# Problemas de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

# Tabla de contenidos

# Prefacio

Colección de problemas de Análisis Matemático aplicado.

# 1 Teoría de conjuntos

**Ejercicio 1.1.** Dado el conjunto universo de los números de un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los subconjuntos correspondientes a sacar par en el lanzamiento de un dado $A = \{2, 4, 6\}$ y sacar menos de 5 en el lanzamiento de un dado $B = \{1, 2, 3, 4\}$, calcular e interpretar los siguientes conjuntos:

a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. $\overline{A}$ y $\overline{B}$
d. $A - B$ y $B - A$
e. $A \triangle B$
f. $\overline{(A \cup B)}$
g. $\overline{(A \cap B)}$
h. $A \cup \overline{B}$
i. $\overline{\overline{A} \cap B}$

¿Qué conjuntos de números en el lanzamiento de un dado serían disjuntos con $A$? ¿Y con $A \cup B$?

Solución

a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
b. $A \cap B = \{2, 4\}$
c. $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ y $\overline{B} = \{5, 6\}$
d. $A - B = \{6\}$ y $B - A = \{1, 3\}$
e. $A \triangle B = \{1, 3, 6\}$
f. $\overline{(A \cup B)} = \{5\}$
g. $\overline{(A \cap B)} = \{1, 3, 5, 6\}$
h. $A \cup \overline{B} = \{2, 4, 5, 6\}$
i. $\overline{\overline{A} \cap B} = \{2, 4, 5, 6\}$

Serían disjuntos con $A$ todos los conjuntos que solo tuviesen alguno de los números 1, 3 o 5, por ejemplo el conjunto $\{1, 5\}$. El único conjunto disjunto con $A \cup B$, además del vacío es $\{5\}$.

**Ejercicio 1.2.** Expresar con operaciones entre los conjuntos $A$, $B$ y $C$, los conjuntos que se corresponden con las regiones sombreadas en los siguientes diagramas.

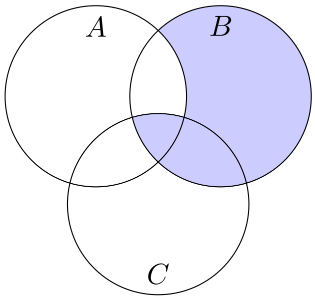



Figura 1.1: a.

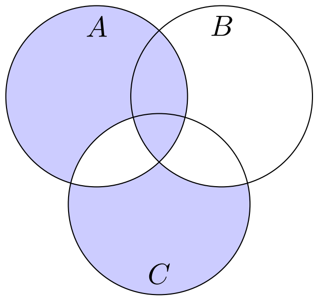



Figura 1.2: b.

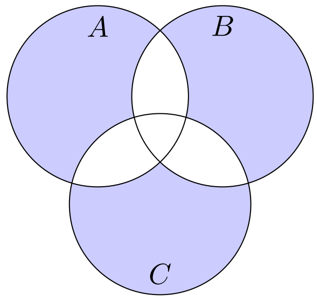



Figura 1.3: b.

Solución

a. $(B - A) \cup (A \cap B \cap C)$
b. $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap C)} \cap \overline{(B \cap C)} \cup (A \cap B \cap C)$
c. $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

**Ejercicio 1.3.** Demostrar gráficamente las leyes de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

**Ejercicio 1.4.** Construir por extensión el conjunto potencia del conjunto de los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$. ¿Cuál es su cardinal?

Solución

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(S) = \{&\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{AB\},\\
&\{\emptyset, A\}, \{\emptyset, B\}, \{\emptyset, AB\}, \{A, B\}, \{A, AB\}, \{B, AB\}, \{\emptyset, A, B\},\\
&\{\emptyset, A, AB\}, \{\emptyset, B, AB\}, \{A, B, AB\},\\
&\{\emptyset, A, B, AB\}\}
\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.5.** Construir el producto cartesiano del conjunto d los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$ y el conjunto de los factores Rh $R = \{\mathrm{Rh}+, \mathrm{Rh}-\}$.

Solución

$$\begin{aligned} S \times R = \{&(0, \mathrm{Rh}+), (0, \mathrm{Rh}-), (A, \mathrm{Rh}+)), (A, \mathrm{Rh}-), \\ &(B, \mathrm{Rh}+), (B, \mathrm{Rh}-), (AB, \mathrm{Rh}+), (AB, \mathrm{Rh}-)\} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.6.** Demostrar que la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x - y \text{ es par}\}$ es una relación de equivalencia.

Solución

*Propiedad reflexiva*: $\forall a \in \mathbb{Z}$ $a - a = 0$ es par, de manera que $aRa$.
*Propiedad simétrica*: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $aRb$ entonces $a - b$ es par, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2k$. Por tanto, $b - a = 2(-k)$ también es par y $bRa$. *Propiedad transitiva*: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $aRb$ y $bRc$ entonces $a - b$ y $b - c$ son pares, de manera que su suma $a - b + b - c = a - c$ también es par, y $aRc$.

**Ejercicio 1.7.** ¿Cuáles de las siguientes relaciones son relaciones de equivalencia? ¿Cuáles don de orden?

a. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
b. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$
c. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
d. $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución

a. $R_1$ es relación de equivalencia.
b. $R_2$ es relación de orden.
c. $R_3$ no es relación de equivalencia ni de orden porque no cumple las propiedades reflexiva y transitiva.
d. $R_4$ es no es relación de equivalencia ni de orden porque tampoco cumple las propiedades reflexiva y transitiva.

**Ejercicio 1.8.** ⋆ Para cada uno de los conjuntos siguientes, calcular si existe el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo.

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b. $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$
c. $C = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$

Solución

a. $\sup(A) = 5$, $\inf(A) = 1$, $\max(A) = 5$, $\min(A) = 1$.
b. $\inf(B) = 2$ y $\min(B) = 2$. No existe el supremo ni el máximo porque $B$ no está acotado superiormente.
c. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = 0$ y $\max(C) = 1$. No existe el mínimo.

**Ejercicio 1.9.** ⋆ Dar ejemplos de funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplan lo siguiente:

a. $f$ es inyectiva pero no sobreyectiva.
b. $f$ es sobreyectiva pero no inyectiva.
c. $f$ no es inyectiva ni sobreyectiva.
d. $f$ es biyectiva y distinta de la función identidad.

Solución

a. $f(x) = 2x$
b. $f(x) = x^3 - x$.
c. $f(x) = x^2$
d. $f(x) = 2x + 1$

**Ejercicio 1.10.** ⋆ Dadas las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, estudiar cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas:

a. $f(x) = x^2$
b. $g(x) = x^3$
c. $h(x) = x^3 - x^2 - 2x$
d. $i(x) = |x|$

Solución

a. $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
b. $g(x) = x^3$ es biyectiva.
c. $h(x) = x^3 - x^2 - 2x$ es sobreyectiva pero no inyectiva.
d. $i(x) = |x|$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

**Ejercicio 1.11.** Demostrar que la composición de dos funciones inyectivas es también inyectiva.

Solución

Sean $f$ y $g$ dos funciones inyectivas tales que $FrIm(f) \subseteq FrDom(g)$. Veamos que $g \circ f$ es inyectiva. Supongamos ahora que existen $a, b \in FrDom(f)$ tales que $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, es decir, $g(f(a)) = g(f(b))$. Como $g$ es inyectiva, se tiene que $f(a) = f(b)$, y como $f$ es inyectiva se tiene que $a = b$, con lo que $g \circ f$ es inyectiva.

**Ejercicio 1.12.** Dados dos conjuntos finitos $A$ y $B$, demostrar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ y que $|A \times B| = |A||B|$.

Solución

a. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ con $(A - B)$, $A \cup B$ y $B - A$ disjuntos dos a dos, de manera que $|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$.

   Por otro lado, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, y $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, de modo que

$$\begin{aligned}|A| + |B| - |A \cap B| &= |A - B| + |A \cap B| + |B - A| + |A \cap B| - |A \cap B| \\ &= |A - B| + |B - A| + |A \cap B|,\end{aligned}$$

   que coincide con el resultado anterior.

b. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, de manera que $|A| = n$ y $|B| = m$. Para cada elemento $a_i \in A$ se pueden formar $m$ pares $(a_i, b_1), \dots (a_i, b_m)$. Como $A$ tiene $n$ elementos, en total se pueden formar $n \cdot m$ pares, así que $|A \times B| = n \cdot m = |A||B|$.

**Ejercicio 1.13.** Dada una función $f : A \to B$, demostrar que si $f$ es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$, y si $f$ es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$. ¿Cómo es $|A|$ en comparación con $|B|$ cuando $f$ es biyectiva?

Solución

Sea $f : A \to B$ inyectiva. Entonces para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ se tiene que $f(a_1) \neq f(a_2)$, por lo que $|A| \leq |B|$.
Sea $f : A \to B$ sobreyectiva. Entonces para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Además dos elementos de $B$ no pueden tener la misma preimagen porque entonces $f$ no sería una función, por lo que $|A| \geq |B|$.
De lo anterior se deduce que si $f$ es biyectiva, entonces $|A| = |B|$.

**Ejercicio 1.14.** Dados dos conjuntos finitos $A$ y $B$ con $|A| = n$ y $|B| = m$. ¿Cuántas funciones distintas se pueden construir de $A$ a $B$. ¿Y cuántas funciones inyectivas suponiendo que $n \leq m$?

Solución

Se pueden construir $m^n$ funciones distintas, y $\frac{m!}{(m-n)!}$ funciones inyectivas.

**Ejercicio 1.15.** Tomando el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ como conjunto universo, dar un ejemplo de un subconjunto infinito cuyo complemento también sea infinito.

Solución

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ es infinito y $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\}$ también es infinito.

**Ejercicio 1.16.** Demostrar que todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.

Solución

Sean $A$ un conjunto infinito. Como $A$ no es vacío, existe un elemento $a_1 \in A$. Considérese ahora el conjunto $A_1 = A\ \{a_1\}$. Es evidente que $A_1$ sigue siendo infinito y podemos elegir otro elemento $a_2 \in A_1$ de manera que el conjunto $A_2 = A_1 - \{a_2\}$

sigue siendo infinito. Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos que el conjunto $\{a_1, a_2, ...\}$ es un subconjunto de $A$ que es numerable.

**Ejercicio 1.17.** Demostrar que un conjunto es infinito si y solo si es equipotente a un subconjunto propio.

Solución

Sea $A$ un conjunto. Si $A$ es finito, entonces cualquier subconjunto $B \subset A$ cumple que $|B| < |A|$ por lo que no se puede establecer una biyección entre $A$ y $B$.
Si $A$ es infinito, por el ejercicio anterior se tiene que existe un subconjunto numerable $B = \{a_1, a_2, ...\} \subseteq A$. Si tomamos la aplicación $f : B \to B \quad \{a_1\}$ dada por $f(a_i) = a_{i+1}$, entonces $f$ es biyectiva, y su extensión $\hat{f} : A \to A \quad \{a_1\}$ dada por

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin B \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es también biyectiva, por lo que $A$ es equipotente a $A \quad \{a_1\}$ que es un subconjunto propio suyo.

**Ejercicio 1.18.** $\star$ Demostrar que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable. ¿Y el producto cartesiano de $n$ conjuntos numerables?

Solución

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos numerables. Entonces existe una aplicación inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$ y otra $g : B \to \mathbb{N}$. Si se toma ahora la función $h : A \times B \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(a, b) = 2^{f(a)} 3^{g(b)} \; \forall a \in A, b \in B,$$

se tiene que $f$ es inyectiva y por tanto $A \times B$ es numerable.
Por inducción, es fácil probar que el producto cartesiano de $n$ conjuntos numerables es también numerable.

**Ejercicio 1.19.** $\star$ Demostrar que el conjunto de los números racionales es numerable.

Solución

Si se considera la aplicación $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ que a cada número racional $r$ le hace corresponder el par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ donde $\frac{p}{q}$ es la fracción irreducible de $r$ con denominador positivo, se tiene que $f$ es inyectiva. Como el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable, existe otra aplicación inyectiva de $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con lo que $g \circ f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ es inyectiva y $\mathbb{Q}$ es numerable.

**Ejercicio 1.20.** Demostrar que la unión de dos conjuntos numerables es numerable.

Solución

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos numerables disjuntos. Entonces existen dos biyecciones $f : A \to \mathbb{N}$ y $g : B \to \mathbb{N}$. A partir de estas biyecciones se puede definir otra $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1 & \text{si } x \in A \\ 2g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Así pues, $A \cup B$ es numerable.
Si $A$ y $B$ no son disjuntos, entonces $A \cup B = A \cup (B \ \ A)$. Si $B \ \ A = \{b_1, \dots, b_n\}$ es finito, se puede tomar la biyección $g = \{(b_1, 1), \dots, (b_n, n)\}$ y, a partir de ella, construir la biyección $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + n & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \ \ A \end{cases}$$

Mientras que si $B \ \ A$ es infinito, se puede razonar como al principio pues $A$ y $B \ \ A$ son disjuntos.

**Ejercicio 1.21.** $\star$ Demostrar que el conjunto de los números irracionales no es numerable.

Solución

Ya hemos visto en el ejercicio Ejercicio 1.19 que $\mathbb{Q}$ es numerable, de manera que si $\mathbb{R} \ \ \mathbb{Q}$ fuese numerable, entonces por el Ejercicio 1.20 $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \ \ \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ sería numerable, lo cual no es cierto.

**Ejercicio 1.22.** Demostrar la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable.

> **Solución**
>
> Sea $A$ un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por ser $A$ numerable existe una biyección $f : \mathbb{N} \to A$, de manera que podemos enumerar los elementos de $A$ de tal forma que $A_i = f(i)$. Del mismo modo, como cada conjunto $A_i$ es numerable se puede establecer una enumeración de sus elementos $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$. Así pues, podemos representar los elementos de $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ en una tabla como la siguiente
>
> $$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \to & a_{12} & & a_{13} & \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & \downarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$
>
> Siguiendo el orden de las flechas es posible enumerar todos los elementos de este conjunto, por lo que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

**Ejercicio 1.23.** Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros $P = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}\}$ es numerable. ¿Y el de los polinomios con coeficientes racionales?

> **Solución**
>
> Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P_n$ el conjunto de los polinomios de grado $n$ con coeficientes enteros $P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{Z}\}$. Para cada polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in P_n$ podemos establecer una biyección entre sus coeficientes y la tupla $p_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, con $a_i \in \mathbb{Z}$. Por tanto, existe una biyección entre $P_n$ y $\mathbb{Z}^n$, y como $\mathbb{Z}^n$ es numerable, el $P_n$ también lo es.
> Finalmente, $P = \cup_{i=1}^{\infty} P_n$ que es la unión numerable de conjuntos numerables, que, como ya se vió en el Ejercicio 1.22, es numerable.

**Ejercicio 1.24.** ⋆ ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son numerables?

a. $A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$
b. $B = \{x \in \mathbb{Q} : -10 < x < 10\}$
c. $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

d. $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}\}$
e. $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

**Ejercicio 1.25.** ¿Es el conjunto de todas las secuencias infinitas de ADN numerable?

# 2 Números reales

**Ejercicio 2.1.** ⋆ Para los siguientes subconjuntos de números reales, determinar si están acotados por arriba o por abajo, y en tal caso dar el supremo o el ínfimo.

a. $A = \{-1, 0, 1\}$
b. $B = [0, 1)$
c. $C = (0, \infty)$
d. $D = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
e. $E = \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$
f. $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$
g. $G = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x < 0\}$

Solución

a. $A$ está acotado por arriba y por abajo. $\sup(A) = 1$ y $\inf(A) = -1$.

b. $B$ está acotado por arriba y por abajo. $\sup(B) = 1$ y $\inf(B) = 0$.

c. $C$ está acotado por abajo, pero no por arriba. $\inf(C) = 0$.

d. $D$ está acotado por arriba y por abajo. $\sup(D) = 2$ y $\inf(D) = 1$.

e. $E$ no está acotado por arriba ni por abajo.

f. $F$ está acotado por arriba y por abajo.$\sup(F) = 2$ y $\inf(F) = 1$.

g. $G$ está acotado por arriba pero no por abajo. $\sup(G) = 1$.

**Ejercicio 2.2.** Calcular el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos. ¿Tienen máximo y mínimo?

a. $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 - 2 < 7\}$
b. $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < 4x^2 - 3 \leq 5\}$

Solución

a. $A = (-3,-2) \cup (2,3)$, que como está acotado tiene supremo $\sup(A) = 3$ e ínfimo $\inf(A) = -3$. Sin embargo, $3 \notin A$ y $-3 \notin A$, por lo que no tiene ni máximo ni mínimo.

b. $B = [-\sqrt{2},-1) \cup (1,\sqrt{2}]$, que como está acotado tiene supremo $\sup(B) = \sqrt{2}$ e ínfimo $\inf(B) = -\sqrt{2}$. Como además, $-\sqrt{2} \in B$ y $\sqrt{2} \in B$, se tiene que $\max(B) = \sqrt{2}$ y $\min(B) = -\sqrt{2}$.

**Ejercicio 2.3.** Dadas dos funciones $f$ y $g$ ambas con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que si sus imágenes están acotadas y $f(a) \leq g(a)\ \forall a \in A$, entonces $\sup(FrIm(f)) \leq \sup(FrIm(g))$.

Solución

Como las imágenes de $f$ y $g$ están acotadas, y suponiendo que no fuesen vacías, por el axioma del supremo, se tiene que existe $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c = \sup(FrIm(f))$ y $d = \sup(FrIm(g))$. Como $d$ es el supremo de la imagen de $g$, se tiene que es una cota superior de la imagen de $f$, ya que, para cualquier $a \in A$, se tiene $f(a) \leq g(a) \leq d$. Por consiguiente, tiene que ser $c \leq d$, ya que de lo contrario $c$ no sería el supremo por ser $d$ una cota superior de la imagen de $f$ menor que $c$.

**Ejercicio 2.4.** Demostrar que si $c \in \mathbb{R}$ es una cota superior de un conjunto $A$, entonces $-c$ es una cota inferior del conjunto de los opuestos $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, y si $c$ es una cota inferior de $A$ entonces $-c$ es una cota superior de $A'$.

Solución

Sea $c \in \mathbb{R}$ una cota superior del conjunto $A$. Entonces, $a \leq c\ \forall a \in A$. De ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$a < c \Rightarrow (-1)a \geq (-1)c \Rightarrow -a \geq -c,$$

lo que demuestra que $-c$ es una cota inferior de $A'$.
Del mismo modo, si $c$ una cota inferior del conjunto $A$. Entonces, $c \leq a\ \forall a \in A$, y de ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$c < a \Rightarrow (-1)c \geq (-1)a \Rightarrow -c \geq -a,$$

de manera que $-c$ es cota superior de $A'$.

**Ejercicio 2.5.** ⋆ Demostrar que todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene un ínfimo.

Solución

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de $A$. Si tomamos ahora el conjunto $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que $-c$ es una cota superior de $A'$. Así pues, $A'$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente, y por el axioma del supremo, existe $-s \in \mathbb{R}$ tal que $-s = \sup(A')$.
Veamos ahora que $s$ es el ínfimo de $A$. Como $-s$ es el supremo de $A'$, es una cota superior de $A'$, y por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que $-(-s) = s$ es cota inferior de $A$. Supongamos ahora que existe otra cota inferior $x$ de $A$ tal que $x > s$. Entonces, aplicando una vez más el Ejercicio 2.4, se tiene que $-x$ es cota superior de $A'$, pero $x > s \Rightarrow (-1)x < (-1)s \Rightarrow -x < -s$, lo que contradice que $-s$ sea el supremo de $A'$, ya que $-x$ sería una cota superior menor que $-s$. Luego $s$ es el ínfimo de $A$.

**Ejercicio 2.6.** Demostrar que $|a| - |b| \leq |a - b|\ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Solución

Veamos todas las posibilidades que pueden darse:

- Si $a = 0$, entonces $|a| - |b| = -|b| \leq |-b| = |a - b|$.
- Si $b = 0$, entonces $|a| - |b| = |a| = |a - b|$.
- Si $a \geq b > 0$, entonces $|a| - |b| = a - b = |a - b|$.
- Si $b \geq a > 0$, entonces $|a| - |b| = a - b \leq 0 \leq |a - b|$.
- Si $a > 0 > b$, entonces $|a| - |b| = a - (-b) = a + b < a - b = |a - b|$.
- Si $b > 0 > a$, entonces $|a| - |b| = -a - b < -a + b = -(a - b) = |a - b|$.
- Si $a \leq b < 0$, entonces $|a| - |b| = -a - (-b) = -a + b = -(a - b) = |a - b|$.
- Si $b \leq a < 0$, entonces $|a| - |b| = -a - (-b) = -a + b \leq 0 \leq |a - b|$.

**Ejercicio 2.7.** ⋆ Usando la propiedad arquimediana de los números reales, demostrar que para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ existe un número natural $n$ tal que $n - 1 \leq a < n$.

Solución

Como $a > 0$ se tiene que $\frac{1}{a} > 0$, y por la propiedad arquimediana se cumple que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$.
Considérese ahora el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : a < m\}$. Como $a < n$ se tiene que $n \in A$ y por tanto $A$ no está vacío. Aplicando ahora el principio de buena ordenación de los números naturales, como $A \subset \mathbb{N}$, existe un primer elemento $n_0 \in A$, tal que $n_0 - 1 \notin A$, de manera que $n_0 - 1 \leq a$ y con ello se tiene que \$$n_0 - 1 \leq a < n$.

**Ejercicio 2.8.** Se dice que un conjunto $A$ es denso en $\mathbb{R}$ si cada intervalo $(a, b)$ de $\mathbb{R}$ contiene algún elemento de $A$. Demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución

La prueba es la misma que la de la propiedad arquimediana. Basta con tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Si ahora se toma el primer múltiplo de $1/n$ tal que $a < \frac{m}{n}$, también se cumplirá que $\frac{m}{n} < b$, ya que de lo contrario $\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n}$ lo que lleva a la contradicción de que $\frac{1}{n} > b - a$.

# 3 Topología de los números reales

**Ejercicio 3.1.** Dada la sucesión de intervalos anidados $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Demostrar también que si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados entonces la intersección es vacía.

Solución

En primer lugar, es fácil ver que $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ ya que $0 \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que 0 es el único elemento de la intersección. Para cualquier $x > 0$, aplicando la propiedad arquimediana se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$, de manera que $x \notin [0, \frac{1}{n}] = I_n$, por lo que $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Por tanto, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.
Si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados, entonces 0 tampoco pertenecería a la intersección y $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

**Ejercicio 3.2.** ¿Cuál es el interior del conjunto $A = \{a\}$?

Solución

$a$ no es un punto interior de $A$, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subseteq A$. Por tanto, $FrInt(A) = \emptyset$.
En general, cualquier conjunto con un solo punto no tiene puntos interiores.

**Ejercicio 3.3.** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$ y sea $A = \{a\} \cup (b, c)$. Calcular $FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$.

Solución

Como el interior de un conjunto con un solo punto es vacío y el interior de un intervalo abierto es el propio intervalo abierto (ver proposición), se tiene que $FrInt(A) = (a, b)$. Por otro lado, $\overline{A} = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (c, \infty)$, que al ser la unión de intervalos abiertos se tiene que $FrExt(A) = FrInt(\overline{A}) = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (c, \infty)$. Finalmente, $FrFr(A) = \{a, b, c\}$, ya que cualquier entorno de estos puntos contiene puntos de $A$ y de $\overline{A}$.

**Ejercicio 3.4.** $\star$ Demostrar que todos los puntos de $\mathbb{Z}$ son puntos frontera.

Solución

Sea $x \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ siempre contiene números enteros (por ejemplo el propio $x$), y números no enteros, por los que $x$ es un punto frontera.

**Ejercicio 3.5.** $\star$ Demostrar que el conjunto de los números racionales no tiene puntos interiores. ¿Y el conjunto de los números irracionales?

Solución

Sea $x \in \mathbb{Q}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, por la densidad de los números racionales, el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ siempre contiene números racionales, y por la densidad de los números irracionales también contiene números irracionales, de manera que todos los puntos de $\mathbb{Q}$ son frontera y no tiene puntos interiores.
Por el mismo motivo, $\mathbb{R}\ \ \mathbb{Q}$ tampoco tiene puntos interiores y todos sus puntos son puntos frontera.

**Ejercicio 3.6.** Demostrar que si $x$ es un punto interior de $A$ y $A \subseteq B$, entonces $x$ también es un punto interior de $B$.

Solución

Sea $x$ un punto interior de $A$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \subseteq B$, de manera que $x$ también es un punto interior de $B$.

**Ejercicio 3.7.** Demostrar que si $x$ es un punto interior de dos conjuntos $A$ y $B$, entonces también es un punto interior de su unión y su intersección.

**Solución**

Sea $x$ un punto interior de $A$ y $B$. Entonces, existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq A \subseteq A \cup B$, de manera que $x$ es también un punto interior de $A \cup B$.
Por otro lado, como $x$ es también un punto interior de $B$, existe otro $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq B$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq B$, por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$, y $x$ es también un punto interior de $A \cap B$.

