Problemas de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Indice de contenidos

Prefacio

Colección de problemas de Análisis Matemático aplicado.

1 Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1. Dado el conjunto universo de los números de un dado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ y los subconjuntos correspondientes a sacar par en el lanzamiento de un dado $A = \{2,4,6\}$ y sacar menos de 5 en el lanzamiento de un dado $B = \{1,2,3,4\}$, calcular e interpretar los siguientes conjuntos:

a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. $\overline{A}$ y $\overline{B}$
d. $A - B$ y $B - A$
e. $A \triangle B$
f. $\overline{(A \cup B)}$
g. $\overline{(A \cap B)}$
h. $\overline{A \cup \overline{B}}$
i. $\overline{\overline{A} \cap B}$

¿Qué conjuntos de números en el lanzamiento de un dado serían disjuntos con A? ¿Y con $A \cup B$?

Solución

a. $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$
b. $A \cap B = \{2,4\}$
c. $\overline{A} = \{1,3,5\}$ y $\overline{B} = \{5,6\}$
d. $A - B = \{6\}$ y $B - A = \{1,3\}$
e. $A \triangle B = \{1,3,6\}$
f. $\overline{(A \cup B)} = \{5\}$
g. $\overline{(A \cap B)} = \{1,3,5,6\}$
h. $\overline{A \cup \overline{B}} = \{2,4,5,6\}$
i. $\overline{\overline{A} \cap B} = \{2,4,5,6\}$

Serían disjuntos con A todos los conjuntos que solo tuviesen alguno de los números 1, 3 o 5, por ejemplo el conjunto $\{1,5\}$. El único conjunto disjunto con $A \cup B$, además del vacío es $\{5\}$.

Ejercicio 1.2. Expresar con operaciones entre los conjuntos A, B y C, los conjuntos que se corresponden con las regiones sombreadas en los siguientes diagramas.

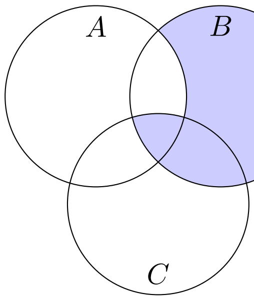


Figura 1.1: a.

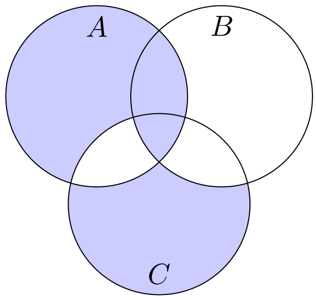


Figura 1.2: b.

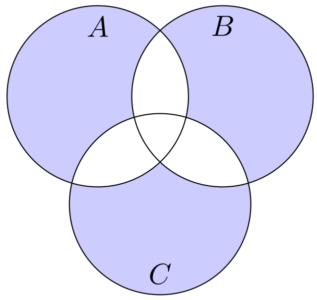


Figura 1.3: b.

Solución

a. $(B - A) \cup (A \cap B \cap C)$
b. $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap C)} \cap \overline{(B \cap C)} \cup (A \cap B \cap C)$
c. $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

Ejercicio 1.3. Demostrar gráficamente las leyes de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejercicio 1.4. Construir por extensión el conjunto potencia del conjunto de los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$. ¿Cuál es su cardinal?

Solución

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S) = \{&\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{AB\},\\ &\{\emptyset, A\}, \{\emptyset, B\}, \{\emptyset, AB\}, \{A, B\}, \{A, AB\}, \{B, AB\}, \{\emptyset, A, B\},\\ &\{\emptyset, A, AB\}, \{\emptyset, B, AB\}, \{A, B, AB\},\\ &\{\emptyset, A, B, AB\}\}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5. Construir el producto cartesiano del conjunto d los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$ y el conjunto de los factores Rh $R = \{\text{Rh}+, \text{Rh}-\}$.

Solución

$$S \times R = \{(0, \text{Rh}+), (0, \text{Rh}-), (A, \text{Rh}+)), (A, \text{Rh}-), \\ (B, \text{Rh}+), (B, \text{Rh}-), (AB, \text{Rh}+), (AB, \text{Rh}-)\}$$

Ejercicio 1.6. Demostrar que la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x-y \text{ es par}\}$ es una relación de equivalencia.

Solución

Propiedad reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$ $a - a = 0$ es par, de manera que aRa.
Propiedad simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si aRb entonces $a - b$ es par, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2k$. Por tanto, $b - a = 2(-k)$ también es par y bRa. *Propiedad transitiva*: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, si aRb y bRc entonces $a - b$ y $b - c$ son pares, de manera que su suma $a - b + b - c = a - c$ también es par, y aRc.

Ejercicio 1.7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son relaciones de equivalencia? ¿Cuáles don de orden?

a. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
b. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$
c. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
d. $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución

a. R_1 es relación de equivalencia.
b. R_2 es relación de orden.
c. R_3 no es relación de equivalencia ni de orden porque no cumple las propiedades reflexiva y transitiva.
d. R_4 es no es relación de equivalencia ni de orden porque tampoco cumple las propiedades reflexiva y transitiva.

Ejercicio 1.8. Para cada uno de los conjuntos siguientes, calcular si existe el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo.

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b. $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$
c. $C = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$

Solución

a. $\sup(A) = 5$, $\inf(A) = 1$, $\max(A) = 5$, $\min(A) = 1$.
b. $\inf(B) = 2$ y $\min(B) = 2$. No existe el supremo ni el máximo porque B no está acotado superiormente.
c. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = 0$ y $\max(C) = 1$. No existe el mínimo.

Ejercicio 1.9. Dar ejemplos de funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplan lo siguiente:

a. f es inyectiva pero no sobreyectiva.
b. f es sobreyectiva pero no inyectiva.
c. f no es inyectiva ni sobreyectiva.
d. f es biyectiva y distinta de la función identidad.

Solución

a. $f(x) = 2x$
b. $f(x) = x^3 - x$.
c. $f(x) = x^2$
d. $f(x) = 2x + 1$

Ejercicio 1.10. Dadas las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, estudiar cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas:

a. $f(x) = x^2$
b. $g(x) = x^3$
c. $h(x) = x^3 - x^2 - 2x$
d. $i(x) = |x|$

Solución

a. $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
b. $g(x) = x^3$ es biyectiva.
c. $h(x) = x^3 - x^2 - 2x$ es sobreyectiva pero no inyectiva.
d. $i(x) = |x|$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Ejercicio 1.11. Demostrar que la composición de dos funciones inyectivas es también inyectiva.

