

Problemas de Análisis Matemático



Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
<https://aprendeconalf.es>

Tabla de contenidos

Prefacio	3
1 Teoría de conjuntos	4
2 Números reales	14
3 Topología de los números reales	18
4 Sucesiones de números reales	24
5 Límites de funciones	39
6 Derivadas de funciones	60
7 Integrales de funciones	97
8 Series de números reales	146
9 Funciones vectoriales	172
10 Derivadas de funciones de varias variables	191
11 Integrales de funciones de varias variables	234

Prefacio

Colección de problemas de Análisis Matemático aplicado.

1 Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1. Dado el conjunto universo de los números de un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los subconjuntos correspondientes a sacar par en el lanzamiento de un dado $A = \{2, 4, 6\}$ y sacar menos de 5 en el lanzamiento de un dado $B = \{1, 2, 3, 4\}$, calcular e interpretar los siguientes conjuntos:

- a. $A \cup B$
- b. $A \cap B$
- c. \overline{A} y \overline{B}
- d. $A - B$ y $B - A$
- e. $A \Delta B$
- f. $\overline{(A \cup B)}$
- g. $\overline{(A \cap B)}$
- h. $\overline{A \cup \overline{B}}$
- i. $\overline{\overline{A} \cap B}$

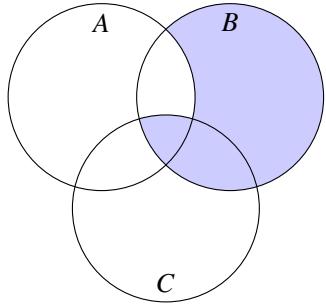
¿Qué conjuntos de números en el lanzamiento de un dado serían disjuntos con A ? ¿Y con $A \cup B$?

Solución

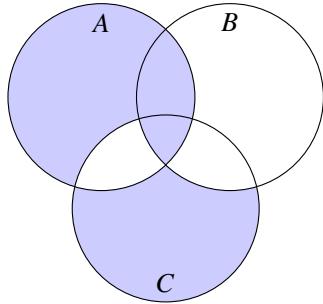
- a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- b. $A \cap B = \{2, 4\}$
- c. $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ y $\overline{B} = \{5, 6\}$
- d. $A - B = \{6\}$ y $B - A = \{1, 3\}$
- e. $A \Delta B = \{1, 3, 6\}$
- f. $\overline{(A \cup B)} = \{5\}$
- g. $\overline{(A \cap B)} = \{1, 3, 5, 6\}$
- h. $\overline{A \cup \overline{B}} = \{2, 4, 5, 6\}$
- i. $\overline{\overline{A} \cap B} = \{2, 4, 5, 6\}$

Serían disjuntos con A todos los conjuntos que solo tuviesen alguno de los números 1, 3 o 5, por ejemplo el conjunto $\{1, 5\}$. El único conjunto disjunto con $A \cup B$, además del vacío es $\{5\}$.

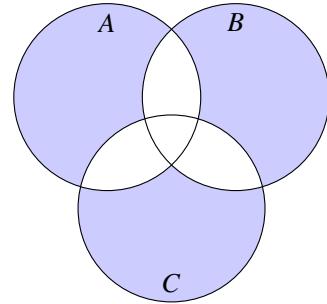
Ejercicio 1.2. Expresar con operaciones entre los conjuntos A , B y C , los conjuntos que se corresponden con las regiones sombreadas en los siguientes diagramas.



(a) a.



(a) b.



(a) c.

Solución

- a. $(B - A) \cup (A \cap B \cap C)$
- b. $(A \cup B) \cap (A \cap C) \cap (B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
- c. $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

Ejercicio 1.3. Demostrar gráficamente las leyes de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejercicio 1.4. Construir por extensión el conjunto potencia del conjunto de los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$. ¿Cuál es su cardinal?

