Manual de Análisis Matemático Real

para Ciencias e Ingenierías





Indice de contenidos

Prefacio

¡Bienvenida/os al manual de Análisis Matemático de variable real!

Este libro es una introducción al Análisis Matemático de variable real y cubre los contenidos típicos de un grado en Matemáticas o Ingeniería Matemática.

Este libro se acompaña de una colección de problemas resueltos.

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento – No comercial – Compartir bajo la misma licencia 3.0 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/.

Con esta licencia eres libre de:

- Copiar, distribuir y mostrar este trabajo.
- Realizar modificaciones de este trabajo.

Bajo las siguientes condiciones:

- **Reconocimiento**. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

1 Teoría de conjuntos

Los conjuntos son entes matemáticos que se usan habitualmente para modelar situaciones reales en las que aparecen colecciones de objetos de cualquier naturaleza, así como las relaciones entre ellos, y por tanto, aparecen en la mayor parte de los problemas de Ciencia o Ingeniería.

Al mismo tiempo, los conjuntos son una de las estructuras matemáticas más básicas sobre las que se construyen la mayoría de las teorías matemáticas.

En este capítulo se estudia el concepto de *conjunto* y sus principales propiedades y relaciones.

1.1 Conjuntos

Definición 1.1 (Conjunto). Un *conjunto* es a una colección o agrupación bien definida de objetos que puede considerarse en sí misma otro objeto. Para representar un conjunto se indican sus elementos entre llaves y normalmente se utilizarán letras mayúsculas para referirse a ellos.

Ejemplo 1.1. Algunos ejemplos de conjuntos son:

- El conjunto de los días de la semana es $A = \{L, M, X, J, V, S, D\}$.
- El conjunto de los colores básicos es $B = \{\text{rojo, verde, azul}\}.$
- El conjunto de los puntos de un dado $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$
- El conjunto de los números naturales pares: $D = \{2, 4, 6, ...\}$.

Definición 1.2 (Elementos). Los objetos que componen un conjunto se llaman *elementos* o miembros del conjunto.

Los elementos de un conjunto pueden ser cualquier cosa (días, colores, personas, etc), pero en este curso nos centraremos los conjuntos numéricos, es decir, los conjuntos cuyos elementos son números, ya que son los que se estudian en el Análisis Matemático.

Existen dos formas de definir un conjunto: por extensión o por comprensión. La definición extensiva consiste en listar de manera explícita todos sus elementos, como por ejemplo $\{1,2,3\}$, mientras que la intensiva o por comprensión, consiste en dar una propiedad que cumplen los elementos del conjunto y solo ellos, como por ejemplo el conjunto de

los números naturales menores que 4. En este último caso se suele utilizar la notación $\{x: P(x)\}\$, donde P(x) es la propiedad que cumple x.

Mientras que las definiciones por extensión no presentan problemas, hay que tener cuidado con las definiciones por comprensión, pues no todas las propiedades definen conjuntos válidos, tal y como demostró Bertrand Russell con su famosa paradoja del barbero.

Definición 1.3 (Pertenencia). Si a es un elemento de un conjunto A, se dice que a pertenence a A y se denota $a \in A$. Por el contrario, si a no es un elemento del conjunto A, se dice que no pertenece a A y se denota $a \notin A$.

Ejemplo 1.2. Si A es el conjunto de los números naturales pares, $2 \in A$, pero $1 \notin A$.

Definición 1.4 (Igualdad). Se dice que dos conjuntos A y B son iguales, y se denota A = B, si tienen exactamente los mismos elementos. En caso contrario se escribe $A \neq B$.

Conviene remarcar que en un conjunto no puede haber elementos repetidos y tampoco importa el orden en que se listan los elementos.

Ejemplo 1.3. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}.$

Proposición 1.1. La igualdad de conjuntos es una relación de equivalencia, es decir, satisface las propiedades:

- 1. Reflexiva: A = A.
- 2. Simétrica: $Si\ A = B\ entonces\ B = A$.
- 3. Transitiva: A = B y B = C, entonces A = C.

Definición 1.5 (Subconjunto). Se dice que un conjunto A es un *subconjunto* o está *incluído* en otro conjunto B, y se denota $A \subseteq B$, si todos los elementos de A pertenecen a B, es decir,

$$\forall x \in A, x \in B$$

Cuando $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ se dice que A está estríctamente incluido en B o que A es un subconjunto propio de B y se escribe $A \subseteq B$.

Ejemplo 1.4. $\{1,2,3\} \subseteq \{3,1,2\}$ y $\{1,3\} \subsetneq \{3,1,2\}$.

Proposición 1.2. La inclusión de conjuntos es una relación de orden parcial, es decir, satisface las propiedades:

- 1. Reflexiva: $A \subseteq A$.
- 2. Antisimétrica: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces A = B.
- 3. Transitiva: $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Definición 1.6 (Conjunto vacío). El conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío y se denota \emptyset .

1.2 Álgebra de conjuntos

A continuación se definen las principales operaciones sobre conjuntos y sus propiedades.

Definición 1.7 (Unión). Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B, y se denota $A \cup B$, al conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

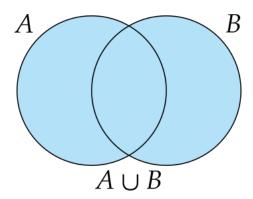


Figura 1.1: Unión de conjuntos

Ejemplo 1.5. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, la unión de A y B es $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Definición 1.8 (Intersección). Dados dos conjuntos A y B, se llama intersección de A y B, y se denota $A \cap B$, al conjunto de todos los elementos comunes a A y B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ y \ x \in B\}.$$

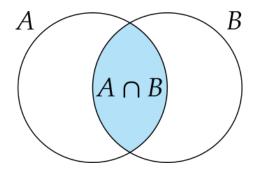


Figura 1.2: Intersección de conjuntos

Ejemplo 1.6. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, la intersección de A y B es $A \cap B = \{2, 4\}$.

Definición 1.9 (Complemento). Dado un conjunto $A \subset \Omega$, se llama *complemento* de A con respecto a Ω , y se denota \overline{A} , al conjunto de todos los elementos de Ω que no pertenecen a A.

$$\overline{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

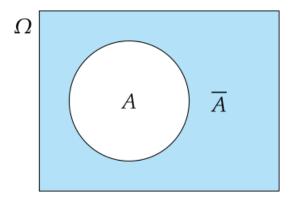


Figura 1.3: Complemento de un conjunto

Ejemplo 1.7. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, el contrario de A con respecto a Ω es $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, y el de B es $\overline{B} = \{5, 6\}$.

Definición 1.10 (Diferencia). Dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia de A y B, y se denota A-B, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir,

 $A - B = \{x : x \in A \ y \ x \notin B\}.$

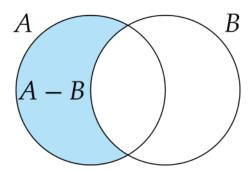


Figura 1.4: Diferencia de conjuntos

Ejemplo 1.8. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, la diferencia de A y B es $A - B = \{6\}$, y la diferencia de B y A es $B - A = \{1, 3\}$.

Definición 1.11 (Diferencia simétrica). Dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia simétrica de A y B, y se denota $A \triangle B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A \circ B$, pero no a ambos a la vez, es decir,

$$A\triangle B = \{x \,:\, x\in A-B \text{ o } x\in B-A\}$$

$$= (A-B)\cup (B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$$

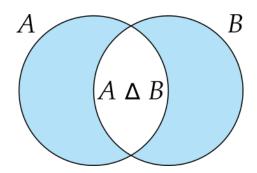


Figura 1.5: Diferencia simétrica de conjuntos

Ejemplo 1.9. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, la diferencia simétrica de A y B es $A \triangle B = \{1, 3, 6\}$.

Proposición 1.3. Dado un conjunto universo Ω y los conjuntos $A, B, C \subseteq \Omega$, se cumplen las siguientes propiedades:

- 1. Idempotencia: $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$.
- 2. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.
- 3. Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- 4. Distributiva: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $y (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- 5. Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \Omega = A$.
- 6. Elemento absorvente: $A \cup \Omega = \Omega$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- 7. Elemento simétrico complementario: $A \cup \overline{A} = E \ y \ A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- 8. Doble complemento: $\overline{A} = A$.
- 9. Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- 10. $A \cap B \subseteq A \cup B$.
- 11. $A B = A \cap \overline{B}$.
- 12. $A B \subseteq A \ y \ B A \subseteq B$.
- 13. $A \triangle B = (A \cup B) (A \cap B)$.
- 14. $\overline{\Omega} = \emptyset \ y \ \overline{\emptyset} = \Omega$.

Definición 1.12 (Conjuntos disjuntos). Dados dos conjuntos A y B, se dice que son disjuntos si no tienen ningún elemento en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo 1.10. Dado el conjunto de los números que contiene un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y sus subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{3, 5\}$, se tiene que A y B no son disjuntos ya que $A \cap B = \{2, 4\} \neq \emptyset$, pero A y C son disjuntos pues $A \cap C = \emptyset$.

Definición 1.13 (Conjunto potencia). Dado un conjunto A, se llama *conjunto potencia* o *conjunto de las partes* de A, y se denota $\mathcal{P}(A)$, al conjunto de todos los subconjuntos de A, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Ejemplo 1.11. El conjunto potencia del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}\$$

1.3 Relaciones entre conjuntos

Definición 1.14 (Par ordenado). Dados dos elementos a y b se define el par ordenado (a,b) como

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}\$$

De manera más general, se define una n-tupla ordenada como

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

De forma mas informal, decimos que (a, b) es un par ordenado si el primer elemento (a) se distingue del segundo elemento (b). Por eso, se tiene que $(a, b) \neq (b, a)$, mientras que para conjuntos $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definición 1.15 (Producto cartesiano). Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de A y B, y se denota $A \times B$, al conjunto de los pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \setminus b \in B\}$$

De manera más general, si se tienen n conjuntos $A_1,A_2,\ldots,A_n,$ el producto cartesiano generalizado es

$$A_1\times A_2\times \ldots \times A_n=\{(a_1,\ldots,a_n)\,:\, a_i\in A_i \ \forall i=1,\ldots n\}$$

Ejemplo 1.12. El producto cartesiano de los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$ es

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Definición 1.16 (Relación binaria). Dados dos conjuntos A y B, se dice que R es una relación binaria sobre A y B si es un subconjunto del producto cartesiano de A y B, es decir,

$$R \subseteq A \times B$$
.

Si $(a, b) \in R$ se escribe aRb.

Si A y B son el mismo conjunto, se dice que R es una relación binaria homogénea.

Cuando un par ordenado pertenece a una relación, $(a,b) \in R$, también se suele escribir aRb.

Dependiendo de las propiedades que cumpla una relación binaria homogénea tenemos los siguientes tipos de relaciones:

- Reflexiva: $\forall a \in A, (a, a) \in R$
- Irreflexiva: $\forall a \in A, (a, a) \notin R$.
- Simétrica: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.
- Asimétrica: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$.
- Antisimétrica: $\forall a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces a = b.
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.
- Total: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \text{ o } (b, a) \in R.$

Definición 1.17 (Relación de equivalencia). Dado un conjunto A y una relación homogénea $\sim \subseteq A \times A$, se dice que \sim es una relación de equivalencia si es que cumple que \sim es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, si cumple las propiedades

- Reflexiva: $\forall a \in A, a \sim a$.
- Simétrica: $\forall a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $b \sim a$.
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A$, si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.

Ejemplo 1.13. Ya hemos visto que la relación de igualdad matemática entre los elementos de un conjunto es una relación de equivalencia.

Definición 1.18 (Relación de orden). Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que \preceq es una relación de orden, si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, si cumple las propiedades

- Reflexiva: $\forall a \in A, a \leq a$.
- Antisimétrica: $\forall a, b \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces a = b.
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Definición 1.19 (Relación de orden parcial). Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que \preceq es una relación de orden parcial, si es una relación de orden y al menos dos elementos de A están relacionados mediante \preceq , es decir,

$$\exists x, y \in A, \ x \leq y \text{ o } y \leq x.$$

Al conjunto A con la relación de orden parcial \leq se le llama conjunto parcialmente ordenado, y se denota (A, \leq) .

Ejemplo 1.14. El conjunto potencia de un conjunto A con la relación de inclusión es un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$.

Definición 1.20 (Relación de orden total). Dado un conjunto A y una relación homogénea $\preceq \subseteq A \times A$, se dice que \preceq es una relación de orden total, si es una relación de orden y todos los elementos de A se relacionan entre sí mediante \preceq , es decir,

$$\forall x, y \in A, \ x \leq y \text{ o } y \leq x.$$

Al conjunto A con la relación de orden total \leq se le llama *conjunto totalmente ordenado*, y se denota (A, \leq) .

Ejemplo 1.15. La relación de orden de los números naturales (\mathbb{N}, \leq) es un orden totalmente ordenado. Sin embargo, la relación de inclusión en el conjunto potencia de un conjunto A $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ no es un orden totalmente ordenado, ya que dados dos elementos $a \neq b$ de A, se cumple que $\{a\} \subsetneq \{b\}$ y $\{b\} \subsetneq \{a\}$.

1.4 Cotas y extremos

Definición 1.21 (Cota superior). Dado un subconjunto con una relación de orden parcial (A, \preceq) y un subconjunto $B \subseteq A$, se dice que un elemento $c \in A$ es una *cota superior* de B, si todos los elementos de B son menores o iguales a c según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in B, x \prec c.$$

El conjunto de todas las cotas superiores de B se denota CS(B).

Ejemplo 1.16. Para el conjunto $B = \{3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{N}$, 5 es una cota superior. El conjunto de todas sus cotas superiores es $CS(B) = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 5\}$.

Para el intervalo $[0,1)\subseteq\mathbb{R}$, cualquier número real $x\geq 1$ es una cota superior, por lo que $\mathrm{CS}([0,1))=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 1\}.$

Definición 1.22 (Cota inferior). Dado un subconjunto con una relación de orden parcial (A, \preceq) y un subconjunto $B \subseteq A$, se dice que un elemento $c \in A$ es una *cota inferior* de B, si todos los elementos de B son mayores o iguales a c según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in B, c \prec x.$$

El conjunto de todas las cotas inferiores de B se denota CI(B).

Ejemplo 1.17. El conjunto de las cotas inferiores de $B = \{3,4,5\} \subseteq \mathbb{N}$ es $CI(B) = \{1,2,3\}$.

El conjunto de las cotas inferiores de $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es $CI([0,1)) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

Definición 1.23 (Máximo). Dado un conjunto con una relación de orden parcial (A, \leq) , se dice que un elemento $m \in A$ es un *máximo* de A, y se denota $\max(A)$, si cualquier otro elemento de A es menor o igual que él según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in A, x \leq m.$$

Ejemplo 1.18. El máximo de $B = \{3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{N}$, es 5.

El intervalo $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ no tiene máximo.

Definición 1.24 (Mínimo). Dado un conjunto con una relación de orden parcial (A, \preceq) , se dice que un elemento $m \in A$ es un mínimo de A, y se denota $\min(A)$, si y cualquier otro elemento de A es mayor o igual que él según la relación de orden, es decir,

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

Ejemplo 1.19. El mínimo de $B = \{3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{N}$, es 3.

El mínimo del intervalo $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es 0.

Teorema 1.1 (Unicidad de los extremos). Dado un conjunto con una relación de orden parcial (A, \preceq) , si existe el máximo de A entonces es único. Lo mismo es cierto para el mínimo.

i Demostración

Prueba. Supongamos que A tiene dos máximos m y n. Entonces, por la definición de máximo, $x \leq m \ \forall x \in A$, y en particular $n \leq m$. Del mismo modo, $x \leq n \ \forall x \in A$, y en particular $m \leq n$, pero como \leq es una relación de orden, se deduce que m = n.

Definición 1.25 (Supremo). Dado un subconjunto con una relación de orden parcial (A, \preceq) y un subconjunto $B \subseteq A$, se llama *supremo* de B, y se denota $\sup(B)$, a la menor de las cotas superiores de B.

Ejemplo 1.20. El supremo del conjunto $B = \{3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{N}$, es 5 ya que es el mínimo del conjunto de sus cotas superiores $CS(B) = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 5\}$.

El supremo del intervalo $[0,1)\subseteq\mathbb{R}$ es 1 ya que es el mínimo del conjunto de sus cotas superiores $\mathrm{CS}([0,1))=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 1\}.$

Definición 1.26 (Ínfimo). Dado un subconjunto con una relación de orden parcial (A, \preceq) y un subconjunto $B \subseteq A$, se llama *infimo* de B, y se denota $\inf(B)$, a la mayor de las cotas inferiores de B.

Ejemplo 1.21. El ínfimo del conjunto $B = \{3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{N}$, es 3 ya que es el máximo del conjunto de sus cotas inferiores $CI(B) = \{1, 2, 3\}.$

El ínfimo del intervalo $[0,1)\subseteq\mathbb{R}$ es 0 ya que es el máximo del conjunto de sus cotas inferiores $CI([0,1)) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$

🛕 Advertencia

Obsérvese que un conjunto puede no tener cotas superiores o inferiores y, por tanto, no tener supremo o ínfimo.