Solución

Sean f y g dos funciones inyectivas tales que $FrIm(f) \subseteq FrDom(g)$. Veamos que $g \circ f$ es inyectiva. Supongamos ahora que existen $a, b \in FrDom(f)$ tales que $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, es decir, $g(f(a)) = g(f(b))$. Como g es inyectiva, se tiene que $f(a) = f(b)$, y como f es inyectiva se tiene que $a = b$, con lo que $g \circ f$ es inyectiva.

Ejercicio 1.12. Dados dos conjuntos finitos A y B, demostrar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ y que $|A \times B| = |A||B|$.

Solución

a. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ con $(A - B)$, $A \cup B$ y $B - A$ disjuntos dos a dos, de manera que $|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$.

   Por otro lado, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, y $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, de modo que

$$\begin{aligned} |A| + |B| - |A \cap B| &= |A - B| + |A \cap B| + |B - A| + |A \cap B| - |A \cap B| \\ &= |A - B| + |B - A| + |A \cap B|, \end{aligned}$$

   que coincide con el resultado anterior.

b. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, de manera que $|A| = n$ y $|B| = m$. Para cada elemento $a_i \in A$ se pueden formar m pares $(a_i, b_1), \dots (a_i, b_m)$. Como A tiene n elementos, en total se pueden formar $n \cdot m$ pares, así que $|A \times B| = n \cdot m = |A||B|$.

Ejercicio 1.13. Dada una función $f : A \to B$, demostrar que si f es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$, y si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$. ¿Cómo es $|A|$ en comparación con $|B|$ cuando f es biyectiva?

Solución

Sea $f : A \to B$ inyectiva. Entonces para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ se tiene que $f(a_1) \neq f(a_2)$, por lo que $|A| \leq |B|$.
Sea $f : A \to B$ sobreyectiva. Entonces para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Además dos elementos de B no pueden tener la misma preimagen porque entonces f no sería una función, por lo que $|A| \geq |B|$.
De lo anterior se deduce que si f es biyectiva, entonces $|A| = |B|$.

Ejercicio 1.14. Dados dos conjuntos finitos A y B con $|A| = n$ y $|B| = m$. ¿Cuántas funciones distintas se pueden construir de A a B. ¿Y cuántas funciones inyectivas suponiendo que $n \leq m$?

Solución

Se pueden construir m^n funciones distintas, y $\frac{m!}{(m-n)!}$ funciones inyectivas.

Ejercicio 1.15. Tomando el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ como conjunto universo, dar un ejemplo de un subconjunto infinito cuyo complemento también sea infinito.

Solución

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ es infinito y $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\}$ también es infinito.

Ejercicio 1.16. Demostrar que todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.

Solución

Sean A un conjunto infinito. Como A no es vacío, existe un elemento $a_1 \in A$. Considérese ahora el conjunto $A_1 = A\ \{a_1\}$. Es evidente que A_1 sigue siendo infinito y podemos elegir otro elemento $a_2 \in A_1$ de manera que el conjunto $A_2 = A_1 - \{a_2\}$

sigue siendo infinito. Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos que el conjunto $\{a_1, a_2, ...\}$ es un subconjunto de A que es numerable.

Ejercicio 1.17. Demostrar que un conjunto es infinito si y solo si es equipotente a un subconjunto propio.

Solución

Sea A un conjunto. Si A es finito, entonces cualquier subconjunto $B \subset A$ cumple que $|B| < |A|$ por lo que no se puede establecer una biyección entre A y B.
Si A es infinito, por el ejercicio anterior se tiene que existe un subconjunto numerable $B = \{a_1, a_2, ...\} \subseteq A$. Si tomamos la aplicación $f : B \to B \ \ \{a_1\}$ dada por $f(a_i) = a_{i+1}$, entonces f es biyectiva, y su extensión $\hat{f} : A \to A \ \ \{a_1\}$ dada por

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin B \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es también biyectiva, por lo que A es equipotente a $A \ \ \{a_1\}$ que es un subconjunto propio suyo.

Ejercicio 1.18. Demostrar que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable. ¿Y el producto cartesiano de n conjuntos numerables?

Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables. Entonces existe una aplicación inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$ y otra $g : B \to \mathbb{N}$. Si se toma ahora la función $h : A \times B \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(a, b) = 2^{f(a)} 3^{g(b)} \; \forall a \in A, b \in B,$$

se tiene que f es inyectiva y por tanto $A \times B$ es numerable.
Por inducción, es fácil probar que el producto cartesiano de n conjuntos numerables es también numerable.

Ejercicio 1.19. Demostrar que el conjunto de los números racionales es numerable.

Solución

Si se considera la aplicación $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ que a cada número racional r le hace corresponder el par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ donde $\frac{p}{q}$ es la fracción irreducible de r con denominador positivo, se tiene que f es inyectiva. Como el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable, existe otra aplicación inyectiva de $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con lo que $g \circ f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ es inyectiva y $\mathbb{Q}$ es numerable.

Ejercicio 1.20. Demostrar que la unión de dos conjuntos numerables es numerable.

Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables disjuntos. Entonces existen dos biyecciones $f : A \to \mathbb{N}$ y $g : B \to \mathbb{N}$. A partir de estas biyecciones se puede definir otra $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1 & \text{si } x \in A \\ 2g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Así pues, $A \cup B$ es numerable.
Si A y B no son disjuntos, entonces $A \cup B = A \cup (B \ A)$. Si $B \ A = \{b_1, \dots, b_n\}$ es finito, se puede tomar la biyección $g = \{(b_1, 1), \dots, (b_n, n)\}$ y, a partir de ella, construir la biyección $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + n & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \ A \end{cases}$$

Mientras que si $B \ A$ es infinito, se puede razonar como al principio pues A y $B \ A$ son disjuntos.

Ejercicio 1.21. Demostrar que el conjunto de los números irracionales no es numerable.

Solución

Ya hemos visto en el ejercicio Ejercicio 1.19 que $\mathbb{Q}$ es numerable, de manera que si $\mathbb{R} \ \mathbb{Q}$ fuese numerable, entonces por el Ejercicio 1.20 $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \ \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ sería numerable, lo cual no es cierto.

