrow (-a)+a=0 && \text{(axiomas 5 y 3)} \\ &\Leftrightarrow a=-(-a) && \text{(prop. c)} \end{aligned}$$

h. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$,se tiene

$$\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) &= ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) && \text{(prop. f)} \\
&= ((-1) \cdot (-1)) \cdot a \cdot b && \text{(axioma 7)} \\
&= -(-1) \cdot a \cdot b && \text{(prop. f)} \\
&= 1 \cdot a \cdot b && \text{(prop. g)} \\
&= a \cdot b && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

i. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Supongamos ahora que $a^{-1} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= a \cdot 0 && \text{(prop. e)} \\
&= a \cdot a^{-1} \\
&= 1 && \text{(axioma 10)}
\end{aligned}$$

Así pues, llegamos a que $0 = 1$, lo cual es absurdo, por lo que $a^{-1} \neq 0$.

j. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}
a \cdot a^{-1} = 1 &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot a = 1 && \text{(axiomas 10 y 8)} \\
&\Leftrightarrow a = (a^{-1})^{-1} && \text{(prop. d)}
\end{aligned}$$

k. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
a \cdot b = a \cdot c &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) \\
&\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c && \text{(axioma 7)} \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c && \text{(axioma 10)} \\
&\Leftrightarrow b = c && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

l. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b = 0$. Supongamos que $a \neq 0$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
a \cdot b = 0 &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \\
&\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0 && \text{(prop. e)} \\
&\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 && \text{(axioma 7)} \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot b = 0 && \text{(axioma 10)} \\
&\Leftrightarrow b = 0 && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

m. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Entonces, por la propiedad (l) se tiene $a \cdot b \neq 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1 &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot 1 \\
&\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} && \text{(axioma 9)} \\
&\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1 && \text{(axioma 7)} \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} && \text{(axioma 10)} \\
&\Leftrightarrow b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \Leftrightarrow && \text{(axioma 9)} \\
&\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} a^{-1} \\
&\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 8)} \\
&\Leftrightarrow (b^{-1} \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 7)} \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 10)} \\
&\Leftrightarrow (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} b^{-1} && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

$\square$

A partir del axioma de tricotomía se puede descomponer el conjunto de los números reales en tres conjuntos disjuntos, los positivos $\mathbb{R}^+$, $\{0\}$ y los negativos $\mathbb{R}^-$.

Definición 2.5 (Números reales positivos y negativos)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se dice que:

- a es *estríctamente positivo*, y lo notamos $a > 0$, si $a \in \mathbb{R}^+$.
- a es *positivo*, y lo notamos $a \geq 0$, si $a \in \mathbb{R}^+$ o $a = 0$.
- a es *estríctamente negativo*, y lo notamos $a < 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+$.
- a es *negativo*, y lo notamos $a \leq 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+$ o $-a = 0$.

También se puede definir la siguiente relación que permite comparar dos números.

Definición 2.6 (Relaciones de comparación)**.** Dados dos números $a, b \in \mathbb{R}$, se dice que:

- a es *menor* que b, y lo notamos $a < b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
- a es *menor o igual* que b, y lo notamos $a \leq b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$ o $b - a = 0$.
- a es *mayor* que b, y lo notamos $a > b$, si $a - b \in \mathbb{R}^+$.
- a es *mayor o igual* que b, y lo notamos $a \geq b$, si $a - b \in \mathbb{R}^+$ o $a - b = 0$.

De esta definición y los axiomas de orden de los números reales se deduce que la relación $\leq$ es una relación de orden.

Proposición 2.2. *La relación* menor o igual $\leq$ *es una relación de orden, es decir, cumple las propiedades*

a. Reflexiva*:* $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a.$
b. Antisimétrica*:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*, si* $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b.$
c. Transitiva*:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$*, si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c.$

Demostración

Demostración. Veamos que la relación $\leq$ cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

a. Propiedad reflexiva: Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a - a = 0$, luego $a \leq a$.

b. Propiedad antisimétrica: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, se tiene que $b - a \geq 0$ y $-(b - a) \geq 0$, de donde se deduce, por el axioma de tricotomía, que $a - b = 0$, y aplicando los axiomas 4 y 5 se llega a $a = b$.

c. Propiedad transitiva: Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que $a \leq b$ y $b \leq c$, se tiene que $b - a \geq 0$ y $c - b \geq 0$. Supongamos que $b - a > 0$ y $c - b > 0$. Entonces, por el axioma 12 se tiene

$$\begin{aligned}
&(b-a) + (c-b) > 0 && \text{(axioma 2)}\\
&\Leftrightarrow (b-b) + (c-a) > 0 && \text{(axioma 5)}\\
&\Leftrightarrow 0 + (c-a) > 0 && \text{(axioma 4)}\\
&\Leftrightarrow c - a > 0 \Leftrightarrow a \leq c.
\end{aligned}$$

Si $b - a = 0$, entonces $a = b$ y como $b \leq c$ resulta evidente que $a \leq c$. El mismo razonamiento puede aplicarse si $c - b = 0$.

□

Proposición 2.3 (Propiedades de orden)**.** *De los axiomas de orden de los números reales se deducen las siguientes propiedades:*

a. *El cuadrado de cualquier número real distinto de* 0 *es positivo:* $\forall a \in \mathbb{R}$, *si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$.

b. *El elemento neutro de la suma es menor que el elemento neutro del producto:* $0 < 1$.

c. *Cualquier número natural es positivo:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < n$.

d. *La suma preserva el orden:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *si* $a < b$, *entonces* $a + c < b + c$.

e. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *si* $a < b$ *y* $c < d$, *entonces* $a + c < b + d$.

f. *El producto por un número real positivo preserva el orden:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *si* $a < b$ *y* $c > 0$, *entonces* $a \cdot c < b \cdot c$.

g. *El producto por un número real negativo invierte el orden:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *si* $a < b$ *y* $c < 0$, *entonces* $a \cdot c > b \cdot c$.

h. *El inverso de un número real positivo es positivo y el de un número real negativo es negativo:* $\forall a \in \mathbb{R}$, *si* $a > 0$, *entonces* $a^{-1} > 0$, *y si* $a < 0$, *entonces* $a^{-1} < 0$.

i. *El producto de dos números reales es positivo si y solo si los dos números son positivos, o bien los dos números son negativos:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b > 0$ *si y solo si* $a > 0$ *y* $b > 0$, *o* $a < 0$ *y* $b < 0$.

j. *El producto de dos números reales es negativo si y solo si uno de los números es positivo y el otro negativo:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b < 0$ *si y solo si* $a > 0$ *y* $b < 0$, *o* $a < 0$ *y* $b > 0$.

k. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a < b$, *entonces* $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

l. *Cualquier número no negativo que es menor que cualquier número positivo es* 0*:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $0 \leq a < b$ *y* $b > 0$, *entonces* $a = 0$.

Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Entonces, por la propiedad de tricotomía se tiene que $a \in \mathbb{R}^+$ o $-a \in \mathbb{R}^+$.

   Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces, por el axioma 13, se tiene $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$, y por tanto $a^2 \in \mathbb{R}^+$, de manera que $a^2 > 0$.

   Si $-a \in \mathbb{R}^+$, entonces, de nuevo por el axioma 13, se tiene

$$\begin{aligned}
-a \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow (-a)\cdot(-a) \in \mathbb{R}^+ && \text{(axioma 13)}\\
&\Leftrightarrow (-1)\cdot a\cdot(-1)\cdot a \in \mathbb{R}^+ && \text{(prop. f)}\\
&\Leftrightarrow (-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot a \in \mathbb{R}^+ && \text{(axioma 7)}\\
&\Leftrightarrow 1\cdot a^2 \in \mathbb{R}^+ && \text{(prop. h)}\\
&\Leftrightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+ && \text{(axioma 9)}
\end{aligned}$$

y se concluye de nuevo que $a^2 > 0$.

b. Por el axioma 9 se tiene que $1 = 1\cdot 1 = 1^2$, y por la propiedad anterior se tiene que $1^2 > 0$, con lo que $1 > 0$.

c. Haremos la prueba por inducción. Para $n = 1$ ya hemos visto en resultado anterior que $1 > 0$. Supongamos ahora que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n - 1 > 0$. Entonces, como $1 > 0$, por el axioma 12 se tiene que $n - 1 + 1 > 0$, de lo que se deduce, por los axiomas 5 y 4 que $n > 0$.