Ejemplo 1.22. El conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par}\}$, no tiene cotas superiores, ni inferiores, y por tanto tampoco tiene máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

1.5 Funciones

El concepto de función es uno de los más importantes en el Análisis Matemático, ya que muchos de los fenómenos naturales en los que una magnitud depende de otra se modelizan mediante funciones.

Definición 1.27 (Función). Se dice que una relación binaria $f \subseteq A \times B$, con A y B conjuntos no vacíos, es una función parcial o aplicación parcial, y se denota $f: A \to B$, si f no contiene dos pares ordenados distintos con la misma primera componente, es decir,

$$\forall a \in A, \forall b_1, b_2 \in B, \text{ si } (a, b_1) \in f \text{ y } (a, b_2) \in f, \text{ entonces } b_1 = b_2.$$

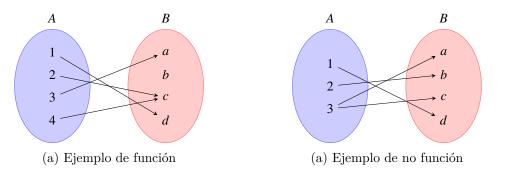
Si además, la relación es total en A, es decir, todos los elementos de A aparecen en la relación, se dice que f es una función total o simplemente función.

De manera más informal podemos decir que una función es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos A y B que asocia a cada elemento de A un elemento, y solo uno, de B.

Es habitual representar los pares de una función con la notación y = f(x) donde x es la primera componente del par e y la segunda.

Ejemplo 1.23. La relación binaria $f = \{(1, d), (2, c), (3, a), (4, c)\}$ es una función, pero la relación $g = \{(1, d), (2, b), (3, a), (3, c)\}$ no lo es porque existen dos pares cuya primera componente es 3.

Del mismo modo la función raíz cuadrada $y=f(x)=\sqrt{x}$ no es una función en el conjunto de los números reales, ya que, por ejemplo $\sqrt{1}=\pm 1$.



Definición 1.28 (Dominio). Dada una función $f: A \to B$, se llama dominio de f, y se denota Dom(f) al conjunto de las primeras componentes de los pares de f, es decir,

$$Dom(f) = \{a \in A : \exists b \in B, (a, b) \in f\}$$

Definición 1.29 (Imagen). Dada una función $f: A \to B$, se llama *imagen* de f, y se denota Im(f) al conjunto de las segundas componentes de los pares de f, es decir,

$$\operatorname{Im}(f) = \{ b \in B : \exists a \in A, (a, b) \in f \}$$

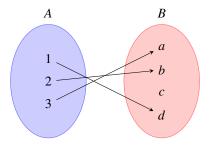
Definición 1.30 (Función inyectiva). Dada una función $f: A \to B$, se dice que f es inyectiva si no existen dos elementos de A con la misma imagen, es decir,

$$\forall a_1, a_2 \in A$$
, si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$.

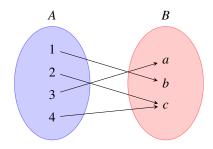
Definición 1.31 (Función sobreyectiva). Dada una función $f: A \to B$, se dice que f es sobreyectiva si todo elemento de B tiene una preimagen (está relacionado con algún elemento de A mediante f), es decir,

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$$

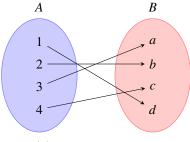
Definición 1.32 (Función biyectiva). Dada una función $f: A \to B$, se dice que f es biyectiva, si f es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva.



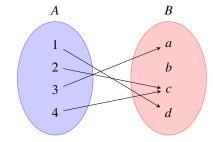
(a) Función inyectiva y no sobreyectiva



(a) Función sobreyectiva y no inyectiva



(a) Función biyectiva



(a) Función no inyectiva y no sobreyectiva

Definición 1.33 (Función identidad). Dado un conjunto A, se llama función identidad de A, y se denota id $_A:A\to A$, a la función que empareja cada elemento de A consigo mismo, es decir,

$$id_A(a) = a, \forall a \in A.$$

Definición 1.34 (Función inversa). Dada una función $f: A \to B$, se llama función inversa de f, y se denota $f^{-1}: B \to A$, a la función que resulta de revertir el orden de los pares de f, es decir,

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}.$$

Obsérvese que para que exista la función inversa de f, f debe ser inyectiva.

En muchas ocasiones, el valor de salida de una función se puede utilizar como la entrada de otra función, concatenando la aplicación de las dos funciones.

Definición 1.35 (Composición de funciones). Dadas dos funciones $f: A \to B$ y $g: C \to D$, tales que $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Dom}(g)$, se llama *composición* de f con g, y se denota $g \circ f: A \to D$, a la funcion que a cada elemento del dominio de A le asocia el elemento que resulta de aplicar g a la imagen de a mediante f, es decir,

$$g \circ f(a) = g(f(a)), \forall a \in A.$$

Proposición 1.4. Dada una función $f:A\to B$, si existe f^{-1} , entonces $f\circ f^{-1}=\operatorname{id}_A$ y $f^{-1}\circ f=\operatorname{id}_B$.

i Demostración

Prueba. Se
a $a\in {\rm Dom}(A),$ y supongamos que f(a)=b. Entonce
s $f^{-1}(b)=a,$ de manera que

$$f \circ f^{-1}(a) = f(f^{-1}(a)) = f(b) = a.$$

1.6 Cardinalidad de un conjunto

Definición 1.36 (Cardinal). Dado un conjunto A, se llama *cardinal* de A, y se denota |A|, al número de elementos de A.

De manera informal, se puede decir que el cardinal de un conjunto es su tamaño.

Ejemplo 1.24. El cardinal del conjunto $A = \{a, b, c\}$ es |A| = 3.

Proposición 1.5. El cardinal del conjunto potencia de un conjunto A es $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

i Demostración

Prueba. Se puede dar una prueba mediante coeficientes binomiales. Si A tiene n elementos, es decir, $|\mathbf{A}|=n$, el número de subconjuntos distintos con k elementos es igual al número combinatorio

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Como un subconjunto de A puede tener desde 0 hasta n elementos, en total, el número de posibles subconjuntos de A será

$$|\mathcal{P}(A)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

y según el teorema del binomio de Newton se tiene que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n = 2^{|A|}.$$

Definición 1.37 (Conjuntos equipotentes). Se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes, y se denota $A \approx B$, si tienen la misma cantidad de elementos, es decir, si |A| = |B|.

Proposición 1.6. Dos conjuntos A y B son equipotentes si y solo si cada elemento de A puede emparejarse con uno de B, de manera que todos los elementos de B sean pareja de uno de A y solo de uno, es decir, existe una aplicación biyectiva $f: A \to B$.

i Demostración

Prueba. Si A y B son equipotentes, es trivial construir una biyección entre ellos, ya que podemos construir una función que empareje cada elemento de A con un único elemento de B y cada elemento de B con un único elemento de A.

Por otro lado, si existe una aplicación biyectiva f entre A y B, la asociación entre elementos es uno a uno, es decir, para cada elemento de A está emparejado exactamente con un uno de B, y cada elemento de B está emparejado exactamente con uno de A, con lo que necesariamente A y B deben tener el mismo número de elementos.

Proposición 1.7. La relación de equipotencia es una relación de equivalencia, es decir, satisface las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $A \approx A$ para todo conjunto A.
- Simétrica: Si $A \approx B$, entonces $B \approx A$, para cualesquiera conjuntos $A \ y \ B$.
- Transitiva: $Si\ A \approx B\ y\ B \approx C$, entonces $A \approx C$ para cualesquiera conjuntos $A,\ B$ $y\ C$.

i Demostración

Prueba. Veamos que la relación de equipotencia cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Es trivial ya que cualquier conjunto tiene el mismo número de elementos que él mismo, luego $A \approx A$.

Simétrica: Si $A \approx B$ entonces, por la proposición anterior, existe una una biyección $f: A \longrightarrow B$. Pero entonces, la función inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$ es también una biyección entre B y A, por lo que $B \approx A$.

Transitiva: Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces, por la proposición anterior, existen dos

biyecciones $f:A\longrightarrow B$ y $g:B\longrightarrow C$. Pero entonces, la función $g\circ f:A\longrightarrow C$ es también biyectiva, por lo que $A\approx C$.

De igual modo se puede definir una relación que capture la noción de que un conjunto es de menor tamaño que otro.

Definición 1.38 (Conjunto minuspotente). Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es *minuspotente* a B, y se denota $A \leq B$, si el cardinal de A es menor o igual que el de B, es decir, si $|A| \leq |B|$.

Proposición 1.8. El conjunto A es minuspotente al conjunto B si y solo si existe una aplicación inyectiva $f: A \to B$.

i Demostración

Prueba. Supongamos que $A \leq B$, entonces podemos tomar un subconjunto $C \subseteq B$ con el mismo cardinal que A y crear una biyección entre A y C. Tomando esta misma aplicación entre A y B, la aplicación será inyectiva.

Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que existe una aplicación inyectiva $f:A\longrightarrow B$, eso significa que todos los elementos de A están emparejados con elementos de B distintos entre sí, por lo que B tiene al menos el mismo número de elementos que A, y por tanto, $A \leq B$.

Proposición 1.9. La relación de minuspotencia es una relación de orden, es decir, satisface las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $A \leq A$ para todo conjunto A.
- Antisimétrica: Si $A \leq B$ y $B \leq A$, entonces $A \approx B$, para cualesquiera conjuntos A y B.
- Transitiva: Si A ≤ B y B ≤ C, entonces A ≤ C para cualesquiera conjuntos A, B y C.

i Demostración

Prueba. Veamos que la relación de minuspotencia satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Reflexiva: Es trivial, ya que $|A| \leq |A|$ para cualquier conjunto A, por lo que $A \leq A$. Antisimétrica: Si $A \leq B$ y $B \leq A$, entonces $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, y como la relación \leq es una relación de orden en \mathbb{N} , se deduce que |A| = |B|, por lo que $A \approx B$.

Transitiva: Si $A \leq B$ y $B \leq C$, entonces $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, y como la relación \leq es una relación de orden en \mathbb{N} , se deduce que $|A| \leq |C|$, por lo que $A \leq C$. \square

Definición 1.39 (Conjunto finito). Se dice que un conjunto A es finito si es que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Cuando esto ocurre, el cardinal de A es |A| = n.

Definición 1.40 (Conjunto infinito). Se dice que un conjunto A es infinito si no es finito. En tal caso su cardinal se denota $|A| = \infty$.

Advertencia

Hay que dejar claro que el símbolo ∞ es una notación de conveniencia y no representa a ningún número.

Ejemplo 1.25. El conjunto $A = \{a, b, c\}$ es finito ya que puede definirse una aplicación biyectiva $f: A \to \{1, 2, 3\}$ con los pares $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$, y por tanto, |A| = 3.

Por otro lado, el conjunto de los números naturales N es infinito, ya que no puede ponerse en correspondencia biyectiva con ningún conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, $|\mathbb{N}| = \infty$.

Cabe preguntarse si dos conjuntos infinitos son siempre del mismo tamaño. Para responder a la pregunta basta con aplicar la Proposición ??.

Ejemplo 1.26. El conjunto de los números naturales pares P es infinito y también lo es el conjunto de los números naturales N. Además ambos son equipotentes pues se puede definir una aplicación biyectiva $f(n) = 2n \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $\mathbb{N} \approx P$.

Sin embargo, como se verá más adelante, el conjunto de los números naturales N no es equipotente al conjunto de los números reales R, sino minuspotente. Por tanto, existen conjuntos infinitos de distintos tamaños. Para demostrarlo se necesita introducir un nuevo concepto.

Definición 1.41 (Conjunto numerable). Se dice que un conjunto A es numerable si tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales N.

Corolario 1.1. Un conjunto A es numerable si existe una aplicación biyectiva $f: \mathbb{N} \to A$.

Demostración

Prueba. La prueba de este resultado es inmediata aplicando la Proposición??.

En otras palabras, un conjunto es infinito numerable si tiene correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales N, y por tanto, podemos enumerar sus elementos, es decir, hay un primer elemento, un segundo, etc.

Ejemplo 1.27. En el ejemplo anterior hemos visto que el conjunto de los números pares es equipotente al conjunto de los números naturales, y por consiguiente, es numerable.

Del mismo modo se puede probar que el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} también es numerable, pues se puede definir una aplicación biyectiva $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera

$$f(n) = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es impar,} \\ -n/2 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es par.} \end{cases}$$

Sin embargo, existen conjuntos infinitos que no son numerables, como por ejemplo el conjunto de los números reales \mathbb{R} .

David Hilbert, propuso una interesante paradoja para probar este hecho, conocida como la paradoja del hotel infinito

Georg Cantor dio una prueba formal de esto mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Cantor). El conjunto potencia de cualquier conjunto A tiene un cardinal estrictamente mayor que el cardinal de A, es decir, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

i Demostración

Prueba. Basta con demostrar que no existe una aplicación $f:A\to \mathcal{P}(A)$ sobreyectiva, y para ello basta con encontrar un subconjunto B de A que no sea la imagen mediante f de ningún elemento de A.

Tomando el siguiente subconjunto de A

$$B = \{ x \in A : x \notin f(x) \},\$$

es decir, el conjunto de los elementos de A que no están contenidos en el subconjunto de A que le corresponde mediante f, se puede probar por reducción al absurdo que B no puede ser la imagen mediante f de ningún elemento de A.

Supóngase que que existe $a \in A$ tal que B = f(a). Como B es un subconjunto de A, pueden darse dos casos:

- Si $a \in B$, entonces por la definición de B se tiene que $a \notin f(a) = B$, lo cual es contradictorio.
- Si $a \notin B$, entonces por la definición de B se tiene que $a \in f(a) = B$, que también es contradictorio.

Así pues, en ambos casos se llega a una contradicción y, por tanto, se concluye que no existe a=f(B), por lo que f no es sobreyectiva y $|A|<|\mathcal{P}(A)|=2^{|A|}$. \square

Teorema 1.3 (Cardinalidad del continuo). El conjunto de los números reales \mathbb{R} tiene un cardinal igual al del conjunto potencia del conjunto de los números naturales $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, es decir. $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$.

i Demostración

Prueba. Daremos una demostración partiendo del hecho de que cada número real tiene una expansión decimal infinita de la forma e.d donde e es la parte entera y d la decimal infinita (por ejemplo, 3/2 se puede representar por la expansión decimal infinita $1.5000\ldots$).

El número de dígitos en la parte decimal es numerable ya que pueden ponerse fácilmente en correspondencia biyectiva con \mathbb{N} y, por tanto, cualquier número real tendrá $|\mathbb{N}|$ dígitos en su parte decimal, lo que nos da, al ser nuestro sistema de numeración en base 10, un total de $10^{|\mathbb{N}|}$ posibles combinaciones en la parte decimal. En cuanto a la parte entera, ya se ha visto que el conjunto de los números enteros es equipotente al de los números naturales, por lo que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Así pues, el número total de expansiones decimales infinitas es $|\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|}$, y como todo número real tienen una expansión decimal infinita, se tiene

$$|\mathbb{R}| < |\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|}.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema ??, $|\mathbb{N}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$, por lo que finalmente se tiene $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|10^{|\mathbb{N}|} \leq 2^{|\mathbb{N}|}10^{|\mathbb{N}|} \leq 2^{|\mathbb{N}|}(2^4)^{|\mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{N}|+4|\mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{N}|}$, ya que por aritmética de las cardinalidades se tiene que $|\mathbb{N}| + 4|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Para probar el otro sentido de la desigualdad, basta tomar el conjunto de las fracciones decimales de la forma $0.d_1d_2d_3\dots$ donde $d_i\in\{0,1\}$ (por ejemplo $0.101000\dots$) que claramente es un subconjunto de \mathbb{R} . Puesto que cada número de este conjunto tiene infinitos dígitos decimales, de nuevo, se puede poner en correspondencia biyectiva cada dígito con un número natural, y como para cada posición hay dos posibles dígitos $(0\ y\ 1)$, el número total de números en este conjunto es $2^{|\mathbb{N}|}$, por lo que se tiene que $2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{R}|$.

Así pues, como
$$|\mathbb{R}| \leq 2^{|\mathbb{N}|}$$
 y $2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{R}|$, se concluye que $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$.

< youtube 206s >

Tomando iterativamente el conjunto potencia de un conjunto infinito y aplicando el teorema de Cantor, obtenemos una jerarquía infinita de cardinales infinitos, cada uno estrictamente mayor que el anterior.

2 El sistema de los números reales

En este capítulo se estudia el conjunto de los números reales \mathbb{R} ya que el Análisis Matemático estudia conceptos y construcciones realizadas a partir de este conjunto de números y sus propiedades.