Ejercicio 1.22. Demostrar la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable.

> **Solución**
>
> Sea A un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por ser A numerable existe una biyección $f : \mathbb{N} \to A$, de manera que podemos enumerar los elementos de A de tal forma que $A_i = f(i)$. Del mismo modo, como cada conjunto A_i es numerable se puede establecer una enumeración de sus elementos $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$. Así pues, podemos representar los elementos de $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ en una tabla como la siguiente
>
> $$\begin{array}{cccccc} a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & \downarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$
>
> Siguiendo el orden de las flechas es posible enumerar todos los elementos de este conjunto, por lo que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

Ejercicio 1.23. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros $P = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}\}$ es numerable. ¿Y el de los polinomios con coeficientes racionales?

> **Solución**
>
> Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n el conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes enteros $P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{Z}\}$. Para cada polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \in P_n$ podemos establecer una biyección entre sus coeficientes y la tupla $p_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, con $a_i \in \mathbb{Z}$. Por tanto, existe una biyección entre P_n y $\mathbb{Z}^n$, y como $\mathbb{Z}^n$ es numerable, el P_n también lo es.
> Finalmente, $P = \cup_{i=1}^{\infty} P_n$ que es la unión numerable de conjuntos numerables, que, como ya se vió en el Ejercicio 1.22, es numerable.

Ejercicio 1.24. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son numerables?

a. $A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$
b. $B = \{x \in \mathbb{Q} : -10 < x < 10\}$
c. $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

d. $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}\}$
e. $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

Ejercicio 1.25. ¿Es el conjunto de todas las secuencias infinitas de ADN numerable?

2 Números reales

Ejercicio 2.1. Para los siguientes subconjuntos de números reales, determinar si están acotados por arriba o por abajo, y en tal caso dar el supremo o el ínfimo.

a. $A = \{-1, 0, 1\}$
b. $B = [0, 1)$
c. $C = (0, \infty)$
d. $D = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
e. $E = \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$
f. $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$
g. $G = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x < 0\}$

Solución

a. A está acotado por arriba y por abajo. $\sup(A) = 1$ y $\inf(A) = -1$.

b. B está acotado por arriba y por abajo. $\sup(B) = 1$ y $\inf(B) = 0$.

c. C está acotado por abajo, pero no por arriba. $\inf(C) = 0$.

d. D está acotado por arriba y por abajo. $\sup(D) = 2$ y $\inf(D) = 1$.

e. E no está acotado por arriba ni por abajo.

f. F está acotado por arriba y por abajo.$\sup(F) = 2$ y $\inf(F) = 1$.

g. G está acotado por arriba pero no por abajo. $\sup(G) = 1$.

Ejercicio 2.2. Calcular el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos. ¿Tienen máximo y mínimo?

a. $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 - 2 < 7\}$
b. $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < 4x^2 - 3 \leq 5\}$

Solución

a. $A = (-3, -2) \cup (2, 3)$, que como está acotado tiene supremo $\sup(A) = 3$ e ínfimo $\inf(A) = -3$. Sin embargo, $3 \notin A$ y $-3 \notin A$, por lo que no tiene ni máximo ni mínimo.

b. $B = [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$, que como está acotado tiene supremo $\sup(B) = \sqrt{2}$ e ínfimo $\inf(B) = -\sqrt{2}$. Como además, $-\sqrt{2} \in B$ y $\sqrt{2} \in B$, se tiene que $\max(B) = \sqrt{2}$ y $\min(B) = -\sqrt{2}$.

Ejercicio 2.3. Dadas dos funciones f y g ambas con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que si sus imágenes están acotadas y $f(a) \leq g(a)\ \forall a \in A$, entonces $\sup(FrIm(f)) \leq \sup(FrIm(g))$.

Solución

Como las imágenes de f y g están acotadas, y suponiendo que no fuesen vacías, por el axioma del supremo, se tiene que existe $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c = \sup(FrIm(f))$ y $d = \sup(FrIm(g))$. Como d es el supremo de la imagen de g, se tiene que es una cota superior de la imagen de f, ya que, para cualquier $a \in A$, se tiene $f(a) \leq g(a) \leq d$. Por consiguiente, tiene que ser $c \leq d$, ya que de lo contrario c no sería el supremo por ser d una cota superior de la imagen de f menor que c.

Ejercicio 2.4. Demostrar que si $c \in \mathbb{R}$ es una cota superior de un conjunto A, entonces $-c$ es una cota inferior del conjunto de los opuestos $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, y si c es una cota inferior de A entonces $-c$ es una cota superior de A'.

Solución

Sea $c \in \mathbb{R}$ una cota superior del conjunto A. Entonces, $a \leq c\ \forall a \in A$. De ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$a < c \Rightarrow (-1)a \geq (-1)c \Rightarrow -a \geq -c,$$

lo que demuestra que $-c$ es una cota inferior de A'.
Del mismo modo, si c una cota inferior del conjunto A. Entonces, $c \leq a\ \forall a \in A$, y de ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$c < a \Rightarrow (-1)c \geq (-1)a \Rightarrow -c \geq -a,$$

de manera que $-c$ es cota superior de A'.

Ejercicio 2.5. Demostrar que todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene un ínfimo.

Solución

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A. Si tomamos ahora el conjunto $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que $-c$ es una cota superior de A'. Así pues, A' es un conjunto no vacío y acotado superiormente, y por el axioma del supremo, existe $-s \in \mathbb{R}$ tal que $-s = \sup(A')$.
Veamos ahora que s es el ínfimo de A. Como $-s$ es el supremo de A', es una cota superior de A', y por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que $-(-s) = s$ es cota inferior de A. Supongamos ahora que existe otra cota inferior x de A tal que $x > s$. Entonces, aplicando una vez más el Ejercicio 2.4, se tiene que $-x$ es cota superior de A', pero $x > s \Rightarrow (-1)x < (-1)s \Rightarrow -x < -s$, lo que contradice que $-s$ sea el supremo de A', ya que $-x$ sería una cota superior menor que $-s$. Luego s es el ínfimo de A.