**Ejercicio 3.8.** Demostrar que para cualesquiera dos conjuntos de números reales $A$ y $B$, se cumple que $FrInt(A \cap B) = FrInt(A) \cap FrInt(B)$.

Demostrar también que el anterior resultado no es cierto para la unión, es decir, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no se cumple siempre que $FrInt(A \cup B) = FrInt(A) \cup FrInt(B)$.

**Solución**

En el Ejercicio 3.7 hemos visto que si $x$ es un punto interior de $A$ y $B$, entonces también lo es de su intersección. Veamos ahora el otro sentido de la implicación.
Supongamos que $x$ es un punto interior de $A \cap B$. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$. Pero como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, se tiene que $x$ es también un punto interior de $A$ y de $B$.
Para ver que este resultado no es cierto para la unión, basta con tomar $A = (-1, 0)$ y $B = [0, 1)$. Entonces $A \cup B = (-1, 1)$, y al ser un intervalo abierto, $FrInt(A \cup B) = (-1, 1)$. Sin embargo, $FrInt(A) = (-1, 0)$ y $FrInt(B) = (0, 1)$, por lo que $FrInt(A) \cup FrInt(B) = (-1, 1) \quad \{0\} \neq (-1, 1) = FrInt(A \cup B)$.

**Ejercicio 3.9.** Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, probar que los conjuntos $FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$ forman una partición de $\mathbb{R}$.

**Solución**

Veamos primero, que $FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$ son disjuntos dos a dos.

- Si $x \in FrInt(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$. De aquí se deduce que $a \in A$, y por tanto $x \notin \overline{A}$ por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \nsubseteq \overline{A}$ $\forall \varepsilon > 0$ y $x$ no es un punto exterior de $A$. Por otro lado, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$, por lo que este entorno de $x$ no contiene puntos de $\overline{A}$ y $x \notin FrFr(A)$.
- Si $x \in FrExt(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$.

De aquí se deduce que $x \notin A$, y por tanto $x$ no es un punto interior de $A$. Por otro lado, como $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$, existe un entorno de $x$ que no contiene puntos de $A$ y $x \notin FrFr(A)$.

- Si $x \in FrFr(A)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene puntos de $A$ y de $\overline{A}$, de manera que, no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ o $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$, así que, $x$ no es un punto interior ni exterior de $A$.

Veamos ahora que $FrInt(A) \cup FrExt(A) \cup FrFr(A) = \mathbb{R}$, o dicho de otro modo, cualquier $x \in \mathbb{R}$ debe pertenecer a alguno de estos conjuntos.

- Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$, entonces $x$ es un punto interior de $A$.
- En caso contrario, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$, entonces $x$ es un punto exterior de $A$.
- Finalmente, si para cualquier $\varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq A$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq \overline{A}$, se tiene que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene tanto puntos de $A$ como de $\overline{A}$, por lo que $x$ es un punto frontera de $A$.

**Ejercicio 3.10.** ⋆ Calcular los puntos de adherencia y de acumulación del conjunto $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución

Como $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, 1 es un punto de acumulación de $A$, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\ \{1\}$ contiene puntos de $A$. Para verlo, basta aplicar la propiedad arquimediana, por la que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de manera que $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$, y por tanto $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\ \{1\} \cap A \neq \emptyset$.
Para calcular los puntos de adherencia de $A$ basta tener en cuenta que $A \subseteq FrAdh(A)$, y que $FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$, por lo que 1 también es un punto de adherencia de $A$. Veamos ahora que cualquier otro punto, no es punto de adherencia de $A$. Si $x < 1$, tomando $\varepsilon = |x-1|$ el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ no contiene puntos de $A$. Del mismo modo, si $x > 2$, tomando $\varepsilon = |x-2|$ el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ tampoco contiene puntos de $A$. Finalmente, si $1 < x \leq 2$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$. Tomando $\varepsilon = \min(\{|x - \frac{1}{n+1}|, |x - \frac{1}{n}|\})$ también se tiene que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ no contiene puntos de $A$. Por tanto, $FrAdh(A) = A \cup \{1\}$.
Para calcular los puntos de acumulación de $A$, ya sabemos que 1 es un punto de acumulación y faltaría por ver si algún otro punto de $A$ es un punto de acumulación de $A$, ya que el resto de puntos no pertenecen a la adherencia y por tanto no pueden ser puntos de acumulación al ser $FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$. Ahora bien, si $x \in A$,

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 1 + \frac{1}{n}$, de manera que tomando $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ se tiene que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ no contiene puntos de $A$, por lo que $x$ no es punto de acumulación de $A$. Así pues, $FrAc(A) = \{1\}$.

**Ejercicio 3.11.** Calcular los puntos de adherencia y de acumulación de $\mathbb{Z}$ y también de $\mathbb{Q}$.

Solución

$FrAdh(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $FrAc(\mathbb{Z}) = \emptyset$.
$FrAdh(\mathbb{Q}) = FrAc(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

**Ejercicio 3.12.** Dar un ejemplo de dos conjuntos no abiertos pero cuya intersección es abierta.

Solución

Si se toma $A = [0, 2)$ y $B = (1, 3]$, tanto $A$ como $B$ no son abiertos, pero $A \cap B = (1, 2)$ que es un conjunto abierto.

**Ejercicio 3.13.** $\star$ Estudiar si el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es abierto o cerrado.

Solución

$\mathbb{Q}$ no es abierto ya que como se vio en el Ejercicio 3.5 $FrInt(\mathbb{Q}) = \emptyset$. En el mismo ejercicio se vio también que $FrInt(\overline{\mathbb{Q}}) = FrInt(\mathbb{R} \quad \mathbb{Q}) = \emptyset$, por lo que $\mathbb{Q}$ tampoco es cerrado.

**Ejercicio 3.14.** Probar las siguientes propiedades:

a. La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
b. La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
c. La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.
d. La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

**Solución**

a. Sea $A_n$ $n \in \mathbb{N}$ una colección arbitraria de conjuntos abiertos y sea $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, y como $A_n$ es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, por lo que $x$ es un punto interior de $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

b. Vamos a probarlo por inducción. Sean $A_1$ y $A_2$ dos conjuntos abiertos. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x \in A_1 \cap A_2$. Entonces, como $x \in A_1$ existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq A_1$, y como $x \in A_2$ existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq A_2$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_1$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_2$, por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_1 \cap A_2$, y $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto.

   Sea ahora una colección $A_1, \dots, A_m, A_{m+1}$ una colección de conjuntos abiertos y supongamos que $A = \cap_{n=1}^{m} A_n$ es un conjunto abierto. Si $A \cap A_{m+1} = \emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x \in A \cap A_{m+1}$. Entonces, como $x \in A$ existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq A$, y como $x \in A_{m+1}$ existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq A_{m+1}$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_{m+1}$, por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A \cap A_{m+1}$, y $\cap_{n=1}^{m+1} A_n$ es un conjunto abierto.

c. Sea $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, una colección arbitraria de conjuntos cerrados. Entonces, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Como $A_n$ es cerrado, $\overline{A_n}$ es abierto $\forall n \in \mathbb{N}$, y por el apartado (a), se tiene que $\cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n}$ es abierto y $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ es cerrado.

d. Sea ahora una colección $A_1, \dots, A_n$ una colección de conjuntos cerrados. De nuevo, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Como $A_i$ es cerrado, $\overline{A_i}$ es abierto $\forall i = 1, \dots, n$, y por el apartado (b), se tiene que $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ es abierto y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es cerrado.

**Ejercicio 3.15.** Demostrar que la adherencia de cualquier conjunto es siempre cerrada.

**Solución**

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Para probar que $FrAdh(A)$ es un conjunto cerrado, veremos que $\overline{FrAdh(A)}$ es abierto. Si $x \in \overline{FrAdh(A)}$, entonces $x \notin FrAdh(A)$, y existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Para cualquier $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, se tiene, tomando $\varepsilon' = \min(\{x-\varepsilon-y, x+\varepsilon-y\})$, que $(y-\varepsilon', y+\varepsilon') \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y por tanto $(y-\varepsilon', y+\varepsilon') \cap A = \emptyset$, por lo que $y \notin FrAdh(A)$. Así pues, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{FrAdh(A)}$, y por consiguiente $\overline{FrAdh(A)}$ es abierto y $FrAdh(A)$ es cerrado.

**Ejercicio 3.16.** Demostrar que cualquier conjunto es cerrado si y solo si coincide con su adherencia.

Solución

Sea $A$ un conjunto cerrado. Ya sabemos que $A \subseteq FrAdh(A)$. Supongamos ahora que existe un punto $x \in FrAdh(A) \quad A$. Entonces, como $x$ es un punto de adherencia de $A$, para cualquier $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pero como $x \notin A$, también se cumple que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\} \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x$ es un punto de acumulación de $A$, pero eso contradice que $A$ sea un conjunto cerrado, pues no contiene a todos sus puntos de acumulación (ver teorema). Así pues, $FrAdh(A) = A$.
Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que $FrAdh(A) = A$. Entonces, para cualquier $x \in \overline{A}$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$, por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A}$ es abierto, de manera que $A$ es cerrado.

# 4 Sucesiones de números reales

**Ejercicio 4.1.** Una *sucesión constante* es una sucesión de números reales en la que cada término es igual que el anterior. Demostrar que una sucesión constante siempre converge.

Solución

Sea $(c)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión constante. Veamos que converge a $c$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ basta tomar $k = 1$, de manera que $\forall n \geq k$ se tiene que $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

**Ejercicio 4.2.** Una *sucesión aritmética* es una sucesión de números reales en la que cada término se obtienen sumando un número constante $c \in \mathbb{R}$ al anterior, es decir, $x_1 = c$ y $x_{n+1} = c + x_n$ $\forall n = 2, 3, \ldots$. Estudiar la convergencia de las sucesiones aritméticas.

Solución

Si $c = 0$ entonces la sucesión es constante y por el Ejercicio 4.1, la sucesión converge. Supongamos que $c > 0$ y veamos que la sucesión aritmética $(nc)_{n=1}^{\infty}$ no converge a ningún número $x \in \mathbb{R}$. Para ello, basta tomar $\varepsilon = 1$, de manera que por la propiedad arquimediana se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x+1}{c} < m$, así que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tomando $n = \max(\{k, m\})$, se cumple que existe $n \geq k$ tal que

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{c} < m \leq n &\Rightarrow x + 1 < nc = x_n \\
&\Rightarrow x_n - x > 1 \\
&\Rightarrow |x_n - x| > 1 = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, la sucesión diverge. De forma similar se puede prueba que si $c < 0$ la sucesión también diverge.
Otra forma de demostrarlo es probar que la sucesión es monótona y no acotada y aplicar el teorema de la convergencia de sucesiones monóntonas para concluir que la sucesión no converge.

**Ejercicio 4.3.** Una *sucesión geométrica* es una sucesión de números reales en la que cada término se obtienen multiplicando un número constante $c \in \mathbb{R}$ por el anterior, es decir, $x_1 = c$ y $x_{n+1} = cx_n$. Estudiar la convergencia de las sucesiones geométricas.

Solución

Si $c = 0$ o $c = 1$ entonces la sucesión es constante y por el Ejercicio 4.1, la sucesión converge.
Supongamos que $c > 1$ y veamos que la sucesión geométrica $(c^n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a ningún número $x \in \mathbb{R}$. Para ello, basta probar que la sucesión es creciente y no acotada. Probaremos que por inducción que la sucesión es creciente. $x_1 = c < cc = c^2 = x_2$ por ser $c > 1$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$, entonces $x_n = c^n < cc^n = c^{n+1} = x_{n+1}$. Por tanto, la sucesión es creciente.
Veamos ahora que no está acotada por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $c > 1$, podemos escribir $x_n = c^n = (1 + a)^n$ con $a > 0$. Aplicando ahora el teorema del binomio, se tiene

$$\begin{aligned}(1+a)^n &= \binom{n}{0}1^n a^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0 a^n \\ &= 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n \\ &\geq 1 + na.\end{aligned}$$

Aplicando ahora la propiedad arquimediana, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x-1}{a} < n$, de modo que

$$\frac{x-1}{a} < n \Rightarrow x - 1 < na \Rightarrow x < 1 + na < (1+a)^n = x_n,$$

por lo que $x$ no puede ser cota de la sucesión. Por consiguiente, la sucesión es monótona y no acotada, y por el teorema de la convergencia de sucesiones monónotas la sucesión diverge.
De forma similar se puede prueba que si $c < 0$ la sucesión también diverge.
Veamos finalmente que si $0 < c < 1$ entonces la sucesión converge a 0.

**Ejercicio 4.4.** $\star$ Una *sucesión alternada* es una sucesión de números reales en la que cada término tiene signo distinto del anterior. Demostrar que la sucesión alternada $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente. ¿Puede una sucesión alternada ser convergente?

**Solución**

Veamos que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = x$. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ es sencillo, ya que tomando $\varepsilon = |1-|x||$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$ se tiene que $|x_n - x| = |(-1)^n - x| \geq ||(-1)^n| - |x|| = |1-|x|| = \varepsilon$, por tanto, la sucesión no converge a $x$.
Veamos ahora que la sucesión no converge a 1. Para ello basta tomar $\varepsilon = 1$, de manera que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $n = 2k+1 \geq k$ tal que $|x_n - 1| = |(-1)^{2k+1} - 1| = |-1-1| = |-2| = 2 > 1 = \varepsilon$.
Del mismo modo se puede probar que tampoco converge a $-1$. Para ello basta tomar de nuevo $\varepsilon = 1$, de manera que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $n = 2k \geq k$ tal que $|x_n - (-1)| = |(-1)^{2k} - (-1)| = |1-(-1)| = |2| = 2 > 1 = \varepsilon$.
Otra forma de demostrar la no convergencia de la sucesión es tomar las subsucesiones suyas $((-1)^{2n})_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ que convergen a 1 y $-1$ respectivamente, al ser constantes, de manera que aplicando el teorema de la convergencia de las subsucesiones, se tiene que las sucesión original no converge.
Por otro lado, no toda sucesión alternada es divergente. Por ejemplo, las sucesiones $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ son alternadas y convergen a 0.

**Ejercicio 4.5.** ¿Cómo podríamos demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas?

a. En cada banco de una ciudad existe al menos un cliente moroso.
b. Existe un banco en una ciudad donde cada cliente tiene una pensión o una hipoteca.
c. Para todos los bancos de una ciudad existe un cliente que cada mes usa una tarjeta de crédito o de débito.

**Solución**

a. Para refutar la afirmación habría que encontrar un banco en el no hubiese al menos un cliente moroso, es decir, que todos sus clientes no fuesen morosos.
b. Para refutar la afirmación habría que mostrar que todos los bancos de la ciudad tienen algún cliente que no tiene pensión ni hipoteca.
c. Para refutar la afirmación habría que encontrar un banco en el que ningún cliente usase cada mes la tarjeta de crédito o de débito, es decir, en el que para todos los clientes hay algún mes que no usan ni la tarjeta de crédito ni la de débito.

**Ejercicio 4.6.** $\star$ Dar un ejemplo de sucesión que cumpla las siguientes condiciones, o, en caso de no existir ninguna, explicar porqué.

a. Una sucesión con un número infinito de ceros que no converge a 0.
b. Una sucesión con un número infinito de unos que converge a un número distinto de uno.
c. Una sucesión divergente tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se pueden encontrar $n$ ceros consecutivos en la sucesión.

**Solución**

a. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ 1 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

b. No existe.
c. La sucesión $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$.

**Ejercicio 4.7.** ⋆ Demostrar, aplicando la definición de límite de una sucesión, que las siguientes sucesiones de números reales convergen a los valores dados.

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = 0$
b. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+n-2} = \frac{1}{3}$
c. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n^2-n} = 3$

**Solución**

a.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

b.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+n-2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 3+\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{1-0}{3+0-0} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n^2-n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 3+\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{3+0}{1-0} = 3
\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.8.** ⋆ Dar un ejemplo de sucesiones que cumplan las siguientes condiciones, o, en caso de no existir ninguna, explicar porqué.

a. Dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ que divergen pero $(x_n+y_n)_{n=1}^\infty$ converge.
b. Dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ que convergen pero $(x_n+y_n)_{n=1}^\infty$ diverge.
c. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ que converge y otra $(y_n)_{n=1}^\infty$ que diverge, pero tales que $(x_n+y_n)_{n=1}^\infty$ converge.
d. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ que converge y otra $(y_n)_{n=1}^\infty$ que diverge, pero tales que $(x_ny_n)_{n=1}^\infty$ converge.
e. Dos sucesiones divergentes $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ con $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ tales que $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^\infty$ converge.

Solución

a. $(n)_{n=1}^\infty$ y $(-n)_{n=1}^\infty$ divergen, pero $(n+(-n))_{n=1}^\infty = (0)_{n=1}^\infty$ converge por ser constante.

b. No es posible (ver proposición).

c. Para ver que no es posible, daremos una demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $(x_n+y_n)_{n=1}^\infty$ converge. Entonces, como $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge, se tiene que $((x_n+y_n)-x_n)_{n=1}^\infty = (y_n)_{n=1}^\infty$ también converge (ver proposición, con lo que se llega a una contradicción pues partíamos de que $(y_n)_{n=1}^\infty$ es divergente.

d. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$ converge y $((-1)^n)_{n=1}^\infty$ diverge, pero $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^\infty$ converge.

e. $(n)_{n=1}^\infty$ es divergente, pero $\left(\frac{n}{n}\right)_{n=1}^\infty = (1)_{n=1}^\infty$ converge por ser constante.

Otro ejemplo son $((-1)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ que divergen, pero $(\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n})_{n=1}^{\infty} = (\frac{(-1)^n(-1)}{(-1)^n})_{n=1}^{\infty} = (-1)_{n=1}^{\infty}$ converge al ser constante.

**Ejercicio 4.9.** Demostrar que si una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge un número $x$, entonces la sucesión $(x_n - x)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

Solución

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon\ \forall n \geq k$, pero entonces es obvio que $|(x_n - x) - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq k$, por lo que $\lim_{n\to\infty} x_n - x = 0$.

**Ejercicio 4.10.** Dado un polinomio $p(x)$, demostrar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = p(x)$.

Solución

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ un polinomio cualquiera y supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p(x_n) &= \lim_{n\to\infty} a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m \\
&= \lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} a_1 x_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_m x_n^m \\
&= \lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} a_1 \lim_{n\to\infty} x_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_m \lim_{n\to\infty} x_n^m \\
&= \lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} a_1 \lim_{n\to\infty} x_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_m (\lim_{n\to\infty} x_n)^m \\
&= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = p(x).
\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.11.** Demostrar que si una sucesión de números reales converge a $x$, entonces la sucesión de sus valores absolutos converge a $|x|$. ¿Es cierto lo contrario?

**Solución**

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon \ \forall n \geq k$, pero entonces, aplicando la desigualdad triangular, también se tiene que $||x_n|-|x|| \leq |x_n-x| < \varepsilon \ \forall n \geq k$, por lo que $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

**Ejercicio 4.12.** Demostrar que si una sucesión de números reales no negativos converge a $x$, entonces la sucesión de sus raíces cuadradas positivas converge a $\sqrt{x}$.

**Solución**

Veamos primero el caso en que $x = 0$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\varepsilon_1 = \varepsilon^2 > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon_1 \ \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{0}$.
Supongamos ahora que $x > 0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\varepsilon_2 = \varepsilon\sqrt{x} > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon_2 \ \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| &= \frac{|(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{|(\sqrt{x_n})^2 - (\sqrt{x})^2|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\
&\leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{x}} = \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

**Ejercicio 4.13.** Demostrar que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales acotada e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión que converge a 0, entonces la sucesión $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge a 0.

💡 Solución

Sea $c$ una cota de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, es decir, $|x_n| \leq c\ \forall n \in \mathbb{N}$, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - 0| = |y_n| < \varepsilon'\ \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq c\varepsilon' = c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Luego $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

**Ejercicio 4.14.** ⋆ Demostrar las siguientes sucesiones convergen a 0.

a. $\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

b. $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$

c. $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

a. Como $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ se tiene que $\frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n+\cos(n)}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{0-0}{1+0} = 0.\end{aligned}$$

y del mismo modo, se puede probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$, por lo que aplicando el teorema de compresión de sucesiones convergentes se concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\cos(n)}{n^2+1} = 0$.

b. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2 n!}{2^n (n+1) n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,\end{aligned}$$

por el criterio del cociente se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

c. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1,
\end{aligned}$$

por el criterio del cociente se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

**Ejercicio 4.15.** ⋆ Demostrar que las siguientes sucesiones de números reales son monótonas y calcular su límite cuando exista.

a. $\left(\frac{3n}{2n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

b. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c. $\left(\frac{n^2}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

d. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{x_n+6}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

e. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{4x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

a. $\left(\frac{3n}{2n^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{3}{2}\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, que es decreciente al ser $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ decreciente. Como además está acotada, por el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas, se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\left\{\frac{3}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

b. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < 2 = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2} > \frac{x_{n-1}+3}{2} = x_n$.

Veamos ahora que 3 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 3$. Supongamos que $x_n < 3$. Entonces, $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2} < \frac{3+3}{2} = 3$.

Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{2} = \frac{x+3}{2}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \frac{x+3}{2} \Rightarrow 2x = x + 3 \Rightarrow x = 3.$$

c. Para ver que la sucesión es creciente, probaremos que la sucesión de sus inversos es decreciente.

$$\left(\frac{n^2}{2n+1}\right)^{-1} = \frac{2n+1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, la sucesión no está acotada, ya que para cualquier $c \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c < n < \frac{n^2}{2n+1} = x_n$ si $n > 2$. Por tanto, según el el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión diverge.

d. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < \sqrt{7} = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} > \sqrt{x_{n-1} + 6} = x_n$.

Veamos ahora que 3 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 3$. Supongamos que $x_n < 3$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$.

Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + 6} = \sqrt{x + 6}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \sqrt{x+6} \Rightarrow x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 3.$$

Como $x = -2$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se concluye que $x = 3$.

e. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < 2 = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n} > \sqrt{4x_{n-1}} = x_n$.

Veamos ahora que 4 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 4$. Supongamos que $x_n < 4$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n} < \sqrt{4 \cdot 4} = 4$.

Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

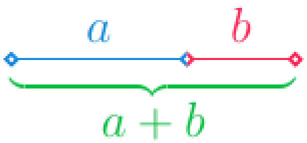
$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4x_n} = \sqrt{4x}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \sqrt{4x} \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 4.$$

Como $x = 0$ no puede ser al ser $x_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, se concluye que $x = 4$.

**Ejercicio 4.16.** ⋆ Dado un segmento como el de la figura de más abajo,




tal que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$. A este número se le conoce como número áureo y es el número irracional $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749\ldots$

Demostrar que este número es el límite de las siguientes sucesiones de números reales.

a. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$
b. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Solución

a. Veamos en primer lugar que la sucesión está acotada. De la definición resulta obvio que $x_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. De esto se deduce que, $\frac{1}{x_n} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x_n} \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, $1 \leq x_n \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Veamos ahora que la subsucesión de los términos impares $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge. Para ello veremos que es creciente por inducción. $y_1 = 1 < y_2 = 1.5$. Supongamos que $y_{n-1} < y_n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{x_{2n}} \\
&= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_n}} \\
&> 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n-3}}} \\
&= 1 + \frac{1}{x_{2n-2}} = x_{2n-1} = y_n.
\end{aligned}$$

Como la subsucesión también está acotada, por el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y}}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$\begin{aligned}
y = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} &\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{\frac{y+1}{y}} = \frac{y}{y+1} \\
&\Rightarrow (y-1)(y+1) = y \\
&\Rightarrow y^2 - 1 = y \Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \\
&\Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Como $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se tiene que $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Del mismo modo se puede probar que la subsucesión de los términos pares $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ también converge a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalmente, se deja como ejercicio probar que si las subsucesiones de los términos pares e impares de una sucesión convergen al mismo límite, entonces la sucesión converge al mismo límite.

b. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} > \sqrt{1+x_{n-1}} = x_n$.

   Veamos ahora que 2 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 2$. Supongamos que $x_n < 2$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$.

Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+x}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} x = \sqrt{1+x} &\Rightarrow x^2 = 1+x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Como $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se concluye que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Ejercicio 4.17.** Dada una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, probar o refutar las siguientes proposiciones:

a. Si cada $x_n$ es una cota superior de un conjunto $A$, entonces $x$ es también una cota superior de $A$.
b. Si $x_n \in \overline{(a,b)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \overline{(a,b)}$.
c. Si $x_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{Q}$.

Solución

a. Si $x_n$ es cota superior de $A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que para cualquier $a \in A$, $a \leq x_n$. Veamos que entonces que $a \leq x$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pero $a > x$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, se tiene que para $\varepsilon = a - x > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| \leq a - x$ $\forall n \geq k$, pero entonces también se cumple

$$|x_n - x| = x_n - x < a - x \Rightarrow x_n < a,$$

por lo que $x_n$ no sería cota superior de $A$, así que, necesariamente $x$ tiene que ser cota superior de $A$.

b. Como $\overline{(a,b)}$ es un conjunto cerrado, para demostrar la proposición basta aplicar este teorema.

c. Veamos que la proposición es falsa con un contraejemplo. La sucesión $x_1 =$

1 y $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ $\forall n = 2, 3, \ldots$ está formada por números racionales, sin embargo, su límite es el número irracional $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749\ldots$ (ver Ejercicio 4.16).