Antes de presentar el conjunto de los números reales se presentan otros subconjuntos suyos más elementales que suelen introducirse antes. Iremos ampliando sucesivamente estos conjuntos para dotarlos de nuevas propiedades hasta llegar al conjunto de los números reales.

2.1 El conjunto de los números naturales N

El primer conjunto de números que tradicionalmente suele estudiarse en el colegio son los números $naturales \mathbb{N}$, ya que sirven para contar.

En los números naturales se define una relación de orden $< (1 < 2 < 3 < \cdots)$, y dos operaciones binarias, la suma (+) y el producto (\cdot) , con una serie de propiedades que dotan al conjunto de una estructura de semianillo unitario conmutativo bien ordenado:

- a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{N} \ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
- b. Propiedad asociativa de la suma: $(a+b)+c=a+(b+c) \ \forall a,b,c \in \mathbb{N}$.
- c. Propiedad commutativa de la suma: $a+b=b+a \ \forall a,b \in \mathbb{N}$. d.Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{N} \ \forall a,b \in \mathbb{N}$.
- d. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- e. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in \mathbb{N}$.
- f. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a \ \forall a \in \mathbb{N}$.
- g. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

En el conjunto de los números naturales todo número tiene un posterior, pero no un anterior.

2.2 El conjunto de los números enteros Z

Los números naturales no tienen simétrico (opuesto) para la suma, de manera que no puede definirse la resta. Para ello es necesario extender el conjunto de los naturales con los números negativos (-1, -2, -3, ...), y el cero (0).

Extendiendo el orden y las operaciones de los naturales a estos números se obtiene el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} con las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de anillo conmutativo unitario y totalmente ordenado:

- a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{Z} \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- b. Propiedad asociativa de la suma: $(a+b)+c=a+(b+c) \ \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$.
- c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- d. Elemento neutro de la suma: $0 + a = a \ \forall a \in \mathbb{Z}$.
- e. Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $a + (-a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{Z}$.
- f. Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{Z} \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- g. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- h. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- i. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a \ \forall a \in \mathbb{Z}$.
- j. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Al introducir el opuesto de la suma, se puede definir bien la resta como a-b=a+(-b) $\forall a,b\in\mathbb{Z}.$

En el conjunto de los enteros todo número tiene un anterior y un posterior.

2.3 El conjunto de los números racionales Q

Los números enteros (salvo el -1 y 1) no tienen elemento simétrico (inverso) para el producto, de manera que no puede definirse la división. Para ello es necesario extender el conjunto de los enteros con los números fraccionarios, que se definen de la forma a/b donde el numerador a y el denominador b son números enteros primos entre si (por ejemplo 1/2 o -5/3).

Extendiendo el orden y las operaciones de los enteros a estos números se obtiene el conjunto de los números $racionales \mathbb{Q}$ con las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de $cuerpo\ conmutativo\ totalmente\ ordenado$:

- a. Propiedad de cierre de la suma: $a + b \in \mathbb{Q} \ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
- b. Propiedad asociativa de la suma: $(a+b)+c=a+(b+c) \ \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$.
- c. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a \ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
- d. Elemento neutro de la suma: $0 + a = a \ \forall a \in \mathbb{Q}$.
- e. Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $a + (-a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{Q}$.

- f. Propiedad de cierre del producto: $a \cdot b \in \mathbb{Q} \ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
- g. Propiedad asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.
- h. Propiedad conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.
- i. Elemento neutro del producto: $1 \cdot a = a \ \forall a \in \mathbb{Q}$.
- j. Elemento simétrico (inverso) del producto: $a \cdot a^{-1} = 1 \ \forall a \neq 0 \in \mathbb{Q}$.
- k. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$.

Al introducir el inverso del producto, se puede definir la división como $a/b = a \cdot b^{-1} \ \forall a, b \in \mathbb{Q}$.

Teorema 2.1 (Densidad de los números racionales). El conjunto de los números racionales es denso, es decir, entre dos números racionales siempre existe un número racional.

i Demostración

Prueba. Dados dos números racionales $a < b \in \mathbb{Q}$, el número $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$, y se cumple que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Al ser un conjunto denso, cualquier número racional no tiene un número anterior ni uno posterior como ocurría con los enteros.

2.4 El conjunto de los números irracionales

Muy pronto los griegos se dieron cuenta de que había otra clase de números que no podían representarse como cociente de números enteros y por tanto no pertenecían al conjunto de los números racionales, de manera que este conjunto es incompleto. El ejemplo clásico es el número $\sqrt{2}$ que se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con ambos lados de longitud 1.

Teorema 2.2 (Irracionalidad de $\sqrt{2}$). El número $\sqrt{2}$ no es racional.

i Demostración

Prueba. Probar que $\sqrt{2}$ no es racional es equivalente a probar que no existe un número racional m/n tal que $(m/n)^2=2$. La demostración de este último resultado es sencilla por reducción al absurdo.

Supongamos que existe un número m/n con $n, m \in \mathbb{Z}$ primos entre si, tal que $(m/n)^2 = 2$, o lo que es lo mismo,

$$m^2 = 2n^2$$
.

De aquí se puede deducir que m^2 es par, lo que implica que m también es par, pues si m fuese impar, su cuadrado también sería impar. En tal caso, m podría escribirse como m=2k con $k\in\mathbb{Z}$ y se tendría $m^2=4k^2$. Sustituyendo ahora en la ecuación inicial se tiene $4k^2=2n^2$, lo que implica que $2k^2=n^2$. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, se tendría que n también sería un número par, por lo se obtiene un absurdo ya que partimos de que m y n eran primos entre sí. \square

Estos números que no son racionales se denominan *irracionales*, y, al igual que los números racionales, es un conjunto denso.

Teorema 2.3. Entre dos números racionales siempre existe un número irracional.

i Demostración

Prueba. Tomemos para empezar un número irracional entre 0 y 1, como por ejemplo, $1/\sqrt{2}=0.7071\ldots$, y consideremos dos números racionales cualesquiera $a,b\in\mathbb{Q}$, tales que a< b. Como $0<1/\sqrt{2}<1$ y b-a>0, se tiene que

$$0(b-a) < \frac{b-a}{\sqrt{2}} < 1(b-a),$$

o lo que es lo mismo, simplificando

$$0 < \frac{b-a}{\sqrt{2}} < (b-a).$$

Si ahora sumamos a a cada término de la desigualdad se tiene

$$a < a + \frac{b - a}{\sqrt{2}} < b,$$

de manera que el número $a+\frac{b-a}{\sqrt{2}}$ está entre a y b, pero además, se trata de un número irracional, ya que es el producto de un número irracional $1/\sqrt{2}$ por un racional b-a y más otro racional a.

En realidad, se puede probar que entre dos números racionales no solo existe un número irracional, sino una infinidad de ellos. Y del mismo modo, se puede probar que entre dos números irracionales existe una infinidad de números racionales.

2.5 El conjunto de los números reales

La extensión de los números racionales con los irracionales da lugar al conjunto de los números reales. Su construcción formal puede realizarse de distintas maneras (cortaduras

de Dedekind o sucesiones de Cauchy), pero todas ellas satisfacen la siguiente definición axiomática:

Definición 2.1 (Números reales). El sistema de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ está formado por un conjunto no vacío de números \mathbb{R} , sobre los que se definen dos operaciones binarias, suma (+) y producto (\cdot) , que satisfacen los siguientes axiomas:

Axiomas de cuerpo algebraico. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo abeliano:

- Axioma 1. Propiedad de cierre de la suma: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a+b \in \mathbb{R}$.
- Axioma 2. Propiedad asociativa de la suma: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, (a+b)+c=a+(b+c).$
- Axioma 3. Propiedad conmutativa de la suma: $\forall a,b \in \mathbb{R},\, a+b=b+a.$
- Axioma 4. Elemento neutro de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, tal que 0 + a = a.
- Axioma 5. Elemento simétrico (u opuesto) de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un número $-a \in \mathbb{R}$, tal que a + (-a) = 0.
- Axioma 6. Propiedad de cierre del producto: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$.
- Axioma 7. Propiedad asociativa del producto: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- Axioma 8. Propiedad conmutativa del producto: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$.
- Axioma 9. Elemento neutro del producto: $\forall a \in \mathbb{R}$, existe un número $1 \in \mathbb{R}$ {0}, tal que $1 \cdot a = a$.
- Axioma 10. Elemento simétrico (o inverso) del producto: $\forall a \in \mathbb{R} \{0\}$, existe un número $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
- Axioma 11. Propiedad distributiva del producto sobre la suma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$

Axiomas de orden. Existe un subconjunto no vacío $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado el conjunto de los *números reales positivos*, que verifica los siguientes axiomas:

- Axioma 12. Cierre del la suma en los reales positivos: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a+b \in \mathbb{R}^+$.
- Axioma 13. Cierre del producto en los reales positivos: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.
- Axioma 14. Propiedad de tricotomía: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes alternativas es cierta: $a \in \mathbb{R}^+$, a = 0 o $-a \in \mathbb{R}^+$.

Axioma de completitud

• Axioma 15. Axioma del supremo: Si un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota superior, entonces tiene un supremo $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

El último axioma es el que diferencia el conjunto de los números reales de otros cuerpos totalmente ordenados como los racionales.

A partir de las propiedades de las suma y el producto se pueden definir dos nuevas operaciones en \mathbb{R} .

Definición 2.2 (Resta). Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$, se define la *resta* de a y b, y se denota a - b, como la suma de a y el opuesto de b,

$$a - b = a + (-b).$$

Definición 2.3 (División). Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$, se define la división de $a \neq b$, y se denota a/b, como el producto de $a \neq b$ el inverso de b,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Definición 2.4 (Potencia). Dado un número reales $a \in \mathbb{R}$ y un número $n \in \mathbb{N}$, se define la *potencia* de a elevado a n, y se denota a^n , como el producto de a por sí mismo n veces,

$$a^n = a \cdot \stackrel{n}{\cdots} \cdot a$$
.

A a se le llama la base y a n el exponente de la potencia.

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Proposición 2.1 (Propiedades de algebraicas). De los axiomas de cuerpo algebraico de los números reales se deducen las siguientes propiedades:

- a. El elemento neutro de la suma (0) es único: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si a+b=a, entonces b=0.
- b. El elemento neutro del producto (1) es único: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $a \cdot b = a$, entonces b = 1.
- c. El elemento opuesto de un número real es único: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si a + b = 0, entonces b = -a.
- d. El elemento inverso de un número real es único: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $a \cdot b = 1$, entonces $b = a^{-1}$
- e. El producto de cualquier número real por el elemento neutro de la suma, es el elemento neutro de la suma: $\forall a \in \mathbb{R}, \ a \cdot 0 = 0.$
- f. El producto de cualquier número real por el opuesto de 1 es el opuesto del número: $\forall a \in \mathbb{R} \ (-1) \cdot a = -a$.

- g. El opuesto del opuesto de un número real es el propio número: $\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$.
- h. El producto de los opuestos de dos números reales es igual al producto de los números: $\forall a, b \in \mathbb{R}, (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
- i. El inverso de un número real distinto de 0 también es distinto de 0: $\forall a, \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$.
- j. El inverso del inverso de un número real distinto de 0 es el propio número: $\forall a \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.
- $k. \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}, \ si \ a \cdot b = a \cdot c \ y \ a \neq 0, \ entonces \ b = c.$
- l. Si el producto de dos números reales es 0, entonces alguno de los dos números es $0: \forall a, b \in \mathbb{R}$, si $a \cdot b = 0$, entonces a = 0 o b = 0.
- m. El inverso del producto de dos números distintos de 0 es el producto de los inversos: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ si \ a \neq 0 \ y \ b \neq 0, \ entonces \ (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}.$

i Demostración

Prueba. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b + a = a \ \forall a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$b+a=a \Leftrightarrow b+a+(-a)=a+(-a)$$

$$\Leftrightarrow b+0=0 \qquad \qquad \text{(axioma 5)}$$

$$\Leftrightarrow b=0 \qquad \qquad \text{(axioma 4)}$$

b. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \cdot a = a \ \forall a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} b \cdot a &= a \Leftrightarrow b \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} \\ &\Leftrightarrow b \cdot 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \end{aligned} \qquad \text{(axioma 10)}$$

c. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que a + b = 0. Entonces

$$a+b=0\Leftrightarrow (-a)+a+b=(-a)+0$$

 $\Leftrightarrow (-a)+a+b=-a$ (axioma 4)
 $\Leftrightarrow 0+b=-a$ (axioma 5)
 $\Leftrightarrow b=-a$ (axioma 4)

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 1 \Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot b = a^{-1} \end{aligned} \qquad \text{(axioma 9)} \\ \Leftrightarrow b &= a^{-1} \end{aligned} \qquad \text{(axioma 10)}$$

e. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 & \text{(axioma 9)} \\ &= a \cdot (1+0) & \text{(axioma 4)} \\ &= (a \cdot 1) + (a \cdot 0) & \text{(axioma 11)} \\ &= a + (a \cdot 0) & \text{(axioma 9)} \end{aligned}$$

Así pues, por la propiedad (a) se tiene que $a \cdot 0 = 0$.

f. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$a+(-1)\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a \qquad \qquad \text{(axioma 9)}$$

$$=(1+(-1))\cdot a \qquad \qquad \text{(axioma 11)}$$

$$=0\cdot a \qquad \qquad \text{(axioma 5)}$$

$$=0 \qquad \qquad \text{(prop. e)}$$

Como $a + (-1) \cdot a = 0$, aplicando la propiedad (c) se tiene $(-1) \cdot a = -a$.

g. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$a + (-a) = 0 \Leftrightarrow (-a) + a = 0$$
 (axiomas 5 y 3)
 $\Leftrightarrow a = -(-a)$ (prop. c)

h. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene

$$(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b)$$
 (prop. f)

$$= ((-1) \cdot (-1)) \cdot a \cdot b$$
 (axioma 7)

$$= -(-1) \cdot a \cdot b$$
 (prop. f)

$$= 1 \cdot a \cdot b$$
 (prop. g)

$$= a \cdot b$$
 (axioma 9)

i. Se
a $a\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0.$ Supongamos ahora que
 $a^{-1}=0.$ Entonces,

$$0 = a \cdot 0$$
 (prop. e)
 $= a \cdot a^{-1}$
 $= 1$ (axioma 10)

Así pues, llegamos a que 0=1, lo cual es absurdo, por lo que $a^{-1}\neq 0$.

j. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$a \cdot a^{-1} = 1 \Leftrightarrow a^{-1} \cdot a = 1$$
 (axiomas 10 y 8)
 $\Leftrightarrow a = (a^{-1})^{-1}$ (prop. d)

k. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ tales que $a\cdot b=a\cdot c$ y $a\neq 0.$ Entonces se tiene

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a \cdot c \Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) \\ &\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c \\ &\Leftrightarrow b = c \end{aligned} \qquad \text{(axioma 7)}$$

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b = 0$. Supongamos que $a \neq 0$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \text{(prop. e)} \\ \text{(axioma 7)} \\ \text{(axioma 10)} \\ \text{(axioma 9)} \end{array}$$

m. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, tales que $a\neq 0$ y $b\neq 0$. Entonces, por la propiedad (l) se tiene $a\cdot b\neq 0$, y se tiene

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1 \Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \qquad \text{(axioma 9)}$$

$$\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1 \qquad \text{(axioma 7)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \qquad \text{(axioma 10)}$$

$$\Leftrightarrow b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \Leftrightarrow \qquad \text{(axioma 9)}$$

$$\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \qquad \text{(axioma 8)}$$

$$\Leftrightarrow (b^{-1} \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \qquad \text{(axioma 7)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \qquad \text{(axioma 10)}$$

$$\Leftrightarrow (a \cdot b)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \qquad \text{(axioma 9)}$$

A partir del axioma de tricotomía se puede descomponer el conjunto de los números reales en tres conjuntos disjuntos, los positivos \mathbb{R}^+ , $\{0\}$ y los negativos \mathbb{R}^- .

Definición 2.5 (Números reales positivos y negativos). Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se dice que:

- a es estríctamente positivo, y lo notamos a > 0, si $a \in \mathbb{R}^+$.
- a es positivo, y lo notamos $a \ge 0$, si $a \in \mathbb{R}^+$ o a = 0.
- a es estríctamente negativo, y lo notamos a < 0, si $-a \in \mathbb{R}^+$.
- a es negativo, y lo notamos $a \leq 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+$ o -a = 0.

También se puede definir la siguiente relación que permite comparar dos números.

Definición 2.6 (Relaciones de comparación). Dados dos números $a, b \in \mathbb{R}$, se dice que:

- a es menor que b, y lo notamos a < b, si $b a \in \mathbb{R}^+$.
- a es menor o igual que b, y lo notamos $a \leq b$, si $b a \in \mathbb{R}^+$ o b a = 0.
- a es mayor que b, y lo notamos a > b, si $a b \in \mathbb{R}^+$.
- a es mayor o igual que b, y lo notamos $a \ge b$, si $a b \in \mathbb{R}^+$ o a b = 0.