Ejercicio 2.6. Demostrar que $|a| - |b| \leq |a - b| \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Solución

Veamos todas las posibilidades que pueden darse:

- Si $a = 0$, entonces $|a| - |b| = -|b| \leq |-b| = |a - b|$.
- Si $b = 0$, entonces $|a| - |b| = |a| = |a - b|$.
- Si $a \geq b > 0$, entonces $|a| - |b| = a - b = |a - b|$.
- Si $b \geq a > 0$, entonces $|a| - |b| = a - b \leq 0 \leq |a - b|$.
- Si $a > 0 > b$, entonces $|a| - |b| = a - (-b) = a + b < a - b = |a - b|$.
- Si $b > 0 > a$, entonces $|a| - |b| = -a - b < -a + b = -(a - b) = |a - b|$.
- Si $a \leq b < 0$, entonces $|a| - |b| = -a - (-b) = -a + b = -(a - b) = |a - b|$.
- Si $b \leq a < 0$, entonces $|a| - |b| = -a - (-b) = -a + b \leq 0 \leq |a - b|$.

Ejercicio 2.7. Usando la propiedad arquimediana de los números reales, demostrar que para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ existe un número natural n tal que $n - 1 \leq a < n$.

Solución

Como $a > 0$ se tiene que $\frac{1}{a} > 0$, y por la propiedad arquimediana se cumple que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$.
Considérese ahora el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : a < m\}$. Como $a < n$ se tiene que $n \in A$ y por tanto A no está vacío. Aplicando ahora el principio de buena ordenación de los números naturales, como $A \subset \mathbb{N}$, existe un primer elemento $n_0 \in A$, tal que $n_0 - 1 \notin A$, de manera que $n_0 - 1 \leq a$ y con ello se tiene que \$$n_0 - 1 \leq a < n$.

Ejercicio 2.8. Se dice que un conjunto A es denso en $\mathbb{R}$ si cada intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ contiene algún elemento de A. Demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución

La prueba es la misma que la de la propiedad arquimediana. Basta con tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b-a$. Si ahora se toma el primer múltiplo de $1/n$ tal que $a < \frac{m}{n}$, también se cumplirá que $\frac{m}{n} < b$, ya que de lo contrario $\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n}$ lo que lleva a la contradicción de que $\frac{1}{n} > b - a$.

3 Topología de los números reales

Ejercicio 3.1. Dada la sucesión de intervalos anidados $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Demostrar también que si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados entonces la intersección es vacía.

Solución

En primer lugar, es fácil ver que $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ ya que $0 \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que 0 es el único elemento de la intersección. Para cualquier $x > 0$, aplicando la propiedad arquimediana se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$, de manera que $x \notin [0, \frac{1}{n}] = I_n$, por lo que $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Por tanto, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.
Si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados, entonces 0 tampoco pertenecería a la intersección y $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Ejercicio 3.2. ¿Cuál es el interior del conjunto $A = \{a\}$?

Solución

a no es un punto interior de A, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subseteq A$. Por tanto, $FrInt(A) = \emptyset$.
En general, cualquier conjunto con un solo punto no tiene puntos interiores.

Ejercicio 3.3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$ y sea $A = \{a\} \cup (b, c)$. Calcular $FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$.

Solución

Como el interior de un conjunto con un solo punto es vacío y el interior de un intervalo abierto es el propio intervalo abierto (ver proposición), se tiene que $FrInt(A) = (a, b)$. Por otro lado, $\overline{A} = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (c, \infty)$, que al ser la unión de intervalos abiertos se tiene que $FrExt(A) = FrInt(\overline{A}) = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (c, \infty)$. Finalmente, $FrFr(A) = \{a, b, c\}$, ya que cualquier entorno de estos puntos contiene puntos de A y de $\overline{A}$.

Ejercicio 3.4. Demostrar que todos los puntos de $\mathbb{Z}$ son puntos frontera.

Solución

Sea $x \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ siempre contiene números enteros (por ejemplo el propio x), y números no enteros, por los que x es un punto frontera.

Ejercicio 3.5. Demostrar que el conjunto de los números racionales no tiene puntos interiores. ¿Y el conjunto de los números irracionales?

Solución

Sea $x \in \mathbb{Q}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, por la densidad de los números racionales, el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ siempre contiene números racionales, y por la densidad de los números irracionales también contiene números irracionales, de manera que todos los puntos de $\mathbb{Q}$ son frontera y no tiene puntos interiores.
Por el mismo motivo, $\mathbb{R} \ \mathbb{Q}$ tampoco tiene puntos interiores y todos sus puntos son puntos frontera.

Ejercicio 3.6. Demostrar que si x es un punto interior de A y $A \subseteq B$, entonces x también es un punto interior de B.

Solución

Sea x un punto interior de A. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \subseteq B$, de manera que x también es un punto interior de B.

Ejercicio 3.7. Demostrar que si x es un punto interior de dos conjuntos A y B, entonces también es un punto interior de su unión y su intersección.

Solución

Sea x un punto interior de A y B. Entonces, existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq A \subseteq A \cup B$, de manera que x es también un punto interior de $A \cup B$.
Por otro lado, como x es también un punto interior de B, existe otro $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq B$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq B$, por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A \cap B$, y x es también un punto interior de $A \cap B$.

Ejercicio 3.8. Demostrar que para cualesquiera dos conjuntos de números reales A y B, se cumple que $FrInt(A \cap B) = FrInt(A) \cap FrInt(B)$.

Demostrar también que el anterior resultado no es cierto para la unión, es decir, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no se cumple siempre que $FrInt(A \cup B) = FrInt(A) \cup FrInt(B)$.

Solución

En el Ejercicio 3.7 hemos visto que si x es un punto interior de A y B, entonces también lo es de su intersección. Veamos ahora el otro sentido de la implicación.
Supongamos que x es un punto interior de $A \cap B$. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A \cap B$. Pero como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, se tiene que x es también un punto interior de A y de B.
Para ver que este resultado no es cierto para la unión, basta con tomar $A = (-1, 0)$ y $B = [0, 1)$. Entonces $A \cup B = (-1, 1)$, y al ser un intervalo abierto, $FrInt(A \cup B) = (-1, 1)$. Sin embargo, $FrInt(A) = (-1, 0)$ y $FrInt(B) = (0, 1)$, por lo que $FrInt(A) \cup FrInt(B) = (-1, 1) \quad \{0\} \neq (-1, 1) = FrInt(A \cup B)$.

Ejercicio 3.9. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, probar que los conjuntos $FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$ forman una partición de $\mathbb{R}$.