**Ejercicio 4.18.** ⋆ Una cuenta de ahorro ofrece el primer año un tipo de interés $x_1 = 0.5\%$ y los años sucesivos un interés $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}\%$. Si se mantiene la cuenta abierta por un periodo indefinido, ¿hacia donde tienden los tipos de interés?

Solución

a. Veamos en primer lugar que la sucesión está acotada. De la definición resulta obvio que $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pues todos los términos son positivos. De esto se deduce que, $\frac{3}{x+x_n} \leq \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Veamos ahora que la subsucesión de los términos impares $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge. Para ello veremos que es creciente por inducción. $y_1 = 0.5 < y_2 = 0.9375$. Supongamos que $y_{n-1} < y_n$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} &= \frac{3}{2+x_{2n}} \\
&= \frac{3}{2+\frac{3}{2+x_{2n-1}}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_n}} \\
&> \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_{n-1}}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+x_{2n-3}}} \\
&= \frac{3}{2+x_{2n-2}} = x_{2n-1} = y_n.
\end{aligned}
$$

   Como la subsucesión también está acotada, por el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$
y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_n}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y}}
$$

   Resolviendo la ecuación se tiene

$$
\begin{aligned}
y = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y}} &\Rightarrow y = \frac{3}{\frac{(4+2y)+3}{2+y}} = \frac{3(2+y)}{2y+7} \\
&\Rightarrow y(2y+7) = 3y+6 \\
&\Rightarrow 2y^2+4y-6 = 0 \\
&\Rightarrow y = -3 \text{ o } y = 1.
\end{aligned}
$$

Como $y = -3$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se tiene que $y = 1$.

Del mismo modo se puede probar que la subsucesión de los términos pares $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ también converge a 1.

Finalmente, como las subsucesiones de los términos pares e impares de una sucesión convergen al mismo límite, entonces la sucesión converge al mismo límite.

**Ejercicio 4.19.** Determinar cuáles de las siguientes sucesiones de números reales son de Cauchy.

a. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

c. $\left(\frac{Frsen(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

d. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con

$$
x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ 1+\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}
$$

Solución

a. Es una sucesión de Cauchy ya que converge a 0, pues las subsucesiones de los términos pares e impares, convergen a 0 al ser monótonas y acotadas.

b. Es una sucesión de Cauchy ya que converge a 1, pues

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}
$$

c. Es una sucesión de Cauchy ya que converge a 0. Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Por tanto, para cualquier $n, m \geq k$ se tiene

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{Frsen(n)}{n} - \frac{Frsen(m)}{m} \right| \leq \left| \frac{Frsen(n)}{n} \right| + \left| \frac{Frsen(m)}{m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

d. No es una sucesión de Cauchy, pues tomando $\varepsilon = 1/2$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$, entonces $n$ o $n+1$ debe ser impar, y suponiendo que es $n+1$ (la otra suposición lleva a un razonamiento similar) se tiene

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+1}| \geq ||x_{n+1}| - |x_n|| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n} \right| \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión no converge.

# 5 Límites de funciones

**Ejercicio 5.1.** Sea $f(x) = c$ una función constante. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = c$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Solución

Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta = 1$ tal que si $|x - a| < \delta = 1$, entonces $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

**Ejercicio 5.2.** ⋆ Dada la función $f(x) = 4x - 10$, demostrar usando la definición de límite que $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$.

Solución

Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ tal que si $|x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$, entonces

$$|f(x) - 2| = |4x - 10 - 2| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

**Ejercicio 5.3.** ⋆ Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$, usar el criterio de las sucesiones para demostrar que no existe el límite de $f$ en 0.

Solución

Tomando las sucesión $\left(\frac{-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|-1/n|}{-1/n} = -1.$$

Y tomando la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ que también converge a 0, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|1/n|}{1/n} = 1.$$

Por tanto, por el criterio de las sucesiones convergentes, no existe el límite de $f$ en 0.

**Ejercicio 5.4.** La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

se conoce como la *función de Dirichlet*. Demostrar que no existe el límite de $f$ en cualquier número real.

Solución

Tomemos cualquier $a \in \mathbb{R}$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números racionales que converja a $a$. Entonces la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 1. Por otro lado, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números irracionales que converja a $a$. Entonces la sucesión $(f(y_n))_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0. Por tanto, por el criterio de la sucesiones convergentes no existe el límite de $f$ en $a$.

**Ejercicio 5.5.** ⋆ Demostrar que no existe $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solución

Tomando la sucesión $\left(\frac{1}{(2n-1)\pi/2}\right)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi/2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n-1)\pi/2) = 0.$$

Y tomando la sucesión $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)_{n=1}^{\infty}$, que también converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1.$$

Por tanto, por el criterio de las sucesiones convergentes, no existe el límite de $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.

**Ejercicio 5.6.** Dado un polinomio $p(x)$, demostrar que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Solución

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, entonces, por el álgebra de límites se tiene,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\
&= \lim_{x\to a} a_0 + \lim_{x\to a} a_1x + \lim_{x\to a} a_2x^2 + \cdots + \lim_{x\to a} a_nx^2 \\
&= a_0 + a_1 \lim_{x\to a} x + a_2 \lim_{x\to a} x^2 + \cdots + a_n \lim_{x\to a} x^n \\
&= a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n = p(a)
\end{aligned}$$

**Ejercicio 5.7.** Dada una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\ \forall x \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) \neq 0$, demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$.

Solución

Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios. Entonces, por el ejercicio anterior y el álgebra de límites se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to a} p(x)}{\lim_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a).$$

**Ejercicio 5.8.** ⋆ Demostrar, haciendo uso del teorema de compresión de funciones que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$.

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)^2}{x(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)^2}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)}{x}\frac{Frsen(x)}{1+\cos(x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)}{1+\cos(x)} = 1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

**Ejercicio 5.9.** $\star$ Calcular los siguientes límites si existen:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Frsen(x+a)-Frsen(a)}{x}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-3x+2}{e^{2x}}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{\log(x^2-1)}{x+2}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log(1/x)}{Frtg(x+\frac{\pi}{2})}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} \quad n\in\mathbb{N}$

h. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \quad n,m\in\mathbb{Z}$

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Frtg(x)-Frsen(x)}{x^3}$

j. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4}\frac{Frsen(x)-\cos(x)}{1-Frtg(x)}$

k. $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$

l. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\sqrt[x]{x^2}$

n. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{Frtg(x)}$

o. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/Frsen(x)}$

p. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6}{4+e^{-1/x}}$

q. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right).$

r. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\sec x-Frtg(x)$

Solución

a. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{1} = 5.$

b.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c. Aplicando la propiedad trigonométrica $Frsen(x+a) = Frsen(x)\cos(a) + \cos(x)Frsen(a)$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x+a) - Frsen(a)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)\cos(a) + \cos(x)Frsen(a) - Frsen(a)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)\cos(a) - Frsen(a)(1-\cos(x))}{x} \\ &= \cos(a) \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)}{x} - Frsen(a) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \\ &= \cos(a)\cdot 1 - Frsen(a)\cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

d. Como $x < e^x$ $\forall x > 0$, se tiene que

$$0 < \frac{x}{2} < e^{x/2} \Rightarrow 0 < x < 2e^{x/2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{e^{2x}} < \frac{2e^{x/2}}{e^{2x}} = \frac{2}{e^{3x/2}},$$

de modo que, como $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{3x/2}} = 0$, aplicando el teorema de compresión de funciones se tiene que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$.

Usando este resultado se tiene,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} - 3\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0.$$

e. Cuando $x \to \infty$, $\frac{\log(x^2-1)}{x+2} \to \frac{\infty}{\infty}$ que es indeterminado. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

f. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log(1/x)}{Frtg(x+\frac{\pi}{2})} = \dfrac{\lim_{x\to 1}\log(1/x)}{\lim_{x\to 1} Frtg(x+\frac{\pi}{2})} = \dfrac{\log(1)}{Frtg(1+\frac{\pi}{2})} = 0$

g. $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Así pues,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1} \\
&= a^{n-1} + \overset{n}{\cdots} + a^{n-1} = na^{n-1}
\end{aligned}$$

h. Cuando $x \to 1$ $\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \to \frac{0}{0}$ que es indeterminado. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^{1/n}-1}{x^{1/m}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{n}x^{1/n-1}}{\frac{1}{m}x^{1/m-1}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{mx^{1/n-1}}{nx^{1/m-1}} = \frac{m}{n}.
\end{aligned}$$

i. Como $Frsen(x) \approx Frtg(x) \approx x$ cuando $x \to 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{Frtg(x) - Frsen(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0.$$

j. Aplicando propiedades trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/4} \frac{Frsen(x) - \cos(x)}{1 - Frtg(x)} &= \lim_{x\to\pi/4} \frac{Frsen(x) - \cos x}{1 - \frac{Frsen(x)}{\cos(x)}} \\
&= \lim_{x\to\pi/4} \frac{Frsen(x) - \cos x}{\frac{\cos(x) - Frsen(x)}{\cos(x)}} \\
&= \lim_{x\to\pi/4} -\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

k. Cuando $x \to 0$, $x^2e^{1/x^2} \to 0 \cdot \infty$, que es indeterminado. Transformando la indeterminación en una de tipo cociente y aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to 0} x^2e^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}\frac{-2}{x^3}}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty.$$

l. Cuando $x \to 0$, $\ln(1+x) \approx x$, de manera que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} &= \lim_{x\to 0} e^{\ln((1+x)^{1/x})} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} 1} = e^1 = e.\end{aligned}$$

m. Cuando $x \to \infty$ $\sqrt[x]{x^2} = x^{2/x} \to \infty^0$, que es intedeterminado. Transformando la indeterminación en una de tipo cociente y aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2} = \lim_{x\to\infty} x^{2/x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln(x^{2/x})}\\ &= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}} = 1.\end{aligned}$$

n. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{Frtg(x)}$

o. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/Frsen(x)}$

p. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6}{4+e^{-1/x}}$

q. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right).$

r. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\sec x - Frtg(x)$

**Ejercicio 5.10.** $\star$ Dar ejemplo de funciones que cumplan las siguientes condiciones:

a. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

c. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Solución

a. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

b. $g(x) = \frac{x}{x-3}$.

c. $h(x) = -\ln(x)$.

**Ejercicio 5.11.** $\star$ Sea $g(x) = e^{1/x}$ $\forall x \neq 0$. Demostrar que no existe el límite de $g$ en 0.

Solución

Basta con probar que el límite lateral por la derecha no existe. Para ello, tomando la sucesión de términos positivos $\left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$ que converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{1/n}} = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty.$$

Así pues, según el criterio de las sucesiones convergentes, no existe el límite por la derecha de $g$ en 0, y por tanto tampoco existe el límite.

**Ejercicio 5.12.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{si } x \leq 1, \\ ax - 1, \text{si } x > 1 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. ¿Para que valor de $a$ existe el límite de $f$ en 1?

Solución

Los límtes laterales en 1 valen
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax - 1 = a - 1$.
Para que exista el límite de $f$ en 1 debe ser $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, es decir, $1 = a - 1$, luego debe ser $a = 2$.

**Ejercicio 5.13.** $\star$ Calcular los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$ en el punto $x = 1$. ¿Existe el límite en ese punto?

Solución

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1+\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}}}$$
$$= \frac{1}{1+e^{\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1+\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}}$$
$$= \frac{1}{1+e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Como los límites laterales son distintos, no existe el límite de $f$ en 1.

**Ejercicio 5.14.** ⋆ Calcular las asíntotas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = (1-x)e^x$

b. $g(x) = xe^{1/x}$

c. $h(x) = 2x^2 - \ln(x)$

d. $i(x) = \log(x^2+3x+2)$

e. $j(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

f. $k(x) = \cos x - \log(\cos x)$

Solución

a. $f$ está definida en $\mathbb{R}$, así que no tiene asíntotas verticales.

Para ver si $f$ tiene asíntotas horizontales estudiamos los límites en el infinito. Cuando $x\to -\infty$ $(1-x)e^x \to -\infty\cdot 0$ que es indeterminado. Transformando la indeterminación en una de tipo cociente

$$\lim_{x\to -\infty}(1-x)e^x = \lim_{x\to -\infty}\frac{1-x}{e^-x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{e^{-x}} - \lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{e^{-x}}$$
$$= 0 - \lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{e^{-x}}.$$

Por otro lado $\forall x<0$ se cumple que $e^{-x}\geq x^2$ $0\leq \frac{-x}{e^{-x}} \leq \frac{-x}{x^2} = \frac{1}{x}$, y como

$\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$, por el teorema de compresión de funciones se tiene que $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$.

Así pues, $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Por otro lado, $\lim_{x\to\infty}(1-x)e^x = -\infty * \infty = -\infty$, de modo que no hay asíntota horizontal en $\infty$.

Finalmente para ver si $f$ tiene asíntotas oblicuas, estudiamos estudiamos el límite de $f(x)/x$ en $\infty$ (en $-\infty$ no puede haber asíntota oblicua porque existe una horizontal).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-x)e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x} \lim_{x\to\infty} e^x = -1 \cdot \infty = -\infty.$$

Por tanto, tampoco existe asíntota oblicua en $\infty$.

b. $g$ está definida en $\mathbb{R}\ \{0\}$, así que, el único punto donde pueden existir asíntotas verticales es $x = 0$. Calculando los límites laterales se tiene

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0^-} x \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 \cdot e^-\infty = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{1/x})'}{(1/x)'} && \text{(L'Hôpital)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}(1/x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $g$ tiene asíntota vertical $x = 0$ por la derecha, pero no por la izquierda.

Para ver si $g$ tiene asíntotas horizontales estudiamos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{1/x} = \lim_{x\to-\infty} x \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} = \infty * 1 = \infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} = \lim_{x\to\infty} x \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = \infty * 1 = \infty.$$

Así pues, ambos límites no existen y, por tanto, $g$ no tiene asíntotas horizontales.

Finalmente para ver si $f$ tiene asíntotas oblicuas, estudiamos estudiamos el límite de $f(x)/x$ en $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Luego, existe una asíntota oblicua en $-\infty$ con pendiente 1. Para ver el término independiente de la asíntota calculamos el límite de $f(x) - 1 \cdot x$ en $-\infty$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} xe^{1/x} - x = \lim_{x\to-\infty} x(e^{1/x}-1) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^{1/x}-1)'}{(1/x)'} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x}(1/x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} = 1.
\end{aligned}
$$

Así pues, $g$ tiene una asíntota oblicua $y = x + 1$ en $-\infty$. Del mismo modo se puede probar que esta misma recta es asíntota oblicua en $\infty$.

c. $h(x)$ está definida en $\mathbb{R}^+$, así que, el único punto donde pueden existir asíntotas verticales $x = 0$. Como $h$ no está definida para $x < 0$, estudiaremos el límite por la derecha en 0.

$$
\lim_{x\to0^+} 2x^2 - \ln(x) = 0 - \ln(0) = \infty
$$

Por tanto, $h$ tiene una asíntota vertical $x = 0$ por la derecha, pero no por la izquierda.

Para ver si $g$ tiene asíntotas horizontales estudiamos el límite en el infinito (en $-\infty$ no puede haber asíntota horizontal al no estar definida la función para $x < 0$).

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} 2x^2 - \ln(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(e^{2x^2-\ln(x)}) &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{e^{2x^2}}{e^{\ln(x)}}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x^2}}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{(e^{2x^2})'}{x'}\right) && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x^2}4x}{1}\right) = \ln(\infty) = \infty.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $h$ no tiene asíntotas horizontales.

Finalmente, veamos si existe asíntota oblicua en $\infty$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - \ln(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} 2x - \frac{\ln(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} 2x - \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} 2x - \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))'}{x'} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} 2x - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \infty - 0 = \infty.
\end{aligned}
$$

Luego, $h$ tampoco tiene asíntota oblicua en $\infty$.

**Ejercicio 5.15.** $\star$ Mediante simulación por ordenador se ha podido cuantificar la cantidad de agua almacenada en un acuífero en función del tiempo, $m(t)$, en millones de metros cúbicos, y el tiempo $t$ en años transcurridos desde el instante en el que se ha hecho la simulación, teniendo en cuenta que la ecuación sólo tiene sentido para $t > 0$:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

¿Qué cantidad de agua almacenada habrá en el acuífero asintóticamente?

Solución

Cuando \$t$\to\infty\frac{\sqrt{t}}{e^t} \to \frac{\infty}{\infty}$ que es indeterminado. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{t\to\infty} 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 10 + \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{(t)}e^t} = 10.$$

Por tanto el volumen del lato tiende asintóticamente a 10 millones de metros cúbicos.

**Ejercicio 5.16.** $\star$ La cosecha de trigo de una plantación (en toneladas) depende de la cantidad de abono $x$ según la función $f(x) = T(1 - \frac{1}{2}e^{-kx})$, donde $T$ es la extensión del terreno (en hectáreas) y $k$ es la proporción de humedad. ¿Para qué cantidad de abono se conseguiría una cosecha de $T$ toneladas de trigo?

Solución

Como $k > 0$ se tiene $\frac{1}{2}e^{-kx} = \frac{1}{2e^{kx}} < 1 \ \forall x > 0$, de manera que $f(x) < T \ \forall x > 0$. Si calculamos ahora el límite en infinito se tiene

$$\lim_{x\to\infty} T(1 - \frac{1}{2}e^{-kx}) = T(1 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{kx}}) = T(1-0) = T.$$

De modo la cantidad de trigo cosechada tiene asintóticamente a $T$, pero al ser menor que $T$, nunca llegará a valer $T$.

**Ejercicio 5.17.** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demostrar lo siguiente:

a. Si $f$ está acotada superiormente, entonces existe $\lim_{x\to b^-} f(x)$.
b. Si $f$ no está acotada superiormente, entonces $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$.

**Ejercicio 5.18.** Demostrar que la función $f(x) = \cos(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 5.19.** ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$? Redefinir la función para que sea continua en dicho punto.

**Ejercicio 5.20.** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, en el punto $x = 0$.

b.
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$
en el punto $x = 0$.

c.
$$h(x) = \begin{cases} xFrsen\frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$
en el punto $x = 0$.

d.

$$i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

**Ejercicio 5.21.** Clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones

a.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

b.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{Frsen(x)}{x} & \text{si } x < 0, \\ e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Solución

a. A simple vista, podemos ver que se trata de una función racional y estará definida en todo $\mathbb{R}$ salvo en los puntos que anulen alguno de los denominadores. Dichos puntos son fáciles de obtener igualando a 0 los denominadores:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x + 1 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x} &= 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos 4 punto de discontinuidad, que son: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Para clasificar estas cuatro discontinuidades, tenemos que estudiar los correspondientes límites por la izquierda y por la derecha.

- Discontinuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1} = -1.$$

Como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable.

- Discontinuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{0}{6} = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{0}{6} = 0.$$

De nuevo, como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable.

- Discontinuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-2}{-0\cdot -1} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-2}{+0\cdot -1} = \infty.$$

Como ambos límites divergen, se trata de una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

- Discontinuidad en $x = -\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to -1/2^-} f(x) = \lim_{x\to -1/2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to -1/2^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to -1/2^-} \frac{-3/2}{1/2\cdot -0} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = \lim_{x\to -1/2^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to -1/2^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to -1/2^+} \frac{-2}{1/2\cdot +0} = -\infty.$$

Por último, como ambos límites divergen, se trata también de una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

b. La función $\frac{Frsen(x)}{x}$ es continua en $\mathbb{R}\ \ \{0\}$ y en consecuencia es continua en la región donde está definida, es decir $(-\infty, 0)$. Por su parte, la función $e^{\frac{1}{x-1}}$ es continua en todos los puntos en que sea continuo el exponente $\frac{1}{x-1}$, es decir en $\mathbb{R}\ \ \{1\}$, en consecuencia, es continua en toda la región en donde está definida, menos en el 1. Así pues, reduciremos el estudio de la continuidad a dos puntos, el 0 por ser donde cambia la definición de la función y el 1, por no estar definida la función $e^{\frac{1}{x-1}}$.

Estudiamos primero la continuidad en el punto $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{Frsen(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}.$$

Como ambos límites laterales son distintos, en $x = 0$ hay una discontinuidad de salto.

Estudiamos ahora la continuidad en el punto $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-\infty} = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\infty} = \infty.$$

Como el límite lateral por la derecha no existe, en $x = 1$ hay una discontinuidad de segunda especie.

**Ejercicio 5.22.** Calcular una raíz de la función $f(x) = x^5 - x + 1$ con una aproximación de 2 decimales.

**Ejercicio 5.23.** Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ con $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

**Ejercicio 5.24.** Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real.

a. $\cos(x) = x$.
b. $e^x = -x$.

# 6 Derivadas de funciones

**Ejercicio 6.1.** Usando la definición de derivada, demostrar que la derivada de la función $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Solución

Ver Ejercicio 5.9 apartado (g).

**Ejercicio 6.2.** Demostrar que la función $f(x) = |x-1|$ es continua en $x = 1$ pero no es derivable en dicho punto.

Solución

Si calculamos los límites laterales tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|-|1-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1. \\
\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|-|1-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1.
\end{aligned}$$

Como el límite por la izquierda y por la derecha son distintos, no existe la derivada de $f$ en 1.

**Ejercicio 6.3.** Estudiar si es derivable la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $x = 1$.

Solución

Si calculamos los límites laterales tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(a)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{1-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \infty.
\end{aligned}
$$

Como el límite no existe, no existe la derivada de $f$ en 1.

**Ejercicio 6.4.** Estudiar la derivabilidad de $f$ en los puntos $x=-1$, $x=2$ y $x=3$ siendo

$$
f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{si } x < -1, \\ Frsen(\pi x) & \text{si } x \in [-1,2], \\ x/2 & \text{si } x \in (2,3), \\ 3/2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}
$$

Solución

Las funciones de todos los trozos son derivables en todo su dominio, por lo que estudiaremos la derivada por la izquierda y por la derecha en cada uno de los puntos.
Derivabilidad en en $x=-1$:

$$
\begin{aligned}
f'^-(-1) &= \frac{-1}{-1} = 1 \\
f'^+(-1) &= \pi\cos(-\pi) = -\pi
\end{aligned}
$$

Como $f'^-(-1) \neq f'^+(-1)$ la función no es derivable en $x=-1$.
Derivabilidad en en $x=2$:

$$
\begin{aligned}
f'^-(2) &= \pi\cos(2\pi) = \pi \\
f'^+(2) &= 1/2
\end{aligned}
$$

Como $f'^-(2) \neq f'^+(2)$ la función no es derivable en $x=2$.
Derivabilidad en en $x=2$:

$$f'^{-}(3) = 1/2$$
$$f'^{+}(3) = 0$$

Como $f'^{-}(3) \neq f'^{+}(3)$ la función no es derivable en $x = 3$.

**Ejercicio 6.5.** Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista.

a.
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

b. $g(x) = 2x + |x^2 - 2|$.

Solución

a. La función $1-x$ es un polinomio y por tanto es derivable en todo $\mathbb{R}$. Del mismo modo, la función $e^{-x}$ es una función exponencial que también es derivable en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, faltaría estudiar si existe la derivada en el punto donde cambia la definición de la función, es decir, en $x = 0$. Estudiaremos la derivada por la izquierda y por la derecha en ese punto.

$$f'^{-}(0) = -1$$
$$f'^{+}(0) = -e^{0} = -1$$

Como $f'^{-}(0) = f'^{+}(0)$ la función es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$.

Así pues, la función derivada de $f$ es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

b. Para estudiar la derivabilidad de $g$ primero vamos a expresar la función $|x^2-2|$ como una función a trozos. Para ello necesitamos saber en qué puntos la función $x^2 - 2$ es positiva, y en qué puntos es negativa. Si calculamos las raíces de esta función tenemos:

$$|x^2 - 2| = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Si estudiamos el signo en los intervalos definidos por las raíces, podemos comprobar fácilmente sin más que calcular la función en cualquier punto de los intervalos que $x^2 - 2$ es negativa en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y positiva en el resto de su dominio. Por tanto, podemos expresar el valor absoluto de la siguiente manera:

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ -x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

y entonces, la función original puede expresarse como:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2x - x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 2x + x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ahora, si estudiamos la derivabilidad de cada una de estas funciones en los trozos correspondientes, vemos que ambas son polinomios y por tanto son derivables en sus dominios. Faltaría por estudiar la derivabilidad en los puntos donde cambia la definición de la función. Para ello estudiamos la derivada por la izquierda y por la derecha en esos puntos. En el punto $x = -\sqrt{2}$ tenemos:

$$g'^{-}(-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$$
$$g'^{+}(-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Y como ambas derivadas no coinciden la función no es derivable en $x = -\sqrt{2}$. En $x = \sqrt{2}$ tenemos:

$$g'^{-}(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$$
$$g'^{+}(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Ambas derivadas no coinciden y tampoco es derivable en $x = \sqrt{2}$.