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $b - a > 0$. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
b - a > 0 &\Leftrightarrow b + 0 - a > 0 && \text{(axioma 4)}\\
&\Leftrightarrow b + (c - c) - a > 0 && \text{(axioma 5)}\\
&\Leftrightarrow (b + c) - (a + c) > 0 && \text{(axioma 2)}\\
&\Leftrightarrow a + c < b + c.
\end{aligned}$$

e. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
b - a > 0 \text{ y } d - c > 0 &\Leftrightarrow (b - a) + (d - c) > 0 && \text{(axioma 12)}\\
&\Leftrightarrow (b + d) - a - c > 0 && \text{(axioma 12)}\\
&\Leftrightarrow (b + d) - (a + c) > 0 && \text{(prop. f)}\\
&\Leftrightarrow a + c < b + d.
\end{aligned}$$

f. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $b - a > 0$. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$, se cumple que

$$\begin{aligned}
b - a > 0 \text{ y } c > 0 &\Leftrightarrow (b - a)\cdot c > 0 && \text{(axioma 13)}\\
&\Leftrightarrow (b\cdot c) - (a\cdot c) > 0 && \text{(axioma 11)}\\
&\Leftrightarrow a\cdot c < b\cdot c.
\end{aligned}$$

g. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $b - a > 0$. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ con $c < 0$, entonces $-c > 0$ y se cumple que

$$\begin{aligned}
b - a < 0 \text{ y } \; -c > 0 &\Leftrightarrow (b-a)\cdot(-c) > 0 && \text{(axioma 13)}\\
&\Leftrightarrow (b\cdot(-c)) - (a\cdot(-c)) > 0 && \text{(axioma 11)}\\
&\Leftrightarrow -(b\cdot c) + (a\cdot c) > 0 && \text{(prop. f)}\\
&\Leftrightarrow (a\cdot c) - (b\cdot c) > 0 && \text{(axioma 3)}\\
&\Leftrightarrow a\cdot c > b\cdot c.
\end{aligned}$$

h. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$. Entonces, por la propiedad de tricotomía, $a \neq 0$ y, por la propiedad algebraica i, $a^{-1} \neq 0$. Supongamos que $a^{-1} < 0$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}
a > 0 \text{ y } a^{-1} < 0 &\Leftrightarrow a\cdot a^{-1} < a\cdot 0 && \text{(prop. de orden f)}\\
&\Leftrightarrow a\cdot a^{-1} < 0 && \text{(prop. algebraica e)}\\
&\Leftrightarrow a\cdot a^{-1} \neq 1 && \text{(prop. orden b)}
\end{aligned}$$

De esta manera llegamos a una contradicción y por consiguiente, $a^{-1} > 0$.

De forma similar se prueba que si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

i. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b > 0$. Entonces, por la propiedad algebraica e se tiene $a \neq 0$ y $b \neq 0$, y por la propiedad de tricotomía se tiene que $a > 0$ o $a < 0$.

Si $a > 0$, entonces por la propiedad anterior, $a^{-1} > 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
a^{-1} > 0 \text{ y } a\cdot b > 0 &\Rightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) > 0 && \text{(axioma 13)}\\
&\Rightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot b > 0 && \text{(axioma 7)}\\
&\Rightarrow b > 0 && \text{(axioma 10)}
\end{aligned}$$

Y si $a < 0$, entonces, por la propiedad anterior, $a^{-1} < 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
a^{-1} < 0 \text{ y } a\cdot b > 0 &\Rightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) < a^{-1}\cdot 0 && \text{(prop. orden g)}\\
&\Rightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) < 0 && \text{(prop. algebraica e)}\\
&\Rightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot b < 0 && \text{(axioma 7)}\\
&\Rightarrow b < 0 && \text{(axioma 10)}
\end{aligned}$$

Para probar la otra implicación, si $a > 0$ y $b > 0$, por el axioma 13 se tiene que $a \cdot b > 0$, y si $a < 0$ y $b < 0$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} a < 0 \text{ y } b < 0 &\Rightarrow a \cdot b > a \cdot 0 && \text{(prop. orden g)} \\ &\Rightarrow a \cdot b > 0 && \text{(prop. algebraica e)} \end{aligned}$$

j. Se demuestra de forma análoga a la propiedad anterior.

k. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} 2 \cdot a &= (1+1) \cdot a = (1 \cdot a) + (1 \cdot a) && \text{(axioma 11)} \\ &= a + a && \text{(axioma 9)} \\ &< a + b && \text{(prop. orden d)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2 \cdot b &= (1+1) \cdot b = (1 \cdot b) + (1 \cdot b) && \text{(axioma 11)} \\ &= b + b && \text{(axioma 9)} \\ &> a + b && \text{(prop. orden d)} \end{aligned}$$

Así pues, se puede concluir que $2 \cdot a < a + b < 2 \cdot b$ y ahora se tiene

$$\begin{aligned} 2 \cdot a < a + b < 2 \cdot b &\Leftrightarrow 2^{-1} \cdot (2 \cdot a) < 2^{-1} \cdot (a+b) < 2^{-1} \cdot (2 \cdot b) \\ & && \text{(prop. orden f)} \\ &\Leftrightarrow (2^{-1} \cdot 2) \cdot a < 2^{-1} \cdot (a+b) < (2^{-1} \cdot 2) \cdot b && \text{(axioma 7)} \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot a < 2^{-1} \cdot (a+b) < 1 \cdot b && \text{(axioma 10)} \\ &\Leftrightarrow a < 2^{-1} \cdot (a+b) < b && \text{(axioma 9)} \\ &\Leftrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b. \end{aligned}$$

l. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a < b$ $\forall b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$. Como $a \geq 0$ se tiene que $a > 0$ o $a = 0$. Si $a > 0$, por la propiedad anterior se tiene $0 < \frac{a}{2} < a$. Si ahora tomamos $b = \frac{a}{2} > 0$ se tiene que $a < \frac{a}{2}$, lo cual es absurdo, y, por tanto, debe ser $a = 0$.

$\square$

A partir del axioma de tricotomía también se puede definir el valor absoluto de un número real.

Definición 2.7 (Valor absoluto)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se define el *valor absoluto* de a, y se denota $|a|$, como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1. $|1.5| = 1.5$ y $|-1/2| = 1/2$.

Como se verá en el próximo capítulo, el valor absoluto permite calcular la distancia entre dos números reales en la recta real.

Proposición 2.4 (Propiedades del valor absoluto)**.** *Se cumplen las siguientes propiedades del valor absoluto:*

a. *El valor absoluto de un número real y de su opuesto es el mismo:* $\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| = |-a|$.
b. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| = |b - a|$.
c. *El valor absoluto del producto de dos números reales es igual que el producto de los valores absolutos de los números:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
d. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *si* $b > 0$ *entonces* $|a| \leq b$ *si y solo si* $-b \leq a \leq b$.
e. $\forall a \in \mathbb{R}$, $|-a| \leq a \leq |a|$.
f. *Desigualdad triangular:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

i Demostración

Demostración. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$ entonces |0|=0=|-0|.

   Si $a > 0$ entonces $-a < 0$, de modo que por la propiedad algebraica g se tiene $|a|= a = -(-a) = |-a|.

   Y si $a < 0$ entonces $-a > 0$, de modo que $|a| = -a = |-a|$.

b. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
|a-b| &= |-(a-b)| && \text{(prop. valor absoluto a)}\\
&= |(-1)(a-b)| && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |((-1)\cdot a)+((-1)\cdot(-b))| && \text{(axioma 11)}\\
&= |-a+-(-b)| && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |-a+b| && \text{(prop. algebraica g)}\\
&= |b-a| && \text{(axioma 3)}
\end{aligned}$$

c. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se pueden dar varios casos:

- Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces, por el axioma 12, $a \cdot b > 0$ y $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$.
- Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces, por la propiedad de orden j, $a \cdot b < 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
|a\cdot b| &= -(a\cdot b)\\
&= (-1)\cdot(a\cdot b) && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= a\cdot((-1)\cdot b) && \text{(axioma 7)}\\
&= a\cdot -b && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |a|\cdot|b|.
\end{aligned}$$

- Si $a < 0$ y $b > 0$, la prueba es similar al caso anterior.
- Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces por la propiedad de orden i, $a \cdot b > 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
|a\cdot b| &= (a\cdot b)\\
&= 1\cdot(a\cdot b) && \text{(axioma 9)}\\
&= -(-1)\cdot(a\cdot b) && \text{(prop. algebraica g)}\\
&= (-1)\cdot(-1)\cdot(a\cdot b) && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b) && \text{(axioma 7)}\\
&= -a\cdot -b && \text{(prop. algebraica f)}\\
&= |a|\cdot|b|.
\end{aligned}$$

- $a = 0$ o $b = 0$, entonces por la propiedad algebraica e $a \cdot b = 0$ y es evidente que $|a \cdot b| = 0 = |a| \cdot |b|$.