Solución

Veamos primero, que $FrInt(A)$, $FrExt(A)$ y $FrFr(A)$ son disjuntos dos a dos.

- Si $x \in FrInt(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$. De aquí se deduce que $a \in A$, y por tanto $x \notin \overline{A}$ por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq \overline{A}$ $\forall \varepsilon > 0$ y x no es un punto exterior de A. Por otro lado, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$, por lo que este entorno de x no contiene puntos de $\overline{A}$ y $x \notin FrFr(A)$.
- Si $x \in FrExt(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$.

De aquí se deduce que $x \notin A$, y por tanto x no es un punto interior de A. Por otro lado, como $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$, existe un entorno de x que no contiene puntos de A y $x \notin FrFr(A)$.

- Si $x \in FrFr(A)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene puntos de A y de $\overline{A}$, de manera que, no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ o $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$, así que, x no es un punto interior ni exterior de A.

Veamos ahora que $FrInt(A) \cup FrExt(A) \cup FrFr(A) = \mathbb{R}$, o dicho de otro modo, cualquier $x \in \mathbb{R}$ debe pertenecer a alguno de estos conjuntos.

- Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$, entonces x es un punto interior de A.
- En caso contrario, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$, entonces x es un punto exterior de A.
- Finalmente, si para cualquier $\varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subseteq A$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subseteq \overline{A}$, se tiene que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene tanto puntos de A como de $\overline{A}$, por lo que x es un punto frontera de A.

Ejercicio 3.10. Calcular los puntos de adherencia y de acumulación del conjunto $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución

Como $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, 1 es un punto de acumulación de A, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\ \ \{1\}$ contiene puntos de A. Para verlo, basta aplicar la propiedad arquimediana, de manera que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de manera que $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$, y por tanto $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\ \ \{1\} \cap A \neq \emptyset$.
Para calcular los puntos de adherencia de A basta tener en cuenta que $A \subseteq FrAdh(A)$, y que $FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$, por lo que 1 también es un punto de adherencia de A. Veamos ahora que cualquier otro punto, no es punto de adherencia de A. Si $x < 1$, tomando $\varepsilon = |x-1|$ el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ no contiene puntos de A. Del mismo modo, si $x > 2$, tomando $\varepsilon = |x-2|$ el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ tampoco contiene puntos de A. Finalmente, si $1 < x \leq 2$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$. Tomando $\varepsilon = \min(\{|x - \frac{1}{n+1}|, |x - \frac{1}{n}|\})$ también se tiene que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ no contiene puntos de A. Por tanto, $FrAdh(A) = A \cup \{1\}$.
Para calcular los puntos de acumulación de A, ya sabemos que 1 es un punto de acumulación y faltaría por ver si algún otro punto de A es un punto de acumulación de A, ya que el resto de puntos no pertenecen a la adherencia y por tanto no pueden ser puntos de acumulación al ser $FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$. Ahora bien, si $x \in A$,

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 1 + \frac{1}{n}$, de manera que tomando $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ se tiene que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ no contiene puntos de A, por lo que x no es punto de acumulación de A. Así pues, $FrAc(A) = \{1\}$.

Ejercicio 3.11. Calcular los puntos de adherencia y de acumulación de $\mathbb{Z}$ y también de $\mathbb{Q}$.

Solución

$FrAdh(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $FrAc(\mathbb{Z}) = \emptyset$.
$FrAdh(\mathbb{Q}) = FrAc(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.12. Dar un ejemplo de dos conjuntos no abiertos pero cuya intersección es abierta.

Solución

Si se toma $A = [0,2)$ y $B = (1,3]$, tanto A como B no son abiertos, pero $A \cap B = (1,2)$ que es un conjunto abierto.

Ejercicio 3.13. Estudiar si el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es abierto o cerrado.

Solución

$\mathbb{Q}$ no es abierto ya que como se vio en el Ejercicio 3.5 $FrInt(\mathbb{Q}) = \emptyset$. En el mismo ejercicio se vio también que $FrInt(\overline{\mathbb{Q}}) = FrInt(\mathbb{R} \quad \mathbb{Q}) = \emptyset$, por lo que $\mathbb{Q}$ tampoco es cerrado.

Ejercicio 3.14. Probar las siguientes propiedades:

a. La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
b. La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
c. La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.
d. La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Solución

a. Sea A_n $n \in \mathbb{N}$ una colección arbitraria de conjuntos abiertos y sea $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, y como A_n es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, por lo que x es un punto interior de $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

b. Vamos a probarlo por inducción. Sean A_1 y A_2 dos conjuntos abiertos. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x \in A_1 \cap A_2$. Entonces, como $x \in A_1$ existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq A_1$, y como $x \in A_2$ existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq A_2$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_1$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_2$, por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_1 \cap A_2$, y $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto.

   Sea ahora una colección $A_1, \dots, A_m, A_{m+1}$ una colección de conjuntos abiertos y supongamos que $A = \cap_{n=1}^{m} A_n$ es un conjunto abierto. Si $A \cap A_{m+1} = \emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x \in A \cap A_{m+1}$. Entonces, como $x \in A$ existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq A$, y como $x \in A_{m+1}$ existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq A_{m+1}$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_{m+1}$, por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A \cap A_{m+1}$, y $\cap_{n=1}^{m+1} A_n$ es un conjunto abierto.

c. Sea A_n, $n \in \mathbb{N}$, una colección arbitraria de conjuntos cerrados. Entonces, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Como A_n es cerrado, $\overline{A_n}$ es abierto $\forall n \in \mathbb{N}$, y por el apartado (a), se tiene que $\cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n}$ es abierto y $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ es cerrado.

d. Sea ahora una colección $A_1, \dots, A_n$ una colección de conjuntos cerrados. De nuevo, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Como A_i es cerrado, $\overline{A_i}$ es abierto $\forall i = 1, \dots, n$, y por el apartado (b), se tiene que $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ es abierto y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es cerrado.

Ejercicio 3.15. Demostrar que la adherencia de cualquier conjunto es siempre cerrada.

Solución

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Para probar que $FrAdh(A)$ es un conjunto cerrado, veremos que $\overline{FrAdh(A)}$ es abierto. Si $x \in \overline{FrAdh(A)}$, entonces $x \notin FrAdh(A)$, y existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Para cualquier $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, se tiene, tomando $\varepsilon' = \min(\{x-\varepsilon-y, x+\varepsilon-y\})$, que $(y-\varepsilon', y+\varepsilon') \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y por tanto $(y-\varepsilon', y+\varepsilon') \cap A = \emptyset$, por lo que $y \notin FrAdh(A)$. Así pues, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{FrAdh(A)}$, y por consiguiente $\overline{FrAdh(A)}$ es abierto y $FrAdh(A)$ es cerrado.