Así pues, la derivada de $g$ vale:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 2 + 2x & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

**Ejercicio 6.6.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} Frsen(x)^2 & \text{si } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leq c, \\ \ln(x) & \text{si } c < x, \end{cases}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, ¿existe algún valor de las constantes de manera que la función sea continua y derivable en todo su dominio?

Solución

Estudiaremos primero la continuidad y luego la derivabilidad.
Las funciones $Frsen(x)^2$, $ax^2 + b$ y $\ln(x)$ son todas continuas en sus dominios, por tanto, basta con estudiar los puntos donde cambia la definición de la función.
En el punto $x = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} Frsen(x)^2 = Frsen(0)^2 = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} ax^2 + b = a0^2 + b = b, \\ f(0) &= Frsen(0)^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la función será continua en $x = 0$ si y sólo si $b = 0$.
En el punto $x = c$ tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c^-} f(x) &= \lim_{x\to c^-} ax^2 + b = ac^2 + b, \\ \lim_{x\to c^+} f(x) &= \lim_{x\to c^+} \ln(x) = \ln(c), \\ f(c) &= ac^2 + b. \end{aligned}$$

Luego la función será continua en $x = c$ si y sólo si $ac^2 + b = \ln(c)$.
Por consiguiente, para que la función sea continua en todo su dominio deben cumplirse las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln(c) \end{cases}$$

Con la derivabilidad ocurre lo mismo pues las funciones $Frsen(x)^2$ , $ax^2+b$ y $\ln(x)$ son derivables en su dominio y basta con estudiar la derivada por la izquierda y por la derecha en los puntos donde cambia la definición de la función.
En el punto $x = 0$ (imponemos $b = 0$ pues de lo contrario la función no sería continua en este punto y tampoco derivable) tenemos:

$$f'^{-}(0) = 2Frsen(0)\cos(0) = 0$$
$$f'^{+}(0) = 2a \cdot 0 = 0$$

Luego la función es derivable en $x = 0$ si y sólo si $b = 0$.
En el punto $x = c$ tenemos:

$$f'^{-}(c) = 2ac$$
$$f'^{+}(c) = 1/c$$

Luego, para que la función sea derivable en $x = c$, además de la condición de continuidad, se debe cumplir $2ac = \frac{1}{c}$.
Así pues, para que la función sea continua y derivable en todo su dominio deben cumplirse las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln(c) \\ 2ac = \frac{1}{c} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema llegamos a:

$$a = \frac{1}{2c^2} \Rightarrow \ln(c) = ac^2 + b = \frac{1}{2c^2}c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = e^{1/2},$$

y, por tanto,

$$a = \frac{1}{2(e^{1/2})^2} = \frac{1}{2e}.$$

Los valores de las constantes que hacen que la función sea continua y derivable en todo su dominio son:

$$a = \frac{1}{2e},$$
$$b = 0,$$
$$c = e^{1/2}.$$

**Ejercicio 6.7.** Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto $a$ indicado.

a. $y = x^{Frsen(x)}, \quad a = \pi/2.$

b. $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad a = 0.$

Solución

La ecuación de la recta tangente a la función $f$ en el punto $x = a$ es $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ y la ecuación de la recta normal en ese mismo punto es $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$, de modo que necesitamos calcular la derivada de la función en el punto dado.

a. $y' = x^{Frsen(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{Frsen(x)}{x}\right)$, y en $x = \pi/2$ se tiene $y'(\pi/2) = (\pi/2)^{Frsen(\pi/2)}\left(\cos(\pi/2)\ln(\pi/2) + \frac{Frsen(\pi/2)}{\pi/2}\right) = 1$.

   Por tanto, como $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{Frsen(\pi/2)} = \frac{\pi}{2}$, la ecuación de la recta tangente en $x = \pi/2$ es $y = \frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2} = x$, y la ecuación de la recta normal es $y = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2} = -x + \pi$.

b. Es este caso, antes de derivar conviene simplificar la función.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \left(\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

   , y en $x = 0$ se tiene $y'(0) = 1$.

   Por tanto, como $\ln\sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 0$, la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = x$, y la ecuación de la recta normal es $y = -x$.

**Ejercicio 6.8.** Dadas las funciones $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2}\right)$ y $g(x) = x^3 + 2$, ¿existe algún valor de $x$ en el que la recta normal a $f$ y la recta tangente a $g$ en dicho punto sean paralelas?

Solución

Para ver si dos rectas son paralelas, basta con ver si tienen la misma pendiente.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)' = (2\ln(x) - \ln(2))' = \frac{2}{x} \\
g'(x) &= 3x^2
\end{aligned}
$$

Así pues, la pendiente de la recta normal a $f$ en $x$ es $\frac{-1}{f'(x)} = \frac{-x}{2}$ y la pendiente de la recta tangente a $g$ en $x$ es $3x^2$. Igualando las dos pendientes y resolviendo la ecuación resultante, se tiene

$$\frac{-x}{2} = 3x^2 \Leftrightarrow 6x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(6x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \frac{-1}{6}.$$

Ahora bien, como $f$ no está definida en $x = 0$, el único valor de $x$ para el que la recta normal a $f$ es paralela a la recta tangente a $g$ es $x = -1/6$.

**Ejercicio 6.9.** Demostrar que cualquier función polinómica $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Solución

Sea el polinomio $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el álgebra de derivadas, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n)' \\ &= c_0' + (c_1x)' + (c_2x^2)' + \cdots + (c_nx^n)' \\ &= c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1}, \end{aligned}$$

que existe para todo $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 6.10.** Demostrar que cualquier función racional $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ funciones polinómicas, es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$.

Solución

Como $f(x)$ y $g(x)$ son dos polinomios, por el ejercicio anterior se tiene que son derivables en todo $\mathbb{R}$, y aplicando el álgebra de derivadas se tiene $h(x)$ es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$, y

$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

**Ejercicio 6.11.** Hallar la expresión de la derivada $n$-ésima de las siguientes funciones:

a. $f(x) = a^x \ln(a)$.

b. $g(x) = \dfrac{Frsen(x) + \cos(x)}{2}$.

c. $h(x) = \dfrac{9x^2 - 2x - 25}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$.

d. $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solución

a.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a^x \ln(a)^2,\\
f''(x) &= a^x \ln(a)^3,\\
f'''(x) &= a^x \ln(a)^4,\\
&\vdots\\
f^{(n}(x) &= a^x \ln(a)^{n+1}
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\cos(x) - Frsen(x)}{2},\\
g''(x) &= \frac{-Frsen(x) - \cos(x)}{2},\\
g'''(x) &= \frac{-\cos(x) + Frsen(x)}{2},\\
g''''(x) &= \frac{Frsen(x) + \cos(x)}{2}
\end{aligned}$$

Como $g'''' = g$, las derivadas se van a repetir cíclicamente cada múltiplo de cuatro. Podemos expresar la derivada de orden $n$ de la siguiente forma

$$g^{(n}(x) = \begin{cases} \frac{Frsen(x)+\cos(x)}{2} & \text{si } n = 4k,\\ \frac{\cos(x)-Frsen(x)}{2} & \text{si } n = 4k+1,\\ \frac{-Frsen(x)-\cos(x)}{2} & \text{si } n = 4k+2,\\ \frac{Frsen(x)+\cos(x)}{2} & \text{si } n = 4k+3. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

c. Descomponiendo primero en fracciones simples, se tiene que

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{9x^2-2x-25}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{9x^2-2x-25}{(x-3)(x-1)(x+2)}\\
&= \frac{5}{x-3} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2}\\
&= 5(x-3)^{-1} + 3(x-1)^{-1} + (x+2)^{-1}
\end{aligned}
$$

Calculamos ahora las sucesivas derivadas.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= 5(-1)(x-3)^{-2} + 3(-1)(x-1)^{-2} + (-1)(x+2)^{-2}\\
h''(x) &= 5(-1)(-2)(x-3)^{-3} + 3(-1)(-2)(x-1)^{-3} + (-1)(-2)(x+2)^{-3}\\
h'''(x) &= 5(-1)(-2)(-3)(x-3)^{-4} + 3(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} + (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4}\\
&\vdots\\
h^{(n}(x) &= 5(-1)^n n!(x-3)^{-(n+1)} + 3(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} + (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

d. $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$.

$$
\begin{aligned}
j'(x) &= \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2}\\
j''(x) &= \frac{-1}{2}\frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2}\\
j'''(x) &= \frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}(1+x)^{-7/2}\\
&\vdots\\
j^{(n}(x) &= \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n} 2i-1}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}
\end{aligned}
$$

**Ejercicio 6.12.** Se sabe que la demanda de un producto, en decenas de miles de unidades, depende de su precio según la función $D(x) = \ln(10/x)$. Si el precio mensual evoluciona según la función $x(t) = 2 + \frac{t}{10}$, ¿cuál será la tasa de variación de la demanda en el instante $t = 5$? Según esta tasa de variación de la demanda, ¿qué demanda aproximada se espera tener un mes después?

Solución

La función que expresa la demanda en función del tiempo es la composición de $x$ con $D$. Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$D'(t) = \frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{x}\frac{1}{10} = \frac{-1}{(2+\frac{t}{10})10} = \frac{-1}{20+t}.$$

En el instante $t = 5$ la tasa de variación instantánea de la demanda es

$$D'(5) = \frac{-1}{20+5} = \frac{-1}{25},$$

es decir, la demanda decrecerá $10000/25 = 400$ unidades al mes, a partir de ese instante.
Para predecir la demanda aproximada un més después se puede utilizar la recta tangente a $D$ en el instante $t = 5$, que tiene ecuación,

$$y = D(5) + D'(5)(t-5) = \ln\left(\frac{10}{2+\frac{5}{10}}\right) - \frac{1}{25}(t-5) = \ln(4) + \frac{1}{5} - \frac{t}{25}.$$

La predicción de la recta tangente un mes después, es decir para $t = 6$ es $\ln(4) + \frac{1}{5} - \frac{6}{25} = 1.35$ decenas de miles de unidades.

**Ejercicio 6.13.** Un balón relleno de aire tiene radio 10 cm cuando se empieza a introducir más aire, de manera que el radio se incrementa con una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad varía el volumen en ese instante?

Solución

Suponiendo que el balón tiene forma esférica, el volumen de aire depende del radio del balón según la función $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Ahora bien, como empezamos a introducir aire en el balón, el radio dependerá del tiempo, según la función $r(t)$, y por tanto el volumen depende también del tiempo según la función $V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$.
La velocidad con la que varía el volumen en el instante $t_0$ en que el radio es $r(t_0) = 10$ cm y empieza a variar con una velocidad $r'(t_0) = 2$ cm/s, es

$$\begin{aligned} V(r(t_0))' &= \frac{dV}{dr}(r(t_0))\frac{dr}{dt}(t_0) = \frac{4}{3}\pi 3 r(t_0)^2 r'(t_0) \\ &= 4\pi(10 \text{ cm})^2 \cdot 2 \text{ cm/s} = 800\pi \text{ cm}^3/\text{s}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.14.** Una pipeta cilíndrica de radio 5 mm almacena una solución. Si la pipeta empieza a vaciarse a razón de 0.5 ml por segundo, ¿a qué velocidad disminuye el nivel de la pipeta?

Solución

Como el radio de la pipeta es constante $r = 5$ mm, el volumen de solución en la pipeta depende del nivel de la pipeta y según la función $V(h) = \pi(5 \text{ mm})^2 h$. Ahora bien, como la pipeta empieza a vaciarse, el nivel de la pipeta dependerá del tiempo según la función $h(t)$, y por tanto, el volumen también depende del tiempo según la función $V(h(t)) = \pi(5 \text{ mm})^2 h(t)$.
La velocidad con la que cambia el volumen en el instante $t_0$ es,aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} V(h(t_0))' &= \frac{dV}{dh}(h(t_0))\frac{dh}{dt}(t_0) = 25\pi \text{ mm}^2 h'(t_0) = -500 \text{ mm}^3/\text{s} \\ \Rightarrow h'(t_0) &= \frac{-500 \text{ mm}^3/\text{s}}{25\pi \text{ mm}^2} = \frac{-20}{\pi} \text{ mm/s} \approx -6.37 \text{ mm/s}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.15.** Un cilindro de 4 cm de radio ($r$) y 3 cm de altura ($h$) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que $\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = 1$ cm/s. Hallar de forma aproximada la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

Solución

El volumen de un cilindro depende del radio de la base $r$ y de la altura $h$, según la fórmula $V(r,h) = \pi r^2 h$. Ahora bien, como el proceso de calentamiento provoca un cambio de las dimensiones, podemos decir que el radio cambia con el tiempo según la función $r(t)$ y la altura cambia también con el tiempo según la función $h(t)$, de manera que el volumen también depende del tiempo según la función $V(r(t),h(t)) = \pi r(t)^2 h(t)$. La tasa de variación instantánea del volumen en el instante $t_0$ en el que comienza el calentamiento es, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} V(r(t_0),h(t_0))' &= \pi((r(t_0)^2)' h(t_0) + r(t_0)^2 h'(t_0)) \\ &= \pi(2r(t_0)r'(t_0)h(t_0) + r(t_0)^2 h'(t_0)) \end{aligned}$$

En el instante $t_0$ en el que comienza el proceso de calentamiento, sabemos que $r(t_0) = 4$ cm, $h(t_0) = 3$ cm y $r'(t_0) = h'(t_0) = 1$ cm/s, de manera que sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$V(r(t_0),h(t_0))' = \pi(2\cdot 4 \text{ cm } \cdot 1 \text{ cm/s } \cdot 3 \text{ cm } + (4 \text{ cm })^2\cdot 1 \text{ cm/s }) = 40\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Así pues $\frac{dV}{dt} = 40\pi$ cm$^3$/s, de donde se deduce que $dV = 40\pi$ cm$^3$/s $dt$, de manera que para una variación de tiempo $dt = 5$ s, la variación aproximada del volumen será $dV = 40\pi$ cm$^3$/s $\cdot 5$ s $= 200\pi$ cm$^3$, y para una variación de tiempo $dt = 10$ s, la variación aproximada del volumen será $dV = 40\pi$ cm$^3$/s $\cdot 10$ s $= 400\pi$ cm$^3$.

**Ejercicio 6.16.** La ventas mensuales de bicicletas en una ciudad depende del precio de las bicicletas $x$, en euros, y el precio del combustible $y$, en céntimos de euro, según la función $v(x,y) = 200 - 10\sqrt{x} + (\frac{y}{10}+20)^{3/2}$. Si en un determinado instante el precio de las bicicletas es de 200 € y el precio del combustible es de 1€, y el precio de las bicicletas comienza a subir a razón de 1€ al mes, mientras que el precio del combustible empieza a subir a razón de 5 céntimos al mes. ¿Qué tasa de variación experimentarán las ventas de bicicletas en ese instante? Según esta tasa de variación, ¿qué ventas aproximadas se espera tener el próximo mes?

Solución

Como el precio de las bicicletas y del combustible no son constantes, sino que dependen del tiempo según las funciones $x(t)$ y $y(t)$ respectivamente, las ventas también dependen del tiempo según la función $v(x(t),y(t)) = 200 - 10\sqrt{x(t)} + (\frac{y(t)}{10}+20)^{3/2}$. Por tanto, la tasa de variación instantánea de las ventas es, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
v(x(t),y(t))' &= (200)' - \left(10\sqrt{x(t)}\right)' + \left(\left(\frac{y(t)}{10}+20\right)^{3/2}\right)' \\
&= \frac{-10}{2\sqrt{x(t)}}x'(t) + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y(t)}{10}+20}\frac{y'(t)}{10} \\
&= \frac{-5x'(t)}{\sqrt{x(t)}} + \frac{3y'(t)}{20}\sqrt{\frac{y(t)}{10}+20}.
\end{aligned}$$

En el instante $t_0$ en el que el precio de las bicicletas es $x(t_0) = 200$ €, el precio del combustible es $y(t) = 100$ céntimos, y la tasa de variación instantánea del precio de las bicicletas es $x'(t_0) = 1$ €/mes y del precio del combustible $y(t_0) = 5$ céntimos/mes, sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
v(x(t_0), y(t_0))' &= \frac{-5x'(t_0)}{\sqrt{x(t_0)}} + \frac{3y'(t_0)}{20}\sqrt{\frac{y(t_0)}{10} + 20} \\
&= \frac{-5 \cdot 1}{\sqrt{200}} + \frac{3 \cdot 5}{20}\sqrt{\frac{100}{10} + 20} = 3.75 \text{ unidades/mes.}
\end{aligned}
$$

Para predecir las ventas el próximo mes, podemos utilizar la aproximación de la recta tangente a $v$ en ese instante, que tiene ecuación

$$
\begin{aligned}
y &= v(t_0) + v'(t_0)(t - t_0) \\
&= 200 - 10\sqrt{200} + (\frac{100}{10} + 20)^{3/2} + 3.75(t - t_0) \\
&= 222.9 + 3.75(t - t_0).
\end{aligned}
$$

Si queremos predecir las ventas el mes siguiente, la variación del tiempo es $t - t_0 = 1$ mes, y sustituyendo en la ecuación de la tangente se tiene que las ventas aproximadas serán $222.9 + 3.75 \cdot 1 = 226.65$ unidades.

**Ejercicio 6.17.** Dada la función $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = Frsen(x)$, calcular la derivada de su función inversa $f^{-1}(x) = Frarcsen(x)$ $\forall x \in (-1, 1)$.

Solución

Aplicando la regla para la derivada de la función inversa, se tiene

$$
(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(Frarcsen(x))} \forall x \in (-1, 1).
$$

Por otro lado, como $Frsen(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, se deduce que $\cos(x) = \sqrt{1 - Frsen(x)^2}$, de manera que sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$
(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - Frsen(Frarcsen(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \forall x \in (-1, 1).
$$

**Ejercicio 6.18.** Se desea medir la superficie de una célula esférica y para ello se ha medido el radio de una célula de 5 $\mu$m con un error de 0.2 $\mu$m. ¿Cuál será el error aproximado cometido en el cálculo de la superficie de la célula? En general, si al medir el radio se comete siempre un error relativo del 2%? ¿Cómo afecta esto al error de la medida de la superficie de la célula?

**Solución**

La superficie de una esfera depende del radio según la función $S(r) = 4\pi r^2$.
Como $S'(r) = \frac{dS}{dr}$ se deduce que $dS = S'(r)dr$, de manera que si se interpreta la variación del radio $dr$ como el error en su medición, y la variación de la superficie $dS$ como el error en su medición, el error en la medición del radio se transmite a la medición de la superficie multiplicando por la derivada de la superficie. Como $S'(r) = 8\pi r$, para un radio de 5 $\mu$m se tiene \$S'(5) = 8 5 m = 40 m. Por tanto, una error en la medición del radio de $dt = 0.2$ $\mu$m, producirá un error en la medición de la superficie de $dS = 40\pi\ \mu\text{m} \cdot 0.2\ \mu\text{m} = 8\pi\ \mu\text{m}^2$.
Para la segunda parte del problema, hay que tener en cuenta que si $dr$ se interpreta como el error absoluto del radio, $\frac{dr}{r}$ es el error relativo en la medición del radio, y $\frac{dS}{S}$ es el error relativo en la medición de la superficie. Así pues, se tiene

$$\frac{dS}{S} = \frac{S'(r)dr}{S} = \frac{8\pi r dr}{4\pi r^2} = 2\frac{dr}{r}.$$

Como el error relativo en la medición del radio es del 2%, se tiene que $\frac{dr}{r} = 0.02$ y sustituyendo en el resultado anterior se tiene

$$\frac{dS}{S} = 2\frac{dr}{r} = 2 \cdot 0.02 = 0.04,$$

de manera que el error relativo en la medición de la superficie es del 4%.

**Ejercicio 6.19.** La velocidad de la sangre que fluye por una arteria está dada por la ley de Poiseuille

$$v(r) = cr^2,$$

donde $v$ es la velocidad de la sangre, $r$ es el radio de la arteria y $c$ es una constante. Si se puede medir el radio de la arteria con una precisión del 5%, ¿qué precisión tendrá el cálculo de la velocidad?

**Solución**

Si se interpreta $dr$ se interpreta como el error absoluto del radio de la arteria, $\frac{dr}{r}$ es el error relativo en la medición del radio, y $\frac{dv}{v}$ es el error relativo en la medición de la velocidad de la sangre. Así pues, se tiene

$$\frac{dv}{v} = \frac{v'(r)dr}{v} = \frac{2cr \cdot dr}{cr^2} = 2\frac{dr}{r}.$$

Como el error relativo en la medición del radio es del 5%, se tiene que $\frac{dr}{r} = 0.05$ y sustituyendo en el resultado anterior se tiene

$$\frac{dv}{v} = 2\frac{dr}{r} = 2 \cdot 0.05 = 0.1,$$

de manera que el error relativo en la medición de la velocidad de la sangre es del 10%.

**Ejercicio 6.20.** En muchos vertebrados existe una relación entre la longitud del cráneo y la longitud de la espina dorsal que puede expresarse mediante la ecuación

$$C(t) = aE(t)^b$$

donde $a > 0$ y $b$ son constantes y $t$ es el tiempo. Esta ecuación se conoce como *ecuación alométrica*. ¿Cómo se relaciona la tasa de crecimiento de la espina dorsal con la del cráneo? ¿Para qué valores de $b$ es la función $C$ creciente, pero de forma que la relación $C/E$ disminuye al aumentar $E$? ¿En qué estado de desarrollo tienen los vertebrados cráneos mayores en relación con la longitud de sus cuerpos?

Solución

La tasa de crecimiento de la espina dorsal es $E'$ y la del cráneo es $C'$, así que se trata de ver la relación entre las dos derivadas. Si calculamos la derivada de la longitud del cráneo, como $E(t)$ es una función que depende del tiempo, aplicando la regla de la cadena se tiene

$$C'(t) = abE(t)^{b-1}E'(t)$$

Para que la $C$ sea creciente su derivada debe ser positiva, es decir, $abE(t)^{b-1}E'(t) > 0$. Como $E(t)$ es el la longitud de la espina dorsal, que es positiva, $E'(t)$ es la tasa de crecimiento de la espina dorsal que en los vertebrados también es positiva ya que crece con los años, y $a > 0$, para que $C'(t) > 0$ debe ser $b > 0$.
Por otro lado, la relación $E/C$ es

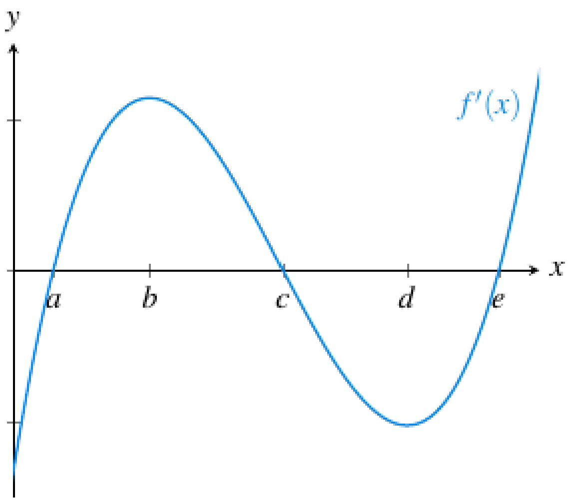
$$\frac{C(t)}{E(t)} = \frac{aE(t)^b}{E(t)} = aE(t)^{b-1},$$

y su derivada vale

$$\left(\frac{C(t)}{E(t)}\right)' = a(b-1)E(t)^{b-2}.$$

Como $a > 0$ y $E(t) > 0$, para que la derivada sea negativa tiene que ser $(b-1) < 0$, es decir, $b < 1$. Por tanto, se debe cumplir $0 < b < 1$.
Por tanto, si $0 < b < 1$ se tiene que $C/E$ es decreciente y eso quiere decir que la espina dorsal crece más rápidamente que el cráneo en los vertebrados, por lo que el cráneo será mayor en relación a la espina dorsal al nacer.

**Ejercicio 6.21.** La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de una función $f$. Estudiar el comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y puntos de inflexión).




Solución

A la vista de la gráfica de $f'(x)$ se observa que los puntos críticos de $f$ (los puntos que anulan la derivada) son $x = a$ y $x = c$ y $x = e$.

**Estudio del crecimiento**

Observando el signo de $f'$ podemos estudiar el crecimiento de $f$ aplicando el criterio del signo de la primera derivada. A la vista de la gráfica se observa que $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a, c) \cup (e, \infty)$, y, por tanto, $f$ es creciente en estos intervalos, y $f'(x) < 0$ $\forall x \in (-\infty, a) \cup (c, e)$, y, por tanto, $f$ es decreciente en estos intervalos.

**Estudio de los extremos**

Los posibles extremos de $f$ estarán entre sus puntos críticos. Observando el crecimiento de la $f$ a la izquierda y a la derecha de cada punto crítico podemos determinar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

- En $x = a$ $f$ decrece a la izquierda y crece a la derecha, luego hay un mínimo relativo.
- En $x = c$ $f$ crece a la izquierda y decrece a la derecha, luego hay un máximo relativo.
- En $x = e$ $f$ decrece a la izquierda y crece a la derecha, luego hay un mínimo relativo.