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b > 0$. Si $|a| \leq b$, entonces $a \leq b$ y $-a \leq b$, y para esta última desigualdad, si $-a < b$ se tiene

$$\begin{aligned} -a < b &\Rightarrow (-1) \cdot (-a) > (-1) \cdot b && \text{(prop. orden g)} \\ &\Rightarrow -(-a) > -b && \text{(prop. algebraica f)} \\ &\Rightarrow a > -b && \text{(prop. algebraica g)} \end{aligned}$$

Y si $-a = b$ entonces $a = -b$, por lo que $a \geq -b$, y se concluye que $-b \leq a \leq b$.

Para probar la otra implicación supongamos que $-b \leq a \leq b$, entonces $a \leq b$ y por otro lado $a \geq -b$, de donde se tiene, si $a > -b$

$$\begin{aligned} a > -b &\Rightarrow (-1) \cdot a < (-1) \cdot (-b) && \text{(prop. orden g)} \\ &\Rightarrow -a < -(-b) && \text{(prop. algebraica f)} \\ &\Rightarrow -a < b. && \text{(prop. algebraica g)} \end{aligned}$$

Y si $a = -b$ entonces $-a = b$, por lo que $-a \leq b$, y como $b > 0$ se puede concluir que $|a| < b$.

e. Sea $a \in \mathbb{R}$. Como $|a| \leq |a|$, si $|a| > 0$, por la propiedad anterior, se tiene que $-|a| \leq a \leq |a|$, y si $|a| = 0$, entonces $a = 0$ y $-|0| \leq 0 \leq |0|$.

f. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Por la propiedad anterior se tiene que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ de manera que, por la propiedad de orden e, se cumple

$$(-|a|) + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

y por el axioma 11 se tiene

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

de lo que se deduce por la propiedad d que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

$\square$

Veremos ahora una serie de consecuencias del axioma de completitud.

Proposición 2.5. *Si un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota inferior, entonces tiene un ínfimo $m \in \mathbb{R}$.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Teorema 2.3 (Propiedad arquimediana)**.** *Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$.*

Demostración

Demostración. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. Entonces, x es una cota superior de $\mathbb{N}$. Por tanto, por el axioma del supremo existe un número $s = \sup(\mathbb{N})$. Por ser supremo, se cumple que existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < m$, pero entonces se tiene que $s < m + 1$, y como $m \in \mathbb{N}$ también $m + 1 \in \mathbb{N}$, lo que contradice que s sea cota superior de $\mathbb{N}$. □

Corolario 2.1. *De la propiedad arquimediana se deducen las siguientes consecuencias:*

a. *Si $a > 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*
b. *Si $a > 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq a < n$.*

Teorema 2.4 (Raíz cuadrada)**.** *Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, existe un número real $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ y $x^2 = a$. A este número se le llama* raíz cuadrada *de a y se denota por $\sqrt{a}$ o $a^{1/2}$.*

Demostración

Demostración. Sea $A = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^2 < a\}$. A está acotado superiormente ya que si $a > 1$, el propio a es una cota superior y si no 1 es una cota superior. Por tanto, según el axioma del supremo, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sup(A) > 0$. Vamos a probar que $x^2 = a$.
Supongamos primero que $x^2 < a$. Entonces $a - x^2 > 0$ y $\frac{a-x^2}{2x+1} > 0$ ya que $2x + 1 > 0$ al ser $x > 0$. Por el Corolario 2.1 se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{a-x^2}{2x+1} > 0$.
Por otro lado, se tiene

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 = x^2+\frac{1}{n^2}+\frac{2x}{n} = x^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+2x\right) \leq x^2+\frac{1}{n}(2x+1) <$$
$$< x^2+\frac{a-x^2}{2x+1}(2x+1) = x^2+(a-x^2) = a.$$

Por tanto, $x+\frac{1}{n} \in A$, pero $x+\frac{1}{n} > x$ lo que contradice que x sea cota superior de A.
Supongamos ahora que $x^2 > a$. Entonces $x^2-a > 0$ y $\frac{x^2-a}{2x} > 0$ al ser $x > 0$. Aplicando de nuevo el Corolario 2.1 se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{x^2-a}{2x}$ y por tanto $\frac{2x}{m} < x^2-a$.
Por otro lado, se tiene

$$\left(x-\frac{1}{m}\right)^2 = x^2+\frac{1}{m^2}-\frac{2x}{m} > x^2-\frac{2x}{m} > x^2-(x^2-a) = a.$$

Por tanto, $x-\frac{1}{m}$ es una cota superior de A, pero $x > x-\frac{1}{m}$, lo que contradice que $x = \sup(A)$.
Así pues, $x^2 \not< a$ y $x^2 \not> a$, por lo que tiene que ser $x^2 = a$.

□

Del mismo modo se puede probar que para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ existe un número real $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ y $x^n = a$. A este número se le llama *raíz n-ésima* de a.

Teorema 2.5 (Densidad de los números racionales)**.** *Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.*

i Demostración

Demostración. Como $a < b$ se tiene que $b-a > 0$, de manera que por la propiedad arquimediana existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b-a$. Por otro lado, como $a > 0$ también na>0, y de nuevo por la propiedad arquimediana existe otro número real $m \in \mathbb{N}$ tal que $m-1 \leq a < m$, de donde se deduce que $\frac{m-1}{\leq} a < \frac{m}{n}$. Consideremos ahora el número racional $q = \frac{m}{n}$. Acabamos de ver que $a < q$, por lo que solo falta probar que $q < b$. Para ello, volviendo de nuevo a que $\frac{1}{n} < b-a$, se tiene que

$$\frac{1}{n} < b-a \Rightarrow 1 < nb-na \Rightarrow 1+na < nb$$

pero como habíamos visto que $m-1 \leq na$ se deduce que $1+m-1 < nb$, es decir

$m < nb$, y de aquí se concluye que $q = \frac{m}{n} < b$.

$\square$

Corolario 2.2 (Densidad de los números irracionales)**.** *Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe un número irracional $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < p < b$.*

Demostración

Demostración. Sabemos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y que $\sqrt{2} > 0$, por lo que al aplicar el teorema anterior a los números reales $\frac{a}{\sqrt{2}}$ y $\frac{b}{\sqrt{2}}$ se tiene que existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}$, lo que implica que $a < q\sqrt{2} < b$. Finalmente, si tomamos $p = q\sqrt{2}$, tenemos que es un número irracional que cumple que $a < p < q$.

$\square$

2.6 Clasificación de los conjuntos numéricos

Con estas extensiones se obtiene la siguiente clasificación de los conjuntos numéricos (se ha incluido también el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ que no se verán en este manual.)

$$\text{Complejos } \mathbb{C} \begin{cases} \text{Reales } \mathbb{R} \begin{cases} \text{Racionales } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{Enteros } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{Naturales } \mathbb{N} \\ \text{Cero } 0 \\ \text{Enteros negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales} \end{cases} \\ \text{Imaginarios} \end{cases}$$

En particular se cumple que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3 Topología de la recta real

En este capítulo presentamos, sin profundizar demasiado, los principales conceptos topológicos del conjunto de los números reales, que se serán necesarios en futuros capítulos.

Los números reales pueden representarse geométricamente como puntos de una línea recta que se conoce como la *recta real*. Existe una biyección entre los puntos de una recta y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, de modo que a cada número real le corresponde un solo punto, y a cada punto, exactamente un número real. Para establecer esta correspondencia se fija un punto O en la recta correspondiente al número real 0 y otro punto A a la derecha de 0, correspondiente al número real 1, de manera que se dice que la *abscisa* de A es 1 y se denota $A(1)$. A partir de estos dos puntos, hy considerando la distancia entre O y A como unidad de medida, se pueden representar cualquier otro punto B correspondiente al número real x, dibujando a B a la derecha de O si $x > 0$ y a la izquierda si $x < 0$, a una distancia $|x|$ de O.

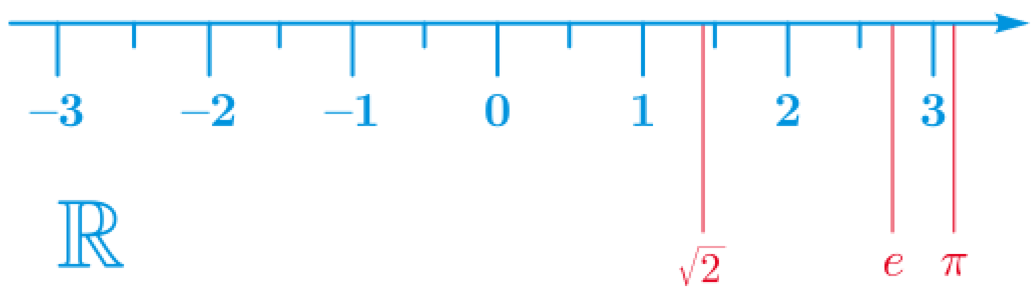

Figura 3.1: La recta real

3.1 Intervalos y entornos

Definición 3.1 (Intervalo abierto)**.** Dados dos números reales tales que $a \leq b$, se llama *intervalo abierto* de extremos a y b, y se denota (a, b) al conjunto de números reales comprendidos entre a y b

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Definición 3.2 (Intervalo cerrado)**.** Dados dos números reales tales que $a \leq b$, se llama *intervalo cerrado* de extremos a y b, y se denota $[a, b]$ al conjunto de números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

⚠ Advertencia

Obsérvese que si $a = b$, $(a, a) = \emptyset$ y $[a, a] = \{a\}$.