De esta definición y los axiomas de orden de los números reales se deduce que la relación \leq es una relación de orden.

Proposición 2.2. La relación menor o igual \leq es una relación de orden, es decir, cumple las propiedades

a. Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$.

- b. Antisimétrica: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces a = b.
- c. Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

i Demostración

Prueba. Veamos que la relación \leq cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- a. Propiedad reflexiva: Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple que a-a=0, luego a < a.
- b. Propiedad antisimétrica: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, se tiene que $b-a \geq 0$ y $-(b-a) \geq 0$, de donde se deduce, por el axioma de tricotomía, que a-b=0, y aplicando los axiomas 4 y 5 se llega a a=b.
- c. Propiedad transitiva: Para cualesquiera $a,b,c\in\mathbb{R}$, tales que $a\leq b$ y $b\leq c$, se tiene que $b-a\geq 0$ y $c-b\geq 0$. Supongamos que b-a>0 y c-b>0. Entonces, por el axioma 12 se tiene

$$\begin{array}{c} (b-a)+(c-b)>0 & \text{(axioma 2)} \\ \Leftrightarrow (b-b)+(c-a)>0 & \text{(axioma 5)} \\ \Leftrightarrow 0+(c-a)>0 & \text{(axioma 4)} \\ \Leftrightarrow c-a>0 \Leftrightarrow a\leq c. \end{array}$$

Si b-a=0, entonces a=b y como $b\leq c$ resulta evidente que $a\leq c$. El mismo razonamiento puede aplicarse si c-b=0.

Proposición 2.3 (Propiedades de orden). De los axiomas de orden de los números reales se deducen las siguientes propiedades:

- a. El cuadrado de cualquier número real distinto de 0 es positivo: $\forall a \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.
- b. El elemento neutro de la suma es menor que el elemento neutro del producto: 0 < 1.
- c. Cualquier número natural es positivo: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < n$.
- d. La suma preserva el orden: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si a < b, entonces a + c < b + c.
- $e. \ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ si \ a < b \ y \ c < d, \ entonces \ a + c < b + d.$
- f. El producto por un número real positivo preserva el orden: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si a < b y c > 0, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

- g. El producto por un número real negativo invierte el orden: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si a < b y c < 0. entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
- h. El inverso de un número real positivo es positivo y el de un número real negativo es negativo: $\forall a \in \mathbb{R}$, si a > 0, entonces $a^{-1} > 0$, y si a < 0, entonces $a^{-1} < 0$.
- i. El producto de dos números reales es positivo si y solo si los dos números son positivos, o bien los dos números son negativos: $\forall a,b \in \mathbb{R},\ a \cdot b > 0$ si y solo si a > 0 y b > 0, o a < 0 y b < 0.
- j. El producto de dos números reales es negativo si y solo si uno de los números es positivo y el otro negativo: $\forall a,b \in \mathbb{R},\ a \cdot b < 0\ si\ y\ solo\ si\ a > 0\ y\ b < 0,\ o\ a < 0\ y\ b > 0.$
- $k. \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ si \ a < b, \ entonces \ a < \frac{a+b}{2} < b.$
- l. Cualquier número no negativo que es menor que cualquier número positivo es 0: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 \le a < b$ y b > 0, entonces a = 0.

i Demostración

Prueba. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Entonces, por la propiedad de tricotomía se tiene que $a \in \mathbb{R}^+$ o $-a \in \mathbb{R}^+$.

Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces, por el axioma 13, se tiene $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$, y por tanto $a^2 \in \mathbb{R}^+$, de manera que $a^2 > 0$.

Si $-a \in \mathbb{R}^+$, entonces, de nuevo por el axioma 13, se tiene

$$-a \in \mathbb{R}^{+} \Leftrightarrow (-a) \cdot (-a) \in \mathbb{R}^{+} \qquad \text{(axioma 13)}$$

$$\Leftrightarrow (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot a \in \mathbb{R}^{+} \qquad \text{(prop. f)}$$

$$\Leftrightarrow (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot a \in \mathbb{R}^{+} \qquad \text{(axioma 7)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot a^{2} \in \mathbb{R}^{+} \qquad \text{(prop. h)}$$

$$\Leftrightarrow a^{2} \in \mathbb{R}^{+} \qquad \text{(axioma 9)}$$

y se concluye de nuevo que $a^2 > 0$.

- b. Por el axioma 9 se tiene que $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$, y por la propiedad anterior se tiene que $1^2 > 0$, con lo que 1 > 0.
- c. Haremos la prueba por inducción. Para n=1 ya hemos visto en resultado anterior que 1>0. Supongamos ahora que para cualquier $n\in\mathbb{N}$ se cumple que n-1>0. Entonces, como 1>0, por el axioma 12 se tiene que n-1+1>0, de lo que se deduce, por los axiomas 5 y 4 que n>0.

d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que a < b. Entonces b-a > 0. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{array}{ll} b-a>0 \Leftrightarrow b+0-a>0 & \text{(axioma 4)} \\ \Leftrightarrow b+(c-c)-a>0 & \text{(axioma 5)} \\ \Leftrightarrow (b+c)-(a+c)>0 & \text{(axioma 2)} \\ \Leftrightarrow a+c< b+c. \end{array}$$

e. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que a < b y c < d. Entonces se tiene

$$\begin{array}{c} b-a>0 \ \text{y} \ d-c>0 \Leftrightarrow (b-a)+(d-c)>0 \\ \Leftrightarrow (b+d)-a-c>0 \\ \Leftrightarrow (b+d)-(a+c)>0 \end{array} \qquad \text{(axioma 12)}$$

$$\Leftrightarrow (b+d)-(a+c)>0 \\ \Leftrightarrow a+c< b+d. \end{array}$$

f. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que a < b. Entonces b-a > 0. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ con c > 0, se cumple que

$$\begin{array}{l} b-a>0 \ \text{y} \ c>0 \Leftrightarrow (b-a)\cdot c>0 \\ \Leftrightarrow (b\cdot c)-(a\cdot c)>0 \\ \Leftrightarrow a\cdot c< b\cdot c. \end{array} \tag{axioma 13}$$

g. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que a < b. Entonces b-a > 0. Si tomamos ahora cualquier $c \in \mathbb{R}$ con c < 0, entonces -c > 0 y se cumple que

$$\begin{array}{lll} b-a<0 \ {\rm y} & -c>0 \Leftrightarrow (b-a)\cdot (-c)>0 & {\rm (axioma\ 13)} \\ &\Leftrightarrow (b\cdot (-c))-(a\cdot (-c))>0 & {\rm (axioma\ 11)} \\ &\Leftrightarrow -(b\cdot c)+(a\cdot c)>0 & {\rm (prop.\ f)} \\ &\Leftrightarrow (a\cdot c)-(b\cdot c)>0 & {\rm (axioma\ 3)} \\ &\Leftrightarrow a\cdot c>b\cdot c. \end{array}$$

h. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que a>0. Entonces, por la propiedad de tricotomía, $a\neq 0$ y, por la propiedad algebraica i, $a^{-1}\neq 0$. Supongamos que $a^{-1}<0$. Entonces, se tiene

$$a>0$$
 y $a^{-1}<0\Leftrightarrow a\cdot a^{-1}< a\cdot 0$ (prop. de orden f)
$$\Leftrightarrow a\cdot a^{-1}<0$$
 (prop. algebraica e)
$$\Leftrightarrow a\cdot a^{-1}\neq 1$$
 (prop. orden b)

De esta manera llegamos a una contradicción y por consiguiente, $a^{-1} > 0$. De forma similar se prueba que si a < 0, entonces $a^{-1} < 0$.

i. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $a\cdot b>0$. Entonces, por la propiedad algebraica e se tiene $a\neq 0$ y $b\neq 0$, y por la propiedad de tricotomía se tiene que a>0 o a<0.

Si a > 0, entonces por la propiedad anterior, $a^{-1} > 0$, y se tiene

$$\begin{array}{c} a^{-1}>0 \text{ y } a\cdot b>0 \Rightarrow a^{-1}\cdot (a\cdot b)>0 \\ \qquad \Rightarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot b>0 \\ \qquad \Rightarrow b>0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{(axioma 13)} \\ \text{(axioma 7)} \\ \text{(axioma 10)} \end{array}$$

Y si a < 0, entonces, por la propiedad anterior, $a^{-1} < 0$, y se tiene

$$\begin{array}{c} a^{-1} < 0 \text{ y } a \cdot b > 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) < a^{-1} \cdot 0 & \text{(prop. orden g)} \\ \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) < 0 & \text{(prop. algebraica e)} \\ \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b < 0 & \text{(axioma 7)} \\ \Rightarrow b < 0 & \text{(axioma 10)} \end{array}$$

Para probar la otra implicación, si a>0 y b>0, por el axioma 13 se tiene que $a\cdot b>0$, y si a<0 y b<0 entonces se tiene

$$a<0$$
 y $b<0\Rightarrow a\cdot b>a\cdot 0$ (prop. orden g)
$$\Rightarrow a\cdot b>0$$
 (prop. algebraica e)

- j. Se demuestra de forma análoga a la propiedad anterior.
- k. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que a < b. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} 2 \cdot a &= (1+1) \cdot a = (1 \cdot a) + (1 \cdot a) & \text{(axioma 11)} \\ &= a+a & \text{(axioma 9)} \\ &< a+b & \text{(prop. orden d)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$2 \cdot b = (1+1) \cdot b = (1 \cdot b) + (1 \cdot b)$$
 (axioma 11)
= $b+b$ (axioma 9)
> $a+b$ (prop. orden d)

Así pues, se puede concluir que $2 \cdot a < a + b < 2 \cdot b$ y ahora se tiene

$$\begin{aligned} 2 \cdot a &< a+b < 2 \cdot b \Leftrightarrow 2^{-1} \cdot (2 \cdot a) < 2^{-1} \cdot (a+b) < 2^{-1} \cdot (2 \cdot b) \\ & \qquad \qquad \text{(prop. orden f)} \\ & \Leftrightarrow (2^{-1} \cdot 2) \cdot a < 2^{-1} \cdot (a+b) < (2^{-1} \cdot 2) \cdot b \quad \text{(axioma 7)} \\ & \Leftrightarrow 1 \cdot a < 2^{-1} \cdot (a+b) < 1 \cdot b \qquad \qquad \text{(axioma 10)} \\ & \Leftrightarrow a < 2^{-1} \cdot (a+b) < b \qquad \qquad \text{(axioma 9)} \\ & \Leftrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b. \end{aligned}$$

l. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \le a < b \ \forall b \in \mathbb{R}$ con b > 0. Como $a \ge 0$ se tiene que a > 0 o a = 0. Si a > 0, por la propiedad anterior se tiene $0 < \frac{a}{2} < a$. Si ahora tomamos $b = \frac{a}{2} > 0$ se tiene que $a < \frac{a}{2}$, lo cual es absurdo, y, por tanto, debe ser a = 0.

A partir del axioma de tricotomía también se puede definir el valor absoluto de un número real.

Definición 2.7 (Valor absoluto). Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se define el valor absoluto de a, y se denota |a|, como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1. |1.5| = 1.5 y |-1/2| = 1/2.

Como se verá en el próximo capítulo, el valor absoluto permite calcular la distancia entre dos números reales en la recta real.

Proposición 2.4 (Propiedades del valor absoluto). Se cumplen las siguientes propiedades del valor absoluto:

- a. El valor absoluto de un número real y de su opuesto es el mismo: $\forall a \in \mathbb{R}, |a| = |-a|$.
- $b. \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ |a-b| = |b-a|.$
- c. El valor absoluto del producto de dos números reales es igual que el producto de los valores absolutos de los números: $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $d. \ \forall a,b \in \mathbb{R}, \ si\ b > 0 \ entonces\ |a| \le b \ si\ y \ solo \ si b \le a \le b.$
- $e. \ \forall a \in \mathbb{R}, \ -|a| \le a \le |a|.$
- f. Designaldad triangular: $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a+b| \leq |a| + |b|$.

Prueba. Veamos la prueba de cada propiedad.

a. Sea $a \in \mathbb{R}$. Si a = 0 entonces |0| = 0 = |-0|.

Si a>0 entonces -a<0, de modo que por la propiedad algebraica g
 se tiene |a|=a=-(-a)=|-a|.

Y si a < 0 entonces -a > 0, de modo que |a| = -a = |-a|.

b. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|a-b| = |-(a-b)|$$
 (prop. valor absoluto a)

$$= |(-1)(a-b)|$$
 (prop. algebraica f)

$$= |((-1) \cdot a) + ((-1) \cdot (-b))|$$
 (axioma 11)

$$= |-a+-(-b)|$$
 (prop. algebraica f)

$$= |-a+b|$$
 (prop. algebraica g)

$$= |b-a|$$
 (axioma 3)

- c. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se pueden dar varios casos:
 - Si a>0 y b>0, entonces, por el axioma 12, $a\cdot b>0$ y $|a\cdot b|=a\cdot b=|a|\cdot |b|.$
 - Si a>0 y b<0, entonces, por la propiedad de orden j, $a\cdot b<0$, y se tiene

$$|a \cdot b| = -(a \cdot b)$$

$$= (-1) \cdot (a \cdot b)$$
 (prop. algebraica f)
$$= a \cdot ((-1) \cdot b)$$
 (axioma 7)
$$= a \cdot -b$$
 (prop. algebraica f)
$$= |a| \cdot |b|.$$

- Si a < 0 y b > 0, la prueba es similar al caso anterior.
- Si a<0 y b<0, entonces por la propiedad de orden i, $a\cdot b>0$, y se tiene

$$\begin{aligned} |a \cdot b| &= (a \cdot b) \\ &= 1 \cdot (a \cdot b) \\ &= -(-1) \cdot (a \cdot b) \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (a \cdot b) \\ &= ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) \\ &= -a \cdot -b \\ &= |a| \cdot |b|. \end{aligned} \qquad \text{(axioma 9)}$$
 (prop. algebraica g) (axioma 7)

- a=0 o b=0, entonces por la propiedad algebraica e $a \cdot b=0$ y es evidente que $|a \cdot b|=0=|a|\cdot |b|$.
- d. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que b > 0. Si $|a| \le b$, entonces $a \le b$ y $-a \le b$, y para esta última desigualdad, si -a < b se tiene

$$-a < b \Rightarrow (-1) \cdot (-a) > (-1) \cdot b$$
 (prop. orden g)
 $\Rightarrow -(-a) > -b$ (prop. algebraica f)
 $\Rightarrow a > -b$ (prop. algebraica g)

Y si -a=b entonces a=-b, por lo que $a\geq -b$, y se concluye que $-b\leq a\leq b$. Para probar la otra implicación supongamos que $-b\leq a\leq b$, entonces $a\leq b$ y por otro lado $a\geq -b$, de donde se tiene, si a>-b

$$\begin{array}{ll} a>-b\Rightarrow (-1)\cdot a<(-1)\cdot (-b) & \text{(prop. orden g)}\\ \Rightarrow -a<-(-b) & \text{(prop. algebraica f)}\\ \Rightarrow -a< b. & \text{(prop. algebraica g)} \end{array}$$

Y si a=-b entonces -a=b, por lo que $-a \le b$, y como b>0 se puede concluir que |a| < b.

e. Sea $a \in \mathbb{R}$. Como $|a| \le |a|$, si |a| > 0, por la propiedad anterior, se tiene que $-|a| \le a \le |a|$, y si |a| = 0, entonces a = 0 y $-|0| \le 0 \le |0|$.

f. Sean $a,b \in \mathbb{R}$. Por la propiedad anterior se tiene que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \le b \le |b|$ de manera que, por la propiedad de orden e, se cumple

$$(-|a|) + (-|b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

y por el axioma 11 se tiene

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

de lo que se deduce por la propiedad d que $|a+b| \le |a| + |b|$.

Veremos ahora una serie de consecuencias del axioma de completitud.

Proposición 2.5. Si un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota inferior, entonces tiene un ínfimo $m \in \mathbb{R}$.

Demostración

Prueba. Se deja como ejercicio.

Teorema 2.4 (Propiedad arquimediana). Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ con a > 0, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que a < n.

i Demostración

Prueba. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que x < n. Entonces, x es una cota superior de \mathbb{N} . Por tanto, por el axioma del supremo existe un número $s = \sup(\mathbb{N})$. Por ser supremo, se cumple que existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que s-1 < m, pero entonces se tiene que s < m+1, y como $m \in \mathbb{N}$ también $m+1 \in \mathbb{N}$, lo que contradice que s sea cota superior de N.

Corolario 2.1. De la propiedad arquimediana se deducen las siguientes consecuencias:

- a. Si $a > 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$. b. Si $a > 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n 1 \le a < n$.

Prueba. Se deja como ejercicio.