Ejercicio 3.16. Demostrar que cualquier conjunto es cerrado si y solo si coincide con su adherencia.

Solución

Sea A un conjunto cerrado. Ya sabemos que $A \subseteq FrAdh(A)$. Supongamos ahora que existe un punto $x \in FrAdh(A)\ \ A$. Entonces, como x es un punto de adherencia de A, para cualquier $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pero como $x \notin A$, también se cumple que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \ \{x\} \cap A \neq \emptyset$, por lo que x es un punto de acumulación de A, pero eso contradice que A sea un conjunto cerrado, pues no contiene a todos sus puntos de acumulación (ver teorema). Así pues, $FrAdh(A) = A$.
Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que $FrAdh(A) = A$. Entonces, para cualquier $x \in \overline{A}$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$, por lo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A}$ es abierto, de manera que A es cerrado.

4 Sucesiones de números reales

Ejercicio 4.1. Una *sucesión constante* es una sucesión de números reales en la que cada término es igual que el anterior. Demostrar que una sucesión constante siempre converge.

Solución

Sea $(c)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión constante. Veamos que converge a c. Para cualquier $\varepsilon > 0$ basta tomar $k = 1$, de manera que $\forall n \geq k$ se tiene que $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Ejercicio 4.2. Una *sucesión aritmética* es una sucesión de números reales en la que cada término se obtienen sumando un número constante $c \in \mathbb{R}$ al anterior, es decir, $x_1 = c$ y $x_{n+1} = c + x_n$ $\forall n = 2, 3, \ldots$. Estudiar la convergencia de las sucesiones aritméticas.

Solución

Si $c = 0$ entonces la sucesión es constante y por el Ejercicio 4.1, la sucesión converge. Supongamos que $c > 0$ y veamos que la sucesión aritmética $(nc)_{n=1}^{\infty}$ no converge a ningún número $x \in \mathbb{R}$. Para ello, basta tomar $\varepsilon = 1$, de manera que por la propiedad arquimediana se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x+1}{c} < m$, así que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tomando $n = \max(\{k, m\})$, se cumple que existe $n \geq k$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{c} < m \leq n \Rightarrow x + 1 < nc = x_n \\ \Rightarrow x_n - x > 1 \\ \Rightarrow |x_n - x| > 1 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión diverge. De forma similar se puede prueba que si $c < 0$ la sucesión también diverge.
Otra forma de demostrarlo es probar que la sucesión es monótona y no acotada y aplicar el teorema de la convergencia de sucesiones monóntonas para concluir que la sucesión no converge.

Ejercicio 4.3. Una *sucesión geométrica* es una sucesión de números reales en la que cada término se obtienen multiplicando un número constante $c \in \mathbb{R}$ por el anterior, es decir, $x_1 = c$ y $x_{n+1} = cx_n$. Estudiar la convergencia de las sucesiones geométricas.

Solución

Si $c = 0$ o $c = 1$ entonces la sucesión es constante y por el Ejercicio 4.1, la sucesión converge.
Supongamos que $c > 1$ y veamos que la sucesión geométrica $(c^n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a ningún número $x \in \mathbb{R}$. Para ello, basta probar que la sucesión es creciente y no acotada. Probaremos que por inducción que la sucesión es creciente. $x_1 = c < cc = c^2 = x_2$ por ser $c > 1$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$, entonces $x_n = c^n < cc^n = c^{n+1} = x_{n+1}$. Por tanto, la sucesión es creciente.
Veamos ahora que no está acotada por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $c > 1$, podemos escribir $x_n = c^n = (1+a)^n$ con $a > 0$. Aplicando ahora el teorema del binomio, se tiene

$$\begin{aligned}
(1+a)^n &= \binom{n}{0}1^n a^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0 a^n \\
&= 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n \\
&\geq 1 + na.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora la propiedad arquimediana, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x-1}{a} < n$, de modo que

$$\frac{x-1}{a} < n \Rightarrow x - 1 < na \Rightarrow x < 1 + na < (1+a)^n = x_n,$$

por lo que x no puede ser cota de la sucesión. Por consiguiente, la sucesión es monótona y no acotada, y por el teorema de la convergencia de sucesiones monónotas la sucesión diverge.
De forma similar se puede prueba que si $c < 0$ la sucesión también diverge.
Veamos finalmente que si $0 < c < 1$ entonces la sucesión converge a 0.

Ejercicio 4.4. Una *sucesión alternada* es una sucesión de números reales en la que cada término tiene signo distinto del anterior. Demostrar que la sucesión alternada $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente. ¿Puede una sucesión alternada ser convergente?

Solución

Veamos que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = x$. Para $x \in \mathbb{R} \quad \{-1,1\}$ es sencillo, ya que tomando $\varepsilon = |1-|x||$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$ se tiene que $|x_n - x| = |(-1)^n - x| \geq ||(-1)^n| - |x|| = |1-|x|| = \varepsilon$, por tanto, la sucesión no converge a x.

Veamos ahora que la sucesión no converge a 1. Para ello basta tomar $\varepsilon = 1$, de manera que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $n = 2k+1 \geq k$ tal que $|x_n - 1| = |(-1)^{2k+1} - 1| = |-1-1| = |-2| = 2 > 1 = \varepsilon$.

Del mismo modo se puede probar que tampoco converge a -1. Para ello basta tomar de nuevo $\varepsilon = 1$, de manera que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $n = 2k \geq k$ tal que $|x_n - (-1)| = |(-1)^{2k} - (-1)| = |1-(-1)| = |2| = 2 > 1 = \varepsilon$.

Otra forma de demostrar la no convergencia de la sucesión es tomar las subsucesiones suyas $\left((-1)^{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left((-1)^{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente, al ser constantes, de manera que aplicando el teorema de la convergencia de las subsucesiones, se tiene que las sucesión original no converge.

Por otro lado, no toda sucesión alternada es divergente. Por ejemplo, las sucesiones $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ son alternadas y convergen a 0.