Los intervalos también pueden ser abiertos por un lado y cerrados por el otro.

Definición 3.3 (Intervalo semiabierto o semicerrado)**.** Dados dos números reales tales que $a < b$, se definen los *intervalos semiabiertos* o *semicerrados* de extremos a y b de la siguiente manera:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{y} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Estos intervalos están *acotados* ya que a es una cota inferior y b una cota superior, pero también existen intervalos no acotados.

Definición 3.4 (Intervalo abierto no acotado)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes *intervalos abiertos no acotados*:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad \text{y} \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

Definición 3.5 (Intervalo semiabierto no acotado)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes *intervalos semiabiertos no acotados*:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \quad \text{y} \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

Definición 3.6 (Intervalos anidados)**.** Se dice que una sucesión de intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$ es una *sucesión de intervalos anidados* si se cumple que $I_{n+1} \subseteq I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1. La sucesión de intervalos $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de intervalos anidados, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n < n+1$ y por tanto $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, de manera que $I_{n+1} = [0, \frac{1}{n+1}] \subseteq [0, \frac{1}{n}] = I_n$.

Teorema 3.1 (Intervalos anidados)**.** *Dada una sucesión de intervalos cerrados y anidados* $I_n = [a_n, b_n]$*,* $n \in \mathbb{N}$*, existe un número* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$*. Además, si el ínfimo de las longitudes* $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es* 0*, entonces* a *es único, es decir,* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$*.*

Demostración

Demostración. Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que los intervalos están anidados, A está acotado superiormente por b_1 ya que $a_n \leq b_n \leq b_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y B está acotado inferiormente por a_1 ya que $a_1 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, como A está acotado superiormente, por el axioma del supremo, existe $a = \sup(A)$, y como B está acotado inferiormente, existe $b = \inf(B)$.
Veamos ahora que $a \leq b$. Para ello basta probar que a es cota inferior de B. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que si $k \geq n$ entonces $a_k \leq b_k \leq b_n$ pues $I_n \subseteq I_k$, y si $k < n$, entonces $a_k \leq a_n \leq b_n$, pues $I_n \subseteq I_k$. Luego b_n es una cota superior de A, y por tanto, $a \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que a es cota inferior de B. Así pues, como a es cota superior de A e inferior de B, se tiene que $a_n \leq a \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $a \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.
De forma similar se puede probar que $b \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$, por lo que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$.
Finalmente, veamos que si $\inf(\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ entonces $a = b$. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, como $\inf(\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq b_k - a_k < \varepsilon$. Como $b \leq b_k$ y $a \geq a_k$, se tiene que $0 \leq b - a \leq b_k - a_k < \varepsilon$, de donde se deduce que $b - a = 0$ y por tanto $a = b$, así que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, a] = \{a\}$.

$\square$

Definición 3.7 (Entorno)**.** Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se llama *entorno* de a a cualquier intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. El número ε se conoce como *radio del entorno.*

Para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ se llama *entorno reducido* de a.

3.2 Clasificación de puntos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ clasifica los puntos de $\mathbb{R}$ en tres clases: puntos interiores, puntos exteriores y puntos fronteras de A.

Definición 3.8 (Punto interior)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto interior* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe un entorno de a contenido en A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$.

El conjunto de los puntos interiores de A se llama *interior* de A y se denota por $FrInt(A)$.

Aunque la definición no lo hace explícito, es evidente que si a es un punto interior de A entonces $a \in A$.

Intuitivamente, un punto interior de un conjunto es un punto que no está en el borde del conjunto, es decir, que está rodeado por puntos del conjunto, y por tanto, podemos movernos un poco hacia la izquierda o hacia la derecha del punto sin salirnos del conjunto.

Ejemplo 3.2. 0.9 es un punto interior del intervalo $(0, 1)$ ya que podemos tomar $\varepsilon = 0.01$ tal que el entorno $(0.9 - 0.01, 0.9 + 0.01) = (0.89, 0.91) \subset (0, 1)$.

Sin embargo, 1 no es un punto interior del intervalo $(0, 1)$ ya que por muy pequeño que tomemos $\varepsilon > 0$, $1 + \varepsilon > 1$ y, por tanto, el entorno $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ siempre tendrá valores mayores que 1, de manera que $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \not\subseteq (0, 1)$.

Definición 3.9 (Punto exterior)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto exterior* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe un entorno de a contenido en el complementario de A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$.

El conjunto de los puntos exteriores de A se llama *exterior* de A y se denota por $FrExt(A)$.

Una definición equivalente es que un punto es punto exterior de un conjunto si es un punto interior de su complementario.

Ejemplo 3.3. 1.01 es un punto exterior del conjunto $(-\infty, 1)$ ya que tomando $\varepsilon = 0.001$ el entorno $(1.01 - 0.001, 1.01 + 0.001) = (1.009, 1.011) \in \overline{(-\infty, 1)} = [1, \infty)$.

Sin embargo, 1 no es un punto exterior del intervalo $(-\infty, 1)$, ya que no es un punto interior del intervalo $\overline{(-\infty, 1)} = [1, \infty)$, ya que $1 - \varepsilon < 1\ \forall \varepsilon > 0$, y, por tanto, el entorno $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ siempre tendrá valores menores que 1, de manera que $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \nsubseteq [1, \infty)$.

Advertencia

El que un punto no sea punto interior de un conjunto no significa que sea un punto exterior. Por ejemplo, 1 no es un punto interior del intervalo $(0, 1)$, y tampoco de su complementario $\overline{(0, 1)} = (-\infty, 0] \cup [ñ1, \infty)$.

Definición 3.10 (Punto frontera)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto frontera* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno de a contiene puntos de A y de su complementario.

El conjunto de los puntos frontera de A se llama *frontera* de A y se denota por $FrFr(A)$.

Una definición equivalente es que un punto es un punto frontera de un conjunto si no es un punto interior ni exterior del conjunto.

Ejemplo 3.4. El punto 1 es un punto frontera del intervalo $[1, \infty)$ ya que no es un punto interior de $[1, \infty)$ ni de su complementario $(-\infty, 1)$.

Proposición 3.1. *Todos los puntos de un intervalo abierto son puntos interiores suyos, es decir, dado un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que $FrInt((a, b)) = (a, b)$.*

Demostración

Demostración. Tomemos cualquier punto $x \in (a, b)$, entonces se puede tomar $\varepsilon = \frac{\min\{|x-a|,|x-b|\}}{2}$ de manera que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$. $\square$

Proposición 3.2. *Todos los puntos de un intervalo cerrado, excepto sus extremos, son puntos interiores suyos, es decir, dado un intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que $FrInt([a, b]) = (a, b)$.*

Demostración

Demostración. Par ver que a no es un punto interior de $[a, b]$, basta con ver que $a-\varepsilon < a$ para cualquier $\varepsilon > 0$, por lo que el intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ irremediablemente contendrá puntos menores que a y, por tanto, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \not\subseteq [a, b]$.
Un razonamiento análogo se puede utilizar para demostrar que b tampoco es un punto interior de $[a, b]$.

$\square$

A partir de estas proposiciones, es fácil ver que que para cualquier intervalo abierto (a, b), $FrInt((a, b)) = (a, b)$, $FrExt((a, b)) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ y $FrFr((a, b)) = \{a, b\}$. Y para cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, $FrInt([a, b]) = (a, b)$, $FrExt([a, b]) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ y $FrFr([a, b]) = \{a, b\}$.

Proposición 3.3. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, los conjuntos $FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$ forman una partición de $\mathbb{R}$, es decir,*

a. *$FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$ son disjuntos entre sí.*
b. *$FrInt(A) \cup FrExt(A) \cup FrFr(A) = \mathbb{R}$.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio.

$\square$

A continuación se definen otros tipos de puntos que son útiles para definir conceptos que se verán más adelante como el de *límite*.

Definición 3.11 (Punto adherente)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto adherente* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno de a contiene puntos de A.

El conjunto de los puntos adherentes de A se llama *adherencia* de A y se denota por $FrAdh(A)$.

Resulta obvio que cualquier punto interior y frontera de un conjunto es también adherente, y que cualquier punto exterior no es adherente. Resulta evidente también que cualquier punto de un conjunto es un punto adherente, de manera que para cualquier conjunto A se tiene $A \subseteq FrAdh(A)$.