Teorema 2.5 (Raíz cuadrada). Dado un número real $a \in \mathbb{R}$ con a > 0, existe un número real $x \in \mathbb{R}$ tal que x > 0 y $x^2 = a$. A este número se le llama raíz cuadrada de a y se denota por \sqrt{a} o $a^{1/2}$.

i Demostración

Prueba. Sea $A=\{y\in\mathbb{R}:y>0,y^2< a\}.$ A está acotado superiormente ya que si a>1, el propio a es una cota superior y si no 1 es una cota superior. Por tanto, según el axioma del supremo, existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $x=\sup(A)>0.$ Vamos a probar que $x^2=a.$

Supongamos primero que $x^2 < a$. Entonces $a - x^2 > 0$ y $\frac{a - x^2}{2x + 1} > 0$ ya que 2x + 1 > 0 al ser x > 0. Por el Corolario ?? se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{a - x^2}{2x + 1} > 0$. Por otro lado, se tiene

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} = x^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 2x\right) \le x^2 + \frac{1}{n}(2x+1) < x^2 + \frac{a-x^2}{2x+1}(2x+1) = x^2 + (a-x^2) = a.$$

Por tanto, $x + \frac{1}{n} \in A$, pero $x + \frac{1}{n} > x$ lo que contradice que x sea cota superior de A.

Supongamos ahora que $x^2 > a$. Entonces $x^2 - a > 0$ y $\frac{x^2 - a}{2x} > 0$ al ser x > 0. Aplicando de nuevo el Corolario ?? se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{x^2 - a}{2x}$ y por tanto $\frac{2x}{m} < x^2 - a$.

Por otro lado, se tiene

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{m^2} - \frac{2x}{m} > x^2 - \frac{2x}{m} > x^2 - (x^2 - a) = a.$$

Por tanto, $x - \frac{1}{m}$ es una cota superior de A, pero $x > x - \frac{1}{m}$, lo que contradice que $x = \sup(A)$.

Así pues, $x^2 \not < a$ y $x^2 \not > a$, por lo que tiene que ser $x^2 = a$.

Del mismo modo se puede probar que para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$ con a > 0 y para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ existe un número real $x \in \mathbb{R}$ tal que x > 0 y $x^n = a$. A este número se le llama raíz n- $\acute{e}sima$ de a.

Teorema 2.6 (Densidad de los números racionales). Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con a < b, existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que a < q < b.

i Demostración

Prueba. Como a < b se tiene que b-a > 0, de manera que por la propiedad arquimediana existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b-a$. Por otro lado, como a > 0 también na > 0, y de nuevo por la propiedad arquimediana existe otro número real $m \in \mathbb{N}$ tal que $m-1 \le na < m$, de donde se deduce que $\frac{m-1}{n} \le a < \frac{m}{n}$. Consideremos ahora el número racional $q = \frac{m}{n}$. Acabamos de ver que a < q, por lo que solo falta probar que q < b. Para ello, volviendo de nuevo a que $\frac{1}{n} < b-a$, se tiene que

$$\frac{1}{n} < b - a \Rightarrow 1 < nb - na \Rightarrow 1 + na < nb$$

pero como habíamos visto que $m-1 \le na$ se deduce que 1+m-1 < nb, es decir m < nb, y de aquí se concluye que $q = \frac{m}{n} < b$.

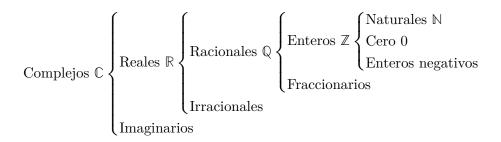
Corolario 2.2 (Densidad de los números irracionales). Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con a < b, existe un número irracional $p \in \mathbb{R}$ \mathbb{Q} tal que a .

i Demostración

Prueba. Sabemos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ \mathbb{Q} y que $\sqrt{2} > 0$, por lo que al aplicar el teorema anterior a los números reales $\frac{a}{\sqrt{2}}$ y $\frac{b}{\sqrt{2}}$ se tiene que existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}$, lo que implica que $a < q\sqrt{2} < b$. Finalmente, si tomamos $p = q\sqrt{2}$, tenemos que es un número irracional que cumple que $a . <math>\square$

2.6 Clasificación de los conjuntos numéricos

Con estas extensiones se obtiene la siguiente clasificación de los conjuntos numéricos (se ha incluido también el conjunto de los números complejos $\mathbb C$ que no se verán en este manual.)



En particular se cumple que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}.$

3 Topología de la recta real

En este capítulo presentamos, sin profundizar demasiado, los principales conceptos topológicos del conjunto de los números reales, que serán necesarios en futuros capítulos.

Los números reales pueden representarse geométricamente como puntos de una línea recta que se conoce como la recta real. Existe una biyección entre los puntos de una recta y el conjunto $\mathbb R$ de los números reales, de modo que a cada número real le corresponde un solo punto, y a cada punto, exactamente un número real. Para establecer esta correspondencia se fija un punto O en la recta correspondiente al número real 0 y otro punto A a la derecha de 0, correspondiente al número real 1, de manera que se dice que la abscisa de A es 1 y se denota A(1). A partir de estos dos puntos, y considerando la distancia entre O y A como unidad de medida, se pueden representar cualquier otro punto B correspondiente al número real x, dibujando a B a la derecha de O si x > 0 y a la izquierda si x < 0, a una distancia |x| de O.

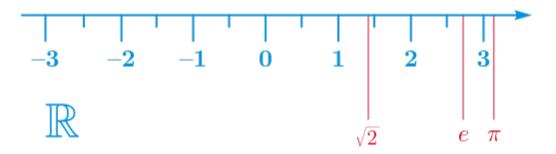


Figura 3.1: La recta real

3.1 Intervalos y entornos

Definición 3.1 (Intervalo abierto). Dados dos números reales tales que $a \leq b$, se llama intervalo abierto de extremos a y b, y se denota (a,b) al conjunto de números reales comprendidos entre a y b

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Definición 3.2 (Intervalo cerrado). Dados dos números reales tales que $a \le b$, se llama $intervalo\ cerrado$ de extremos a y b, y se denota [a,b] al conjunto de números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}.$$

Advertencia

Obsérvese que si a = b, $(a, a) = \emptyset$ y $[a, a] = \{a\}$.

Los intervalos también pueden ser abiertos por un lado y cerrados por el otro.

Definición 3.3 (Intervalo semiabierto o semicerrado). Dados dos números reales tales que a < b, se definen los intervalos semiabiertos o semicerrados de extremos a y b de la siguiente manera:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$
 y $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

Estos intervalos están acotados ya que a es una cota inferior y b una cota superior, pero también existen intervalos no acotados.

Definición 3.4 (Intervalo abierto no acotado). Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes intervalos abiertos no acotados:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$
 y $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

Definición 3.5 (Intervalo semiabierto no acotado). Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes intervalos semiabiertos no acotados:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$$
 y $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$

Definición 3.6 (Intervalos anidados). Se dice que una sucesión de intervalos I_n , $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de intervalos anidados si se cumple que $I_{n+1} \subseteq I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1. La sucesión de intervalos $I_n = [0, \frac{1}{n}], \forall n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de intervalos anidados, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que n < n+1 y por tanto $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, de manera que $I_{n+1}=[0,\frac{1}{n+1}]\subseteq [0,\frac{1}{n}]=I_n.$

Teorema 3.1 (Intervalos anidados). Dada una sucesión de intervalos cerrados y anidados $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, existe un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Además, si el ínfimo de las longitudes $\{b_n-a_n:n\in\mathbb{N}\}$ es 0, entonces a es único, es decir, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}.$

Prueba. Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que los intervalos están anidados, A está acotado superiormente por b_1 ya que $a_n \leq b_n \leq b_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, y B está acotado inferiormente por a_1 ya que $a_1 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, como A está acotado superiormente, por el axioma del supremo, existe $a = \sup(A)$, y como B está acotado inferiormente, existe $b = \inf(B)$.

Veamos ahora que $a \leq b$. Para ello basta probar que a es cota inferior de B. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que si $k \geq n$ entonces $a_k \leq b_k \leq b_n$ pues $I_n \subseteq I_k$, y si k < n, entonces $a_k \leq a_n \leq b_n$, pues $I_n \subseteq I_k$. Luego b_n es una cota superior de A, y por tanto, $a \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que a es cota inferior de B. Así pues, como a es cota superior de A e inferior de B, se tiene que $a_n \leq a \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $a \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

De forma similar se puede probar que $b\in \cap_{n=1}^\infty I_n$, por lo que $\cap_{n=1}^\infty I_n=[a,b]$. Finalmente, veamos que si $\inf(\{b_n-a_n:n\in\mathbb{N}\})=0$ entonces a=b. Para ello, dado $\varepsilon>0$, como $\inf(\{b_n-a_n:n\in\mathbb{N}\})=0$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $0\le b_k-a_k<\varepsilon$. Como $b\le b_k$ y $a\ge a_k$, se tiene que $0\le b-a\le b_k-a_k<\varepsilon$, de donde se deduce que b-a=0 y por tanto a=b, así que $\cap_{n=1}^\infty I_n=[a,a]=\{a\}$.

Definición 3.7 (Entorno). Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se llama *entorno* de a a cualquier intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. El número ε se conoce como radio del entorno.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ {a} se llama entorno reducido de a.

3.2 Clasificación de puntos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ clasifica los puntos de \mathbb{R} en tres clases: puntos interiores, puntos exteriores y puntos fronteras de A.

Definición 3.8 (Punto interior). Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto interior* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe un entorno de a contenido en A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$.

El conjunto de los puntos interiores de A se llama interior de A y se denota por Int(A).

Aunque la definición no lo hace explícito, es evidente que si a es un punto interior de A entonces $a \in A$.

Intuitivamente, un punto interior de un conjunto es un punto que no está en el borde del conjunto, es decir, que está rodeado por puntos del conjunto, y por tanto, podemos movernos un poco hacia la izquierda o hacia la derecha del punto sin salirnos del conjunto.

Ejemplo 3.2. 0.9 es un punto interior del intervalo (0,1) ya que podemos tomar $\varepsilon = 0.01$ tal que el entorno $(0.9 - 0.01, 0.9 + 0.01) = (0.89, 0.91) \subset (0, 1)$.

Sin embargo, 1 no es un punto interior del intervalo (0,1) ya que por muy pequeño que tomemos $\varepsilon > 0$, $1 + \varepsilon > 1$ y, por tanto, el entorno $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ siempre tendrá valores mayores que 1, de manera que $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \not\subseteq (0, 1)$.

Definición 3.9 (Punto exterior). Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un punto exterior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe un entorno de a contenido en el complementario de A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$.

El conjunto de los puntos exteriores de A se llama exterior de A y se denota por Ext(A).

Una definición equivalente es que un punto es punto exterior de un conjunto si es un punto interior de su complementario.

Ejemplo 3.3. 1.01 es un punto exterior del conjunto $(-\infty, 1)$ ya que tomando $\varepsilon = 0.001$ el entorno $(1.01 - 0.001, 1.01 + 0.001) = (1.009, 1.011) \in \overline{(-\infty, 1)} = [1, \infty).$

Sin embargo, 1 no es un punto exterior del intervalo $(-\infty,1)$, va que no es un punto interior del intervalo $(-\infty,1)=[1,\infty)$, ya que $1-\varepsilon<1 \ \forall \varepsilon>0$, y, por tanto, el entorno $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ siempre tendrá valores menores que 1, de manera que $(1-\varepsilon,1+\varepsilon) \not\subseteq [1,\infty)$.

Advertencia

El que un punto no sea punto interior de un conjunto no significa que sea un punto exterior. Por ejemplo, 1 no es un punto interior del intervalo (0,1), y tampoco de su complementario $(0,1) = (-\infty,0] \cup [1,\infty)$.

Definición 3.10 (Punto frontera). Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un punto frontera de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno de a contiene puntos de A y de su complementario.

El conjunto de los puntos frontera de A se llama frontera de A y se denota por Fr(A).

Una definición equivalente es que un punto es un punto frontera de un conjunto si no es un punto interior ni exterior del conjunto.

Ejemplo 3.4. El punto 1 es un punto frontera del intervalo $[1,\infty)$ ya que no es un punto interior de $[1, \infty)$ ni de su complementario $(-\infty, 1)$.

Proposición 3.1. Todos los puntos de un intervalo abierto son puntos interiores suyos, es decir, dado un intervalo abierto $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que $\operatorname{Int}((a,b)) = (a,b)$.

Prueba. Tomemos cualquier punto $x \in (a,b)$, entonces se puede tomar $\varepsilon = \frac{\min\{|x-a|,|x-b\}}{2}$ de manera que el entorno $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$.

Proposición 3.2. Todos los puntos de un intervalo cerrado, excepto sus extremos, son puntos interiores suyos, es decir, dado un intervalo cerrado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que $\operatorname{Int}([a,b]) = (a,b)$.

i Demostración

Prueba. Par ver que a no es un punto interior de [a,b], basta con ver que $a-\varepsilon < a$ para cualquier $\varepsilon > 0$, por lo que el intervalo $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ irremediablemente contendrá puntos menores que a y, por tanto, $(a-\varepsilon,a+\varepsilon) \nsubseteq [a,b]$.

Un razonamiento análogo se puede utilizar para demostrar que b tampoco es un punto interior de [a,b].

A partir de estas proposiciones, es fácil ver que que para cualquier intervalo abierto (a,b), $\operatorname{Int}((a,b))=(a,b)$, $\operatorname{Ext}((a,b))=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ y $\operatorname{Fr}((a,b))=\{a,b\}$. Y para cualquier intervalo cerrado [a,b], $\operatorname{Int}([a,b])=(a,b)$, $\operatorname{Ext}([a,b])=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ y $\operatorname{Fr}([a,b])=\{a,b\}$.

Proposición 3.3. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, los conjuntos $\operatorname{Int}(A)$, $\operatorname{Ext}(A)$ y $\operatorname{Fr}(A)$ forman una partición de \mathbb{R} , es decir,

- a. Int(A), Ext(A) y Fr(A) son disjuntos entre sí.
- b. $\operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Ext}(A) \cup \operatorname{Fr}(A) = \mathbb{R}$.

i Demostración

Prueba. Se deja como ejercicio.

A continuación se definen otros tipos de puntos que son útiles para definir conceptos que se verán más adelante como el de *límite*.

Definición 3.11 (Punto adherente). Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto adherente* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno de a contiene puntos de A.

El conjunto de los puntos adherentes de A se llama adherencia de A y se denota por Adh(A).

Resulta obvio que cualquier punto interior y frontera de un conjunto es también adherente, y que cualquier punto exterior no es adherente. Resulta evidente también que cualquier punto de un conjunto es un punto adherente, de manera que para cualquier conjunto A se tiene $A \subseteq Adh(A)$.

Definición 3.12 (Punto de acumulación). Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si cualquier entorno reducido de a contiene puntos de A.

El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama conjunto derivado de A y se denota por Ac(A).

Advertencia

Resulta obvio de la definición que cualquier punto de acumulación es también un punto de adherencia, es decir, $Ac(A) \subseteq Adh(A)$ para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Sin embargo no todo punto de adherencia es un punto de acumulación.

Es posible que un conjunto tenga puntos de acumulación que pertenezcan al conjunto y otros que no.

Ejemplo 3.5. Dado el conjunto $A = (0,1) \cup \{2\}$, se tiene que 2 es un punto de adherencia de A, pues para cualquier $\varepsilon > 0$ el entorno $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ contiene al propio 2 que es un punto de A. Sin embargo, 2 no es un punto de acumulación, porque para $\varepsilon = 0.5$, por ejemplo, el entorno reducido $(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$ $\{2\}=(1.5,2)\cup(2,2.5)$ no contiene puntos de A.

En cambio el punto 0.5 es tanto un punto de adherencia como un punto de acumulación de A porque para cualquier $\varepsilon > 0$ el entorno reducido $(0.5 - \varepsilon, 0.5 + \varepsilon)$ $\{0.5\}$ siempre contiene puntos de A. De hecho, para cualquier $x \in (a,b)$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, el intervalo $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ $\{x\}$ contiene puntos de A, y lo mismo ocurre para a y b al ser puntos frontera, de manera que Ac(A) = [0, 1], mientras que $Adh(A) = [0, 1] \cup \{2\}$.

Intuitivamente, un punto de acumulación de un conjunto A es un punto para el que podemos encontrar puntos de A, distintos de él mismo, tan próximos a él como queramos. Un punto de acumulación se diferencia de un punto de adherencia en que siempre está rodeado por puntos de A, mientras que un punto de adherencia puede estar aislado de los demás puntos de A.

Definición 3.13 (Punto aislado). Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de aislado de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si es un punto adherente de A, pero no de acumulación.

Proposición 3.4. Para cualquier intervalo abierto (a,b) se tiene que Adh((a,b)) =Ac((a,b)) = [a,b].