**Estudio de la concavidad**

Para estudiar la concavidad utilizaremos el criterio del signo de la segunda derivada. Para ver el signo de $f''$ basta con observar el crecimiento de $f'$ en la gráfica ya que $f''$

es la derivada de $f'$ y por tanto su signo depende del crecimiento de $f'$. Observando la gráfica de $f'$ se tiene que $f'(x)$ es creciente en $(-\infty, b)$ y $(d, \infty)$ de manera que $f''(x) > 0 \ \forall x \in (-\infty, b) \cup (d, \infty)$, y, por tanto, la $f$ es cóncava hacia arriba en estos intervalos. Por otro lado, $f'(x)$ es decreciente en el intervalo $(b, d)$, por lo que $f''(x) < 0 \ \forall x \in (b, d)$ y, por tanto, $f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.

**Estudio de los puntos de inflexión**

Los puntos de inflexión son los puntos donde cambia la concavidad de la función, de modo que, según el estudio de la concavidad, $f$ tiene puntos de inflexión en $x = b$ y $x = d$.

**Ejercicio 6.22.** Hallar $a$, $b$ y $c$ en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $x = 3$, pase por el punto $(1, 0)$ y alcance un máximo en $x = 1$.

Solución

Calculamos las dos primeras derivadas.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2bx + c \\ f''(x) &= 6x - 2b \end{aligned}$$

Para que la función tenga un punto de inflexión en $x = 3$ debe ser $f''(3) = 0$, es decir, $f''(3) = 6 \cdot 3 - 2b = 18 - 2b = 0$, de donde se deduce que $b = 9$.

Para que la función tenga un máximo en $x = 1$ debe ser $f'(1) = 0$, es decir, $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 9 \cdot 1 + c = 3 - 18 + c = -15 + c = 0$, de donde se deduce que $c = 15$.

Finalmente, para que pase por el punto $(1, 0)$$ debe ser $f(1) = 0$, es decir, $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + d = 1 - 9 + 15 + d = 7 + d = 0$, de donde se deduce que $d = -7$.

**Ejercicio 6.23.** La cantidad de trigo en una cosecha $C$ depende del nivel de nitrógeno en el suelo $n$ según la ecuación

$$C(n) = \frac{n}{1 + n^2}, \quad n \geq 0.$$

¿Para qué nivel de nitrógeno se obtendrá la mayor cosecha de trigo?

> **Solución**
>
> Se trata de calcular el valor de $n$ donde se alcanza el máximo de $C(n)$. Veremos primero si hay algún máximo relativo. Para ello calculamos los puntos críticos.
>
> $$C'(n) = \frac{(n)'(1+n^2) - n(1+n^2)'}{(1+n^2)^2} = \frac{(1+n^2) - n(2n)}{(1+n^2)^2} = \frac{1-n^2}{(1+n^2)^2}$$
>
> $C'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - n^2 = 0 \Leftrightarrow n^2 = 1 \Leftrightarrow n = \pm 1$.
> Como no tienen sentido cantidades de nitrógeno negativas, el único punto crítico está en $n = 1$. Para ver si se trata de un máximo, estudiamos ahora el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha de este punto. Tomando, por ejemplo $n = 0$, se tiene $C'(0) = \frac{1-0^2}{(1+0^2)^2} = 1 > 0$, por lo que la función es creciente a la izquierda de $n = 1$. Y tomando, por ejemplo $n = 2$, se tiene $C'(2) = \frac{1-2^2}{(1+2^2)^2} = -3/25 < 0$, por lo que la función es decreciente a la derecha de $n = 1$. Por tanto, en $n = 1$ existe un máximo relativo, que además, es único. Como la función es continua en todo $\mathbb{R}$ al ser una función racional y no anularse nunca su denominador, se tiene que el máximo absoluto coincide con el relativo, de manera que el nivel de nitrógeno para el que la cosecha será máxima es $n = 1$.

**Ejercicio 6.24.** La velocidad $v$ de una reacción irreversible $A + B \to AB$ es función de la concentración $x$ del producto $AB$ y puede expresarse según la ecuación

$$v(x) = 4(3-x)(5-x).$$

¿Qué valor de $x$ maximiza la velocidad de reacción?

> **Solución**
>
> Veremos primero si hay algún máximo relativo. Para ello calculamos los puntos críticos de \$v(x)=4(3-x)(5-x)=4xˆ2-32x+60
>
> $$v'(x) = 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$
>
> Para ver si se trata de un máximo relativo, estudiamos el signo de la segunda derivada en el punto crítico. $v''(x) = 8 > 0$, luego la función es cóncava hacia arriba en todo $\mathbb{R}$ y en particular en $x = 4$, por lo que tiene un mínimo local en $x = 4$.
> Como el dominio de la función es $[0, \infty)$ ya que las concentraciones no pueden ser negativas, y $\lim_{n\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} 4x^2 - 32x + 60 = \infty$, la función no tiene máximo local, por lo que no existe un valor de $x$ que maximice la velocidad de reacción.

**Ejercicio 6.25.** Un naufrago se encuentra en una isla situada en un plano con coordenadas $(2,0)$. Se sabe que un ferry hace siempre la trayectoria dada por la función $f(x)=\sqrt{x+1}$. ¿Hacia qué punto de la trayectoria del ferry debe nadar el naufrago para recorrer la menor distancia posible? ¿Qué distancia recorrerá si nada hacia ese punto?

Solución

El ferry pasará por todos los puntos $(x,f(x))$, por lo que se trata de averiguar el valor de $x$ que hace mínima la distancia del punto $(2,0)$ a $(x,f(x))$, o lo que es lo mismo, minimizar el módulo del vector \$(x,f(x))-(2,0) $=(x-2,f(x))$, que vale

$$|(x-2,f(x))|=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x})^2}=\sqrt{x^2-2x+4-x}=\sqrt{x^2-x+4}.$$

Se trata, por tanto, de calcular el mínimo de la función $m(x)=\sqrt{x^2-x+4}$. Calculamos los puntos críticos.

$$m'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+4}}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=1/2.$$

Para ver si se trata de un mínimo relativo, estudiamos el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Tomando, por ejemplo, $x=0$, se tiene $m'(0)=\frac{2\cdot 0-1}{2\sqrt{0^2-0+4}}=-1/4<0$, de manera que el módulo decrece a la izquierda de $x=1/2$. Y tomando, por ejemplo, $x=1$, se tiene que $m'(1)=\frac{2\cdot 1-1}{2\sqrt{1^2-1+4}}=1/4>0$, de manera que el módulo crece a la derecha de $x=1/2$. Por tanto, la función del módulo tiene un mínimo relativo en $x=1/2$, que además es único, y como $m$ es continua en todo $\mathbb{R}$, el mínimo relativo es también mínimo absoluto, y por tanto, el naufrago debe nadar hacia el punto $(1/2,\sqrt{1/2})$.

**Ejercicio 6.26.** Un hotel alquila habitaciones por un precio entre 40€ y 100€ diarios. Se ha observado que el número de habitaciones que alquilan depende del precio $x$ según la función $h(x)=300-3x$. ¿Qué precio se debe cobrar por habitación para obtener los máximos ingresos?

Solución

Los ingresos vienen dados por la función $f(x)=xh(x)=x(300-3x)=300x-3x^2$. Se trata de calcular el máximo absoluto de esta función. Para ello veremos primero si tiene algún máximo relativo. Calculamos los puntos críticos.

$$f'(x) = 300 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 50.$$

Para ver si se trata de un máximo relativo, estudiamos el signo de la segunda derivada en el punto crítico. $f''(x) = -6 < 0$, por lo que la función es cóncava hacia abajo en todo $\mathbb{R}$, y en particular en $x = 50$, por lo que $f$ tiene un máximo relativo en este punto, que además es único. Como $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$, el máximo relativo es también absoluto, y el precio de las habitaciones que maximiza los ingresos es $x = 50$€.

**Ejercicio 6.27.** Existen organismos que se reproducen una sola vez en su vida como por ejemplo los salmones. En este tipo de especies, la velocidad de incremento per cápita $v$, que mide la capacidad reproductiva, depende de la edad $x$ según la ecuación

$$v(x) = \frac{\ln(p(x)h(x))}{x},$$

donde $p(x)$ es la probabilidad de sobrevivir hasta la edad $x$ y $h(x)$ es el número de nacimientos de hembras a la edad $x$. Calcular la edad óptima de reproducción, es decir, el valor que maximice $v$, para $p(x) = e^{-0.1x}$ y $h(x) = 4x^{0.9}$.

Solución

Se trata de calcular el máximo absoluto de la función

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{\ln(e^{-0.1x}4x^{0.9})}{x} = \frac{\ln(e^{-0.1x}) + \ln(4) + \ln(x^{0.9})}{x} \\ &= \frac{-0.1x + \ln(4) + 0.9\ln(x)}{x} = -0.1 + \frac{\ln(4) + 0.9\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

Veamos primero si la función tiene algún máximo relativo. Calculamos los puntos críticos.

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{(x)'(\ln(4) + 0.9\ln(x)) - x(\ln(4) + 0.9\ln(x))'}{x^2} \\ &= \frac{\ln(4) + 0.9\ln(x) - 0.9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(4) + 0.9\ln(x) - 0.9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{0.9 - \ln(4)}{0.9} \Leftrightarrow x = e^{\frac{0.9-\ln(4)}{0.9}} \approx 0.5826. \end{aligned}$$

Para ver si $v$ tiene un máximo relativo en este punto, estudiamos el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Tomando, por ejemplo, $x = 0$, se tiene $v'(0.5) \approx 0.5502 > 0$, por lo que la función crece a la izquierda de

$x = 0.5826$. Y tomando, por ejemplo, $x = 0.6$, se tiene que $v'(0.6) \approx -0.0738 < 0$, por lo que $v$ decrece a la derecha de $x = 0.5826$, así que, $v$ tiene un máximo relativo en $x = 0.5826$, que además es único. Como $v$ es continua en $(0, \infty)$, que es el dominio que tiene sentido en el contexto del problema, el máximo relativo es también absoluto y la edad óptima de reproducción es a los 0.5826 años.

**Ejercicio 6.28.** Un lata de refresco cilíndrica contiene 33 cl. Hallar las dimensiones de la lata para que la cantidad de aluminio utilizada en su creación sea mínima.

**Ejercicio 6.29.** La distancia en kilómetros que recorre un coche de alquiler con 1 litro de gasolina depende de la velocidad a la que circule según la función $d(x) = 120 - x$ para $x \in (50, 120)$. Si el coste de la gasolina es de 2 €/l y el coste del alquiler es de 10 €/h, ¿a qué velocidad debe circular para que el coste del trayecto sea mínimo? ¿Cuál será el coste por kilómetro si circula a esa velocidad?

Solución

Como la distancia recorrida a una velocidad $x$ es $d(x) = 120 - x$ y, como la velocidad es $x = \frac{d(x)}{t}$, el tiempo necesario para recorrer esa distancia es $\frac{d(x)}{x}$, de manera que el coste del alquiler para recorrer esa distancia es $\frac{d(x)}{x}10$. A esto hay que sumar el precio del litro de gasolina necesario para recorrer esa distancia, de manera que el coste de recorrer esa distancia es $\frac{d(x)}{x}10 + 2$. Por tanto, el coste por kilómetro para una velocidad $x$ viene dado por la función

$$c(x) = \frac{\frac{d(x)}{x}10 + 2}{120 - x} = \frac{8x - 1200}{x^2 - 120x}$$

Para determinar el mínimo de la función calculamos los puntos críticos. La derivada vale

$$c'(x) = \frac{-8x^2 + 2400x - 144000}{x^4 - 240x^3 + 14400x^2}$$

y resolviendo la ecuación $-8x^2 + 2400x - 144000 = 0$ se obtienen los puntos críticos $x = 82.92$ y $x = 217.08$. Como el segundo punto crítico queda fuera del rango de velocidades de 50 a 120, estudiaremos solo el primero. Usando el criterio de la primera derivada, estudiamos el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico, por ejemplo $c'(80) = -1/3200 < 0$ y $c'(83) = 88/9431041 > 0$, por lo que $c$ tiene un mínimo en $x = 82.92$, es decir, la velocidad a la que debe viajar para que el coste sea mínimo es 82.92 km/h, y el precio por kilómetro a esa velocidad será 0.17 €/l.

**Ejercicio 6.30.** En un tramo de carretera limitado a una velocidad máxima de 70 km/h existe un semáforo de tramo. Según el registro del semáforo, un vehículo pasa por el comienzo del tramo, situado en el kilómetro 12 a las 8:00 y pasa por el final del tramo, situado en el kilómetro 14, un minuto y medio después. ¿Será sancionado el vehículo por exceso de velocidad?

Solución

Suponiendo que la función $f$ que determina la posición del vehículo en cada instante es continua y derivable en el tramo del enunciado, según el teorema del valor medio, existe al menos un instante $c$ en el que

$$f'(c) = \frac{14-12}{8.025-8} = \frac{2}{0.025}I = 80 \text{ km/h}.$$

Como $f'$ es la velocidad instantánea, se puede concluir que en algún momento la velocidad instantánea fue de 80 km/h, y como la máxima velocidad permitida en el tramo es de 70 km/h, el vehículo será sancionado.

**Ejercicio 6.31.** La posición que ocupa un coche que se mueve en línea recta, puede expresarse en función del tiempo según la ecuación

$$e(t) = 4t^3 - 2t + 1.$$

Calcular su velocidad y aceleración en cualquier instante.
Nota: La aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad.

Solución

La velocidad es la tasa de variación instantánea del espacio con respecto al tiempo, es decir, la primera derivada de $e$, que vale $e'(t) = 12t^2 - 2$.
La aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, la segunda derivada de $e$, que vale $e''(t) = 24t$.

**Ejercicio 6.32.** El espacio recorrido por un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba, sin tener en cuenta la resistencia del aire, viene dado por la ecuación

$$e(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

donde $v_0$ es la velocidad inicial con que se lanza el objeto, $g = 9.81$ m/s$^2$ es la aceleración de la gravedad en la superfice terrrestre y $t$ es el tiempo transcurrido desde que el objeto se lanza.

a. Calcular la velocidad y la aceleración en cualquier instante.
b. Si el objeto se lanza inicialmente a 50 km/h, ¿cuál será la altura máxima que alcanzará el objeto? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?
c. ¿En qué instante volverá a tocar la tierra el objeto? ¿Con qué velocidad?

Solución

a. La velocidad es la tasa se variación instantánea con respecto al tiempo, es decir, la primera derivada de $e$, que vale, $e'(t) = v_0 - gt$. Y la aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, la segunda derivada de $e$, que vale $e''(t) = -g$.

b. Para ver en qué punto el objeto alcanza la altura máxima, estudiamos primero si la función tiene un máximo relativo. Calculamos los puntos críticos, tomando $v_0 = 50$ km/h $= \frac{125}{9}$ m/s.

$$e'(t) = \frac{125}{9} - 9.81t = 0 \Leftrightarrow t \approx 1.42\text{s}.$$

Para ver si se trata de un máximo relativo, estudiamos el signo de la segunda derivada en el punto. Como $e''(t) = -9.81 < 0$ la función es cóncava hacia abajo en todo $\mathbb{R}$, y en particular en $t \approx 1.42$, de manera que $e$ tiene un máximo relativo en $t \approx 1.42$, que además es único. Como la función es continua en todo $\mathbb{R}$, el máximo relativo es también absoluto, y por tanto, la altura máxima que alcanzará el objeto es aproximadamente $e(1.42)=9.83 m. En ese instante, la velocidad del objeto será nula ya que se trata de un punto crítico y $e'(1.42) = 0$.

c. Para ver cuándo el objeto vuelve a tocar el suelo basta con resolver la ecuación

$$e(t) = 50t - \frac{1}{2}9.81t^2 = 0 \Leftrightarrow t(50 - 4.905t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o } t \approx 2.83 \text{ s}.$$

Por tanto, el objeto volverá a tocar suelo a los 2.83 segundos aproximadamente. En ese instante la velocidad será $e'(2.83) = \frac{125}{9} - 9.81 \cdot 2.83 \approx -13.89$ m/s, que es la misma velocidad con la que se lanzó pero negativa.

**Ejercicio 6.33.** Una partícula se mueve a lo largo de la curva

$$\begin{cases} x = Frtg(t), \\ y = t^2 - 2t + 3. \end{cases}$$

donde $x$ e $y$ están medidos en metros y el tiempo $t$ en segundos.

a. Hallar $\frac{dy}{dx}$ en $t = 0$.
b. Hallar la tangente a la trayectoria en el punto $(0, 3)$.

**Solución**

a. Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

y en consecuencia,

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{dy/dt}{dx/dt}(t) = \frac{2t-2}{1+Frtg(t)^2}.$$

En el punto $t = 0$ tendremos

$$\frac{dy}{dx}(0) = \frac{-2}{1+Frtg(0)^2} = -2.$$

b. La ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x(t_0), y(t_0))$ correspondiente al instante $t_0$, viene dada por la expresión

$$y - y(t_0) = \frac{dy}{dx}(t_0)(x - x(t_0)).$$

Como el punto $(0, 3)$ se alcanza precisamente en el instante $t = 0$ tenemos que la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en dicho instante es:

$$y - y(0) = \frac{dy}{dx}(0)(x - x(0)),$$

es decir,

$$y - 3 = -2(x - 0),$$

y simplificando obtenemos:

$$y = 3 - 2x.$$

**Ejercicio 6.34.** Las coordenadas paramétricas de un punto material lanzado bajo un ángulo respecto al horizonte son

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$ es el tiempo contado a partir del instante en que el punto llega a la posición más alta, $v_0$ es la velocidad horizontal en el instante $t = 0$ y $g = 9.81$ m$^2$/s es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. ¿En qué instante la magnitud de la velocidad horizontal será igual a la de la velocidad vertical? ¿Cuánto debería valer $v_0$ para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente? Calcular la ecuación de la recta tangente en dicho instante con el valor de $v_0$ calculado.

Solución

La velocidad horizontal es la derivada del espacio recorrido horizontalmente (componente $x$) con respecto al tiempo, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t) = v_0.$$

Del mismo modo, la velocidad vertical es la derivada del espacio recorrido verticalmente (componente $y$) en relación al tiempo,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-\frac{1}{2} g t^2) = -gt$$

Para ver en qué instante ambas magnitudes serán iguales, las igualamos y resolvemos la ecuación:

$$|\frac{dx}{dt}| = |\frac{dy}{dt}| \Leftrightarrow v_0 = gt \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{9.81} s.$$

Para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente, debe cumplirse que $x(v_0/9.81) = 100$ m, de lo que se deduce:

$$x(v_0/9.81) = v_0 \frac{v_0}{9.81} = \frac{v_0^2}{9.81} = 100 \Leftrightarrow v_0^2 = 981 \Leftrightarrow v_0 = +\sqrt{981} = 31.32 \text{ m/s}.$$

Por tanto, el instance en cuestión es $t = v_0/9.81 = 31.32/9.81 = 3.19$ s.
Por último, la ecuación de la recta tangente en dicho instante, para el valor de $v_0$ calculado es:

$$y = y(3.19) + \frac{dy}{dx}(3.19)(x - x(3.19))$$

Ya hemos visto que $x(3.19) = 100$, y que en dicho instante la velocidad horizontal y vertical coinciden, de manera que

$$\frac{dy}{dx}(3.19) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -1,$$

de modo que sólo nos queda calcular el espacio vertical recorrido en dicho instante, que es

$$y(3.19) = -\frac{1}{2}9.81 \cdot 3.19^2 = -49.91.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a la recta tangente:

$$y = -49.91 - (x - 100) \Leftrightarrow y = -x + 50.09.$$

**Ejercicio 6.35.** La cantidad de árboles en un ecosistema depende del tiempo según la función $a(t) = 100 \ln(t^2 + 1)$, y la cantidad de un determinado parásito de los árboles, también depende del tiempo según la función $p(t) = \sqrt[3]{t^2 + 2}$. Calcular la tasa de variación instantánea del número de parásitos en relación al número de árboles, en el instante en que el número de parásitos es 3.

Solución

$$\frac{da}{dp} = \frac{da/dt}{dp/dt} = \frac{\frac{200t}{t^2+1}}{\frac{2t}{3\sqrt[3]{(t^2+2)^2}}} = \frac{200t \cdot 3\sqrt[3]{(t^2+2)^2}}{2t(t^2+1)} = \frac{600t\sqrt[3]{(t^2+2)^2}}{2t^3+2t}.$$

El instante en el que el número de parásitos es 3 es

$$p(t) = \sqrt[3]{t^2+2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2 = 27 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5.$$

Como en el contexto del problema podemos suponer que el tiempo es positivo, el instante en el que el número de parásitos es 3 es $t = 5$, y

$$\frac{da}{dp}(t=3) = \frac{600 \cdot 5\sqrt[3]{(5^2+2)^2}}{2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5} \approx 103.85 \text{ árboles/parásitos}.$$

**Ejercicio 6.36.** Dada la función $xy + e^x - \log y = 0$, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a ella en $x = 0$.

Solución

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación de la curva implícita se tiene

$$0 \cdot y + e^0 - \ln(y) = 0 \Leftrightarrow \ln(y) = 1 \Leftrightarrow y = e.$$

Así pues, hay que calcular la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto $(0, e)$.
La ecuación de la recta tangente en $(0, e)$ es $y = e + \frac{dy}{dx}(x = 0)(x - 0)$. Para calcular $\frac{dy}{dx}$ tenemos que derivar implícitamente la ecuación de la curva.

$$\begin{aligned} (xy + e^x - \ln(y))' = (0)' &\Leftrightarrow y + xy' + e^x - \frac{y'}{y} = 0 \\ \Leftrightarrow xy' - \frac{y'}{y} = -y - e^x &\Leftrightarrow y'(x - \frac{1}{y}) = -y - e^x \\ \Leftrightarrow y'\frac{xy - 1}{y} = -y - e^x &\Leftrightarrow y' = \frac{(-y - e^x)y}{xy - 1}, \end{aligned}$$

que en el punto $(0, e)$ vale

$$\frac{dy}{dx}(0, e) = \frac{(-e - e^0)e}{0e - 1} = e^2 + e.$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente a la curva implícita en el punto $(0, e)$ es $y = e + (e^2 + e)x$.
Por otro lado, la ecuación de la recta normal a la curva implícita en el punto $(0, e)$ es $y = e - \frac{1}{dy/dx(x=0)}(x - 0) = e - \frac{x}{e^2+e}$.

**Ejercicio 6.37.** Suponiendo que la temperatura, $T$ en grados centígrados, y el volumen, $V$ en metros cúbicos, de un gas real encerrado en un contenedor de volumen variable están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$T^2(V^2 - \pi^2) - V \cos(TV) = 0.$$

a. Calcular la derivada del volumen con respecto a la temperatura en el momento en el que el volumen es de $\pi$ m$^3$ y la temperatura es medio grado centígrado.

b. ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que daría el volumen en función de la temperatura en el mismo punto del apartado anterior? Suponiendo que tanto la temperatura como el volumen son, a su vez, funciones de la presión, qué ecuación ligaría la derivada de la temperatura con respecto a la presión con la derivada del volumen con respecto a la presión.

Solución

a. $\frac{dV}{dT} = \frac{-2T(V^2-\pi^2)-V^2Frsen(TV)}{2T^2V-\cos(TV)+TVFrsen(TV)}$ y $\frac{dV}{dT}(V=\pi, T=0.5) = -\pi$ m$^3$/ºC.

b. Tangente: $V = \pi(-T+1.5)$.

c. $2T\frac{dT}{dP}(V^2-\pi^2)+T^2(2V\frac{dV}{dT})-\frac{dV}{dT}\cos(VT)-V(-Frsen(TV)(\frac{dT}{dP}V+T\frac{dV}{dP})) = 0.$

**Ejercicio 6.38.** Un cuerpo se mueve en el plano a través de los puntos de coordenadas $(x, y)$ relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$2e^{xy}Frsen(x) + y\cos(x) = 2.$$

a. Calcular su posición cuando $x = \pi/2$.
b. Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuando $x = 0$.

Solución

a. El punto $(x, y)$ en el que se encontrará el cuerpo cuando $x = 0$ cumple la ecuación del enunciado, de manera que sustituyendo $x = 0$, se tiene

$$2e^0Frsen(0) + y\cos(0) = 2 \Leftrightarrow y = 2.$$

Por tanto el cuerpo se encontrará en la posición $(0, 2)$.

b. Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de coordenadas $(x_0, y_0)$ es:

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

En nuestro caso, no tenemos la expresión explícita de la función $y = f(x)$, pero sí que tenemos la expresión de partida que define a $y$ como función de $x$ de forma implícita. Suponiendo que $y$ es función de $x$ y derivando implícitamente con respecto a $x$, obtenemos:

$$2e^{xy}(y + xy')Frsen(x) + 2e^{xy}\cos(x) + y'\cos(x) - yFrsen(x) = 0$$

Y sacando como factor común $y'$ y despejando, nos queda:

$$y' = \frac{-2e^{xy}yFrsen(x) - 2e^{xy}\cos(x) + yFrsen(x)}{2xe^{xy}Frsen(x) + \cos(x)}$$

Y en el punto $(0, 2)$ vale

$$y'(0,2) = \frac{-2e^0 \cos(0)}{\cos(0)} = -2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

**Ejercicio 6.39.** Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $x^2 + y^2 = 3xy - 1$ en los puntos en que $x = 1$. Calcular también los extremos relativos y decir si son máximos o mínimos.