Definición 3.12 (Punto de acumulacion)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno reducido de a contiene puntos de A.

El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama *conjunto derivado* de A y se denota por $FrAc(A)$.

> ⚠ Advertencia
>
> Resulta obvio de la definición que cualquier punto de acumulación es también un punto de adherencia, es decir, $FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$ para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Sin embargo no todo punto de adherencia es un punto de acumulación.

Es posible que un conjunto tenga puntos de acumulación que pertenezcan al conjunto y otros que no.

Ejemplo 3.5. Dado el conjunto $A = (0, 1) \cup \{2\}$, se tiene que 2 es un punto de adherencia de A, pues para cualquier $\varepsilon > 0$ el entorno $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ contiene al propio 2 que es un punto de A. Sin embargo, 2 no es un punto de acumulación, porque para $\varepsilon = 0.5$, por ejemplo, el entorno reducido $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \setminus \{2\} = (1.5, 2) \cup (2, 2.5)$ no contiene puntos de A.

En cambio el punto 0.5 es tanto un punto de adherencia como un punto de acumulación de A porque para cualquier $\varepsilon > 0$ el entorno reducido $(0.5 - \varepsilon, 0.5 + \varepsilon) \setminus \{0.5\}$ siempre contiene puntos de A. De hecho, para cualquier $x \in (a, b)$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$ contiene puntos de A, y lo mismo ocurre para a y b al ser puntos frontera, de manera que $FrAc(A) = [0, 1]$, mientras que $FrAdh(A) = [0, 1] \cup \{2\}$.

Intuitivamente, un punto de acumulación de un conjunto A es un punto para el que podemos encontrar puntos de A, distintos de él mismo, tan próximos a él como queramos. Un punto de acumulación se diferencia de un punto de adherencia en que siempre está rodeado por puntos de A, mientras que un punto de adherencia puede estar aislado de los demás puntos de A.

Definición 3.13 (Punto aislado)**.** Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto de aislado* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si es un punto adherente de A, pero no de acumulación.

Proposición 3.4. *Para cualquier intervalo abierto* (a, b) *se tiene que* $FrAdh((a, b)) = FrAc((a, b)) = [a, b]$.

Demostración

Demostración. Todos los puntos de (a,b) son interiores y, por tanto, para cualquier $x \in (a,b)$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$. Si ahora tomamos cualquier otro $\varepsilon' > 0$, se tiene que $(x-\varepsilon', x+\varepsilon') \setminus \{x\} \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset$, pero como $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$, se concluye que $(x-\varepsilon', x+\varepsilon') \setminus \{x\} \cap (a,b) \neq \emptyset$, por lo que x es un punto de acumulación de (a,b). Por otro lado, como a y b son puntos frontera, también se tiene que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset$ y $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset$ de manera que $[a,b] \subseteq FrAc((a,b)) \subseteq FrAdh((a,b))$. Sea ahora cualquier $x > b$, y tomemos $\varepsilon = \frac{|x-b|}{2}$, entonces $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (a,b) = \emptyset$, de manera que x no es un punto de adherencia de (a,b). Del mismo modo se puede probar que si $x < a$, entonces x tampoco es un punto de adherencia de (a,b), por lo que $FrAdh((a,b)) = [a,b]$ y como $FrAc((a,b)) \subseteq FrAdh((a,b))$, también se concluye que $FrAc((a,b)) = [a,b]$.

$\square$

Proposición 3.5. *Para cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que $FrAdh(A) = A \cup FrAc(A)$.*

Demostración

Demostración. Ya se ha visto que $A \subseteq FrAdh(A)$ y también $FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$, por lo que $A \cup FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$.
Veamos ahora que $FrAdh(A) \subseteq A \cup FrAc(A)$. Sea x un punto de adherencia de A. Si $x \in A$ es obvio que $x \in A \cup FrAc(A)$, y si $x \notin A$, entonces $x \in FrAc(A)$, ya que, por ser x punto de adherencia de A, para cualquier $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pero como además $x \notin A$, también se cumple que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ contiene puntos de A. Así pues, $x \in A \cup FrAc(A)$, y por tanto $FrAdh(A) \subseteq A \cup FrAc(A)$.

$\square$

3.3 Conjuntos abiertos y cerrados

A continuación se generaliza la característica que diferencia los intervalos abiertos y cerrados, a cualquier conjunto.

Definición 3.14 (Conjunto abierto)**.** Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *abierto* cuando para cada $a \in A$ existe un entorno de a contenido en A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$.

! Importante

Obsérvese que un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.

Ejemplo 3.6. Cualquier intervalo abierto (a, b) es un conjunto abierto, ya que según se vio en la Proposición 3.1 $FrInt((a, b)) = (a, b)$. Por otro lado, un intervalo cerrado $[a, b]$ no es un conjunto abierto pues cualquier entorno de a o b no está contenido en $[a, b]$.

Una colección de conjuntos abiertos se llama *topología* y cualquier propiedad que pueda definirse en términos de conjuntos abiertos se llama *propiedad topológica*.

Definición 3.15 (Conjunto cerrado)**.** Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *cerrado* cuando su complementario $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$ es abierto.

Ejemplo 3.7. Todo intervalo cerrado $[a, b]$ es cerrado, pues su complementario $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es abierto.

Advertencia

Un subconjunto puede ser abierto y cerrado a la vez, como por ejemplo $\mathbb{R}$ y $\emptyset$. $\mathbb{R}$ es abierto ya que todos sus puntos son interiores, y por tanto $\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$ es cerrado. Pero, también $\emptyset$ es abierto, ya que para que un conjunto no sea abierto, al menos uno de sus puntos no debe ser interior, y en consecuencia $\overline{\emptyset} = \mathbb{R}$ es también cerrado.
Un subconjunto también puede no ser abierto ni cerrado, como por ejemplo $(a, b]$, ya que b no es un punto interior de $(a, b]$, y a no es un punto interior de $\overline{(a, b]} = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$. Por tanto, no abierto no implica cerrado y no cerrado no implica abierto.

Proposición 3.6. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
2. *La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
3. *La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.*
4. *La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Advertencia

La intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto, como por ejemplo la colección de conjuntos $I_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, ya que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 1]$.
Y la unión de una colección infinita de conjuntos cerrados puede no ser cerrada, como por ejemplo la colección de conjuntos $J_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, ya que $\cup_{n=1}^{\infty} J_n = (0, 1]$.

Teorema 3.2 (Existencia del máximo y mínimo)**.** *Cualquier conjunto no-vacío, cerrado y acotado superiormente tiene un máximo, y cualquier conjunto no-vacío, cerrado y acotado inferiormente tiene un mínimo.*

Demostración

Demostración. Sea A un conjunto no vacío, cerrado y acotado superiormente. Como A está acotado superiormente, por el axioma del supremo, existe $s = \sup(A)$. Probaremos que $s \in A$ por reducción al absurdo. Supongamos que $s \notin A$, entonces $s \in \overline{A}$, y como $\overline{A}$ es abierto al ser A cerrado, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$. Como ningún elemento de A puede ser mayor que s y $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \nsubseteq A$, se tiene que $s - \varepsilon$ es también una cota superior de A, pero $s - \varepsilon < s$, lo que contradice que s sea el supremo de A. Así, pues $s \in A$, y por tanto es el máximo de A.
De manera análoga se prueba que si A un conjunto no vacío, cerrado y acotado inferiormente, A tiene mínimo. □

Teorema 3.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ acotado tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración

Demostración. Para demostrar el teorema construiremos una sucesión de intervalos cerrados y anidados y aplicaremos el Teorema 3.1.
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto infinito y acotado. Como A está acotado, existe un intervalo cerrado tal que $A \subset I_1 = [a_1, b_1]$. Si I_1 se divide en dos intervalos $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$

y $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, al menos uno de estos intervalos tendrá infinitos puntos de A, ya que de lo contrario A sería finito. Sea $I_2 = [a_2, b_2]$ cualquiera de los dos intervalos que tenga infinitos puntos de A. Si I_2 se divide en dos intervalos $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ y $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$, al menos uno de estos intervalos tendrá infinitos puntos de A, ya que de lo contrario A sería finito. Sea $I_3 = [a_3, b_3]$ cualquiera de los dos intervalos que tenga infinitos puntos de A. Siguiendo la misma lógica, se puede construir una sucesión de intervalos anidados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, con tamaños $\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$. Como $\inf\{\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N}\} = 0$, aplicando el Teorema 3.1, existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$.
Veremos ahora que a es un punto de acumulación de A. Para cualquier $\varepsilon > 0$, considérese el entorno reducido de a $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$. Como $\inf\{\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N}\} = 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b_1-a_1}{2^{m-1}} < \varepsilon$, y por tanto $I_m \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, y como I_m contiene infinitos puntos de A, el entorno reducido a también contiene puntos de A, por lo que a es un punto de acumulación de A.