Solución

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S) = & \{\emptyset, \{0\}, \{A\}, \{B\}, \{AB\}, \\ & \{0, A\}, \{0, B\}, \{0, AB\}, \{A, B\}, \{A, AB\}, \{B, AB\}, \{0, A, B\}, \\ & \{0, A, AB\}, \{0, B, AB\}, \{A, B, AB\}, \\ & \{0, A, B, AB\}\}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5. Construir el producto cartesiano del conjunto d los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$ y el conjunto de los factores Rh $R = \{\text{Rh+}, \text{Rh-}\}$.

Solución

$$S \times R = \{(0, \text{Rh+}), (0, \text{Rh-}), (A, \text{Rh+}), (A, \text{Rh-}), (B, \text{Rh+}), (B, \text{Rh-}), (AB, \text{Rh+}), (AB, \text{Rh-})\}$$

Ejercicio 1.6. Demostrar que la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x - y \text{ es par}\}$ es una relación de equivalencia.

Solución

Propiedad reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z} a - a = 0$ es par, de manera que aRa .

Propiedad simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si aRb entonces $a - b$ es par, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2k$. Por tanto, $b - a = 2(-k)$ también es par y bRa .

Propiedad transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, si aRb y bRc entonces $a - b$ y $b - c$ son pares, de manera que su suma $a - b + b - c = a - c$ también es par, y aRc .

Ejercicio 1.7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son relaciones de equivalencia? ¿Cuáles don de orden?

- $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
- $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$
- $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución

- R_1 es relación de equivalencia.
- R_2 es relación de orden.
- R_3 no es relación de equivalencia ni de orden porque no cumple las propiedades reflexiva y transitiva.
- R_4 es no es relación de equivalencia ni de orden porque tampoco cumple las propiedades reflexiva y transitiva.

Ejercicio 1.8. ★ Para cada uno de los conjuntos siguientes, calcular si existe el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo.

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$
- $C = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$

 Solución

- a. $\sup(A) = 5$, $\inf(A) = 1$, $\max(A) = 5$, $\min(A) = 1$.
- b. $\inf(B) = 2$ y $\min(B) = 2$. No existe el supremo ni el máximo porque B no está acotado superiormente.
- c. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = 0$ y $\max(C) = 1$. No existe el mínimo.

Ejercicio 1.9. ★ Dar ejemplos de funciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que cumplan lo siguiente:

- a. f es inyectiva pero no sobreyectiva.
- b. f es sobreyectiva pero no inyectiva.
- c. f no es inyectiva ni sobreyectiva.
- d. f es biyectiva y distinta de la función identidad.

 Solución

- a. $f(x) = 2x$
- b. $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$.
- c. $f(x) = x^2$
- d. $f(x) = x + 1$

Ejercicio 1.10. ★ Dadas las siguientes funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , estudiar cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas:

- a. $f(x) = x^2$
- b. $g(x) = x^3$
- c. $h(x) = x^3 - x^2 - 2x$
- d. $i(x) = |x|$

 Solución

- a. $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
- b. $g(x) = x^3$ es biyectiva.
- c. $h(x) = x^3 - x^2 - 2x$ es sobreyectiva pero no inyectiva.
- d. $i(x) = |x|$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Ejercicio 1.11. Demostrar que la composición de dos funciones inyectivas es también inyectiva.

Solución

Sean f y g dos funciones inyectivas tales que $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$. Veamos que $g \circ f$ es inyectiva. Supongamos ahora que existen $a, b \in \text{Dom}(f)$ tales que $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, es decir, $g(f(a)) = g(f(b))$. Como g es inyectiva, se tiene que $f(a) = f(b)$, y como f es inyectiva se tiene que $a = b$, con lo que $g \circ f$ es inyectiva.

Ejercicio 1.12. Dados dos conjuntos finitos A y B , demostrar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ y que $|A \times B| = |A||B|$.

Solución

- $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ con $A - B$, $A \cup B$ y $B - A$ disjuntos dos a dos, de manera que $|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$.