Prueba. Todos los puntos de (a,b) son interiores y, por tanto, para cualquier $x \in (a,b)$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$. Si ahora tomamos cualquier otro $\varepsilon' > 0$, se tiene que $(x-\varepsilon',x+\varepsilon')$ $\{x\} \cap (x-\varepsilon,x+\varepsilon) \neq \emptyset$, pero como $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$, se concluye que $(x-\varepsilon',x+\varepsilon')$ $\{x\} \cap (a,b) \neq \emptyset$, por lo que x es un punto de acumulación de (a,b). Por otro lado, como a y b son puntos frontera, también se tiene que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon,a+\varepsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset$ y $(b-\varepsilon,b+\varepsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset$ de manera que $[a,b] \subseteq \operatorname{Ac}((a,b)) \subseteq \operatorname{Adh}((a,b))$. Sea ahora cualquier x > b, y tomemos $\varepsilon = \frac{|x-b|}{2}$, entonces $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \cap (a,b) = \emptyset$, de manera que x no es un punto de adherencia de (a,b). Del mismo modo se puede probar que si x < a, entonces x tampoco es un punto de adherencia de (a,b), por lo que $\operatorname{Adh}((a,b)) = [a,b]$ y como $\operatorname{Ac}((a,b)) \subseteq \operatorname{Adh}((a,b))$, también se concluye que $\operatorname{Ac}((a,b)) = [a,b]$.

Proposición 3.5. Para cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que $Adh(A) = A \cup Ac(A)$.

i Demostración

Prueba. Ya se ha visto que $A \subseteq Adh(A)$ y también $Ac(A) \subseteq Adh(A)$, por lo que $A \cup Ac(A) \subseteq Adh(A)$.

Veamos ahora que $\operatorname{Adh}(A) \subseteq A \cup \operatorname{Ac}(A)$. Sea x un punto de adherencia de A. Si $x \in A$ es obvio que $x \in A \cup \operatorname{Ac}(A)$, y si $x \notin A$, entonces $x \in \operatorname{Ac}(A)$, ya que, por ser x punto de adherencia de A, para cualquier $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pero como además $x \notin A$, también se cumple que el entorno reducido $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ $\{x\}$ contiene puntos de A. Así pues, $x \in A \cup \operatorname{Ac}(A)$, y por tanto $\operatorname{Adh}(A) \subseteq A \cup \operatorname{Ac}(A)$. \square

3.3 Conjuntos abiertos y cerrados

A continuación se generaliza la característica que diferencia los intervalos abiertos y cerrados, a cualquier conjunto.

Definición 3.14 (Conjunto abierto). Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *abierto* cuando para cada $a \in A$ existe un entorno de a contenido en A, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$.

Importante

Obsérvese que un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.

Ejemplo 3.6. Cualquier intervalo abierto (a, b) es un conjunto abierto, ya que según se vio en la Proposición ?? Int((a,b)) = (a,b). Por otro lado, un intervalo cerrado [a,b] no es un conjunto abierto pues cualquier entorno de a o b no está contenido en [a,b].

Una colección de conjuntos abiertos se llama topología y cualquier propiedad que pueda definirse en términos de conjuntos abiertos se llama propiedad topológica.

Definición 3.15 (Conjunto cerrado). Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado cuando su complementario $\overline{A} = \mathbb{R}$ A es abierto.

Ejemplo 3.7. Todo intervalo cerrado [a, b] es cerrado, pues su complementario $(-\infty, a) \cup$ (b, ∞) es abierto.



Advertencia

Un subconjunto puede ser abierto y cerrado a la vez, como por ejemplo \mathbb{R} y \emptyset . \mathbb{R} es abierto ya que todos sus puntos son interiores, y por tanto $\mathbb{R} = \emptyset$ es cerrado. Pero, también \emptyset es abierto, ya que para que un conjunto no sea abierto, al menos uno de sus puntos no debe ser interior, y en consecuencia $\emptyset = \mathbb{R}$ es también cerrado. Un subconjunto también puede no ser abierto ni cerrado, como por ejemplo (a, b], ya que b no es un punto interior de (a, b], y a no es un punto interior de (a, b] = $(-\infty, a] \cup (b, \infty)$. Por tanto, no abierto no implica cerrado y no cerrado no implica abierto.

Proposición 3.6. Se cumplen las siguientes propiedades:

- 1. La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- 2. La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

- 3. La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.
- 4. La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración

Prueba. Se deja como ejercicio.



Advertencia

La intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto, como por ejemplo la colección de conjuntos $I_n = (0, 1 + \frac{1}{n}),$ $n \in \mathbb{N}$, ya que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = (0,1]$.

Y la unión de una colección infinita de conjuntos cerrados puede no ser cerrada, como por ejemplo la colección de conjuntos $J_n = [\frac{1}{n}, 1], n \in \mathbb{N}$, ya que $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n =$

Teorema 3.2 (Existencia del máximo y mínimo). Cualquier conjunto no-vacío, cerrado y acotado superiormente tiene un máximo, y cualquier conjunto no-vacío, cerrado y acotado inferiormente tiene un mínimo.

i Demostración

Prueba. Sea A un conjunto no vacío, cerrado y acotado superiormente. Como A está acotado superiormente, por el axioma del supremo, existe $s = \sup(A)$. Probaremos que $s \in A$ por reducción al absurdo. Supongamos que $s \notin A$, entonces $s \in \overline{A}$, y como \overline{A} es abierto al ser A cerrado, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$. Como ningún elemento de A puede ser mayor que s y $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \not\subseteq A$, se tiene que $s - \varepsilon$ es también una cota superior de A, pero $s - \varepsilon < s$, lo que contradice que s sea el supremo de s. Así, pues $s \in A$, y por tanto es el máximo de s.

De manera análoga se prueba que si A un conjunto no vacío, cerrado y acotado inferiormente, A tiene mínimo.

Teorema 3.3 (Bolzano-Weierstrass). Todo subconjunto infinito de \mathbb{R} acotado tiene al menos un punto de acumulación.

i Demostración

Prueba. Para demostrar el teorema construiremos una sucesión de intervalos cerrados y anidados y aplicaremos el Teorema ??.

Sea $A\subset\mathbb{R}$ un subconjunto infinito y acotado. Como A está acotado, existe un intervalo cerrado tal que $A\subset I_1=[a_1,b_1]$. Si I_1 se divide en dos intervalos $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ y $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$, al menos uno de estos intervalos tendrá infinitos puntos de A, ya que de lo contrario A sería finito. Sea $I_2=[a_2,b_2]$ cualquiera de los dos intervalos que tenga infinitos puntos de A. Si I_2 se divide en dos intervalos $[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}]$ y $[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]$, al menos uno de estos intervalos tendrá infinitos puntos de A, ya que de lo contrario A sería finito. Sea $I_3=[a_3,b_3]$ cualquiera de los dos intervalos que tenga infinitos puntos de A. Siguiendo la misma lógica, se puede construir una sucesión de intervalos anidados $I_1\supset I_2\supset I_3\supset \cdots$, con tamaños $\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$. Como inf $\{\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}:n\in\mathbb{N}\}=0$, aplicando el Teorema ??, existe un único $a\in\mathbb{R}$ tal que $\cap_{n=1}^\infty I_n=\{a\}$.

Veremos ahora que a es un punto de acumulación de A. Para cualquier $\varepsilon>0$, considérese el entorno reducido de a $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ $\{a\}$. Como $\inf\{\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}:n\in\mathbb{N}\}=0$, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{b_1-a_1}{2^{m-1}}<\varepsilon$, y por tanto $I_m\subset(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, y como I_m contiene infinitos puntos de A, el entorno reducido a también contiene puntos de A, por lo que a es un punto de acumulación de A.

Teorema 3.4. Cualquier subconjunto de \mathbb{R} es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

i Demostración

Prueba. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Veamos por reducción al absurdo que $a \in A$.

Supongamos que $a \notin A$, entonces $a \in \overline{A}$. Como A es cerrado, \overline{A} es abierto y existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \overline{A}$, pero entonces $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \emptyset$, lo que contradice que a sea punto de acumulación de A.

Veremos ahora el otro sentido de la implicación. Sea A un conjunto que contiene todos sus puntos de acumulación. Sea $x \in \overline{A}$, entonces $x \notin A$ y por tanto no es un punto de acumulación de A y existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno propio de x $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ $\{x\} \cap A = \emptyset$. Como $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ $\{x\} \subset \overline{A}$ y $x \in \overline{A}$ se concluye que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \overline{A}$, de manera que \overline{A} es abierto y A es cerrado.

4 Sucesiones de números reales

Las sucesiones de números reales son claves para comprender el concepto de límite que es fundamental en el Análisis Matemático. En este capítulo se presenta el concepto de sucesión de números reales, el concepto de límite y algunos resultados importantes sobre la convergencia de sucesiones.

4.1 Concepto de sucesión

Definición 4.1 (Sucesión de números reales). Una sucesión de números reales es una aplicación $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ que asigna a cada número natural n un número real a_n , conocido como término de la sucesión.

Utilizaremos la notación $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $a_n=a(n)$ con $n\in\mathbb{N}$, o simplemente a_n , para referirnos a la sucesión definida por la aplicación a.

De manera informal, se puede decir que una sucesión es una lista ordenada de números reales.

Ejemplo 4.1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ está formada por los términos $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$



Precaución

No hay que confundir los términos de una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty},$ que tienen orden, con el conjunto de los valores de la sucesión $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ que no tiene orden.

Ejemplo 4.2. La sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ está formada por los términos -1,1,-1,1,..., mientras que $\{a_n:n\in\mathbb{N}\}=\{-1,1\}.$

Una sucesión de números reales puede definirse dando una fórmula para el término general, de manera que aplicando la fórmula para cada $n \in \mathbb{N}$ se obtienen todos los términos de las sucesión, o bien de manera recursiva, dando el primer término de la sucesión y después dando una fórmula para construir el siguiente término de la sucesión en función del anterior o anteriores.

Ejemplo 4.3. La sucesión del ejemplo anterior también se puede definir recursivamente de la siguiente manera, $a_1 = -1$ y $a_{n+1} = (-1)a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Otro ejemplo es la famosa sucesión de Fibonacci, que se define recursivamente como $a_1=1,\,a_2=1$ y $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}.$

Las operaciones aritméticas de los números reales se pueden extrapolar a las sucesiones aplicándolas término a término.

Definición 4.2 (Operaciones con sucesiones). Dadas dos sucesiones de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, se definen las siguientes operaciones:

- Suma: $(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Diferencia: $(a_n)_{n=1}^{\infty} (b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Producto: $(a_n)_{n=1}^{\infty}(b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$.
- División: $\frac{(a_n)_{n=1}^{\infty}}{(b_n)_{n=1}^{\infty}} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, siempre y cuando $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Producto por escalar: $c(a_n)_{n=1}^{\infty} = (ca_n)_{n=1}^{\infty}$

Ejemplo 4.4. Dadas las sucesiones $(n)_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene:

$$(n)_{n=1}^{\infty} + ((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (n + (-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (0, 3, 2, 5, 4, \dots)$$
$$(n)_{n=1}^{\infty} ((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (n(-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 2, -3, 4, -5, \dots)$$

4.2 Límite de una sucesión

Definición 4.3 (Límite de una sucesión). Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, se dice que un número $a \in \mathbb{R}$ es el *límite de la sucesión*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ a partir del cuál todos los términos de la sucesión caen en el entorno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, es decir, $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \ge k$.

Si a es el límite de la sucesión, se dice que la sucesión converge a a, y se denota $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

Si una sucesión tiene límite se dice que es *convergente*, y en caso contrario se dice que es *divergente*.

De manera informal podemos decir que una sucesión de números reales converge a un número a, si para cualquier entorno suyo, a partir de un determinado término, todos los siguientes caen dentro del entorno, tal y como se muestra en la siguiente figura.

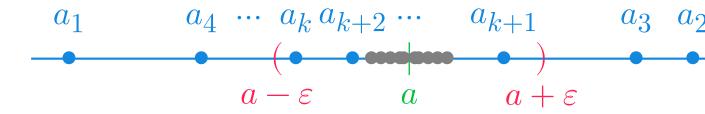


Figura 4.1: Límite de una sucesión

Esto es equivalente a decir que podemos encontrar términos de la sucesión tan cerca de a como queramos.

Ejemplo 4.5. La sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, ya que para cualquier $\varepsilon>0$, por la propiedad arquimediana, se tiene que existe un $k\in\mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{k}<\varepsilon$, de manera que para cualquier n>k, se tiene $|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<\frac{1}{k}<\varepsilon$.

Sin embargo, la sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Teorema 4.1. Una sucesión de números reales puede tener a lo sumo un límite.

i Demostración

Prueba. Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a y b con $a \neq b$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que los entornos $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ y $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ son disjuntos. Ahora bien, por ser $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \ \forall n \geq k_1$, y por ser $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ existe un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \ \forall n \geq k_2$. Basta tomar $k = \max(k_1, k_2)$ para ver que a_k pertenece a ambos entornos, lo cual contradice que sean disjuntos. Por tanto, debe ser a = b.

Definición 4.4 (Cola de una sucesión). Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $m \in \mathbb{N}$, se define la *cola* m de la sucesión, como la sucesión $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty} = (a_{m+1}, a_{m+2}, ...)$.

Proposición 4.1. Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $m \in \mathbb{N}$, la cola $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y en tal caso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{m+n}$.

 $\begin{array}{l} Prueba. \text{ Supongamos que la cola } (a_{m+n})_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } a. \text{ Entonces, para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe un } k_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_{m+n}-a| < \varepsilon \; \forall n \geq k_1. \text{ Tomando ahora } k = k_1+m \in \mathbb{N} \text{ se tiene que para cualquier } l \geq k \; |a_l-a| = |a_{l-m+m}-a| = |a_{m+n}-a| < \varepsilon \text{ siendo } n = l-m, \text{ ya que } l \geq k_1+m \text{ y } l-m \geq k_1. \text{ Por tanto, } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } a. \\ \text{Para probar la otra implicación, supongamos ahora que } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } a. \\ \text{Entonces, para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe un } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n-a| < \varepsilon \; \forall n \geq k. \text{ Pero como } m \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geq k \text{ también } m+n \geq k, \text{ con lo que } |a_{m+n}-a| < \varepsilon, \text{ y por consiguiente, } (a_{m+n})_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } a. \\ \end{array}$

Proposición 4.2. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Si existe $a, c \in \mathbb{R}$ con c > 0 tal que $|a_n - a| < c|b_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a.

i Demostración

Prueba. Dado $\varepsilon>0,$ sea $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{c}>0.$ Como $(b_n)_{n=1}^\infty$ converge a 0, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $|b_n-0|=|b_n|<\varepsilon'$ $\forall n\geq k.$ Así pues, $\forall n\geq k$ se tiene que $|a_n-a|< c|b_n|< c\varepsilon'=c\varepsilon'=\varepsilon$, por lo que $(a_n)_{n=1}^\infty$ converge a a.

Ejemplo 4.6. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $0 < n < 2^n$, de donde se deduce $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, lo que equivale a $|\frac{1}{2^n} - 0| < \frac{1}{n}$. Así pues, aplicando el teorema anterior y tomando c = 1, se concluye que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Aplicando el teorema del binomio, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, con n > 1, se tiene que

$$(1+\sqrt{\frac{2}{n}})^n = 1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\sqrt{\frac{2}{n}} + \binom{n}{n}1^{n-2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \cdots$$

$$> 1+n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{2}{n} = 1+\sqrt{\frac{2n^2}{n}} + n - 1$$

$$= \sqrt{2n} + n > n$$
(1)

(1) Los restantes términos del desarrollo del binomio son positivos.

Así pues,

$$n^{1/n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}\Leftrightarrow n^{1/n}-1<\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow |n^{1/n}-1|<\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

y como $\sqrt{2} > 0$ y $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, por la proposición anterior teorema anterior se tiene que $\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$.

Definición 4.5 (Sucesión acotada). Se dice que una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada si existe c > 0 tal que $|a_n| \le c \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2. Toda sucesión de números reales convergente está acotada.

i Demostración

Prueba. Sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión convergente a a. Entonces, si tomamos $\varepsilon=1$ existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-a|<1$ $\forall n\geq k.$

Por la desigual dad triangular (Proposición $\ref{eq:continuous}$ se tiene que $|a_n|=|a_n-a+a|\leq |a_n-a|+|a|<1+|a|,$ de donde se deduce que $|a_n|<|a|+1$ $\forall n\geq k.$ Si se toma $c=\max\{|a_1|,\dots,|a_{k-1}|,|a|+1\}$ se tiene que si n< k entonces $|a_n|\leq c$ y si $n\geq k$ entonces $|a_n|<|a|+1\leq c,$ de modo que $\forall n\in\mathbb{N}$ $|a_n|\leq c,$ por lo que $(a_n)_{n=1}^\infty$ está acotada.

Ejemplo 4.7. La sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ diverge ya que no está acotada. Si estuviese acotada existiría un c > 0 tal que $|n| \le c \ \forall n \in \mathbb{N}$, lo que infringe la propiedad arquimediana.