Solución

Consideremos $y$ como función de $x$. Veamos primero los puntos de la curva en los que $x = 1$:

$$1^2 + y^2 = 3 \cdot 1 \cdot y - 1 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos dos soluciones $y = 1$ e $y = 2$, de modo que existen dos puntos para los que $x = 1$, que son el $(1, 1)$ y el $(1, 2)$.
Para calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal en estos puntos, necesitamos calcular la derivada $dy/dx$ en dichos puntos. Derivamos implícitamente:

$$\begin{aligned} d(x^2 + y^2 = d(3xy - 1) &\Leftrightarrow 2xdx + 2ydy = 3(dxy + xdy) \\ &\Leftrightarrow (2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x},$$

que en el punto $(1, 1)$ vale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1} = -1,$$

y en el punto $(1, 2)$ vale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = 4.$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 1)$ es

$$y-1=\frac{dy}{dx}(1,1)(x-1)\Leftrightarrow y=2-x,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y-1=-\frac{1}{dy/dx}(1,1)(x-1)\Leftrightarrow y=x,$$

mientras que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,2)$ es

$$y-2=\frac{dy}{dx}(1,2)(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y-2=-\frac{1}{dy/dx}(1,2)(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{9-x}{4}.$$

Por otro lado, para calcular los extremos relativos, primero calculamos los puntos críticos, que son los que anulan la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-2x}{2y-3x}=0\Leftrightarrow 3y-2x=0\Leftrightarrow y=2x/3.$$

Pero además deben cumplir la ecuación de la curva implícita,

$$x^2+(2x/3)^2=3x(2x/3)-1\Leftrightarrow x^2+4x^2/9=2x^2-1$$
$$\Leftrightarrow x^2=9/5\Leftrightarrow x=\pm 3/\sqrt{5}.$$

Así pues, existen dos puntos críticos que son el $(3/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$ y $(-3/\sqrt{5},-2/\sqrt{5})$. Para ver si son puntos de máximo o mínimo relativos, necesitamos calcular la segunda derivada en dichos puntos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{3y-2x}{2y-3x}\right)=\frac{(3\frac{dy}{dx}-2)(2y-3x)-(2\frac{dy}{dx}-3)(3y-2x)}{(2y-3x)^2}.$$

En el punto, $(3/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(3/\sqrt{5},2/\sqrt{5})=\frac{(3\cdot 0-2)(2\frac{2}{\sqrt{5}}-3\frac{3}{\sqrt{5}})-(2\cdot 0-3)(3\frac{2}{\sqrt{5}}-2\frac{3}{\sqrt{5}})}{(2\frac{2}{\sqrt{5}}-3\frac{3}{\sqrt{5}})^2}=2\sqrt{5},$$

que al ser positiva, indica que el punto $(3/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$ es un punto de mínimo relativo.
En el punto, $(-3/\sqrt{5},-2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-3/\sqrt{5},-2/\sqrt{5})=\frac{(3\cdot 0-2)(2\frac{-2}{\sqrt{5}}-3\frac{-3}{\sqrt{5}})-(2\cdot 0-3)(3\frac{-2}{\sqrt{5}}-2\frac{-3}{\sqrt{5}})}{(2\frac{-2}{\sqrt{5}}-3\frac{--3}{\sqrt{5}})^2}=-2\sqrt{5},$$

que al ser negativa, indica que el punto $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ es un punto de máximo relativo.

**Ejercicio 6.40.** Dada la curva $x^2 - xy + y^2 = 3$,

a. Calcular los posibles extremos relativos de $y$, considerando $y$ como función implícita de $x$. ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?
b. Analizar si lo puntos anteriores son máximos o mínimos haciendo uso de la derivada segunda.

Solución

a. Derivamos implícitamente la ecuación

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}3 = 0$$

Derivando el lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) &= \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \\ &= 2x - (\frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx}) + 2y\frac{dy}{dx} = \\ &= 2x - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} \\ &= 2x - y + (2y - x)\frac{dy}{dx} = 0\end{aligned}$$

Los posibles extremos serán los puntos donde se anule la derivada, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$. Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$$2x - y + (2y - x) \cdot 0 = 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Y sustituyendo ahora en la ecuación de la función tenemos

$$x^2 - x \cdot 2x + (2x)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Por tanto, los posibles puntos de extremo serán (1,2) y (-1,-2).

b. Para ver si los puntos anteriores son efectivamente extremos, calculamos la derivada segunda en dichos puntos.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}(x^2-xy+y^2) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^2-xy+y^2)\right) = \\
&= \frac{d}{dx}\left(2x-y+(2y-x)\frac{dy}{dx}\right) = \\
&= \frac{d}{dx}(2x)-\frac{d}{dx}y+\left(\frac{d}{dx}(2y-x)\frac{dy}{dx}+(2y-x)\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}\right) = \\
&= 2-\frac{dy}{dx}+\left(2\frac{dy}{dx}-\frac{dx}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+(2y-x)\frac{d^2y}{dx^2} = \\
&= 2-\frac{dy}{dx}+2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+(2y-x)\frac{d^2y}{dx^2} \\
&= 2-2\frac{dy}{dx}+(2y-x+2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0
\end{aligned}
$$

Para el primer punto tenemos que sustituir $x = 1$, $y = 2$ y $\dfrac{dy}{dx} = 0$, y queda

$$2-2\cdot 0+(2\cdot 2-1+2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow 2+5\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{5},$$

que al ser negativo indica que el en el punto $(1, 2)$ hay un máximo relativo.

Para el segundo punto tenemos que sustituir $x = -1$, $y = -2$ y $\dfrac{dy}{dx} = 0$, y queda

$$2-2\cdot 0+(2\cdot(-2)-(-1)1+2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow 2-\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2,$$

que al ser positivo indica que el en el punto $(-1, -2)$ hay un mínimo relativo.

**Ejercicio 6.41.** Dada la función $f(x) = Frsen(x)$, se pide:

a. Obtener el polinomio de Taylor de tercer grado de $f$ en el punto $a = \pi/6$ y usarlo para aproximar $Frsen(1/2)$ dando una cota del error cometido.
b. Dar una aproximación de $Frsen(1/2)$ usando un el polinomio de Taylor de quinto grado en el punto $a = 0$, acotando el error cometido.

Solución

a. La fórmula del polinomio de Taylor de tercer grado de $f$ en el punto $a=\pi/6$ es

$$P^3_{f,\pi/6}(x)=f(\pi/6)+f'(\pi/6)(x-\pi/6)+\frac{f''(\pi/6)}{2}(x-\pi/6)^2+\frac{f'''(\pi/6)}{3!}(x-\pi/6)^3.$$

Necesitamos calcular, por tanto, hasta la tercera derivada en el punto $a=\pi/6$.

$$\begin{array}{ll} f(x)=Frsen(x) & f(\pi/6)=0.5\\ f'(x)=\cos(x) & f'(\pi/6)=\sqrt{3}/2\\ f''(x)=-Frsen(x) & f''(\pi/6)=-0.5\\ f'''(x)=-\cos(x) & f'''(\pi/6)=-\sqrt{3}/2. \end{array}$$

Así pues, sustituyendo en la ecuación del polinomio anterior se llega a

$$P^3_{f,\pi/6}(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/6)-\frac{1}{4}(x-\pi/6)^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\pi/6)^3.$$

Sustituyendo en $x=1/2$ se tiene que $Frsen(1/2)\approx P^3_{f,\pi/6}(1/2)=0.4794255322$.

El error cometido en la aproximación es el resto $R^3_{f,\pi/6}(1/2)$. Expresando el resto de Taylor en la forma de Lagrange se tiene

$$R^3_{f,\pi/6}(1/2)=\frac{f''''(x)}{4!}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^4=\frac{Frsen(x)}{24}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^4 \text{ con } x\in\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Como $|Frsen(x)|\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$, se tiene que una cota del error cometido es

$$|R^3_{f,\pi/6}(1/2)|\leq\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^4=6.46\cdot 10^{-9}.$$

b. La fórmula del polinomio de Maclaurin de quinto grado de $f$ es

$$P^3_{f,0}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''''(0)}{4!}x^4+\frac{f'''''(0)}{5!}x^5$$

Calculando hasta la quinta derivada en 0 y sustituyendo en esta fórmula se tiene

$$P^5_{f,0}(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5.$$

Sustituyendo en $x=1/2$ se tiene que $Frsen(1/2)\approx P^5_{f,0}(1/2)=0.4794270833$, y podemos obtener una cota del error cometido de forma similar a la del apartado anterior, obteniendo $|R^5_{f,0}(1/2)|\leq 2.170\cdot 10^{-5}$.

**Ejercicio 6.42.** Calcular el polinomio de Maclaurin de tercer grado para la función $f(x) = Frarcsen(x)$.

Solución

La fórmula del polinomio de Maclaurin de quinto grado de $f$ es

$$P^3_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Calculamos hasta la tercera derivada de $f$ en $a = 0$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = Frarcsen(x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = x(1-x^2)^{-3/2} & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2} & f'''(0) = 1. \end{array}$$

Así pues, sustituyendo en la fórmula anterior del polinomio se tiene

$$P^3_{f,0}(x) = x + \frac{1}{6}x^3.$$

**Ejercicio 6.43.** Calcular $\cos(1)$ con un error menor que $10^{-7}$ usando aproximaciones de Taylor.

Solución

Para calcular de forma aproximada $\cos(1)$ utilizaremos un polinomio de Maclaurin para la función $f(x) = \cos(x)$.
El resto del polinomio de Taylor de orden $n$ de $f$ en $a = 0$ en la forma de Lagrange, para $x = 1$ es

$$R^n_{f,0}(t) = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}1^{n+1} = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!} \text{ con } t \in [0,1].$$

Como

$$|f^{(n}(t)| = \begin{cases} |Frsen(t)| & \text{si } n = 2k+1 \\ |\cos(t)| & \text{si } n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

se tiene que $||f^{(n+1}(t)| \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$, por lo que una cota del resto es $R^n_{f,0}(t) \leq 1/(n+1)!$. Probando con sucesivos valores de $n$, el primer valor que cumple que

$R^n_{f,0}(t) \leq 1/(n+1)! \leq 10^{-7}$ es $n = 10$, por lo que necesitamos calcular el polinomio de de Maclaurin de orden 10, que vale

$$P^{10}_{f,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!},$$

que para $x = 1$ vale

$$P^{10}_{f,0}(1) = 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} - \frac{1^6}{6!} + \frac{1^8}{8!} - \frac{1^{10}}{10!} \approx 0.5403023037919.$$

**Ejercicio 6.44.** Obtener polinomio de Maclaurin de grado 3 de las funciones $Frsen(x)$ y $Frtg(x)$, y utilizar los polinomios anteriores para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{Frtg(x) - x}{x - Frsen(x)}$$

Solución

La formula general para calcular el polinomio de Maclaurin de grado 3 de una función $f(x)$ es:

$$P^3_0(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Consideremos, en primer lugar, la función $Frsen(x)$, y calculemos sus tres primeras derivadas en 0:

$$\begin{array}{ll} f(x) = Frsen(x) & f(0) = Frsen(0) = 0, \\ f'(x) = \cos(x) & f'(0) = \cos(0) = 1, \\ f''(x) = -Frsen(x) & f''(0) = -Frsen(0) = 0, \\ f'''(x) = -\cos(x) & f'''(0) = -\cos(0) = -1. \end{array}$$

Sustituyendo en la fórmula de arriba, llegamos al primer polinomio que buscamos:

$$P^3_0(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

Consideremos ahora la función $Frtg(x)$ y calculemos sus tres primeras derivadas en 0:

$$\begin{array}{ll} g(x) = Frtg(x) & g(0) = Frtg(0) = 0 \\ g'(x) = 1 + Frtg(x)^2 & g'(0) = 1 + Frtg(0)^2 0 = 1 \\ g''(x) = 2Frtg(x) + 2Frtg(x)^3 & g''(0) = 2Frtg(0) + 2Frtg(0)^3 = 0 \\ g'''(x) = 2 + 8Frtg(x)^2 + 6Frtg(x)^4 & g'''(0) = 2 + 8Frtg(0)^2 + 6Frtg(0)^4 = 2 \end{array}$$

Sustituyendo de nuevo en la fórmula de arriba, pero utilizando esta vez $g(x)$ en lugar de $f(x)$, llegamos al otro polinomio que buscamos:

$$Q_0^3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}$$

Finalmente, para calcular ahora el límite que nos piden, podemos sustituir $Frsen(x)$ por $P_0^3(x)$ y $Frtg(x)$ por $Q_0^3(x)$, teniendo en cuenta dichos polinomios se comportan de igual forma que las correspondientes funciones en un entorno del 0. Así pues, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Frtg(x) - x}{x - Frsen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{Q_0^3(x) - x}{x - P_0^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x}{x - x + \frac{x^3}{6}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{3} = 2.$$

**Ejercicio 6.45.** La función $C(t)$ da la concentración (en mg/dl) de un fármaco en el torrente sanguíneo en función del tiempo (en horas):

$$C(t) = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$$

a. Calcular el polinomio de Maclaurin de orden 3.
b. Utilizando el polinomio anterior, calcular aproximadamente la concentración del fármaco transcurridos 15 minutos.

Solución

a. La fórmula del polinomio de Maclaurin de orden 3 para la función $C(t)$ es:

$$P_{C,0}^3(t) = C(0) + \frac{dC}{dt}(0)t + \frac{d^2C}{dt^2}(0)\frac{t^2}{2!} + \frac{d^3C}{dt^3}(0)\frac{t^3}{3!}$$

Necesitamos calcular las tres primeras derivadas:

$$
\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{2e^{-2t}}{(1+e^{-2t})^2},\\
\frac{d^2C}{dt^2} &= \frac{\frac{d}{dt}(2e^{-2t})(1+e^{-2t})^2 - 2e^{-2t}\frac{d}{dt}(1+e^{-2t})^2}{(1+e^{-2t})^4} =\\
&= \frac{-4e^{-2t}(1+e^{-2t})^2 - 2e^{-2t}2(1+e^{-2t})(-2e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^4} = \frac{-4e^{-2t}+4e^{-4t}}{(1+e^{-2t})^3},\\
\frac{d^3C}{dt^3} &= \frac{\frac{d}{dt}(-4e^{-2t}1+4e^{-4t})(1+e^{-2t})^3 - (-4e^{-2t}+4e^{-4t})\frac{d}{dt}(1+e^{-2t})^3}{(1+e^{-2t})^6} =\\
&= \frac{(8e^{-2t}-16e^{-4t})(1+e^{-2t})^3 - (-4e^{-2t}+4e^{-4t})3(1+e^{-2t})^2(-2e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^6} =\\
&= \frac{(8e^{-2t}-16e^{-4t})(1+e^{-2t}) - (-4e^{-2t}+4e^{-4t})(-6e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^4} =\\
&= \frac{(8e^{-2t}-8e^{-4t}-16e^{-6t}) - (24e^{-4t}-24e^{-6t})}{(1+e^{-2t})^4} =\\
&= \frac{8e^{-2t}-32e^{-4t}+8e^{-6t}}{(1+e^{-2t})^4}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo para $t = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
C(0) &= \frac{1}{1+e^{-2\cdot 0}} = \frac{1}{2},\\
\frac{dC}{dt}(0) &= \frac{2e^{-2\cdot 0}}{(1+e^{-2\cdot 0})^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2},\\
\frac{d^2C}{dt^2}(0) &= \frac{-4e^{-2\cdot 0}+4e^{-4\cdot 0}}{(1+e^{-2\cdot 0})^3} = \frac{-4+4}{2^3} = 0,\\
\frac{d^3C}{dt^3}(0) &= \frac{(8e^{-2\cdot 0}-32e^{-4\cdot 0}+8e^{-6\cdot 0})}{(1+e^{-2\cdot 0})^4} = \frac{8-32+8}{16} = -1.
\end{aligned}
$$

Y por último, sustituyendo en la fórmula del polinomio anterior se tiene que

$$P^3_{C,0}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + 0\frac{t^2}{2!} - 1\frac{t^3}{3!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3.$$

b. La concentración del fármaco transcurridos 15 minutos (0.25 horas) es aproximadamente

$$C(0.25) \approx P^3_{C,0}(0.25) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.25 - \frac{1}{6}0.25^3 = 0.6223958333 \text{ mg/dl}.$$

# 7 Series de números reales

**Ejercicio 7.1.** Demostrar que cualquier sucesión puede expresarse como una serie.

Tip

Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, veamos cómo podemos expresarla como una serie. Para ello, basta con construir la sucesión de las diferencias de dos términos consecutivos, es decir, la sucesión $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= a_1 \\
d_2 &= a_2 - a_1 \\
d_3 &= a_3 - a_2 \\
&\vdots \\
d_{n+1} &= a_{n+1} - a_n
\end{aligned}
$$

Resulta sencillo comprobar que $a_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, por lo que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)_{n=1}^{\infty} = \sum d_n$.

**Ejercicio 7.2.** Demostrar que la serie $\sum \frac{9}{10^n}$ converge y calcular su límite.

Solución

Los primeros términos de la serie son

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10} = 0.9$$
$$\sum_{i=1}^{2} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = 0.99$$
$$\sum_{i=1}^{3} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} = 0.999$$
$$\vdots$$

por lo que las sumas parciales cada vez están más cerca de 1 y se puede probar fácilmente que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = 1$. Para ello, dado un $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana se puede tomar $k \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{k} < \varepsilon$, de manera que $|\sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} - 1| < \frac{1}{10^k} < \frac{1}{k} < \varepsilon\ \forall n \geq k$.

**Ejercicio 7.3.** Si $\sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{n-1}{n+1}$, ¿cuál es el término general de la sucesión $a_n$? Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solución

Sea $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ la suma parcial de los $n$ primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Entones, el primer término de la sucesión es $a_1 = A_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i = \frac{1-1}{1+1} = 0$.
Por otro lado, $A_n = A_{n-1} + a_n$ por lo que $a_n = A_n - A_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n(n+1)}$.
Por último, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

**Ejercicio 7.4.** Demostrar que una serie geométrica $\sum ar^n$ converge si y solo si $|x| < 1$.

Pista

Utilizar la igualdad $(1 + r + r^2 + \cdots + r^n)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$.

Solución

Usando la igualdad $(1 + r + r^2 + \cdots + r^n)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$ se tiene

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = a\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}\right).$$

Si $|r| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = 0$, de manera que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a}{1-x}.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = \infty$, y la serie no converge.
Si $r = 1$ entonces $\sum_{i=0}^{n} 1^i = n+1$ que tampoco converge, y si $r = -1$, se obtiene una sucesión de sumas alternada, ya que $\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i = 1$ y $\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i = 0$, por lo que la serie tampoco converge.

**Ejercicio 7.5.** Un enfermo crónico toma cada día una pastilla con 200 mg de un principio activo. Su cuerpo es capaz de metabolizar diariamente el 90% de la cantidad de principio activo presente. ¿Qué cantidad de principio activo quedará en el cuerpo del enfermo tras $n$ días tomando la pastilla? ¿Qué cantidad de principio activo quedará en el cuerpo del enfermo a largo plazo?

Solución

Sea $A_n$ la cantidad de medicamento que queda en el cuerpo del enfermo tras $n$ días tomando la pastilla. Veamos cuáles son las cantidades de principio activo que quedan en el cuerpo del enfermo los primeros días.

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0.1 \cdot 200 \text{ mg}\\
A_2 &= 0.1(200 + 0.1 \cdot 200) = 0.1 \cdot 200 + 0.1^2 \cdot 200 = A_1 + 0.1^2 \cdot 200 \text{ mg}\\
A_3 &= 0.1(200 + 0.1 \cdot 200 + 0.1^2 \cdot 200) = 0.1 \cdot 200 + 0.1^2 \cdot 200 + 0.1^3 \cdot 200 = A_2 + 0.1^3 \cdot 200 \text{ mg}\\
&\vdots\\
A_n &= A_{n-1} + 0.1^n \cdot 200 \text{ mg}
\end{aligned}$$

Por tanto, el término general de la sucesión que subyace a la serie es $a_n = A_n - A_{n-1} = 200 \cdot 0.1^n$, de manera que se trata de la serie geométrica $\sum 200 \cdot 0.1^n$, y, por el ejercicio anterior, como $0.1 < 1$, la serie converge a $\sum_{n=1}^{\infty} 200 \cdot 0.1^n = 200\sum_{n=1}^{\infty} 0.1^n = 200\frac{1}{1-0.1} = 222.2222\cdots$ mg.

**Ejercicio 7.6.** Cuando una persona gasta una cantidad de dinero en un bien o servicio, la persona que recibe el dinero directa o indirectamente, también gasta un porcentaje $k$

de esa cantidad en otros bienes y servicios, mientras que ahorra el resto. En Economía, el valor $\frac{k}{100}$ se conoce como *propensión marginal al consumo* mientras que $1-\frac{k}{100}$ se conoce como *propensión marginal al ahorro*. Si una persona inicia el proceso gastando una cantidad $x$, qué cantidad total se habrá gastado después de $n$ transacciones? ¿Hacia dónde converge el gasto cuando se realiza un número infinito de transacciones? ¿A largo plazo, cuál es el efecto multiplicador sobre el gasto inicial de una propensión marginal al consumo de 0.6?

**Solución**

Sea $a_n$ el dinero total gastado en la transacción $n$. Veamos el total de dinero gastado en las primeras $n$ transacciones.

$$\begin{aligned}
a_0 &= x \\
a_1 &= x\frac{k}{100} \\
a_2 &= x\left(\frac{k}{100}\right)^2 \\
&\vdots \\
a_n &= x\left(\frac{k}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

Por tanto, el dinero total gastado tras $n$ transacciones será $\sum_{i=0}^{n} x\left(\frac{k}{100}\right)^i$, y como se trata de una serie geométrica, tal y como se ha visto en el Ejercicio 7.4, la suma vale

$$\sum_{i=0}^{n} x\left(\frac{k}{100}\right)^i = x\frac{1-\left(\frac{k}{100}\right)^{n+1}}{1-\frac{k}{100}}.$$

Como la razón es $\frac{k}{100} < 1$, la serie converge y

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\left(\frac{k}{100}\right)^n = \frac{x}{1-\frac{k}{100}},$$

es decir, la cantidad inicial dividida por la propensión marginal al ahorro.
Para una propensión marginal al consumo de 0.6 se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} x\,(0.6)^n = \frac{x}{1-0.6} = 2.5x$, así que se produce un efecto multiplicador del 2.5.

**Ejercicio 7.7.** Una cuenta de ahorro ofrece un 5% de interés anual. Una persona abre la cuenta de ahorro con un depósito de 2000€ y cada año que pasa hace un depósito de 1000€. Calcular la cantidad de dinero que habrá en la cuenta después de $n$ años de forma cerrada. ¿Converge la serie asociada?

Solución

Sea $A_n$ la cantidad de dinero en la cuenta tras $n$ años. Veamos cuáles son las cantidades en la cuenta durante los primeros años.

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2000 \cdot 1.05€ \\
A_2 &= ((2000 \cdot 1.05) + 1000))1.05€ = 2000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05€ \\
A_3 &= ((2000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05) + 1000)1.05€ \\
&= 2000 \cdot 1.05^3 + 1000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05€ \vdots
\end{aligned}$$

A partir de aquí, se intuye que la suma parcial de orden $n$ es

$$A_n = 2000 \cdot 1.05^n + \sum_{i=1}^{n-1} 1000 \cdot 1.05^i €.$$

Como se trata de una serie geométrica, haciendo uso de la pista del Ejercicio 7.4, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
A_n &= 2000 \cdot 1.05^n + 1000\frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1} - 1000 \\
&= 2000 \cdot 1.05^n + 20000(1.05^n - 1) - 1000 \\
&= 22000 \cdot 1.05^n - 21000€.
\end{aligned}$$

**Ejercicio 7.8.** Supongamos un experimento aleatorio que consiste en repetir una prueba con dos posibles resultados (éxito y fracaso) hasta que se obtiene el primer éxito (por ejemplo tirar una moneda hasta que sale la primera cara). La distribución de la variable aleatoria que mide el número de repeticiones hasta obtener el primer éxito se conoce como *distribución hipergeométrica* y su función de probabilidad es

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p,$$

donde $p$ es la probabilidad de que ocurra éxito en cada repetición de la prueba.

Una de las condiciones que debe cumplir una función de probabilidad de una variable aleatoria es que la suma de las probabilidades de todos los posibles valores de la variable debe ser 1. Demostrar que la función de probabilidad de la variable hipergeométrica lo cumple.

**Solución**

El conjunto de posibles valores que puede tomar la variable aleatoria $X$ es $\mathbb{N}$. Si consideramos la suma de las probabilidades de todos los posibles valores de la variable se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n p$, que, al tratarse de una serie geométrica de razón $(1-p) < 1$, converge, y como se ha visto en el Ejercicio 7.4, la suma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Por tanto, cumple la condición para ser una función de probabilidad.