Por otro lado, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, y $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, de modo que

$$\begin{aligned}|A| + |B| - |A \cap B| &= |A - B| + |A \cap B| + |B - A| + |A \cap B| - |A \cap B| \\&= |A - B| + |B - A| + |A \cap B|,\end{aligned}$$

que coincide con el resultado anterior.

- Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, de manera que $|A| = n$ y $|B| = m$. Para cada elemento $a_i \in A$ se pueden formar m pares $(a_i, b_1), \dots, (a_i, b_m)$. Como A tiene n elementos, en total se pueden formar $n \cdot m$ pares, así que $|A \times B| = n \cdot m = |A||B|$.

Ejercicio 1.13. Dada una función $f : A \rightarrow B$, demostrar que si f es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$, y si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$. ¿Cómo es $|A|$ en comparación con $|B|$ cuando f es biyectiva?

Solución

Sea $f : A \rightarrow B$ inyectiva. Entonces para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ se tiene que $f(a_1) \neq f(a_2)$, por lo que $|A| \leq |B|$.

Sea $f : A \rightarrow B$ sobreyectiva. Entonces para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Además dos elementos de B no pueden tener la misma preimagen porque entonces f no sería una función, por lo que $|A| \geq |B|$.

De lo anterior se deduce que si f es biyectiva, entonces $|A| = |B|$.

Ejercicio 1.14. Dados dos conjuntos finitos A y B con $|A| = n$ y $|B| = m$. ¿Cuántas funciones distintas se pueden construir de A a B ? ¿Cuántas funciones sobreyectivas se pueden construir suponiendo que $n \geq m$? ¿Y cuántas funciones inyectivas suponiendo que $n \leq m$?

 Solución

Se pueden construir m^n funciones distintas, m^{m-n} funciones sobreyectivas y $\frac{m!}{(m-n)!}$ funciones inyectivas.

Ejercicio 1.15. Tomando el conjunto de los números naturales \mathbb{N} como conjunto universo, dar un ejemplo de un subconjunto infinito cuyo complemento también sea infinito.

 Solución

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ es infinito y $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\}$ también es infinito.

Ejercicio 1.16. Demostrar que todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.

 Solución

Sean A un conjunto infinito. Como A no es vacío, existe un elemento $a_1 \in A$. Considérese ahora el conjunto $A_1 = A \setminus \{a_1\}$. Es evidente que A_1 sigue siendo infinito y podemos elegir otro elemento $a_2 \in A_1$ de manera que el conjunto $A_2 = A_1 - \{a_2\}$ sigue siendo infinito. Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos que el conjunto $\{a_1, a_2, \dots\}$ es un subconjunto de A que es numerable.

Ejercicio 1.17. Demostrar que un conjunto es infinito si y solo si es equipotente a un subconjunto propio.

 Solución

Sea A un conjunto. Si A es finito, entonces cualquier subconjunto $B \subsetneq A$ cumple que $|B| < |A|$ por lo que no se puede establecer una biyección entre A y B .

Si A es infinito, por el ejercicio anterior se tiene que existe un subconjunto numerable $B = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$. Si tomamos la aplicación $f : B \rightarrow B \setminus \{a_1\}$ dada por $f(a_i) = a_{i+1}$, entonces f es biyectiva, y su extensión $\hat{f} : A \rightarrow A \setminus \{a_1\}$ dada por

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin B \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es también biyectiva, por lo que A es equipotente a $A \setminus \{a_1\}$ que es un subconjunto propio suyo.

Ejercicio 1.18. ★ Demostrar que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable. ¿Y el producto cartesiano de n conjuntos numerables?

💡 Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables. Entonces existe una aplicación inyectiva $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ y otra $g : B \rightarrow \mathbb{N}$. Si se toma ahora la función $h : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$h(a, b) = 2^{f(a)}3^{g(b)} \quad \forall a \in A, b \in B,$$

se tiene que f es inyectiva y por tanto $A \times B$ es numerable.

Por inducción, es fácil probar que el producto cartesiano de n conjuntos numerables es también numerable.