$\square$

Teorema 3.4. *Cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Demostración

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Veamos por reducción al absurdo que $a \in A$.
Supongamos que $a \notin A$, entonces $a \in \overline{A}$. Como A es cerrado, $\overline{A}$ es abierto y existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \overline{A}$, pero entonces $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A = \emptyset$, lo que contradice que a sea punto de acumulación de A.
Veremos ahora el otro sentido de la implicación. Sea A un conjunto que contiene todos sus puntos de acumulación. Sea $x \in \overline{A}$, entonces $x \notin A$ y por tanto no es un punto de acumulación de A y existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno propio de x $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$. Como $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\} \subset \overline{A}$ y $x \in \overline{A}$ se concluye que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \overline{A}$, de manera que $\overline{A}$ es abierto y A es cerrado.

$\square$

4 Sucesiones de números reales

Las sucesiones de números reales son claves para comprender el concepto de límite que es fundamental en el Análisis Matemático. En este capítulo se presenta el concepto de sucesión de números reales, el concepto de límite y algunos resultados importantes sobre la convergencia de sucesiones.

4.1 Concepto de sucesión

Definición 4.1 (Sucesión de números reales)**.** Una *sucesión de números reales* es una aplicación $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número natural un número real, conocido como *término de la sucesión*.

Es habitual referirse a una sucesión con la notación $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n = x(n)$ con $n \in \mathbb{N}$, o simplemente con x_n.

De manera informal, se puede decir que una sucesión es una lista ordenada de números reales.

Ejemplo 4.1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ está formada por los términos $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

Precaución

No hay que confundir los términos de una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, que tienen orden, con el conjunto de los valores de la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que no tiene orden.

Ejemplo 4.2. La sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ está formada por los términos $-1, 1, -1, 1, \ldots$, mientras que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

Una sucesión de números reales puede definirse dando una fórmula para el término general, de manera que aplicando la fórmula para cada $n \in \mathbb{N}$ se obtienen todos los términos de las sucesión, o bien de manera recursiva, dando el primer término de la sucesión y después dando una fórmula para construir el siguiente término de la sucesión en función del anterior o anteriores.

Ejemplo 4.3. La sucesión del ejemplo anterior también se puede definir recursivamente de la siguiente manera, $x_1 = -1$ y $x_{n+1} = (-1)x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Otro ejemplo es la famosa sucesión de Fibonacci, que se define recursivamente como $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Las operaciones aritméticas de los números reales se pueden extrapolar a las sucesiones aplicándolas término a término.

Definición 4.2 (Operaciones con sucesiones)**.** Dadas dos sucesiones de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, se definen las siguientes operaciones:

- *Suma:* $(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$.
- *Diferencia:* $(x_n)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}$.
- *Producto:* $(x_n)_{n=1}^{\infty}(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$.
- *División:* $\dfrac{(x_n)_{n=1}^{\infty}}{(y_n)_{n=1}^{\infty}} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, siempre y cuando $y_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- *Producto por escalar:* $c(x_n)_{n=1}^{\infty} = (cx_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ejemplo 4.4. Dadas las sucesiones $(n)_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
(n)_{n=1}^{\infty} + ((-1)^n)_{n=1}^{\infty} &= (n + (-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (0, 3, 2, 5, 4, \ldots) \\
(n)_{n=1}^{\infty}((-1)^n)_{n=1}^{\infty} &= (n(-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 2, -3, 4, -5, \ldots)
\end{aligned}$$

4.2 Límite de una sucesión

Definición 4.3 (Límite de una sucesión)**.** Dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, se dice que un número $x \in \mathbb{R}$ es el *límite de la sucesión*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ a partir del cuál todos los términos de la sucesión caen en el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, es decir, $|x_n - x| < \varepsilon \; \forall n \geq k$.

Si x es el límite de la sucesión, se dice que la suceción *converge* a x, y se denota $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Si una sucesión tiene límite se dice que es *convergente*, y en caso contrario se dice que es *divergente*.

De manera informal podemos decir que una sucesión de números reales converge a un número x, si para cualquier entorno suyo, a partir de un determinado término, todos los siguientes caen dentro del entorno, tal y como se muestra en la siguiente figura.

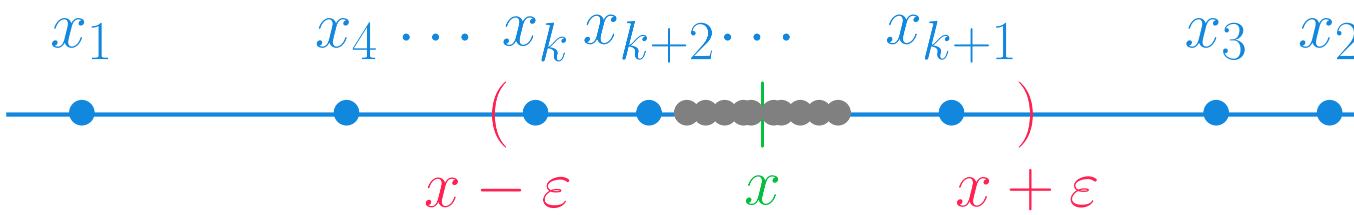

Figura 4.1: Límite de una sucesión

Esto es equivalente a decir que podemos encontrar términos de la sucesión tan cerca de x como queramos.

Ejemplo 4.5. La sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, por la Teorema 2.3, se tiene que existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$, de manera que para cualquier $n > k$, se tiene $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Sin embargo, la sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Teorema 4.1. *Una sucesión de números reales puede tener a lo sumo un límite.*

i Demostración

Demostración. Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x e y con $x \neq y$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que los entornos $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ e $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ son disjuntos. Ahora bien, por ser $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $\forall n \geq k_1$, y por ser $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ existe un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ $\forall n \geq k_2$. Basta tomar $k = \max(k_1, k_2)$ para ver que x_k pertenece a ambos entornos, lo cual contradice que sean disjuntos. Por tanto, debe ser $x = y$.

$\square$

Definición 4.4 (Cola de una sucesión)**.** Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $m \in \mathbb{N}$, se define la *cola* m de la sucesión, como la sucesión $(x_{m+n})_{n=1}^{\infty} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$.

Proposición 4.1. *Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $m \in \mathbb{N}$, la cola $(x_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y en tal caso, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{m+n}$.*

i Demostración

Demostración. Supongamos que la cola $(x_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{m+n} - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq k_1$. Tomando ahora $k = k_1 + m \in \mathbb{N}$ se tiene que para cualquier $l \geq k$ $|x_l - x| = |x_{l-m+m} - x| = |x_{m+n} - x| < \varepsilon$ siendo $n = l - m$, ya que $l \geq k_1 + m$ y $l - m \geq k_1$. Por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.
Para probar la otra implicación, supongamos ahora que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq k$. Pero como $m \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$ también $m + n \geq k$, con lo que $|x_{m+n} - x| < \varepsilon$, y por consiguiente, $(x_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

$\square$

Proposición 4.2. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Si existe $x, c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ tal que $|x_n - x| < c|y_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Demostración

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - 0| = |y_n| < \varepsilon'$ $\forall n \geq k$. Así pues, $\forall n \geq k$ se tiene que $|x_n - x| < c|y_n| < c\varepsilon' = c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$, por lo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

□

Ejemplo 4.6. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $0 < n < 2^n$, de donde se deduce $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, lo que equivale a $|\frac{1}{2^n} - 0| < \frac{1}{n}$. Así pues, aplicando el teorema anterior, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, se cumple que $n^{1/n} > 1$, de manera que se puede escribir $n^{1/n} = 1 + k_n$, donde $k_n = n^{1/n} - 1$. Aplicando ahora el teorema del binomio, se tiene que $0 < k_n < \sqrt{2/n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $|n^{1/n} - 1| = k_n < \sqrt{2/n} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$, y como $\sqrt{2} > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, por el teorema anterior se tiene que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Definición 4.5 (Sucesión acotada)**.** Se dice que una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está *acotada* si existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2. *Toda sucesión de números reales convergente está acotada.*

Demostración

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a x. Entonces, si tomamos $\varepsilon = 1$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < 1$ $\forall n \geq k$.
Por la desigualdad triangular (Proposición 2.4) se tiene que $|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$, de donde se deduce que $|x_n| < |x| + 1$ $\forall n \geq k$. Si se toma $c = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{k-1}|, |x| + 1\}$ se tiene que si $n < k$ entonces $|x_n| \leq c$ y si $n \geq k$ entonces $|x_n| < |x| + 1 \leq c$, de modo que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq c$, por lo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

□

Ejemplo 4.7. La sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ diverge ya que no está acotada. Si estuviese acotada existiría un $c > 0$ tal que $|n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que infringe la propiedad arquimediana.