**Ejercicio 7.9.** El conjunto de cantor es un subconjunto fractal del intervalo $[0,1]$ que se construye de manera recursiva eliminando en cada paso el tercio central de los intervalos que van resultando. El procedimiento sería el siguiente:

1. Quitar del intervalo $[0,1]$ el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
2. Quitar de los intervalos restantes, los intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.
3. Quitar de los intervalos restantes, los intervalos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ y $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$.
4. ...

Demostrar que la longitud total de todos los intervalos eliminados es 1, y que, a pesar de ello, el conjunto de Cantor tiene un número infinito de puntos. Se dice que este conjunto es un conjunto de medida nula, pero que ni es vacío ni numerable.

**Solución**

Sea $a_n$ la longitud de los segmentos eliminados en la etapa $n$. Veamos cuál es la longitud de los segmentos eliminados en las primeras etapas.
En la primera etapa se quita el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, y $a_1 = \frac{1}{3}$.
En la segunda etapa se quitan los intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, y por tanto, $a_n = 2\frac{1}{9}$.
En la tercera etapa se quitan los intervalos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ y $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$, y por tanto, $a_3 = 4\frac{1}{27}$.
En consecuencia, se deduce que $a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$.
Así pues, la suma de las longitudes de los intervalos quitados es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, que, al ser una serie geométrica con razón $\frac{2}{3} < 1$, converge, y como se ha visto en el Ejercicio 7.4, su suma vale

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Así pues, el conjunto de Cantor es de medida nula. Para ver que, a pesar de ello tiene infinitos números, basta con ver que contiene, entre otros, los números $\frac{1}{3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 7.10.** Haciendo uso del polinomio de Taylor del logaritmo, demostrar que una serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge y calcular su suma.

Solución

El polinomio de Taylor de grado $n$ de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto $a = 1$ es

$$\begin{aligned} P_{f,1}^n(x) &= 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\ &= 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n \end{aligned}$$

y en $x = 2$ se tiene

$$P_{f,1}^n(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} P_{f,1}^n(2) = \ln(2)$.

**Ejercicio 7.11.** Haciendo uso del polinomio de Maclaurin de la función exponencial, demostrar que una serie $\sum \frac{1}{n!}$ converge y calcular su suma.

Solución

El polinomio de Maclaurin de grado $n$ de la función $f(x) = e^x$ es

$$P_{f,0}^n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

y en $x = 1$ se tiene

$$P_{f,0}^n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} P_{f,0}^{n}(1) = e^1 = e$.

**Ejercicio 7.12.** Demostrar que las siguientes series divergen.

a. $\sum \frac{n^2}{n+1}$

b. $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

c. $\sum nFrsen\left(\frac{1}{n}\right)$

d. $\sum \frac{1}{2n}$

Solución

a. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$, por la condición de convergencia, la serie $\sum \frac{n^2}{n+1}$ diverge.

b. Como $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, por la condición de convergencia, la serie $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

c. Como $\lim_{n\to\infty} nFrsen\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, por la condición de convergencia, la serie $\sum nFrsen\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

d. $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ y como la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la serie $\sum \frac{1}{2n}$ también.

**Ejercicio 7.13.** Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Pista

Descomponer el término general de la sucesión subyacente a la serie en fraccione simples.

Solución

El término general de la sucesión se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente manera $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, que es una serie telescópica, de modo que la suma parcial de los $n$ primeros términos de la serie es

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Así pues,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

**Ejercicio 7.14.** Estudiar la convergencia de las siguientes series telescópicas.

a. $\sum \cos(n^2) - \cos((n+1)^2)$

b. $\sum Frsen\left(\frac{1}{n}\right) - Frsen\left(\frac{1}{n+1}\right)$

c. $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

d. $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2-1}$

Solución

a. Como se trata de una serie telescópica, se tiene que la suma parcial de orden $n$ es

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} \cos(i^2) - \cos((i+1)^2) \\ &= \cos(1) - \cos(2^2) + \cos(2^2) - \cos(3^2) + \cdots + \cos(n^2) - \cos((n+1)^2) \\ &= \cos(1) - \cos((n+1)^2). \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) - \cos((n+1)^2) &= \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \cos(1) - \cos((n+1)^2) \\ &= \cos(1) - \lim_{n\to\infty} \cos((n+1)^2). \end{aligned}$$

Pero como no existe $\lim_{n\to\infty} \cos((n+1)^2)$, la serie no converge.

b. Como se trata de una serie telescópica, se tiene que la suma parcial de orden $n$ es

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^{n} Frsen\left(\frac{1}{i}\right) - Frsen\left(\frac{1}{i+1}\right) \\
&= Frsen(1) - Frsen\left(\frac{1}{2}\right) + Frsen\left(\frac{1}{2}\right) - Frsen\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + Frsen\left(\frac{1}{n}\right) - Frsen\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= Frsen(1) - Frsen\left(\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} Frsen\left(\frac{1}{n}\right) - Frsen\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} Frsen(1) - Frsen\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= Frsen(1) - \lim_{n\to\infty} Frsen\left(\frac{1}{n+1}\right) = Frsen(1),
\end{aligned}
$$

y, por tanto, la serie converge a $Frsen(1)$.

c. $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum \ln(n+1) - \ln(n)$ que de nuevo es una serie telescópica, por lo que su suma parcial de orden $n$ es

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^{n} \ln(i+1) - \ln(i) \\
&= \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \cdots + \ln(n+1) - \ln(n) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,
$$

y, por tanto, la serie diverge.

d. $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, que también es una serie telescópica, cuya suma parcial de orden $n$ es

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2},$$

y, por tanto, la serie converge a $\frac{3}{2}$.

**Ejercicio 7.15.** Estudiar la convergencia de las siguientes series comparándolas con otras conocidas.

a. $\sum \frac{2n}{4n^3-n+1}$

b. $\sum \frac{\ln(n)}{n}$

c. $\sum \frac{3^n}{2^n+1}$

d. $\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$

e. $\sum \frac{e^{1/n}}{n}$

f. $\sum Frsen\left(\frac{1}{n}\right)$

g. $\sum \frac{n+1}{n!}$

h. $\sum \frac{n^n}{n!}$

Solución

a. $\frac{2n}{4n^3-n+1} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que se trata de una serie de términos positivos. Como $4n^3 - n + 1 > 4n^3 - n > 0\ \forall n \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{2n}{4n^3-n+1} < \frac{2n}{4n^3-n} = \frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así pues, por el criterio de comparación de series, $\sum \frac{2n}{4n^3-n+1}$ converge sí $\sum \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ converge. Pero esta última serie es una serie telescópica, y como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, converge, de manera que $\sum \frac{2n}{4n^3-n+1}$ también converge.

b. $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que se trata de una serie de términos positivos. Como $\ln(n) > 1\ \forall n \geq 3$, se tiene que $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}\ \forall n \geq 3$, y como $\sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge, por el criterio de la comparación de series, $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ también diverge.

c. $\frac{3^n}{2^n+1} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Como $2^n + 1 > 2^n\ \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{3^n}{2n+1} < \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Y como $\sum \left(\frac{3}{2}\right)^n$ diverge al ser una serie geométrica de razón $\frac{3}{2} > 1$, por el criterio de comparación de series se tiene que $\sum \frac{3^n}{2^n+1}$ también diverge.

d. $\frac{n+1}{\sqrt{n^3}} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Por otro lado,

$$\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{n+1}{n^{3/2}} = \sum \left(\frac{n}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}\right) = \sum \frac{1}{n^{1/2}} + \sum \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Como $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ es una serie $p$ con $p < 1$, diverge, y por tanto, $\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ también diverge.

e. $\frac{e^{1/n}}{n} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Como $e^{1/n} > 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{e^{1/n}}{n} > \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$, y como $\sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge, por el criterio de la comparación de series, $\sum \frac{e^{1/n)}}{n}$ también diverge.

f. $Frsen\left(\frac{1}{n}\right) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Haciendo el cambio de variable $x = \frac{1}{n}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Frsen\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)}{x} = 1,$$

al ser $Frsen(x)$ y $x$ infinitésimos equivalentes en 0. Así pues, por el criterio del cociente, se tiene que $\sum Frsen\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si y solo si $\sum \frac{1}{n}$ converge, pero $\sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge, y por tanto, $\sum Frsen\left(\frac{1}{n}\right)$ también diverge.

g. $\frac{n+1}{n!} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Por otro lado, se tiene

$$\sum \frac{n+1}{n!} = \sum \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} = \sum \frac{1}{n-1!} + \sum \frac{1}{n!},$$

y como se ha visto en el Ejercicio 7.11, tanto $\sum \frac{1}{(n-1)!}$ como $\sum \frac{1}{n!}$ convergen, por lo que $\sum \frac{n+1}{n!}$ también converge.

h. $\frac{n^n}{n!} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Por otro lado, se tiene

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \frac{n}{n-1} \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{1} \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y como $\sum n$ diverge, por el criterio de comparación de series, $\sum \frac{n^n}{n!}$ también diverge.

**Ejercicio 7.16.** Demostrar que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series de términos positivos entonces se cumple que

a. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

b. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

Solución

a. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Entonces, para $\varepsilon = 1$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{a_n}{b_n} < 1\ \forall n \geq k$, y por tanto, $a_n < b_n\ \forall n \geq k$. Así pues, por el criterio de comparación de series, si $\sum_{n\geq k} b_n$ converge, $\sum_{n\geq k} a_n$ también, y como un número finito de términos no influye en la convergencia de una serie, $\sum a_n$ converge.

b. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Entonces, para $\varepsilon = 1$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{a_n}{b_n} > 1\ \forall n \geq k$, y por tanto, $a_n > b_n\ \forall n \geq k$. Así pues, por el criterio de comparación de series, si $\sum_{n\geq k} b_n$ diverge, $\sum_{n\geq k} a_n$ también, y como un número finito de términos no influye en la convergencia de una serie, $\sum a_n$ diverge.

**Ejercicio 7.17.** Dada una serie de términos positivos $\sum a_n$ convergente, estudiar si las siguientes series convergen.

a. $\sum a_n^2$

b. $\sum \frac{1}{a_n^3}$

c. $\sum \ln(1+a_n)$

d. $\sum Frsen(a_n)$

Solución

a. Por el criterio de divergencia, como $\sum a_n$ converge, se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por otro lado, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, y por lo visto en el Ejercicio 7.16, como $\sum a_n$ converge, $\sum a_n^2$ también.

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$, ya que, según el apartado anterior $\sum a_n^2$ converge, y por lo visto en el Ejercicio 7.16, como $\sum a_n$ converge, $\sum a_n^3$ también. Finalmente, como $\sum a_n^3$ converge, la serie de los inversos $\sum a_n^{-3}$ diverge.

c. Por el criterio de divergencia, como $\sum a_n$ converge, se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, y haciendo el cambio de variable $x = a_n$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

ya que $\ln(1+x)$ y $x$ son infinitésimos equivalentes en 0. Por tanto, por el criterio del cociente, $\sum \ln(1+a_n)$ también converge.

d. Por el criterio de divergencia, como $\sum a_n$ converge, se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, y haciendo el cambio de variable $x = a_n$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Frsen(a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0} \frac{Frsen(x)}{x} = 1,$$

ya que $Frsen(x)$ y $x$ son infinitésimos equivalentes en 0. Por tanto, por el criterio del cociente, $\sum Frsen(a_n)$ también converge.

**Ejercicio 7.18.** Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas.

a. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

b. $\sum (-1)^n e^{-n}$

c. $\sum (-1)^n Frsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$

d. $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Solución

a. $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como además $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ converge.

b. $(e^{-n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $e^{-n} > e^{-(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como además $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum(-1)^n e^{-n}$ converge.

c. $\left(Frsen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $Frsen\left(\frac{\pi}{n}\right) > Frsen\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ $\forall n \geq 2$. Como además $\lim_{n\to\infty} Frsen\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum(-1)^n Frsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ converge.

d. Sea $A_n$ la suma parcial de orden $n$ de la serie $\sum(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Si desarrollamos las primeras sumas parciales se tiene

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} \\
A_2 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\
A_3 &= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \\
A_3 &= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \\
&\vdots \\
A_n &= 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Como la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente, ya que $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, y por tanto, $\sum(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1+2\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ también converge.

**Ejercicio 7.19.** El movimiento de un muelle amortiguado con un peso colgado de él es oscilante. Si la posición que ocupa el peso en cada periodo de oscilación $n$ viene dado por la serie $\sum(-1)^{n-1}e^{-n/2}$, ¿llegará a estabilizarse en una posición de equilibrio a largo plazo?

Solución

$(e^{-n/2})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $e^{-n/2} > e^{-(n+1)/2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como además $\lim_{n\to\infty} e^{-n/2} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum(-1)^{n-1}e^{-n/2}$ converge, así que el peso colgado del muelle se estabilizará a largo plazo en la posición $\sum(-1)^{n-1}e^{-n/2}$.

**Ejercicio 7.20.** Estudiar la convergencia absoluta de las siguientes series.

a. $\sum \frac{(-2)^n}{n^2}$.

b. $\sum \frac{n}{3^n}$

c. $\sum \frac{Frsen(n)}{n^2}$.

d. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

e. $\sum \left(\frac{n^2+1}{2n^2-1}\right)^n$

f. $\sum \frac{n!}{n^n}$

Solución

a. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1,$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{(-2)^n}{n^2}$ diverge.

b. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1,$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{n}{3^n}$ es absolutamente convergente.

c. Como $\left|\frac{Frsen(n)}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge al ser una serie $p$ con $p = 2 > 1$, por el criterio de comparación de series, $\sum \left|\frac{Frsen(n)}{n^2}\right|$ converge, y por tanto, $\sum \frac{Frsen(n)}{n^2}$ es absolutamente convergente.

d. $\sum \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| = \sum \frac{1}{\ln(n)}$ $\forall n > 1$, y como $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ $\forall n > 1$, por el criterio de comparación de series, $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge ya que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Por tanto, $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ no es absolutamente converge.

e. Como

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2+1}{2n^2-1}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2} < 1,$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \left(\frac{n^2+1}{2n^2-1}\right)^n$ es absolutamente convergente.

f. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,\end{aligned}$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{n!}{n^n}$ es absolutamente convergente.

**Ejercicio 7.21.** Demostrar que el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum c_n x^n$ se puede calcular mediante las siguientes fórmulas

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{o} \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Solución

Para probar la validez de la primera fórmula utilizaremos el criterio de la raíz para convergencia absoluta de series.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Y para probar la validez de la segunda fórmula utilizaremos el criterio de la razón para la convergencia absoluta de series.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

**Ejercicio 7.22.** Calcular el radio de convergencia y el dominio de convergencia puntual de las siguientes series de potencias.

a. $\sum n x^n$

b. $\sum \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$

c. $\sum n!(x-1)^n$

d. $\sum \frac{(x-2)^n}{n^3}$

e. $\sum \frac{n!(x-3)^n}{n^n}$

f. $\sum Frsen\left(\frac{1}{n}\right)(x+1)^n$

Solución

a. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Para $x = 1$ se tiene la serie $\sum n$, que diverge, y para $x = -1$ se tiene la serie $\sum(-1^n)n$, que es una serie alternada pero también diverge ya que $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $(-1, 1)$.

b. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1.$$

Para $x = 1$ se tiene la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, que es una serie alternada que converge ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, y para $x = -1$ se tiene la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que diverge al ser una serie $p$ con $p \leq 1$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $(-1, 1]$.

c. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por tanto, la serie de potencias solo converge en $x = 1$.

d. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1.$$

Por tanto, la serie de potencias converge para $|x-2| < 1$, es decir, en $(1, 3)$. Para $x = 1$ se tiene la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$, que es una serie alternada que converge ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, y para $x = -1$ se tiene la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ que también converge al ser una serie $p$ con $p > 1$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $[1, 3]$.

e. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Por tanto, la serie de potencias converge para $|x-3| < e$, es decir, en $(3-e, 3+e)$. Para $x = 3+e$ se tiene la serie $\sum \frac{n!e^n}{n^n}$ diverge ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n} = \infty$, y para $x = 3-e$ se tiene la serie $\sum(-1)^n \frac{n!e^n}{n^n}$, que es una serie alternada que también diverge por la misma razón que la anterior. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $(3-e, 3+e)$.

f. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{Frsen\left(\frac{1}{n}\right)}{Frsen\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\frac{-1}{n^2}}{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{-1}{(n+1)^2}} \right| \qquad \text{(L'Hôpital)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Por tanto, la serie de potencias converge para $|x+1| < 1$, es decir, en $(-2, 0)$. Para $x = 0$ se tiene la serie $\sum Frsen\left(\frac{1}{n}\right)$ que diverge según se vio en el Ejercicio 7.15, y para $x = -2$ se tiene la serie $\sum(-1)^n Frsen\left(\frac{1}{n}\right)$, que es una serie alternada que converge al ser $\lim_{n\to\infty} Frsen\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $[-2, 0)$.

**Ejercicio 7.23.** Demostrar que la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Demostrar también que la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ cumple la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$. ¿Qué otras funciones conoces que la cumplen?

Demostrar finalmente que $f(x) = e^x$.

Solución

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|xx^n|}{(n+1)n!}}{\frac{|x^n|}{n!}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0\ \forall x\in\mathbb{R},$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente $\forall x\in\mathbb{R}$. Sea $A_n(x)$ la función de la suma parcial de orden $n$ de la serie anterior para cualquier $x\in\mathbb{R}$, es decir,

$$A_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Entonces, su derivada vale

$$\begin{aligned}A_n'(x) &= (1)' + (x)' + \left(\frac{x^2}{2!}\right)' + \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^4}{4!}\right)' + \cdots + \left(\frac{x^n}{n!}\right)'\\ &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = A_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Así pues, si tomamos la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} A_n(x)$, su derivada vale

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} A_n'(x) = \lim_{n\to\infty} A_{n-1}(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x) = f(x).$$

Por tanto, la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ cumple la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$. Otra función conocida que cumple esa ecuación diferencial es $g(x) = e^x$. Veamos que $f(x) = e^x$.

**Ejercicio 7.24.** Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular la suma de la serie de potencias $\sum \frac{(x+2)^n}{(n+1)!}$.

Solución

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{(x+2)(n+1)!}=\frac{1}{x+2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}=\frac{e^{x+2}-1}{x+2}.$$

**Ejercicio 7.25.** La *distribución de Poisson* es una de las distribuciones de probabilidad más importantes, ya que explica la probabilidad de que ocurra un número determinado de fenómenos puntuales en un soporte continuo (como por ejemplo el número de llamadas telefónicas que llegan a un servicio de atención al cliente en un intervalo de tiempo). Su función de probabilidad es

$$P(n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\ \forall n\in\mathbb{N},$$

donde $\lambda>0$ es su media.

Demostrar que esta función es una función de masa de probabilidad.

Solución

El conjunto de posibles valores que puede tomar la variable aleatoria $X$ es $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Si consideramos la suma de las probabilidades de todos los posibles valores de la variable se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Como se ha visto en el Ejercicio 7.23, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\ \forall x\in\mathbb{R}$, en particular se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{\lambda}$, por lo que finalmente se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1,$$

y se cumple la condición para ser una función de probabilidad.

**Ejercicio 7.26.** Calcular la serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos dados.

a. $f(x)=\cos(x)$ en $a=\pi$.

b. $g(x)=\ln(x+1)$ en $a=0$.

c. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $a = 1$.

Solución

a. Calculamos las primeras derivadas de $f$ en $\pi$ para llegar a la expresión de la derivada $n$-ésima.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) & f(\pi) &= \cos(\pi) = -1, \\ f'(x) &= -Frsen(x) & f'(\pi) &= -Frsen(\pi) = 0, \\ f''(x) &= -\cos(\pi) & f''(\pi) &= -\cos(\pi) = 1, \\ f'''(x) &= Frsen(x) & f'''(\pi) &= Frsen(\pi) = 0 \\ f''''(x) &= \cos(x) & f''''(\pi) &= \cos(\pi) = -1. \end{aligned}$$

Así pues, las derivadas se repiten en órdenes múltiplos de 4, y la expresión general de la derivada de orden $n$ en $\pi$ es

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ (-1)^{k+1} & \text{si } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto, la serie de Taylor de $f$ en $\pi$ es

$$\sum \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}(x-\pi)^{2k}.$$

b. Calculamos las primeras derivadas de $g$ en 0 para llegar a la expresión de la derivada $n$-ésima.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x+1) & g(0) &= \ln(1) = 0, \\ g'(x) &= (x+1)^{-1} & g'(0) &= 1^{-1} = 1, \\ g''(x) &= -(x+1)^{-2} & g''(0) &= -(1)^{-2} = -1, \\ g'''(x) &= 2(x+1)^{-3} & g'''(0) &= 2(1)^{-3} = 2, \\ g''''(x) &= -3!(x+1)^{-4} & g''''(0) &= -3!(1)^{-4} = -3!. \end{aligned}$$

Así pues, la derivada de orden $n$ en 0 es

$$g^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

c. Calculamos las primeras derivadas de $h$ en 1 para llegar a la expresión de la derivada $n$-ésima.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} & h(1) &= 1^{-1/2} = 1,\\
h'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} & h'(1) &= -\frac{1}{2}1^{-3/2} = -\frac{1}{2},\\
h''(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}x^{-5/2} & h''(1) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}1^{-5/2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2},\\
h'''(x) &= -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}x^{-7/2} & h'''(1) &= -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}1^{-7/2} = -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Así pues, la derivada de orden $n$ en 1 es

$$h^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{2^n},$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum (-1)^n \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{2^n n!}(x-1)^n.$$

**Ejercicio 7.27.** Construir la serie de Maclaurin de la función $f(x) = (1+x)^k$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$ y estudiar su dominio de convergencia. ¿Qué serie se obtiene cuando $k \in \mathbb{N}$?

Solución

Calculamos las primeras derivadas de $f$ en 0 para llegar a la expresión de la derivada $n$-ésima.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1^k = 1,\\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k(1)^{k-1} = k,\\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1)(1)^{k-2} = k(k-1),\\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2)(1)^{k-3} = k(k-1)(k-2).
\end{aligned}
$$

Así pues, la derivada de orden $n$ en 0 es

$$f^{(n)}(0) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n.$$

Cuando $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la derivada de orden $k$ es

$$f^k(x) = k(k-1)\cdots(k-k+1)(1+x)^{k-k} = k!$$

y, a partir de aquí las siguientes derivadas se anulan, por lo que, al sustituir en la fórmula de las serie de Maclaurin se obtiene la suma finita

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{i=1}^{k} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-i+1)}{i!}x^i = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}x^i,$$

que es el desarrollo del binomio.

**Ejercicio 7.28.** Calcular la serie de Maclaurin de la función $f(x) = Frarctg(x)$ y utilizarla para obtener una serie cuya suma sea $\pi$.

Solución

Calculamos las primeras derivadas de $f$ en 0 para llegar a la expresión de la derivada $n$-ésima.

$$\begin{aligned}
f(x) &= Frarctg(x) & f(0) &= Frarctg(0) = 0,\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} & f'(0) &= 1^{-1} = 1,\\
f''(x) &= -(1+x^2)^{-2}2x & f''(0) &= -(1)^{-2}2\cdot 0 = 0,\\
f'''(x) &= 2(1+x^2)^{-3}4x^2 - 2(1+x^2)^{-2} & f'''(0) &= 2(1)^{-3}4\cdot 0 - 2(1)^{-2} = -2.\\
f''''(x) &= -3!(1+x^2)^{-4}2^3x^3 + 4!(1+x^2)^{-3}x & f''''(0) &= -3!(1)^{-4}2^3\cdot 0^3 + 4!(1)^{-3}0 = 0.\\
f'''''(x) &= 4!(1+x^2)^{-5}2^4x^4 - 288(1+x^2)^{-5}x^2 + 4!(1+x^2)^{-3} & f''''(0) &= 4!.
\end{aligned}$$

Así pues, la derivada de orden $n$ en 0 es

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ (-1)^k(2k)! & \text{si } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum \frac{(-1)^k(2k)!}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sum(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Se puede probar que el radio de convergencia de esta serie es $|x| \leq 1$, por lo que para $x = 1$ se tiene que

$$\sum(-1)^k\frac{1^{2k+1}}{2k+1} = \sum\frac{(-1)^k}{2k+1} = Frarctg(1) = \pi/4,$$

de manera que

$$4\sum\frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi.$$

**Ejercicio 7.29.** Usando desarrollos de Taylor, calcular los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{Frarctg(x)-x}{x^3}$

Solución

a. El desarrollo de Maclaurin de la función $\ln(1+x)$ es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ con dominio de convergencia $(-1, 1]$. Así que sustituyendo en el límite se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n} = -1/2.$$

b. El desarrollo de Maclaurin de la función $Frarctg(x)$ es $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ con dominio de convergencia $(-1,1)$. Así que sustituyendo en el límite se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{Frarctg(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{2n+1} = -1/3.$$

# 8 Integrales de funciones

**Ejercicio 8.1.** Calcular las sumas inferior y superior de Riemann de las siguientes funciones en el intervalo $[0, 1]$, tomando particiones de igual tamaño con $n$ puntos, desde $n = 2$ hasta $n = 5$.

a. $f(x) = 1 - x$
b. $g(x) = x^2$
c. $h(x) = e^{-x}$

Tip

Tomaremos particiones de igual tamaño $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

| $n$ | $s(f, P_n)$ | $S(f, P_n)$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.25 | 0.75 |
| 3 | 1/3 | 2/3 |
| 4 | 0.375 | 0.625 |
| 5 | 0.4 | 0.6 |

a.

| $n$ | $s(f, P_n)$ | $S(f, P_n)$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.125 | 0.625 |
| 3 | 0.1852 | 0.5185 |
| 4 | 0.2188 | 0.4687 |
| 5 | 0.24 | 0.44 |

b.

| $n$ | $s(f, P_n)$ | $S(f, P_n)$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.4872 | 0.8033 |
| 3 | 0.5326 | 0.7433 |
| 4 | 0.5564 | 0.7144 |
| 5 | 0.571 | 0.6974 |

c.