Precaución

El otro sentido de la implicación no se cumple, es decir, no toda sucesión acotada es convergente. Por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 4.3. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a b. Entonces se cumple:

- a. $(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $a \ a + b$.
- b. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $a \ a-b$.
- c. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a ab.
- d. $c(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a ca.
- $e. \ Si \ b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ y \ b \neq 0, \ \tfrac{(a_n)_{n=1}^\infty}{(b_n)_{n=1}^\infty} \ converge \ a \ \tfrac{a}{b}.$

i Demostración

Prueba. Veamos la prueba de cada apartado.

a. Dado $\varepsilon>0,$ se
a $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}>0.$ Por ser $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ existe $k_1\in\mathbb{N}$ tal que

 $|a_n-a|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}\;\forall n\geq k_1,\; \text{y por ser }\lim_{n\to\infty}b_n=b$ existe $k_2\in\mathbb{N}$ tal que $|b_n-b|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}\;\forall n\geq k_2.$

Tomando $k = \max(\{k_1, k_2\})$, para $n \geq k$, aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{split} |(a_n+b_n)-(a+b)| &= |(a_n-a)+(b_n-b)| \\ &\leq |a_n-a|+|b_n-b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{split}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.

- b. Se prueba de manera análoga.
- c. Dado $\varepsilon>0$, sea $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2|a|}>0$. Por ser $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ existe $k_1\in\mathbb{N}$ tal que $|b_n-b|<\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}\;\forall n\geq k_1$. Y por el teorema anterior, como $(b_n)_{n=1}^\infty$ converge, está acotada, de modo que existe una cota c>0 tal que $|b_n|\leq c\;\forall n\in\mathbb{N}$.

Sea ahora $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2c}>0$. Por ser $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ existe $k_2\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-a|<\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n\geq k_2$.

Tomando ahora $k = \max(\{k_1, k_2\})$, para $n \geq k$, aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{split} |(a_nb_n)-(ab)| &= |(a_nb_n-ab_n)+(ab_n-ab)|\\ &\leq |(a_nb_n-ab_n)|+|(ab_n-ab)|\\ &= |(a_n-a)b_n|+|a(b_n-b)|\\ &= |(a_n-a)||b_n|+|a||(b_n-b)|\\ &< |(a_n-a)|c+|a||(b_n-b)|\\ &< c\varepsilon_2+|a|\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2c}c+|a|\frac{\varepsilon}{2|a|}\\ &=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \end{split}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

- d. Se prueba a partir del resultado anterior, tomando la sucesión constante $(c)_{n=1}^{\infty}$.
- e. Se deja como ejercicio.

Ejemplo 4.8. Veamos que la sucesión $\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)_{n-1}^{\infty}$ converge a 2.

$$\begin{split} \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+3} &= \lim_{n \to \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n \to \infty} 2+\frac{1}{n}}{\lim_{n \to \infty} 1+\frac{3}{n}} = \\ &= \frac{\lim_{n \to \infty} 2+\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \to \infty} 1+\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2. \end{split}$$

Teorema 4.3 (Compresión de sucesiones convergentes). Dadas tres sucesiones de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, tales que $a_n \leq b_n \leq c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen a a, entonces $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a a.

i Demostración

Prueba. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=a$ y sea $\varepsilon>0.$ Si tomamos $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{4}>0,$ como $(c_n)_{n=1}^\infty$ converge a a, existe $k_1\in\mathbb{N}$ tal que $|c_n-a|<\varepsilon_1\;\forall n\geq k_1.$ Y si tomamos $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}>0,$ como $(a_n)_{n=1}^\infty$ converge a a, existe $k_2\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-a|<\varepsilon_2\;\forall n\geq k_2.$ Entonces, si se toma $k=\max(k_1,k_2),$ se cumple que para cualquier $n\geq k,$

$$\begin{split} |b_n - a| &= |b_n - c_n + c_n - a| \\ &\leq |b_n - c_n| + |c_n - a| \qquad \text{(prop.2.4 (f))} \\ &= c_n - b_n + |c_n - a| \\ &\leq c_n - a_n + |c_n - a| \\ &= |c_n - a_n| + |c_n - a| \\ &= |c_n - a + a - a_n| + |c_n - a| \\ &\leq |c_n - a| + |a - a_n| + |c_n - a| \\ &= 2|c_n - a| + |a - a_n| \qquad \text{(prop.2.4 (f))} \\ &= 2|c_n - a| + |a_n - a| \qquad \text{(prop.2.4 (b))} \\ &< 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{split}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Ejemplo 4.9. Veamos que la sucesión $\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Para ello basta con ver que

$$0 \le \frac{2n}{n^2 + 1} \le \frac{2n}{n^2} \le \frac{2}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y que $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}0=0$, de manera que aplicando el teorema anterior de compresión se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=0$.

Veamos ahora que la sucesión $\left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ también converge a 0. De nuevo basta con ver que, como $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{-1}{n} \le \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \le \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y que $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, de manera que aplicando el teorema anterior de compresión se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0$.

Proposición 4.4 (Criterio del cociente). Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales estrictamente positivos tal que la sucesión $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a a < 1, entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a θ .

i Demostración

Prueba. Sea b tal que a < b < 1 y tomemos $\varepsilon = b - a > 0$. Como $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - a| \le \varepsilon \ \forall n \ge k$, y por tanto, se tiene que para cualquier $n \ge k$,

$$\begin{split} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \right| &\leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a + \varepsilon = a + b - a = b \\ &\Rightarrow a_{n+1} < ba_n. \end{split}$$

Por consiguiente, si $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_{k+m} < ba_{k+m-1} < b^2 a_{k+m-2} < \cdots < b^m a_k$, de manera que $0 < a_{k+m} < b^m a_k \ \forall m \in \mathbb{N}$. Como b < 1, $\lim_{m \to \infty} b^m = 0$ y $\lim_{m \to \infty} b^m a_k = 0$, y por el teorema de compresión (Teorema ??) $\lim_{m \to \infty} a_{k+m} = 0$. Finalmente, como $(a_{k+m})_{m=1}^{\infty}$ es una cola de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Ejemplo 4.10. Veamos que la sucesión $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

$$\begin{split} \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} < 1. \end{split}$$

Así pues, por la proposición anterior, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

4.3 Sucesiones monótonas

Veremos a continuación un tipo particular de sucesiones, cuyos términos siempre crecen o decrecen. Estas sucesiones son de especial importancia en aplicaciones del Análisis Matemático.

Definición 4.6 (Sucesión monónota). Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

- Se dice que es una sucesión creciente, si $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, y se dice que es estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Se dice que es una sucesión decreciente, si $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, y se dice que es estrictamente decreciente si $a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Se dice que es una sucesión monótona, si es creciente o decreciente.

Ejemplo 4.11. Las sucesiones $(2n)_{n=1}^{\infty}$ y $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ son estrictamente crecientes y la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente.

La sucesión $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente si a>1 y estrictamente decreciente si 0 < a < 1. Si a=1 la sucesión es, a la vez, creciente y decreciente, ya que en realidad es constante.

Sin embargo, la sucesión $((-2)^n)_{n=1}^{\infty}$ no es monótona.

Teorema 4.4 (Convergencia de una sucesión monótona). Una sucesión de números reales monótona $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si está acotada. Además se cumple que:

- $Si\ (a_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión creciente y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty}a_n=\sup(\{a_n:n\in\mathbb{N}\}).$
- $Si\ (a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf(\{a_n:n\in\mathbb{N}\})$.

Prueba. Por el Teorema $\ref{eq:prueba}$ ya se vio que toda sucesión convergente está acotada. Veamos ahora que si $(a_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión monótona acotada, entonces converge. Sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión creciente y acotada, entonces el conjunto de los términos de la sucesión $A=\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ no está vacío y está acotado, y por el axioma del supremo, existe $s=\sup(A).$ Para ver que $(a_n)_{n=1}^\infty$ converge a s, tomemos cualquier $\varepsilon>0.$ Como s es el supremo de $A,s-\varepsilon$ no es cota superior de A de manera que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_k>s-\varepsilon.$ Si tomamos ahora cualquier $n\geq k$, por ser la sucesión monótona, se tiene que $a_k\leq a_n$, y al mismo tiempo $a_n< s$ por ser s una cota superior de la sucesión. Por tanto, para cualquier $n\geq k$ se cumple

$$s - \varepsilon \leq a_k \leq a_n \leq s < s + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - s < \varepsilon \Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

De forma similar se puede probar que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente y acotada, entonces $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf(\{a_n:n\in\mathbb{N}\})$.

Ejemplo 4.12. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. La sucesión es decreciente ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n < n+1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Como además está acotada inferiormente por el 0, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\inf\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}:n\in\mathbb{N}\right\}\right)=0$.

Ejemplo 4.13. Sea la sucesion definida recursivamente de la siguiente manera: $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Veamos que converge a 2.

En primer lugar, veremos que es una sucesión creciente por inducción. Para n=1 se tiene que $a_1=1<\sqrt{2}=a_2$. Supongamos ahora que $a_n< a_{n+1}$. Entonces, $a_{n+2}=\sqrt{2a_{n+1}}>\sqrt{2a_n}=a_{n+1}$, de manera que la sucesión es creciente.

En segundo lugar, veremos, también por inducción, que $a_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Para n=1 se tiene que $a_1=1<2$. Supongamos ahora que $a_n<2$. Entonces, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}=\sqrt{2}\sqrt{a_n}<\sqrt{2}\sqrt{2}=2$. Luego, la sucesión está acotada, y por el teorema anterior, converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión, se tiene

$$\begin{split} a &= \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{2a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{2} \sqrt{a_n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \sqrt{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{2} \sqrt{a} = \sqrt{2a}. \end{split}$$

Así pues, se tiene que

$$a=\sqrt{2a} \Rightarrow a^2=2a \Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a(a-2)=0,$$

de donde se deduce, resolviendo la ecuación, que a=0 o a=2. Como a=0 es imposible pues $a_n \ge 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, se concluye que a=2, y por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n=2$.

Ejemplo 4.14. Veamos ahora que la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, entonces por el desarrollo del binomio, se tiene

$$\begin{split} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \binom{n}{0} 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \binom{n}{0} 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n!}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{split}$$

у

$$\begin{split} a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{split}$$

Como se puede observar, el desarrollo de a_n tiene n+1 términos, mientras que el de a_{n+1} tiene n+2 términos. Además, cada uno de los términos que aparece en a_n es menor o igual que el termino correspondiente de a_{n+1} , de modo que se puede concluir que $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, y la sucesión es creciente.

Por otro lado, como se cumple que $\left(1-\frac{k}{n}\right)<1 \ \forall k=1,\dots,n,$ entonces

$$\begin{split} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{split}$$

y como $2^{n-1} \le n! \ \forall n \in \mathbb{N}$, finalmente se tiene

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Así pues, $(a_n)_{n=1}^\infty$ es creciente y está acotada, de manera que por el teorema anterior, es convergente, y como además $2 < a_n < 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$, su límite es un número entre 2 y 3. A este número se le llama $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que es un número irracional.

4.4 Subsucesiones

Definición 4.7 (Subsucesión). Se dice que una sucesión de números reales $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de otra sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $b_n = a_{r_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.15. La sucesión $(b_n)_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^\infty$ es una subsucesión de la sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$, ya que tomando $(r_n)_{n=1}^\infty = 2n$, se cumple que $b_n = a_{r_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Del mismo modo, las sucesiones $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ también son subsucesiones de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 4.5 (Convergencia de las subsucesiones). Si una sucesión de números reales converge a a entonces cualquier subsucesión suya converge también a a.

i Demostración

 $\begin{array}{l} Prueba. \text{ Sea } (a_{r_n})_{n=1}^{\infty} \text{ una subsucesión de } (a_n)_{n=1}^{\infty}. \text{ Como } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } a, \\ \text{dado cualquier } \varepsilon > 0, \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq k. \\ \text{Como } (r_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es estrictamente creciente, } r_n \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ de manera que si } n \geq k, \\ \text{entonces } r_n \geq n \geq k, \text{ y por tanto, } |a_{r_n} - a| < \varepsilon, \text{ por lo que } (a_{r_n})_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } a. \\ \end{array}$

Ejemplo 4.16. Veamos que la sucesión $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 cuando 0 < a < 1.

La sucesión es decreciente ya que $a_{n+1} = a^{n+1} = a^n a < a^n = a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ al ser 0 < a < 1, y también está acotada ya que $0 < a^n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que por el teorema de la convergencia de una sucesión monótona, se tiene que $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un número a.

Para averiguar el límite, como cualquier subsucesión suya también converge a a por el teorema anterior, en particular $(a^{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge a a, por lo que se tiene

$$a=\lim_{n\to\infty}a^n=\lim_{n\to\infty}a^{2n}=\lim_{n\to\infty}(a^n)^2=a^2.$$

Así pues, $a^2 = a$, de manera que, resolviendo la ecuación, a = 0 o a = 1. Como $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y $0 < a^n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tiene que ser a = 0.

Del teorema anterior se deduce que si una sucesión tiene dos subsucesiones que convergen a distintos límites, o una subsucesión que diverge, entonces dicha sucesión diverge.

Ejemplo 4.17. La sucesión $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge pues la subsucesión $((-1)^{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge a 1 y la subsucesión $((-1)^{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ converge a -1.

Teorema 4.6 (Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión de números reales acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

i Demostración

Prueba. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales acotada. Entonces, $A=\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado.

Si A es finito, existe un $c \in A$ y una subsucesión $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_{r_n} = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, que al ser una sucesión constante, converge a c.

Si A es infinito, como está acotado, por el Teorema $\ref{eq:constraint}$, existe un $a \in \mathbb{R}$ que es punto de acumulación de A. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, y de hecho es infinito. Tomando como r_1 el primer número natural tal que $a_{r_1} \in A_n$, r_2 el primer número natural tal que $r_2 > r_1$ y $a_{r_2} \in A_2$, y así sucesivamente, se puede construir una sucesión de números naturales $(r_n)_{n=1}^\infty$ estrictamente creciente, de manera que $(a_{r_n})_{n=1}^\infty$ es una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^\infty$. Además, como $a_{r_n} \in A_n$, se tiene que $|a_{r_n} - a| < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que $(a_{r_n})_{n=1}^\infty$ converge a a.

Teorema 4.7. Cualquier conjunto de número reales $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si toda sucesión de números reales en A que converge, lo hace a un número de A.

i Demostración

Prueba. Supongamos que A es un conjunto cerrado y sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales en A tal que $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. Veremos que $a\in A$ por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que $a\notin A$. Entonces $a\in \overline{A}$. Como A es cerrado, \overline{A} es abierto, y entonces, existe $\varepsilon>0$ tal que $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset \overline{A}$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq k$ se tiene $|a_n-a|<\varepsilon\Rightarrow a_n\in (a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset \overline{A}$, de manera que $a_n\notin A$ $\forall n\geq k$, lo que contradice que $(a_n)_{n=1}^\infty$ sea una sucesión de números en A. Por tanto, debe ser $a\in A$.

Veamos ahora el otro sentido de la implicación. Supongamos que cualquier sucesión de números en A que converge, lo hace a un número de A. Si A no es cerrado, entonces \overline{A} no es abierto, de manera que existe $a \in \overline{A}$ tal que $(a-\varepsilon,a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar $a_n \in (a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}) \cap A$ de manera que la sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en A y además $|a_n-a|<\frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$, así que, $\lim_{n\to\infty} a_n=a \notin A$, lo

que contradice la hipótesis de partida, por lo que A debe ser cerrado.

Corolario 4.1. Cualquier sucesión de números reales en un conjunto cerrado y acotado tiene una subsucesión convergente a un número del conjunto.

i Demostración

Prueba. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado, y sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en A. Como A está acotado, $(a_n)_{n=1}^\infty$ también lo está, y por el Teorema ?? tiene una subsucesión $(a_{r_n})_{n=1}^\infty$ convergente. Ahora bien, como $(a_{r_n})_{n=1}^\infty$ converge y está definida en A que es cerrado, por el teorema anterior, se concluye que $\lim_{n\to\infty} a_{r_n} \in A$

4.5 Sucesiones propiamente divergentes

Ya hemos visto que una sucesión que no converge es divergente, pero existen distintos motivos por los que una sucesión puede no converger. En esta sección estudiamos un tipo particular de sucesiones que divergen porque no paran de crecer o decrecer.

Definición 4.8 (Sucesiones propiamente divergentes). Se dice que una sucesión de números reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene a ∞ , y se denota $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, si para cualquier $\varepsilon\in\mathbb{R}$ existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n\geq\varepsilon$ $\forall n\geq k$.

Del mismo modo, se dice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene a $-\infty$, y se denota $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$, si para cualquier $\varepsilon\in\mathbb{R}$ existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n\leq\varepsilon$ $\forall n\geq k$.

Y se dice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es propiamente divergente cuando $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm \infty$.

Ejemplo 4.18. La sucesión $(-n)_{n=1}^{\infty}$ tiende a $-\infty$, ya que dado $\varepsilon < 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $-\varepsilon < k$, de manera $\varepsilon > -k$, y por tanto, $\forall n \geq k$, $-n \leq -k < \varepsilon$.