Precaución

El otro sentido de la implicación no se cumple, es decir, no toda sucesión acotada es convergente. Por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 4.3. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a y. Entonces se cumple:*

a. $(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $x + y$.

b. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ - $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $x - y$.

c. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* xy.

d. $c(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* cx.

e. Si $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $y \neq 0$, $\frac{(x_n)_{n=1}^{\infty}}{(y_n)_{n=1}^{\infty}}$ *converge a* $\frac{x}{y}$.

Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

Ejemplo 4.8. Veamos que la sucesión $\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 2.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n}} = \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2.\end{aligned}$$

Teorema 4.3 (Compresión de sucesiones convergentes)**.** *Dadas tres sucesiones de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen a x, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

i Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$ y sea $\varepsilon > 0$. Si tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4} > 0$, como $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - x| < \varepsilon_1$ $\forall n \geq k_1$. Y si tomamos $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon_2$ $\forall n \geq k_2$. Entonces, si se toma $k = \max(k_1, k_2)$, se cumple que para cualquier $n \geq k$,

$$\begin{aligned}
|y_n - x| &= |y_n - z_n + z_n - x| \\
&\leq |y_n - z_n| + |z_n - x| && \text{(prop.2.4 (f))} \\
&= z_n - y_n + |z_n - x| \\
&\leq z_n - x_n + |z_n - x| \\
&= |z_n - x_n| + |z_n - x| \\
&= |z_n - x + x - x_n| + |z_n - x| \\
&\leq |z_n - x| + |x - x_n| + |z_n - x| \\
&= 2|z_n - x| + |x - x_n| && \text{(prop.2.4 (f))} \\
&= 2|z_n - x| + |x_n - x| && \text{(prop.2.4 (b))} \\
&< 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

□

Ejemplo 4.9. Veamos que la sucesión $\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Para ello basta con ver que

$$0 \leq \frac{2n}{n^2+1} \leq \frac{2n}{n^2} \leq \frac{2}{n} \;\forall n \in \mathbb{N}$$

y que $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, de manera que aplicando el teorema anterior de compresión se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0$.

Veamos ahora que la sucesión $\left(\frac{Frsen(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ también converge a 0. De nuevo basta con ver que

$$0 \leq \frac{Frsen(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \;\forall n \in \mathbb{N}$$

y que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, de manera que aplicando el teorema anterior de compresión se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{Frsen(n)}{n} = 0$.

Proposición 4.4. *Si* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *es una sucesión de números reales estrictamente positivos tal que la sucesión* $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n=1}^\infty$ *converge a* $l<1$*, entonces* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *converge a 0.*

Demostración

Demostración. Sea y tal que $l<y<1$ y tomemos $\varepsilon=y-l>0$. Como $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$, existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $|\frac{x_{n+1}}{x_n}-l|\leq\varepsilon\ \forall n\geq k$, y por tanto, se tiene que para cualquier $n\geq k$,

$$\begin{aligned}|\frac{x_{n+1}}{x_n}-l|\leq\varepsilon\Rightarrow -\varepsilon<\frac{x_{n+1}}{x_n}-l\leq\varepsilon&\\ \Rightarrow\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq l+\varepsilon=l+y-l=y&\\ \Rightarrow x_{n+1}<yx_n.&\end{aligned}$$

Por consiguiente, si $m\in\mathbb{N}$ se cumple que $x_{k+m}<yx_{k+m-1}<r^2x_{k+m-2}<\cdots<r^mx_k$, de manera que $0<x_{k+m}<r^mx_k\ \forall m\in\mathbb{N}$. Como $r<1$, $\lim_{m\to\infty}y^m=0$ y $\lim_{m\to\infty}r^mx_k=0$, y por el teorema de compresión (Teorema 4.3) $\lim_{m\to\infty}x_{k+m}=0$. Finalmente, como $(x_{k+m})_{m=1}^\infty$ es una cola de la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ se tiene que $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

$\square$

Ejemplo 4.10. Veamos que la sucesión $(\frac{n}{2^n})_{n=1}^\infty$ converge a 0.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}<1.\end{aligned}$$

Así pues, por la proposición anterior, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

4.3 Sucesiones monótonas

Veremos a continuación un tipo particular de sucesiones, cuyos términos siempre crecen o decrecen. Estas sucesiones son de especial importancia en aplicaciones del Análisis Matemático.

Definición 4.6 (Sucesión monónota)**.** Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

- Se dice que es una *sucesión creciente*, si $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y se dice que es *estrictamente creciente* si $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Se dice que es una *sucesión decreciente*, si $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y se dice que es *estrictamente decreciente* si $x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Se dice que es una *sucesión monótona*, si es creciente o decreciente.

Ejemplo 4.11. Las sucesiones $(2n)_{n=1}^{\infty}$ y $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ son estrictamente crecientes y la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente.

La sucesión $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$. Si $a = 1$ la sucesión es, a la vez, creciente y decreciente, ya que en realidad es constante.

Sin embargo, la sucesión $((-2)^n)_{n=1}^{\infty}$ no es monótona.

Teorema 4.4 (Convergencia de una sucesión monótona)**.** *Una sucesión de números reales monótona* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge si y solo si está acotada. Además se cumple que:*

- *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión creciente y acotada, entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.
- *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente y acotada, entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.

i Demostración

Demostración. Por el Teorema 4.2 ya se vio que toda sucesión convergente está acotada. Veamos ahora que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona acotada, entonces converge.
Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente y acotada, entonces el conjunto de los términos de la sucesión $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está vacío y está acotado, y por el axioma del

supremo, existe $s = \sup(A)$. Para ver que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a s, tomemos cualquier $\varepsilon > 0$. Como s es el supremo de A, $s - \varepsilon$ no es cota superior de A de manera que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > s - \varepsilon$. Si tomamos ahora cualquier $n \geq k$, por ser la sucesión monótona, se tiene que $x_k \leq x_n$, y al mismo tiempo $x_n < s$ por ser s una cota superior de la sucesión. Por tanto, para cualquier $n \geq k$ se cumple

$$s - \varepsilon \leq x_k \leq x_n \leq s < s + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - s < \varepsilon \Rightarrow |x_n - s| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = s$.
De forma similar se puede probar que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.

$\square$

Ejemplo 4.12. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. La sucesión es decreciente ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n < n+1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Como además está acotada inferiormente por el 0, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \inf\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 0$.

Ejemplo 4.13. Sea la sucesion definida recursivamente de la siguiente manera: $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$. Veamos que converge a 2.

En primer lugar, veremos que es una sucesión creciente por inducción. Para $n = 1$ se tiene que $x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$. Supongamos ahora que $x_n < x_{n+1}$. Entonces, $x_{n+2} = \sqrt{2x_{n+1}} > \sqrt{2x_n} = x_{n+1}$, de manera que la sucesión es creciente.

En segundo lugar, veremos, también por inducción, que $x_n \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ se tiene que $x_1 = 1 < 2$. Supongamos ahora que $x_n < 2$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} = \sqrt{2}\sqrt{x_n} < \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. Luego, la sucesión está acotada, y por el teorema anterior, converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión, es tiene

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt{x_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2x}. \end{aligned}$$

Así pues, se tiene que

$$x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0,$$

de donde se deduce, resolviendo la ecuación, que $x = 0$ o $x = 1$. Como $x = 0$ es imposible pues $x_n > 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, se concluye que $x = 2$, y por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Ejemplo 4.14. Veamos ahora que la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, entonces por el desarrollo del binomio, se tiene

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \binom{n}{0}1^n\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Como se puede observar, el desarrollo de x_n tiene $n+1$ términos, mientras que el de x_{n+1} tiene $n+2$ términos. Además, cada uno de los términos que aparece en x_n es menor o igual que el termino correspondiente de x_{n+1}, de modo que se puede concluir que $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y la sucesión es creciente.

Por otro lado, como se cumple que $\left(1-\frac{k}{n}\right) < 1$ $\forall k = 1, \ldots, n$, entonces

$$
\begin{aligned}
x_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

y como $2^{n-1} \leq n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$, finalmente se tiene

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Así pues, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada, de manera que por el teorema anterior, es convergente, y como además $2 < x_n < 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$, su límite es un número entre 2 y 3. A este número se le llama $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que es un número irracional.

4.4 Subsucesiones

Definición 4.7 (Subsucesión)**.** Se dice que una sucesión de números reales $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *subsucesión* de otra sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $y_n = x_{r_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.15. La sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, ya que tomando $(r_n)_{n=1}^{\infty} = 2n$, se cumple que $y_n = x_{r_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Del mismo modo, las sucesiones $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ también son subsucesiones de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 4.5 (Convergencia de las subsucesiones)**.** *Si una sucesión de números reales converge a x entonces cualquier subsucesión suya converge también a x.*

i Demostración

Demostración. Sea $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq k$.
Como $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, $r_n \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de manera que si $n \geq k$, entonces $r_n \geq n \geq k$, y por tanto, $|x_{r_n} - x| < \varepsilon$, por lo que $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a x. □

Ejemplo 4.16. Veamos que la sucesión $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 cuando $0 < a < 1$.