**Ejercicio 8.2.** Usar las sumas inferiores y superiores de Riemann para dar una aproximación del área contenida entre la gráfica de la función $Frsen(x)$ y el eje $x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$, usando 4 rectángulos de igual base.

Solución

Tomando la partición $P = \{0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/4, \pi/2\}$ se tiene

$$s(f, P) = Frsen(0)\frac{\pi}{8} + Frsen\left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} + Frsen\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{8} + Frsen\left(\frac{3\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} = 0.7908.$$

$$S(f, P) = Frsen\left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} + Frsen\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{8} + Frsen\left(\frac{3\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} + Frsen\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{8} = 1.1835.$$

**Ejercicio 8.3.** Calcular la integral inferior y superior de Riemann de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es una función integrable Riemann?

**Pista**

Usar las fórmulas $\sum_{n=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Solución**

Para calcular las sumas inferiores y superiores de Riemann utilizaremos la partición $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$.
Como $f(x) = x^2$ es una función monótona creciente en $[0, 1]$, el mínimo en cada subintervalo se alcanzará en el extremo inferior y el máximo en el superior.

$$\begin{aligned}
s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i^2 - 2i + 1) = \frac{1}{n^3} \left( \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right) \\
&= \frac{1}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \\
S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}
\end{aligned}$$

Para calcular las integrales inferior y superior, basta con calcular el límite cuando $n \to \infty$ de las sumas inferiores y superiores, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\underline{\int_0^1} x^2 &= \lim_{n \to \infty} s(f, P_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} \\
\overline{\int_0^1} x^2 &= \lim_{n \to \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Como $\underline{\int_0^1} x^2 = \overline{\int_0^1} x^2 = \frac{1}{3}$, la función $f(x) = x^2$ es integrable Riemann en $[0, 1]$ y $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$.

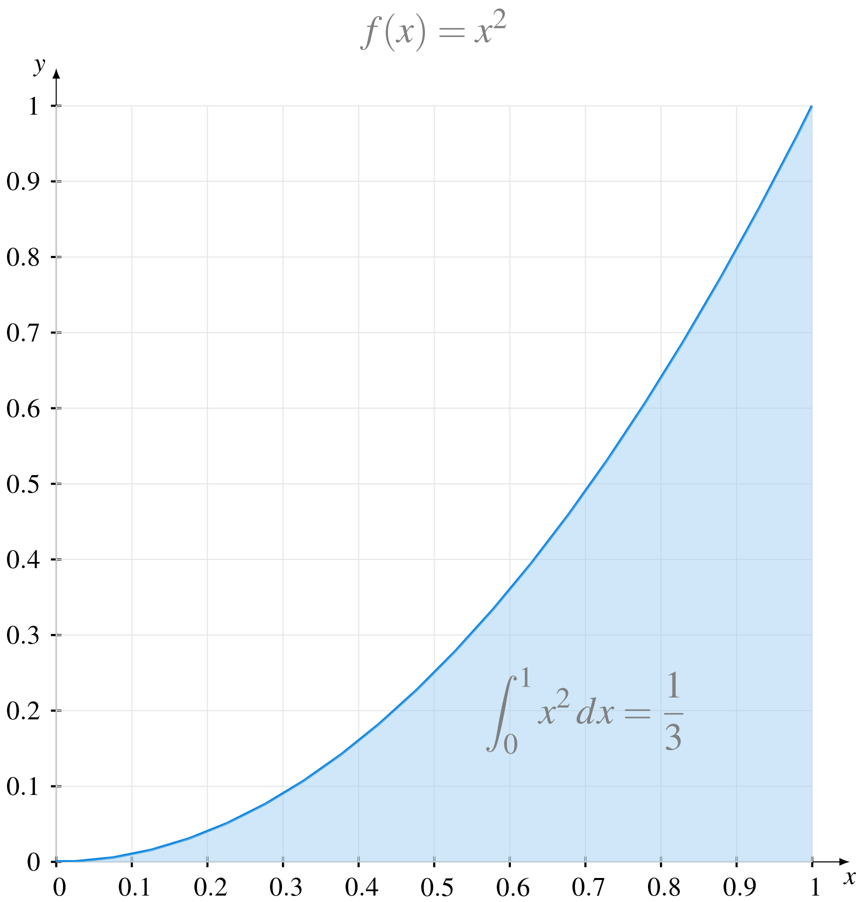



Figura 8.1: Integral de Riemann de $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$.

**Ejercicio 8.4.** Calcular la integral de Riemann de la función $f(x) = x^3 - 2x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

**Pista**

Usar la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

**Solución**

Aplicando la linealidad de la integral, se tiene que

$$\int_0^1 x^3 - 2x^2\,dx = \int_0^1 x^3\,dx - 2\int_0^1 x^2\,dx$$

Para calcular $\int_0^1 x^3\,dx$ seguiremos el mismo procedimiento del ejercicio anterior. Tomando la partición $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$.
Como $f(x) = x^3$ es una función monótona creciente en $[0,1]$, el mínimo en cada subintervalo se alcanzará en el extremo inferior y el máximo en el superior.

$$\begin{aligned}
s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i^3 - 3i^2 + 3i - 1) = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{n^4}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&= \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4} \\
S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4}
\end{aligned}$$

Para calcular las integrales inferior y superior, basta con calcular el límite cuando $n \to \infty$ de las sumas inferiores y superiores, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\underline{\int_0^1} x^3 &= \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \\
\overline{\int_0^1} x^2 &= \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Como $\underline{\int_0^1} x^2 = \overline{\int_0^1} x^2 = \frac{1}{4}$, la función $f(x) = x^3$ es integrable Riemann en $[0,1]$ y $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$.
Así pues, utilizando el resultado del ejercicio anterior se tiene

$$\int_0^1 x^3 - 2x^2\,dx = \int_0^1 x^3\,dx - 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{4} - 2\frac{1}{3} = \frac{-5}{12}$$

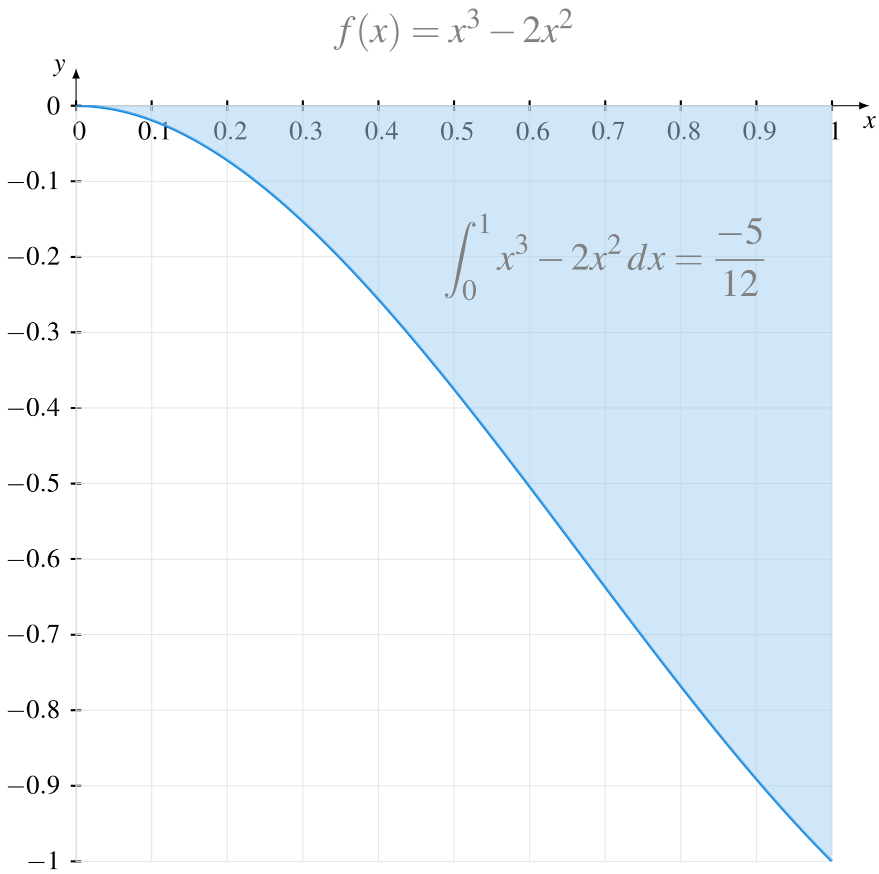



Figura 8.2: Integral de Riemann de $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $[0, 1]$.

**Ejercicio 8.5.** Calcular la integral de Riemann de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[a, b]$.

**Pista**

Usar la sucesión de particiones $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ con $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = a(1+c)^i$ para $i = 1, \dots, n$.

**Solución**

Sea $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = a(1+c)^i$ para $i = 1, \dots, n$ una partición del intervalo $[a, b]$. Como el último punto de la partición debe ser $b$, se debe cumplir $a(1+c)^n = b$, de donde se deduce que $c = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1$.

Calcularemos la suma superior de Riemann de $f$ en el intervalo $[a,b]$. Como $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función monótona decreciente, se alcanza el máximo en el extremo inferior de cada subintervalo. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}}(a(1+c)^i - a(1+c)^{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a(1+c)^{i-1}}(ca(1+c)^{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c = nc = n\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) \\
&= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Para calcular la integral superior de Riemann, basta con calcular el límite de las sumas superiores cuando $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f &= \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{x} - 1}{x} && (x = \tfrac{1}{n}) \\
&= \lim_{n\to 0} \left(\frac{b}{a}\right)^{x} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a). && \text{(L'Hôpital)}
\end{aligned}$$

Del mismo modo se puede probar que $\underline{\int_a^b} f = \ln(b) - \ln(a)$, por lo que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) - \ln(a)$.

**Ejercicio 8.6.** Demostrar que si $f$ es una función integrable Riemann en un intervalo $I = [a,b]$, se puede calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante sumas de Riemann tomando como altura de los rectángulos el valor de la función en cualquier punto de los subintervalos de la partición.

Solución

Si $f$ es una función integrable en $I = [a,b]$, por el criterio de integrabilidad de Riemann, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$, es decir, existe una sucesión de particiones $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) - s(f,P_n) = 0$.
Sea $x_i^*$ cualquier valor del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como $s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

con $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ con $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, se cumple que

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, P_n)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

**Ejercicio 8.7.** Demostrar que $1 \leq \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq 2$.

Solución

Por las propiedades de la integral (ver corolario), sabemos que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

donde $m$ y $M$ son el mínimo y el máximo de la función $f$ en el intervalo $[a, b]$.
En el caso concreto del ejercicio se tiene que $f'(x) = \frac{-2x}{x^4+2x^2+1}$ que se solo se anula en $x = 0$. Estudiando el signo de la derivada a la izquierda y la derecha del punto crítico se concluye fácilmente que $f$ alcanza un máximo relativo en este punto y $f(0) = 1$. Por otro lado $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$, por lo que se puede concluir que el mínimo absoluto de la función en $[-1, 1]$ es $m = \frac{1}{2}$ y el máximo absoluto $M = 1$. Y aplicando el corolario anterior se tiene

$$\frac{1}{2}(1-(-1)) = 1 \leq \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq 1(1-(-1)) = 2.$$

**Ejercicio 8.8.** Demostrar que si $f$ es una función acotada en el intervalo $[a, b]$ que es continua en $[a, b]\ \ \{c\}$, con $c \in [a, b]$, entonces $f$ es integrable Riemann en $[a, b]$

**Ejercicio 8.9.** Calcular las siguientes integrales definidas

a. $\int_1^2 x^4 - 2x\,dx$

b. $\int_0^\pi Frsen(x)\,dx$

c. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

d. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

e. $\int_1^e \ln(x)\,dx$

f. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^3+x^2+x}\,dx$

g. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2\,dx$

h. $\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

i. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos(x)\,dx$

j. $\int_0^{\pi/4} \frac{tg(x)^3}{\cos(x)^2}\,dx$

**Solución**

a. $\int_1^2 x^4 - 2x\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^2\right]_1^2 = \frac{16}{5}.$

b. $\int_0^\pi Frsen(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2.$

c. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [Frarctg]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$

d. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left[2Frarcsen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right]_{-2}^2 = 2\pi.$

e. $\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]_1^e = 1.$

f. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^3+x^2+x}\,dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}Frarctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^2 \approx 0.0782.$

g. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{Frsen(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} \approx 0.8172.$

h. $\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = [x + 2\sqrt{x}]_1^2 = -2\sqrt{3} + 5.$

i. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos(x)\,dx = \left[e^x\left(\frac{Frsen(x)+\cos(x)}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{e^{-\pi/2}+e^{\pi/2}}{2}.$

j. $\int_0^{\pi/4} \frac{tg(x)^3}{\cos(x)^2}\,dx = \left[\frac{Frtg(x)^4}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$

**Ejercicio 8.10.** Calcular el área encerrada entre la gráfica de las siguientes funciones y el eje $x$ en los intervalos dados.

a. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ en $[1, 2]$.

b. $g(x) = \cos(x)$ en $[0, 2\pi]$.

c. $h(x) = xe^{-x}$ en $[-1, 2]$.

d. $i(x) = \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ en $[-1, 1]$.

Solución

a. $\int_1^2 \left|\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right| \, dx = -\left[x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x\right]_1^2 = 1 - \ln(2)$.

b.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\cos(x)| \, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x) \, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x) \, dx \\ &= [Frsen(x)]_0^{\pi/2} - [Frsen(x)]_{\pi/2}^{3\pi/2} + [Frsen(x)]_{3\pi/2}^{2\pi} = 1 + 2 + 1.\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} |xe^{-x}| \, dx &= -\int_{-1}^{0} xe^{-x} \, dx + \int_0^2 xe^{-x} \, dx \\ &= -\left[-e^{-x}(1+x)\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-x}(1+x)\right]_0^2 = 1 + 1 - \frac{3}{e^2} = 2 - \frac{3}{e^2}\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \left|\frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\right| dx &= -\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} \, dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} \, dx \\ &= -\left[\sqrt{3-2x-x^2} - Frarcsen\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{-1}^{0} \\ &+ \left[\sqrt{3-2x-x^2} - Frarcsen\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{-\pi}{6} + 2\sqrt{3} - 2\end{aligned}$$

**Ejercicio 8.11.** Calcular el area comprendida entre las funciones $f$ y $g$ en los intervalos dados en los siguientes apartados:

a. $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = -\cos(x)$ en $[0, 2\pi]$.

b. $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 2]$.

c. $f(x) = Frtg(x)$ y $g(x) = x$ en $[-1, 1]$.

d. $f(x) = 2^{-x}$ y $g(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ en $[0, 2]$.

Solución

a.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\cos(x) + \cos(x)|\, dx &= \int_0^{\pi/2} 2\cos(x)\, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2\cos(x)\, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 2\cos(x)\, dx \\ &= [2Frsen(x)]_0^{\pi/2} - [2Frsen(x)]_{\pi/2}^{3\pi/2} + [2Frsen(x)]_{3\pi/2}^{2\pi} \\ &= 2 + 4 + 2 = 8\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^2 - \sqrt{x}|\, dx &= \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx + \int_1^2 x^2 - \sqrt{x}\, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 3 = \frac{-4\sqrt{2} + 10}{3}.\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |Frtg(x) - x|\, dx &= \int_{-1}^0 x - Frtg(x)\, dx + \int_0^1 Frtg(x) - x\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|\cos(x)|\right]_{-1}^1 + \left[-\frac{x^2}{2} - \ln|\cos(x)|\right]_0^1 \\ &= 0.1156 + 0.1156 = 0.2313.\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left|2^{-x} - \frac{x^2}{1+x^3}\right| dx &= \int_0^1 2^{-x} - \frac{x^2}{1+x^3}\, dx + \int_1^2 \frac{x^2}{1+x^3} - 2^{-x}\, dx \\ &= \left[\frac{-2^{-x}}{\ln(2)} - \frac{\ln|x^3+1|}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{\ln|x^3+1|}{3} + \frac{2^{-x}}{\ln(2)}\right]_1^2 \\ &= 0.4903 + 0.1407 = 0.631.\end{aligned}$$

**Ejercicio 8.12.** Calcular el área encerrada entre la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $y = 2x - 1$.

**Solución**

Igualando las dos ecuaciones obtenemos los puntos donde se cortan la parábola y la recta.

$$2x - x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Así pues, el área encerrada entre la parábola y la recta es

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |2x - x^2 - (2x-1)|\, dx = \int_{-1}^{1} -x^2 + 1\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} \\ = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

**Ejercicio 8.13.** Para evaluar un test diagnóstico se suele utilizar la curva ROC (Receiver Operating Characteristics) que resulta de representar la razón de verdaderos positivos (sensibilidad) frente a la razón de falsos positivos (1-especificidad) para los diferentes umbrales de positivo del test. Esta curva se representa en el cuadrante $[0,1] \times [0,1]$ y está siempre por encima de la recta $y = x$ que representa un diagnóstico aleatorio. El área por debajo de la curva ROC se conoce como AUC (area under the curve), y cuanto mayor sea, mejor es el test diagnóstico.

Se dispone de dos test diagnósticos para detectar el virus SARS-CoV, el primero con una curva ROC $f(x) = \sqrt{x}$ y el segundo con una curva $g(x) = -x^2 + 2x$. ¿Qué test diagnóstico es mejor?

**Solución**

La medida AUC para el primer test diagnostico es

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Y para el segundo test diagnóstico es

$$\int_{0}^{1} -x^2 + 2x\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Por tanto, ambos test tienen la misma AUC y desde este punto de vista serían iguales.

**Ejercicio 8.14.** La curva de Lorenz se utiliza en Economía para representar la distribución relativa de los ingresos o la riqueza de una población. Esta curva se representa siempre en el cuadrante $[0,1]\times[0,1]$ del plano y cada punto $(x,y)$ de la curva representa qué proporción de la riqueza total $y$ acumula la proporción de la población $x$. De este modo, la bisectriz del (recta $y=x$) representa una distribución equitativa de la riqueza, y cuanto más se desvíe la curva de esta recta, mayor desigualdad habrá en el reparto de la riqueza.

Para medir la desigualdad en el reparto de la riqueza se suele utilizar el coeficiente Gini, que se define como el doble del área encerrada entre la recta $y=x$ y la curva de Lorenz. En una población con una distribución equitativa de la riqueza, el coeficiente de Gini vale 1, mientras que en una población con la mayor desigualdad posible en el reparto de la riqueza, este coeficiente vale 0.

Si las curvas de Lorenz de dos poblaciones vienen dadas por las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=1-\cos\left(x\frac{\pi}{2}\right)$, ¿qué población es más desigual?

Solución

Para la primera población el área entre la recta $y=x$ y su curva de Lorenz es

$$\int_0^1 x-x^2\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

por lo que su coeficiente Gini es $2\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.
Del mismo modo, para la segunda población se tiene

$$\int_0^1 1-\cos\left(x\frac{\pi}{2}\right)\,dx=\left[x-\frac{2}{\pi}Frsen\left(x\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^1=1-\frac{2}{\pi}\approx 0.3634.$$

por lo que su coeficiente Gini es $2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\approx 0.7268$.
Así pues, la segunda población es un poco más desigual que la primera.

**Ejercicio 8.15.** Encontrar el valor $c$ tal que la recta $y=c$ divide la región limitada por la parábola $y=x^2$, el eje $x$ y la recta $y=4$ en dos regiones con la misma área.

**Ejercicio 8.16.** En geometría, la ecuación $y^2 = x^2(x+3)$ define una curva implícita conocida como la cúbica de Tschirnhausen. Calcular el área encerrada por esta curva.

Solución

La curva se puede expresar mediante dos ramas, una positiva y otra negativa, dadas por $y = \pm\sqrt{x^2(x+3)}$, que coinciden en $x = -3$ y $x = 0$ ya que son los puntos donde se anula $y$. Así pues, podemos calcular el area encerrada por la curva, descomponiendola en dos mitades, la positiva y la negativa.
La semiarea positiva se calcula mediante la siguiente integral

$$\int_{-3}^{0} \sqrt{x^2(x+3)}\, dx = \int_{-3}^{0} (-x)\sqrt{(x+3)}\, dx == \left[-frac25(x-2)(x+3)^{3/2}\right]_{-3}^{0} = \frac{2}{5}(-2)(3)^{3/2} = 4.1569.$$

**Ejercicio 8.17.** La tasa de nacimientos de una población viene dada por la función $n(t) = 5000e^{0.03t}$ personas por año, mientras que la tasa de defunciones viene dada por la función $m(t) = 3500e^{0.02t}$ personas por año. Calcular el area comprendida entre $n$ y $m$ entre 0 y 5 años. ¿Qué representa esta area?

**Ejercicio 8.18.** Calcular el area de un círculo de radio $r$ en coordenadas polares.

**Ejercicio 8.19.** Calcular el area encerrada por la curva polar $r = \cos(2\theta)$.

**Ejercicio 8.20.** Calcular el área encerrada por las siguientes curvas polares $r = f(\theta)$ en los intervalo dados.

a. $f(\theta) = \theta^2$ para $\theta \in [-\pi, \pi]$.
b. $f(\theta) = e^{\theta/2}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.
c. $f(\theta) = \sqrt{1 + \cos(4\theta)^2}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.

**Ejercicio 8.21.** Calcular el area encerrada entre las curvas polares $r = 2Frsen(\theta)$ y $r = 1 + Frsen(\theta)$.

**Ejercicio 8.22.** Calcular el area encerrada entre las siguientes curvas y el eje $x$ en los intervalos dados.

a. $y = \frac{1}{1+x^2}$ en $(-\infty, \infty)$.

b. $y = \frac{\ln(x)}{x^2}$ en $[1, \infty)$.

c. $y = \frac{e^{1/x}}{x^3}$ en $(-\infty, 0]$.

Solución

a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[Frarctg(x)\right]_{-t}^{t} = \lim_{t\to\infty} Frarctg(t) - Frarctg(-t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

b.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right]_{1}^{t} = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{1}{1} + \frac{\ln(1)}{1} = 1.$$

c.

$$\int_{-\infty}^{0} \left|\frac{e^{1/x}}{x^3}\right| dx = -\lim_{t\to-\infty} \left[e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x}\right]_{t}^{0} = -\lim_{t\to-\infty} e^{1/0} - \frac{e^{1/0}}{x} - e^{1/t} + \frac{e^{1/t}}{x} = 1.$$

**Ejercicio 8.23.** Un criterio para estudiar la convergencia de una serie $\sum a_n$ es estudiar la integral impropia $\int_1^{\infty} a_n\,dn$. La serie converge si y solo si la integral es finita.

Usar este criterio para demostrar que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge y que las serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

¿Para qué valores de $p$ la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p}\,dn$ converge?

**Solución**

Para la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{n}\,dn = \lim_{t\to\infty} [\ln|n|]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln(t) - \ln(1) = \infty.$$

Por tanto, la serie armónica diverge.
Para la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{n^2}\,dn = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{n}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t} - \frac{-1}{1} = 1,$$

y por tanto, la serie converge.
Veamos ahora para que valores de $p$ la integral impropia de $\frac{1}{x^p}$ converge.

$$\int_1^\infty \frac{1}{n^p}\,dn = \int_1^\infty n^{-p}\,dn = \lim_{t\to\infty} \left[(-p+1)n^{-p+1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{-p+1}{t^{p-1}} + p - 1.$$

Este límite existe para $p > 1$ por lo que la integral impropia converge para esos valores de $p$.

**Ejercicio 8.24.** En Estadística, la distribución exponencial se utiliza para modelar el tiempo que tarda en ocurrir un evento en un proceso de Poisson, es decir, un proceso en el que ocurren fenómenos puntuales de marea continua e independiente a un ritmo constante $\lambda$. La función de densidad de probabilidad la distribución exponencial de parámetro $\lambda$ es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a. Comprobar que $f$ es una función de densidad de probabilidad, es decir, que el area total encerrada entre su gráfica y el eje $x$ es 1.

b. Calcular la media de la distribución.

c. Calcular la varianza de la distribución.

**Pista**

La media de una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f$ es $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ y la varianza $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$.