Ejercicio 1.19. ★ Demostrar que el conjunto de los números racionales es numerable.

💡 Solución

Si se considera la aplicación $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ que a cada número racional r le hace corresponder el par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ donde $\frac{p}{q}$ es la fracción irreducible de r con denominador positivo, se tiene que f es inyectiva. Como el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable, existe otra aplicación inyectiva de $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, con lo que $g \circ f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva y \mathbb{Q} es numerable.

Ejercicio 1.20. Demostrar que la unión de dos conjuntos numerables es numerable.

💡 Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables disjuntos. Entonces existen dos biyecciones $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{N}$. A partir de estas biyecciones se puede definir otra $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1 & \text{si } x \in A \\ 2g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Así pues, $A \cup B$ es numerable.

Si A y B no son disjuntos, entonces $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Si $B \setminus A = \{b_1, \dots, b_n\}$ es finito, se puede tomar la biyección $g = \{(b_1, 1), \dots, (b_n, n)\}$ y, a partir de ella, construir la biyección $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + n & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \setminus A \end{cases}$$

Mientras que si $B \setminus A$ es infinito, se puede razonar como al principio pues A y $B \setminus A$ son disjuntos.

Ejercicio 1.21. * Demostrar que el conjunto de los números irracionales no es numerable.

Solución

Ya hemos visto en el ejercicio Ejercicio 1.19 que \mathbb{Q} es numerable, de manera que si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fuese numerable, entonces por el Ejercicio 1.20 $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ sería numerable, lo cual no es cierto.

Ejercicio 1.22. Demostrar la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable.

Solución

Sea A un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por ser A numerable existe una biyección $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, de manera que podemos enumerar los elementos de A de tal forma que $A_i = f(i)$. Del mismo modo, como cada conjunto A_i es numerable se puede establecer una enumeración de sus elementos $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$. Así pues, podemos representar los elementos de $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ en una tabla como la siguiente

a_{11}	\rightarrow	a_{12}	a_{13}	\dots
	\swarrow	\nearrow	\downarrow	
a_{21}		a_{22}	a_{23}	\dots
\downarrow	\nearrow	\swarrow		
a_{31}		a_{32}	a_{33}	\dots
\vdots		\vdots	\vdots	\ddots

Siguiendo el orden de las flechas es posible enumerar todos los elementos de este conjunto, por lo que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

Ejercicio 1.23. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros $P = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}\}$ es numerable. ¿Y el de los polinomios con coeficientes racionales?

💡 Solución

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n el conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes enteros $P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{Z}\}$. Para cada polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in P_n$ podemos establecer una biyección entre sus coeficientes y la tupla $p_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, con $a_i \in \mathbb{Z}$. Por tanto, existe una biyección entre P_n y \mathbb{Z}^n , y como \mathbb{Z}^n es numerable, P_n también lo es.

Finalmente, $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_n$ que es la unión numerable de conjuntos numerables, que, como ya se vió en el Ejercicio 1.22, es numerable.

Del mismo modo, el conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes racionales también es numerable, ya que podemos establecer una biyección entre sus coeficientes y la tupla $p_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, con $a_i \in \mathbb{Q}$. Por tanto, existe una biyección entre P_n y \mathbb{Q}^n , que es numerable.

Ejercicio 1.24. ★ ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son numerables?

- a. $A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$
- b. $B = \{x \in \mathbb{Q} : -10 < x < 10\}$
- c. $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$
- d. $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}\}$
- e. $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

💡 Solución

a. A es numerable ya que es un subconjunto de \mathbb{Z} y un subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

b. B es numerable ya que es un subconjunto de \mathbb{Q} y un subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

c. C no es numerable ya que cualquier intervalo real con más de un número es no numerable. Para probarlo podemos usar el mismo razonamiento que para probar que el conjunto de los números reales es no numerable. El conjunto C está formado por los números decimales de la forma $0.d_1d_2\dots$. Supongamos que existe la siguiente biyección entre C y \mathbb{N} :

1. $0.d_{1,1}, d_{1,2}, d_{1,3}, \dots$
2. $0.d_{2,1}, d_{2,2}, d_{2,3}, \dots$
3. $0.d_{3,1}, d_{3,2}, d_{3,3}, \dots$
4. ...