La sucesión es decreciente ya que $x_{n+1} = a^{n+1} = a^n a < a^n = x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ al ser $0 < a < 1$, y también está acotada ya que $0 < a^n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que por el teorema de la convergencia de una sucesión monótona, se tiene que $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un número x.

Para averiguar el límite, como cualquier subsucesión suya también converge a x por el teorema anterior, en particular $(a^{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge a x, por lo que se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} a^{2n} = \lim_{n\to\infty} (a^n)^2 = x^2.$$

Así pues, $x^2 = x$, de manera que, resolviendo la ecuación, $x = 0$ o $x = 1$. Como $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y $0 < a^n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tiene que ser $x = 0$.

Del teorema anterior se deduce que si una sucesión tiene dos subsucesiones que convergen a distintos límites, o una subsucesión que diverge, entonces dicha sucesión diverge.

Ejemplo 4.17. La sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge pues la subsucesión $((-1)^{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge a 1 y la subsucesión $((-1)^{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ converge a -1.

Teorema 4.6 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión de números reales acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

i Demostración

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales acotada. Entonces, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado.
Si A es finito, existe un $c \in A$ y un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = c \ \forall n \geq k$, de manera que la subsucesión $x_{n+k} = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, y al ser constante, converge a c.
Si A es infinito, como está acotado, por el Teorema 3.3, existe un $x \in \mathbb{R}$ que es punto de acumulación de A. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, y de hecho es infinito. Tomando como r_1 el primer número natural tal que $x_{r_1} \in A_n$, r_2 el primer número natural tal que $r_2 > r_1$ y $x_{r_2} \in A_2$, y así sucesivamente, se puede construir una sucesión de números naturales $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ estrictamente creciente, de manera que $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Además, como $x_{r_n} \in A_n$, se tiene que $|x_{r_n} - x| < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

□

Teorema 4.7. *Cualquier conjunto de número reales $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si toda sucesión de números reales en A que converge, lo hace a un número de A.*

i Demostración

Demostración. Supongamos que A es un conjunto cerrado y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales en A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Veremos que $x \in A$ por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que $x \notin A$. Entonces $x \in \overline{A}$. Como A es cerrado, $\overline{A}$ es abierto, y entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \overline{A}$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ se tiene $|x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \overline{A}$, de manera que $x_n \notin A$ $\forall n \geq k$, lo que contradice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión de números en A. Por tanto, debe ser $x \in A$.
Veamos ahora el otro sentido de la implicación. Supongamos que cualquier sucesión de números en A que converge, lo hace a un número de A. Si A no es cerrado, entonces $\overline{A}$ no es abierto, de manera que existe $x \in \overline{A}$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A$ de manera que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en A y además $|x_n - x| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así que, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin A$, lo que contradice la hipótesis de partida, por lo que A debe ser cerrado.

□

Corolario 4.1. *Cualquier sucesión de números reales en un conjunto cerrado y acotado tiene una subsucesión convergente a un número del conjunto.*

i Demostración

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado, y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A. Como A está acotado, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también lo está, y por el Teorema 4.6 tiene una subsucesión $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ convergente. Ahora bien, como $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge y está definida en A que es cerrado, por el teorema anterior, se concluye que $\lim_{n\to\infty} x_{r_n} \in A$.

□

4.5 Sucesiones propiamente divergentes

Ya hemos visto que una sucesión que no converge es divergente, pero existen distintos motivos por los que una sucesión puede no converger. En esta sección estudiamos un tipo particular de sucesiones que divergen porque no paran de crecer o decrecer.

Definición 4.8 (Sucesiones propiamente divergentes)**.** Se dice que una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene a ∞, y se denota $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, si para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq \varepsilon \ \forall n \geq k$.

Del mismo modo, se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene a $-\infty$, y se denota $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, si para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq \varepsilon \ \forall n \geq k$.

Y se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es *propiamente divergente* cuando $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

Ejemplo 4.18. La sucesión $(-n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a $-\infty$, ya que dado $\varepsilon < 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $-\varepsilon < k$, de manera $\varepsilon > -k$, y por tanto, $\forall n \geq k$, $-n \leq -k < \varepsilon$.

La sucesión $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞, ya que dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\varepsilon} < k$, de manera que $\forall n \geq k$, $n^2 \geq k^2 > \varepsilon$.

Proposición 4.5. *Una sucesión monótona de números reales es propiamente divergente si y solo si no está acotada. Además, si la sucesión es creciente entonces tiende a ∞, y si es decreciente tiende a $-\infty$.*

Demostración

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente y no acotada. Entonces dado $\varepsilon > 0$, como ε no es cota de la sucesión, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > \varepsilon$. Por tanto, $\forall n \geq k$, como la sucesión es creciente, se tiene que $x_n \geq x_k > \varepsilon$. Luego $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
De forma análoga se prueba que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y no acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

$\square$

Proposición 4.6. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ también tiende a ∞, y si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a $-\infty$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también tiende a $-\infty$.*

Demostración

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \varepsilon \ \forall n \geq k$, y por tanto también se cumple que

$y_n \geq x_n > \varepsilon\ \forall n \geq k$, de manera que $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$.
De forma análoga se prueba que si $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

□

Proposición 4.7. *Sean* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones de números reales tales que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *y* $\lim_{n\to\infty} z_n = -\infty$, *entonces*

a. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$.
b. $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \infty$.
c. $\lim_{n\to\infty}(x_n + z_n) = -\infty$.
d. $\lim_{n\to\infty} kx_n = \infty\ \forall k > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} kx_n = -\infty\ \forall k < 0$.
e. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

i Demostración

Demostración. Se deja como ejercicio.

□

Proposición 4.8. *Sean* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de números reales estrictamente positivos tales que la sucesión* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $l \neq 0$. *Entonces,* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *tiende a* ∞ *si y solo si* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *tiende a* ∞.

i Demostración

Demostración. Sea $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ ya que $l > 0$ al ser las sucesiones estrictamente positivas. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ se tiene

$$\begin{aligned}
|x_n - l| < \varepsilon = \frac{l}{2} &\Rightarrow \frac{-l}{2} < \frac{x_n}{y_n} - l < \frac{l}{2} \\
&\Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3l}{2} \\
&\Rightarrow \frac{l}{2} y_n < x_n < \frac{3l}{2} y_n.
\end{aligned}$$

Ahora, si $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, por el teorema anterior, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{3l}{2} y_n = \infty$, y como $\frac{3l}{2} > 0$ se concluye que $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$.
Del mismo modo, si $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{l}{2} y_n = \infty$, y por el teorema anterior, se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

□

4.6 Sucesiones de Cauchy

En la última sección de este capítulo, se introducen un tipo particular de sucesiones convergente que son de especial importancia para la definición de los números reales.

Definición 4.9 (Sucesión de Cauchy). Se dice que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq k$.

Teorema 4.8 (Criterio de convergencia de Cauchy). *Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a x. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon'$ $\forall n \geq k$.
Ahora, si se toma $n, m \geq k$, se tiene, aplicando la desigualdad triangular,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon,$$

por lo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.
Veamos ahora al implicación en el otro sentido. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy. Entonces, dado $\varepsilon = 1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$ $\forall n, m \geq k$. Así pues, si $n \geq k$, se tiene, aplicando de nuevo la desigualdad triangular,

$$|x_n| = |x_n - x_k + x_k| \leq |x_n - x_k| + |x_k| < 1 + |x_k|.$$

Si se toma $c = \max(\{|x_1|, \ldots, |x_{k-1}|, 1 + |x_k|\})$ entonces c es una cota de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Aplicando ahora el Teorema 4.6 existe una subsucesión convergente $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
Sea $\lim_{n\to\infty} x_{r_n} = x$. Veamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon'$ $\forall n, m \geq k_1$. Por otro lado, como $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a x, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{r_n} - x| < \varepsilon'$ $\forall n \geq k_2$. Tomando $k = \max(\{k_1, k_2\})$, para cualquier $n \geq k$ se tiene, de nuevo por la desigualdad triangular,

$$|x_n - x| = |x_n - x_{r_k} + x_{r_k} - x| \leq |x_n - x_{r_k}| + |x_{r_k} - x| < \varepsilon' + \varepsilon = \varepsilon,$$

pues $r_k \geq k \geq k_1$. Por consiguiente, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

$\square$

Ejemplo 4.19. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\frac{2}{\varepsilon} > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\varepsilon} < k$ y, por tanto, $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Ahora, para cualquier $n, m \geq k$ se tiene

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon.$$