La sucesión $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞ , ya que dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\varepsilon} < k$, de manera que $\forall n \geq k, \, n^2 \geq k^2 > \varepsilon$.

Proposición 4.5. Una sucesión monótona de números reales es propiamente divergente si y solo si no está acotada. Además, si la sucesión es creciente entonces tiende a ∞ , y si es decreciente tiende a $-\infty$.

 $\begin{array}{l} Prueba. \ {\rm Sea} \ (a_n)_{n=1}^{\infty} \ {\rm una} \ {\rm sucesi\'on} \ {\rm creciente} \ {\rm y} \ {\rm no} \ {\rm acotada}. \ {\rm Entonces} \ {\rm dado} \ \varepsilon > 0, \\ {\rm como} \ \varepsilon \ {\rm no} \ {\rm es} \ {\rm cota} \ {\rm de} \ {\rm la} \ {\rm sucesi\'on}, \ {\rm existe} \ k \in \mathbb{N} \ {\rm tal} \ {\rm que} \ a_k > \varepsilon. \ {\rm Por} \ {\rm tanto}, \ \forall n \geq k, \\ {\rm como} \ {\rm la} \ {\rm sucesi\'on} \ {\rm es} \ {\rm creciente}, \ {\rm se} \ {\rm tiene} \ {\rm que} \ a_n \geq a_k > \varepsilon. \ {\rm Luego} \ {\rm lim}_{n \to \infty} \ a_n = \infty. \\ {\rm De} \ {\rm forma} \ {\rm an\'aloga} \ {\rm se} \ {\rm prueba} \ {\rm que} \ {\rm si} \ (a_n)_{n=1}^{\infty} \ {\rm es} \ {\rm decreciente} \ {\rm y} \ {\rm no} \ {\rm acotada}, \ {\rm entonces} \\ {\rm lim}_{n \to \infty} \ a_n = -\infty. \\ \ \square \end{array}$

Proposición 4.6. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende $a \propto$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ también tiende $a \propto$, y si $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende $a - \infty$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ también tiende $a - \infty$.

i Demostración

Prueba. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty.$ Dado $\varepsilon>0,$ como $(a_n)_{n=1}^\infty$ tiende a $\infty,$ existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n>\varepsilon\ \forall n\geq k,$ y por tanto también se cumple que $b_n\geq a_n>\varepsilon\ \forall n\geq k,$ de manera que $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty.$

De forma análoga se prueba que si $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

Proposición 4.7. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, entonces

- a. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- b. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.
- $c. \lim_{n\to\infty} (a_n c_n) = -\infty.$
- $d. \ \lim_{n \to \infty} k a_n = \infty \ \forall k > 0 \ y \lim_{n \to \infty} k a_n = -\infty \ \forall k < 0.$
- $e. \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$

Demostración

Prueba. Se deja como ejercicio.

Proposición 4.8. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales estrictamente positivos tales que la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a $l \neq 0$. Entonces, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende $a \propto si$ y solo si $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tiende $a \propto si$.

Prueba. Sea $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ ya que l > 0 al ser las sucesiones estrictamente positivas. Como $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ se tiene

$$\begin{split} |a_n-l| < \varepsilon &= \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{-l}{2} < \frac{a_n}{b_n} - l < \frac{l}{2} \\ &\Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2} \\ &\Rightarrow \frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n. \end{split}$$

Ahora, si $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, por el teorema anterior, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{3l}{2}b_n=\infty$, y como $\frac{3l}{2}>0$ se concluye que $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

Del mismo modo, si $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{l}{2}b_n = \infty$, y por el teorema anterior, se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4.6 Sucesiones de Cauchy

En la última sección de este capítulo, se introducen un tipo particular de sucesiones convergente que son de especial importancia para la definición de los números reales.

Definición 4.9 (Sucesión de Cauchy). Se dice que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m \ge k$.

Teorema 4.8 (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.

Demostración

 $\begin{array}{l} Prueba. \text{ Sea } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ una sucesi\'on convergente a } a. \text{ Entonces, dado } \varepsilon > 0, \text{ tomando} \\ \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - a| < \varepsilon' \ \forall n \geq k. \end{array}$

Ahora, si se toma $n, m \ge k$, se tiene, aplicando la desigualdad triangular,

$$|a_n-a_m|=|(a_n-a)+(a-a_m)|\leq |a_n-a|+|a-a_m|<\varepsilon'+\varepsilon'=\varepsilon,$$

por lo que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

Veamos ahora al implicación en el otro sentido. Sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy. Entonces, dado $\varepsilon=1$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-a_m|<1\ \forall n,m\geq k$. Así pues, si $n\geq k$, se tiene, aplicando de nuevo la desigualdad triangular,

$$|a_n| = |a_n - a_k + a_k| \le |a_n - a_k| + |a_k| < 1 + |a_k|.$$

Si se toma $c = \max(\{|a_1|, \dots, |a_{k-1}|, 1+|a_k|\})$ entonces c es una cota de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Aplicando ahora el Teorema ?? existe una subsucesión convergente $(a_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sea $\lim_{n\to\infty}a_{r_n}=a$. Veamos que $(a_n)_{n=1}^\infty$ converge a a. Dado $\varepsilon>0$, sea $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}>0$. Como $(a_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy, existe $k_1\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-a_m|<\varepsilon'$ $\forall n,m\geq k_1$. Por otro lado, como $(a_{r_n})_{n=1}^\infty$ converge a a, existe $k_2\in\mathbb{N}$ tal que $|a_{r_n}-a|<\varepsilon'$ $\forall n\geq k_2$. Tomando $k=\max(\{k_1,k_2\})$, para cualquier $n\geq k$ se tiene, de nuevo por la desigualdad triangular,

$$|a_n-a|=|a_n-a_{r_k}+a_{r_k}-a|\leq |a_n-a_{r_k}|+|a_{r_k}-a|<\varepsilon'+\varepsilon'=\varepsilon,$$
 pues $r_k\geq k\geq k_1$. Por consiguiente, $(a_n)_{n=1}^\infty$ converge a a .

Ejemplo 4.19. Veamos que la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\frac{2}{\varepsilon} > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\varepsilon} < k$ y, por tanto, $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Ahora, para cualquier $n, m \geq k$ se tiene

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \le \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon.$$

Sin embargo, la sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ no es de Cauchy, ya que, dado $\varepsilon=1$, para cualquier $k\in\mathbb{N}$, si tomamos $n=k\geq k$ y $m=k+2\geq k$, se tiene que $|a_n-a_m|>|k-(k+2)|=2>1=\varepsilon$.

Las sucesiones de Cauchy juegan un papel clave en la construcción de cuerpos completos, en particular el cuerpo de los números Reales, ya que el hecho de que sus términos estén cada vez más cerca los unos de los otros, hace que aquellos cuerpos en los que cualquier sucesión de Cauchy converge a un elemento del cuerpo sean cuerpos sin huecos o completos.

Ejemplo 4.20. El cuerpo de los números racionales \mathbb{Q} no es completo ya que existen sucesiones de Cauchy de números racionales, como $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$, que converge al número e que no es racional.

El conjunto de los números irracionales \mathbb{R} \mathbb{Q} tampoco es completo, pues existen sucesiones de Cauchy de números irracionales, como $(2^{1/(n+1)})_{n=1}^{\infty}$, que converge a 1 que no es irracional.

4.7 Sucesiones de funciones

De igual modo que hemos estudiado las sucesiones de números reales, en Análisis también se estudian sucesiones de funciones. Como se verá más adelante, en el capítulo de series, estas sucesiones juegan un papel fundamental en el estudio de funciones complicadas mediante aproximaciones de funciones simples.

Definición 4.10. Una sucesión de funciones reales o sucesion funcional es una aplicación $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que asigna a cada número natural n una función $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Utilizaremos la notación $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ para referir
nos a la sucesión funcional definida por f.

Ejemplo 4.21. Los primeros términos de la sucesión funcional $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ son las funciones $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x^2}{1+x^2}$, $\frac{x^3}{1+x^3}$, ...

Definición 4.11 (Convergencia puntual). Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y un número $x \in \text{Dom}(f_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$, se dice que la sucesión converge puntualmente en x, si la sucesión de números reales $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge.

El conjunto $\mathcal C$ de todos los puntos en los que la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge puntualmente se llama dominio de convergencia puntual, y la función $f:\mathcal C\to\mathbb R$ definida por

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

se llama función límite puntual de la sucesión.

Importante

Es importante no confundir la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ con la sucesión de números reales $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ que se obtiene al evaluar cada función de la sucesión funcional en x

Definición 4.12 (Convergencia uniforme). Dada una sucesión funcional $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ con dominio de convergencia puntual $\mathcal C$ y la función límite puntual f, y un intervalo no vacío $I\subseteq \mathcal C$, se dice que la sucesión converge uniformemente a f en I, si para cualquier $\varepsilon>0$ existe $k\in \mathbb N$ tal que $\sup\{|f_n(x)-f(x)|:x\in I\}\leq \varepsilon\ \forall n\geq k.$

5 Funciones reales de variable real

El concepto de función es fundamental para poder modelizar las relaciones que se dan en muchos fenómenos del mundo real, donde una magnitud depende de otras de acuerdo a un determinado patrón, y por ello, gran parte del Análisis Matemático se centra en estudiar las características de las funciones.

En el capítulo sobre teoría de conjuntos se introdujo ya el concepto de función y se estudiaron algunas de sus propiedades desde el enfoque de una relación entre conjuntos. En este capítulo se estudian las principales propiedades de una función y se introducen varias funciones básicas que se conocen como funciones elementales.

5.1 El concepto de función

Definición 5.1 (Función de una variable). Una función f de un conjunto A en otro B es una relación que asocia cada elemento $a \in A$, con un único elemento de B que se denota f(a), y se llama imagen de a mediante f.

$$f:A\longrightarrow B$$

$$a\longrightarrow f(a)$$

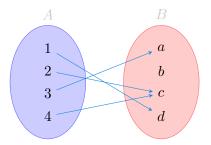


Figura 5.1: Ejemplo de función.

Cuando el conjunto inicial y final es el de los números reales \mathbb{R} , entonces se dice que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real.

5.1.1 Formas de representar una función

Existen distintas formas de representar los pares de elementos que forman parte de una función.

Por extensión

• Representación en forma de tabla. Se escriben los pares (x,y) de la función de forma explícita en una tabla.

x	-2	-1	0	1	2	
y	4	1	0	1	4	•••

• Representación gráfica. Se representan los pares (x,y) de la función mediante puntos con las correspondientes coordenadas en el plano Real cartesiano.

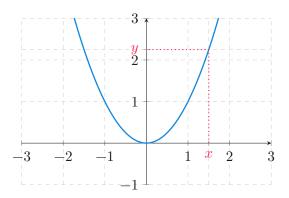


Figura 5.2: Gráfica de una función.

Por Intensión

• Representación algebraica explícita. Se da fórmula o expresión f(x) que determina el valor de y asociado a cada x mediante la función.

$$y = x^2$$

• Representación algebraica implícita. Se da una ecuación que relaciona dos variables x e y, que satisfacen todos los pares (x, y) de la función y solo ellos.

$$y - x^2 = 0$$

• Representación algebraica paramétrica

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t \end{cases}$$

Precaución

La representación algebraica paramétrica puede dar lugar a relaciones que no son funciones. Por ejemplo

$$\begin{cases} y = t \\ x = t^2 \end{cases}$$

que no es una función al asignar a los valores de x dos imágenes distintas.

5.2 Dominio de una función

Definición 5.2 (Dominio de una función). El dominio de una función f es el conjunto de valores para los que la función está definida

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 5.1. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

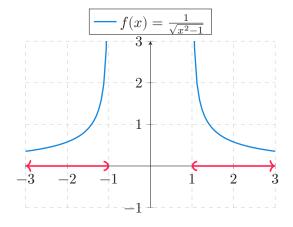


Figura 5.3: Dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Para determinar su dominio hay que eliminar los valores en los que no está definida la función. En este caso hay que eliminar los valores que hacen negativo el radicando de la raíz del denominador, es decir, los valores de x tales que $x^2-1<0$, que son los valores que cumplen -1< x<1, pero también hay que eliminar del dominio los valores que anulan el denominador, es decir, los valores de x tales que $\sqrt{x^2-1}=0$, que son x=-1 y x=1. Por tanto, su dominio es

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

5.3 Imagen de una función

Definición 5.3 (Imagenñ de una función). La imagen de una función f es el conjunto de valores que la función puede tomar

$$Img(f) = \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R} \}$$

Ejemplo 5.2. Dada la función $f(x) = x^2 - 2$

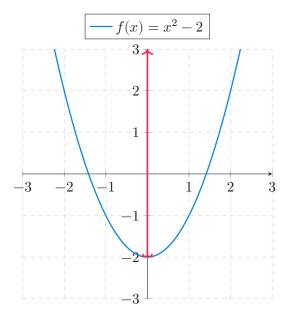


Figura 5.4: Imagen de la función $f(x) = x^2 - 2$.

Su imagen es

$$\operatorname{Img}(f) = [-2, \infty)$$

ya que la función cuadrática x^2 puede tomar cualquier valor de 0 a ∞ (no toma nunca valores negativos), y al restarle 2, el mínimo valor que puede tomar la función f es -2.

5.4 Álgebra de funciones

5.4.1 Función constante

Definición 5.4 (Función constante). Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una funcion constante, cuando asocia cada elemento $x \in \mathbb{R}$ con el mismo número $c \in \mathbb{R}$, es decir,

$$f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

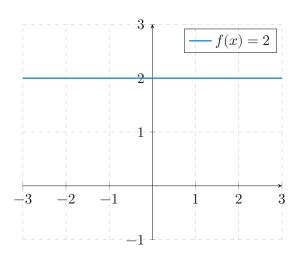


Figura 5.5: Gráfica de una función constante.

El dominio de la función constante f(x) = c es \mathbb{R} y su imagen $\{c\}$.

5.4.2 Función identidad

Definición 5.5 (Función Identidad). Se llama función identidad, a la función $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que asocia cada elemento $x \in \mathbb{R}$ con sigo mismo, es decir,

$$Id(x) = x$$
.

El dominio y la imagen de la función identidad es \mathbb{R} .

Definición 5.6 (Funciones suma, resta, producto y cociente). Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se definen las siguientes funciones:

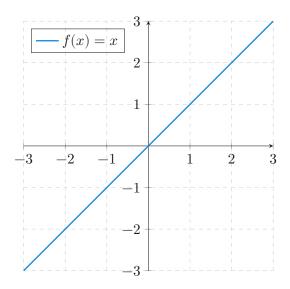


Figura 5.6: Gráfica de la función identidad.

- Función suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Función resta: $(f-g)(x) = f(x) g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Función producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Función cociente: $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \forall x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$.

Proposición 5.1. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple:

- $Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- $Dom(f g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- $\bullet \ \operatorname{Dom}(f/g) = (\operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)) \ \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}.$

Definición 5.7 (Función raíz). Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se definen la _función raíz n-ésima, como

$$\sqrt[n]{f}(x) = \sqrt[n]{f(x)} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposición 5.2. Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que

$$\mathrm{Dom}(\sqrt[n]{f}) = \begin{cases} \mathrm{Dom}(f) & \text{si n es impar,} \\ \mathrm{Dom}(f) & \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\} & \text{si n es par} \end{cases}$$

5.5 Composición de funciones

Definición 5.8 (Composición de funciones). Dadas dos funciones $g: A \to B$ y $f: B \to C$, se define la función compuesta $f \circ g$, (leído g compuesto con f) como la función

$$\begin{split} f \circ g : A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow f(g(x)) \end{split}$$

Para calcular la función compuesta $f \circ g(x)$, primero se aplica g sobre x y luego, se aplica f sobre g(x):

$$x \stackrel{g}{\longrightarrow} g(x) \stackrel{f}{\longrightarrow} f(g(x))$$

Ejemplo 5.3. Si $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \sin x$, entonces

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \operatorname{sen} \sqrt{x}.$$

5.6 Función inversa

Definición 5.9 (Función inversa). Se llama función inversa de $f: A \to B$ a la función $f^{-1}: B \to A$ (cuando exista) que cumple

$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=Id(x)$$

La función inversa de f deshace o revierte el efecto de f. Es decir, si $f:A\to B$ asocia un elemento $x\in A$ con otro $y\in B$, entonces f^{-1} asocia el elemento y con el x.

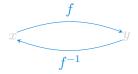


Figura 5.7: Función inversa.

Ejemplo 5.4. La inversa de $f(x) = x^3$ es la función $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Sin embargo, la inversa de la función x^2 no es \sqrt{x} ya que la raíz tiene dos imágenes, una positiva y otra negativa, y por tanto no sería una función. ¹

¹Para que exista la inversa de la función cuadrática es necesario restringir el dominio a los reales positivos para que sea inyectiva. En tal caso, la inversa es $+\sqrt{x}$.