Entonces es posible construir otro número real $0.c_1c_2c_3,\dots$ tal que $c_i = d_{i,i} + 1$ o $c_i = 0$ si $d_{i,i} = 9$. Este número real sería diferente de todos los de la enumeración anterior, ya que se diferenciaría de cada uno de ellos en al menos una cifra decimal. Por tanto, habría al menos un número que no

estaría emparejado con un número natural mediante la aplicación, por lo que no podría ser una biyección entre C y \mathbb{N} .

- d. D es numerable al ser el producto cartesiano de dos conjuntos numerables.
- e. E es numerable ya que se puede establecer la biyección $f(n) = 1/n$ entre \mathbb{N} y E .

Ejercicio 1.25. ¿Es el conjunto de todas las secuencias infinitas de ADN numerable?

Solución

No es numerable, ya que, al igual que ocurre con los números reales, no es posible hacer una enumeración de sus elementos. Las cadenas de ADN son secuencias de elementos conocidos como *bases*, que pueden ser A (Adenina), T (Timinina), G (Guanina), C (Citosina). Si existiese una biyección entre el conjunto de estas cadenas infinitas y \mathbb{N} , como por ejemplo, la siguiente,

1. A, T, C, \dots
2. $C, G, A \dots$
3. T, C, G, \dots
4. \dots

podríamos construir una nueva cadena distinta de todas las de esta enumeración, cambiando la base de la posición i por otra distinta de la que tenga en la misma posición la cadena i de la enumeración. De esta manera, la enumeración anterior no sería una biyección, pues habría al menos una cadena que no tendría asociado un número natural.

2 Números reales

Ejercicio 2.1. ★ Para los siguientes subconjuntos de números reales, determinar si están acotados por arriba o por abajo, y en tal caso dar el supremo o el ínfimo.

- a. $A = \{-1, 0, 1\}$
- b. $B = [0, 1)$
- c. $C = (0, \infty)$
- d. $D = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- e. $E = \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$
- f. $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$
- g. $G = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x < 0\}$

💡 Solución

- a. A está acotado por arriba y por abajo. $\sup(A) = 1$ y $\inf(A) = -1$.
- b. B está acotado por arriba y por abajo. $\sup(B) = 1$ y $\inf(B) = 0$.
- c. C está acotado por abajo, pero no por arriba. $\inf(C) = 0$.
- d. D está acotado por arriba y por abajo. $\sup(D) = 2$ y $\inf(D) = 1$.
- e. E no está acotado por arriba ni por abajo.
- f. F está acotado por arriba y por abajo. $\sup(F) = 2$ y $\inf(F) = 1$.
- g. G está acotado por arriba pero no por abajo. $\sup(G) = 1$.

Ejercicio 2.2. Calcular el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos. ¿Tienen máximo y mínimo?

- a. $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 - 2 < 7\}$
- b. $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < 4x^2 - 3 \leq 5\}$

💡 Solución

- a. $A = (-3, -2) \cup (2, 3)$, que como está acotado tiene supremo $\sup(A) = 3$ e ínfimo $\inf(A) = -3$. Sin embargo, $3 \notin A$ y $-3 \notin A$, por lo que no tiene ni

máximo ni mínimo.

- b. $B = [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$, que como está acotado tiene supremo $\sup(B) = \sqrt{2}$ e ínfimo $\inf(B) = -\sqrt{2}$. Como además, $-\sqrt{2} \in B$ y $\sqrt{2} \in B$, se tiene que $\max(B) = \sqrt{2}$ y $\min(B) = -\sqrt{2}$.