Ejercicio 4.5. ¿Cómo podríamos demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas?

a. En cada banco de una ciudad existe al menos un cliente moroso.
b. Existe un banco en una ciudad donde cada cliente tiene una pensión o una hipoteca.
c. Para todos los bancos de una ciudad existe un cliente que cada mes usa una tarjeta de crédito o de débito.

Solución

a. Para refutar la afirmación habría que encontrar un banco en el no hubiese al menos un cliente moroso, es decir, que todos sus clientes no fuesen morosos.
b. Para refutar la afirmación habría que mostrar que todos los bancos de la ciudad tienen algún cliente que no tiene pensión ni hipoteca.
c. Para refutar la afirmación habría que encontrar un banco en el que ningún cliente usase cada mes la tarjeta de crédito o de débito, es decir, en el que para todos los clientes hay algún mes que no usan ni la tarjeta de crédito ni la de débito.

Ejercicio 4.6. Dar un ejemplo de sucesión que cumpla las siguientes condiciones, o, en caso de no existir ninguna, explicar porqué.

a. Una sucesión con un número infinito de ceros que no converge a 0.
b. Una sucesión con un número infinito de unos que converge a un número distinto de uno.
c. Una sucesión divergente tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se pueden encontrar n ceros consecutivos en la sucesión.

Solución

a. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ 1 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

b. No existe.
c. La sucesión $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$.

Ejercicio 4.7. Demostrar, aplicando la definición de límite de una sucesión, que las siguientes sucesiones de números reales convergen a los valores dados.

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = 0$
b. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+n-2} = \frac{1}{3}$
c. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n^2-n} = 3$

Solución

a.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

b.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+n-2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 3+\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{1-0}{3+0-0} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

c.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n^2-n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 3+\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{3+0}{1-0} = 3
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.8. Dar un ejemplo de sucesiones que cumplan las siguientes condiciones, o, en caso de no existir ninguna, explicar porqué.

a. Dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que divergen pero $(x_n+y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.
b. Dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que convergen pero $(x_n+y_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.
c. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge y otra $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que diverge, pero tales que $(x_n+y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.
d. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge y otra $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que diverge, pero tales que $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.
e. Dos sucesiones divergentes $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ con $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ tales que $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge.

Solución

a. $(n)_{n=1}^{\infty}$ y $(-n)_{n=1}^{\infty}$ divergen, pero $(n+(-n))_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty}$ converge por ser constante.

b. No es posible (ver proposición).

c. Para ver que no es posible, daremos una demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $(x_n+y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge. Entonces, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, se tiene que $((x_n+y_n)-x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge (ver proposición, con lo que se llega a una contradicción pues partíamos de que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

d. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge, pero $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge.

e. $(n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente, pero $\left(\frac{n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ converge por ser constante.

Otro ejemplo son $((-1)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ que divergen, pero $(\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n})_{n=1}^{\infty} = (\frac{(-1)^n(-1)}{(-1)^n})_{n=1}^{\infty} = (-1)_{n=1}^{\infty}$ converge al ser constante.

Ejercicio 4.9. Demostrar que si una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge un número x, entonces la sucesión $(x_n - x)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

Solución

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon\ \forall n \geq k$, pero entonces es obvio que $|(x_n - x) - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq k$, por lo que $\lim_{n\to\infty} x_n - x = 0$.

Ejercicio 4.10. Dado un polinomio $p(x)$, demostrar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = p(x)$.

Solución

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ un polinomio cualquiera y supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p(x_n) &= \lim_{n\to\infty} a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m \\
&= \lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} a_1 x_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_m x_n^m \\
&= \lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} a_1 \lim_{n\to\infty} x_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_m \lim_{n\to\infty} x_n^m \\
&= \lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} a_1 \lim_{n\to\infty} x_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_m (\lim_{n\to\infty} x_n)^m \\
&= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = p(x).
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.11. Demostrar que si una sucesión de números reales converge a x, entonces la sucesión de sus valores absolutos converge a $|x|$. ¿Es cierto lo contrario?

Solución

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon \ \forall n \geq k$, pero entonces, aplicando la desigualdad triangular, también se tiene que $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon \ \forall n \geq k$, por lo que $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Ejercicio 4.12. Demostrar que si una sucesión de números reales no negativos converge a x, entonces la sucesión de sus raíces cuadradas positivas converge a $\sqrt{x}$.

Solución

Veamos primero el caso en que $x = 0$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\varepsilon_1 = \varepsilon^2 > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - 0| = |x| < \varepsilon_1 \ \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{0}$.
Supongamos ahora que $x > 0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\varepsilon_2 = \varepsilon\sqrt{x} > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon_2 \ \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| &= \frac{|(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{|(\sqrt{x_n})^2 - (\sqrt{x})^2|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\
&\leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{x}} = \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

Ejercicio 4.13. Demostrar que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales acotada e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión que converge a 0, entonces la sucesión $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge a 0.

Solución

Sea c una cota de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, es decir, $|x_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - 0| = |y_n| < \varepsilon' \ \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq c\varepsilon' = c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Luego $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Ejercicio 4.14. Demostrar las siguientes sucesiones convergen a 0.

a. $\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

b. $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$

c. $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

a. Como $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ se tiene que $\frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n+\cos(n)}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{0-0}{1+0} = 0.\end{aligned}$$

y del mismo modo, se puede probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$, por lo que aplicando el teorema de compresión de sucesiones convergentes se concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\cos(n)}{n^2+1} = 0$.

b. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2n!}{2^n (n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,\end{aligned}$$

por el criterio del cociente se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

c. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1,
\end{aligned}$$

por el criterio del cociente se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

Ejercicio 4.15. Demostrar que las siguientes sucesiones de números reales son monótonas y calcular su límite cuando exista.

a. $\left(\frac{3n}{2n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

b. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c. $\left(\frac{n^2}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

d. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{x_n+6}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

e. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{4x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

a. $\left(\frac{3n}{2n^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{3}{2}\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, que es decreciente al ser $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ decreciente. Como además está acotada, por el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas, se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\left\{\frac{3}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

b. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < 2 = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2} > \frac{x_{n-1}+3}{2} = x_n$.

   Veamos ahora que 3 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 3$. Supongamos que $x_n < 3$. Entonces, $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2} < \frac{3+3}{2} = 3$.

   Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{2} = \frac{x+3}{2}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \frac{x+3}{2} \Rightarrow 2x = x+3 \Rightarrow x = 3.$$

c. Para ver que la sucesión es creciente, probaremos que la sucesión de sus inversos es decreciente.

$$\left(\frac{n^2}{2n+1}\right)^{-1} = \frac{2n+1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, la sucesión no está acotada, ya que para cualquier $c \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c < n < \frac{n^2}{2n+1} = x_n$ si $n > 2$. Por tanto, según el el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión diverge.

d. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < \sqrt{7} = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} > \sqrt{x_{n-1} + 6} = x_n$.

Veamos ahora que 3 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 3$. Supongamos que $x_n < 3$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3+6} = 3$.

Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + 6} = \sqrt{x+6}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \sqrt{x+6} \Rightarrow x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 3.$$

Como $x = -2$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se concluye que $x = 3$.

e. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < 2 = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n} > \sqrt{4x_{n-1}} = x_n$.

Veamos ahora que 4 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 4$. Supongamos que $x_n < 4$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n} < \sqrt{4 \cdot 4} = 4$.

Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

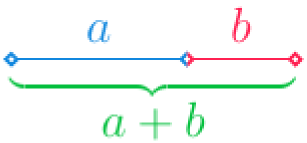
$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4x_n} = \sqrt{4x}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \sqrt{4x} \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 4.$$

Como $x = 0$ no puede ser al ser $x_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, se concluye que $x = 4$.

Ejercicio 4.16. Dado un segmento como el de la figura de más abajo,



tal que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$. A este número se le conoce como número áureo y es el número irracional $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749\ldots$

Demostrar que este número es el límite de las siguientes sucesiones de números reales.

a. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$
b. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Solución

a. Veamos en primer lugar que la sucesión está acotada. De la definición resulta obvio que $x_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. De esto se deduce que, $\frac{1}{x_n} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x_n} \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, $1 \leq x_n \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que la subsucesión de los términos impares $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge. Para ello veremos que es creciente por inducción. $y_1 = 1 < y_2 = 1.5$. Supongamos que $y_{n-1} < y_n$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{x_{2n}} \\
&= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n-1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{y_n}} \\
&> 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n-3}}} \\
&= 1 + \frac{1}{x_{2n-2}} = x_{2n-1} = y_n.
\end{aligned}
$$

Como la subsucesión también está acotada, por el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$
y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{y_n}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{y}}
$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$
\begin{aligned}
y = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{y}} &\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{\frac{y+1}{y}} = \frac{y}{y+1} \\
&\Rightarrow (y-1)(y+1) = y \\
&\Rightarrow y^2 - 1 = y \Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \\
&\Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}
$$

Como $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se tiene que $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Del mismo modo se puede probar que la subsucesión de los términos pares $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ también converge a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalmente, se deja como ejercicio probar que si las subsucesiones de los términos pares e impares de una sucesión convergen al mismo límite, entonces la sucesión converge al mismo límite.

b. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} > \sqrt{1+x_{n-1}} = x_n$.

   Veamos ahora que 2 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 2$. Supongamos que $x_n < 2$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$.

Así pues, según el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+x}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} x = \sqrt{1+x} &\Rightarrow x^2 = 1+x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Como $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se concluye que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ejercicio 4.17. Dada una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, probar o refutar las siguientes proposiciones:

a. Si cada x_n es una cota superior de un conjunto A, entonces x es también una cota superior de A.
b. Si $x_n \in \overline{(a,b)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \overline{(a,b)}$.
c. Si $x_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{Q}$.

Solución

a. Si x_n es cota superior de A $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que para cualquier $a \in A$, $a \leq x_n$. Veamos que entonces que $a \leq x$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pero $a > x$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, se tiene que para $\varepsilon = a - x > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| \leq a - x$ $\forall n \geq k$, pero entonces también se cumple

$$|x_n - x| = x_n - x < a - x \Rightarrow x_n < a,$$

por lo que x_n no sería cota superior de A, así que, necesariamente x tiene que ser cota superior de A.

b. Como $\overline{(a,b)}$ es un conjunto cerrado, para demostrar la proposición basta aplicar este teorema.

c. Veamos que la proposición es falsa con un contraejemplo. La sucesión $x_1 =$

1 y $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ $\forall n = 2, 3, \ldots$ está formada por números racionales, sin embargo, su límite es el número irracional $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749\ldots$ (ver Ejercicio 4.16).

Ejercicio 4.18. Una cuenta de ahorro ofrece el primer año un tipo de interés $x_1 = 0.5\%$ y los años sucesivos un interés $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}\%$. Si se mantiene la cuenta abierta por un periodo indefinido, ¿hacia donde tienden los tipos de interés?

Solución

a. Veamos en primer lugar que la sucesión está acotada. De la definición resulta obvio que $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pues todos los términos son positivos. De esto se deduce que, $\frac{3}{x+x_n} \leq \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Veamos ahora que la subsucesión de los términos impares $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge. Para ello veremos que es creciente por inducción. $y_1 = 0.5 < y_2 = 0.9375$. Supongamos que $y_{n-1} < y_n$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} &= \frac{3}{2+x_{2n}} \\
&= \frac{3}{2+\frac{3}{2+x_{2n-1}}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_n}} \\
&> \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_{n-1}}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+x_{2n-3}}} \\
&= \frac{3}{2+x_{2n-2}} = x_{2n-1} = y_n.
\end{aligned}
$$

   Como la subsucesión también está acotada, por el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$
y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_n}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y}}
$$

   Resolviendo la ecuación se tiene

$$
\begin{aligned}
y = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y}} &\Rightarrow y = \frac{3}{\frac{(4+2y)+3}{2+y}} = \frac{3(2+y)}{2y+7} \\
&\Rightarrow y(2y+7) = 3y+6 \\
&\Rightarrow 2y^2+4y-6=0 \\
&\Rightarrow y=-3 \text{ o } y=1.
\end{aligned}
$$

Como $y=-3$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se tiene que $y=1$.

Del mismo modo se puede probar que la subsucesión de los términos pares $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ también converge a 1.

Finalmente, como las subsucesiones de los términos pares e impares de una sucesión convergen al mismo límite, entonces la sucesión converge al mismo límite.

Ejercicio 4.19. Determinar cuáles de las siguientes sucesiones de números reales son de Cauchy.

a. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

c. $\left(\frac{Frsen(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$