Ejercicio 2.3. Dadas dos funciones f y g ambas con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que si sus imágenes están acotadas y $f(a) \leq g(a) \forall a \in A$, entonces $\sup(\text{Im}(f)) \leq \sup(\text{Im}(g))$.

💡 Solución

Como las imágenes de f y g están acotadas, y suponiendo que no fuesen vacías, por el axioma del supremo, se tiene que existe $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c = \sup(\text{Im}(f))$ y $d = \sup(\text{Im}(g))$. Como d es el supremo de la imagen de g , se tiene que es una cota superior de la imagen de f , ya que, para cualquier $a \in A$, se tiene $f(a) \leq g(a) \leq d$. Por consiguiente, tiene que ser $c \leq d$, ya que de lo contrario c no sería el supremo por ser d una cota superior de la imagen de f menor que c .

Ejercicio 2.4. Demostrar que si $c \in \mathbb{R}$ es una cota superior de un conjunto A , entonces $-c$ es una cota inferior del conjunto de los opuestos $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, y si c es una cota inferior de A entonces $-c$ es una cota superior de A' .

💡 Solución

Sea $c \in \mathbb{R}$ una cota superior del conjunto A . Entonces, $a \leq c \forall a \in A$. De ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$a < c \Rightarrow (-1)a \geq (-1)c \Rightarrow -a \geq -c,$$

lo que demuestra que $-c$ es una cota inferior de A' .

Del mismo modo, si c una cota inferior del conjunto A . Entonces, $c \leq a \forall a \in A$, y de ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$c < a \Rightarrow (-1)c \geq (-1)a \Rightarrow -c \geq -a,$$

de manera que $-c$ es cota superior de A' .

Ejercicio 2.5. ★ Demostrar que todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene un ínfimo.

💡 Solución

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A . Si tomamos ahora el conjunto $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que $-c$ es una cota superior de A' . Así pues, A' es un conjunto no vacío y acotado superiormente, y por el axioma del supremo, existe $-s \in \mathbb{R}$ tal que $-s = \sup(A')$.

Veamos ahora que s es el ínfimo de A . Como $-s$ es el supremo de A' , es una cota superior de A' , y por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que $-(-s) = s$ es cota inferior de A . Supongamos ahora que existe otra cota inferior x de A tal que $x > s$. Entonces, aplicando una vez más el Ejercicio 2.4, se tiene que $-x$ es cota superior de A' , pero $x > s \Rightarrow (-1)x < (-1)s \Rightarrow -x < -s$, lo que contradice que $-s$ sea el supremo de A' , ya que $-x$ sería una cota superior menor que $-s$. Luego s es el ínfimo de A .

Ejercicio 2.6. Demostrar que $|a| - |b| \leq |a - b| \forall a, b \in \mathbb{R}$.

💡 Solución

Veamos todas las posibilidades que pueden darse:

- Si $a = 0$, entonces $|a| - |b| = -|b| \leq | - b | = |a - b|$.
- Si $b = 0$, entonces $|a| - |b| = |a| = |a - b|$.
- Si $a \geq b > 0$, entonces $|a| - |b| = a - b = |a - b|$.
- Si $b \geq a > 0$, entonces $|a| - |b| = a - b \leq 0 \leq |a - b|$.
- Si $a > 0 > b$, entonces $|a| - |b| = a - (-b) = a + b < a - b = |a - b|$.
- Si $b > 0 > a$, entonces $|a| - |b| = -a - b < -a + b = -(a - b) = |a - b|$.
- Si $a \leq b < 0$, entonces $|a| - |b| = -a - (-b) = -a + b = -(a - b) = |a - b|$.
- Si $b \leq a < 0$, entonces $|a| - |b| = -a - (-b) = -a + b \leq 0 \leq |a - b|$.

Ejercicio 2.7. * Usando la propiedad arquimediana de los números reales, demostrar que para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$. Demostrar también que existe otro número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq a < m$.

💡 Solución

Como $a > 0$ se tiene que $\frac{1}{a} > 0$, y por la propiedad arquimediana, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a} < n$, de donde se deduce que $\frac{1}{1/a} > \frac{1}{n} > 0$, es decir, $0 < \frac{1}{n} < a$.

Para demostrar la segunda parte, considérese ahora el conjunto $A = \{k \in \mathbb{N} : a < k\}$. Por la propiedad arquimediana sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$, y por tanto, $n \in A$ por lo que A no está vacío. Aplicando ahora el principio de buena

ordenación de los números naturales, como $A \subset \mathbb{N}$, existe un primer elemento $m \in A$, tal que $m - 1 \notin A$, de manera que $m - 1 \leq a$ y con ello se tiene que $m - 1 \leq a < m$.

Ejercicio 2.8. Se dice que un conjunto A es denso en \mathbb{R} si cada intervalo (a, b) de \mathbb{R} contiene algún elemento de A . Demostrar que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} .

 Solución

La prueba es la misma que la de la propiedad arquimediana. Basta con tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Si ahora se toma el primer múltiplo de $1/n$ tal que $a < \frac{m}{n}$, también se cumplirá que $\frac{m}{n} < b$, ya que de lo contrario $\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n}$ lo que lleva a la contradicción de que $\frac{1}{n} > b - a$.

3 Topología de los números reales

Ejercicio 3.1. Dada la sucesión de intervalos anidados $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Demostrar también que si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados entonces la intersección es vacía.

💡 Solución

En primer lugar, es fácil ver que $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ ya que $0 \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que 0 es el único elemento de la intersección. Para cualquier $x > 0$, aplicando la propiedad arquimediana se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$, de manera que $x \notin [0, \frac{1}{n}] = I_n$, por lo que $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Por tanto, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados, entonces 0 tampoco pertenecería a la intersección y $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Ejercicio 3.2. ¿Cuál es el interior del conjunto $A = \{a\}$?

💡 Solución

a no es un punto interior de A , ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subseteq A$. Por tanto, $\text{Int}(A) = \emptyset$.

En general, cualquier conjunto con un solo punto no tiene puntos interiores.

Ejercicio 3.3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$ y sea $A = \{a\} \cup (b, c)$. Calcular $\text{Int}(A)$, $\text{Ext}(A)$ y $\text{Fr}(A)$.

💡 Solución

Como el interior de un conjunto con un solo punto es vacío y el interior de un intervalo abierto es el propio intervalo abierto (ver [proposición](#)), se tiene que $\text{Int}(A) = (b, c)$. Por otro lado, $\overline{A} = (-\infty, a) \cup (a, b] \cup [c, \infty)$, que al ser la unión de intervalos abiertos y semiabiertos se tiene que $\text{Ext}(A) = \text{Int}(\overline{A}) = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (c, \infty)$. Finalmente, $\text{Fr}(A) = \{a, b, c\}$, ya que cualquier entorno de estos puntos contiene puntos de A y de \overline{A} .

Ejercicio 3.4. ★ Demostrar que todos los puntos de \mathbb{Z} son puntos frontera.

Solución

Sea $x \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ siempre contiene números enteros (por ejemplo el propio x), y números no enteros, por los que x es un punto frontera.

Ejercicio 3.5. ★ Demostrar que el conjunto de los números racionales no tiene puntos interiores. ¿Y el conjunto de los números irracionales?

Solución

Sea $x \in \mathbb{Q}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, por la [densidad de los números racionales](#), el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ siempre contiene números racionales, y por la [densidad de los números irracionales](#) también contiene números irracionales, de manera que todos los puntos de \mathbb{Q} son frontera y no tiene puntos interiores.

Por el mismo motivo, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tampoco tiene puntos interiores y todos sus puntos son puntos frontera.

Ejercicio 3.6. Demostrar que si x es un punto interior de A y $A \subseteq B$, entonces x también es un punto interior de B .

Solución

Sea x un punto interior de A . Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \subseteq B$, de manera que x también es un punto interior de B .

Ejercicio 3.7. Demostrar que si x es un punto interior de dos conjuntos A y B , entonces también es un punto interior de su unión y su intersección.

Solución

Sea x un punto interior de A y B . Entonces, existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq A \subseteq A \cup B$, de manera que x es también un punto interior de $A \cup B$.

Por otro lado, como x es también un punto interior de B , existe otro $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq B$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq B$, por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$, y x es también un punto interior de $A \cap B$.

Ejercicio 3.8. Demostrar que para cualesquiera dos conjuntos de números reales A y B , se cumple que $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

Demostrar también que el anterior resultado no es cierto para la unión, es decir, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no se cumple siempre que $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.

💡 Solución

En el Ejercicio 3.7 hemos visto que si x es un punto interior de A y B , entonces también lo es de su intersección. Veamos ahora el otro sentido de la implicación. Supongamos que x es un punto interior de $A \cap B$. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$. Pero como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, se tiene que x es también un punto interior de A y de B .

Para ver que este resultado no es cierto para la unión, basta con tomar $A = (-1, 0)$ y $B = [0, 1]$. Entonces $A \cup B = (-1, 1)$, y al ser un intervalo abierto, $\text{Int}(A \cup B) = (-1, 1)$. Sin embargo, $\text{Int}(A) = (-1, 0)$ y $\text{Int}(B) = (0, 1)$, por lo que $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = (-1, 1) \setminus \{0\} \neq (-1, 1) = \text{Int}(A \cup B)$.

Ejercicio 3.9. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, probar que los conjuntos $\text{Int}(A)$, $\text{Ext}(A)$ y $\text{Fr}(A)$ forman una partición de \mathbb{R} .

💡 Solución

Veamos primero, que $\text{Int}(A)$, $\text{Ext}(A)$ y $\text{Fr}(A)$ son disjuntos dos a dos.

- Si $x \in \text{Int}(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$. De aquí se deduce que $a \in A$, y por tanto $x \notin \overline{A}$ por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subseteq \overline{A}$ $\forall \varepsilon > 0$ y x no es un punto exterior de A . Por otro lado, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$, por lo que este entorno de x no contiene puntos de \overline{A} y $x \notin \text{Fr}(A)$.
- Si $x \in \text{Ext}(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$. De aquí se deduce que $x \notin A$, y por tanto x no es un punto interior de A . Por otro lado, como $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$, existe un entorno de x que no contiene puntos de A y $x \notin \text{Fr}(A)$.
- Si $x \in \text{Fr}(A)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contiene puntos de A y de \overline{A} , de manera que, no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ o $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$, así que, x no es un punto interior ni exterior de A .

Veamos ahora que $\text{Int}(A) \cup \text{Ext}(A) \cup \text{Fr}(A) = \mathbb{R}$, o dicho de otro modo, cualquier $x \in \mathbb{R}$ debe pertenecer a alguno de estos conjuntos.

- Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$, entonces x es un punto interior de A .
- En caso contrario, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$, entonces x es un punto exterior de A .
- Finalmente, si para cualquier $\varepsilon > 0$ $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subseteq A$ y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subseteq \overline{A}$, se tiene que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contiene tanto puntos de A como de \overline{A} , por lo que x es un punto frontera de A .

Ejercicio 3.10. ★ Calcular los puntos de adherencia y de acumulación del conjunto $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

💡 Solución

Como $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, 1 es un punto de acumulación de A , ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \setminus \{1\}$ contiene puntos de A . Para verlo, basta aplicar la propiedad arquimediana, por la que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de manera que $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$, y por tanto $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \setminus \{1\} \cap A \neq \emptyset$.

Para calcular los puntos de adherencia de A basta tener en cuenta que $A \subseteq \text{Adh}(A)$, y que $\text{Ac}(A) \subseteq \text{Adh}(A)$, por lo que 1 también es un punto de adherencia de A . Veamos ahora que cualquier otro punto, no es punto de adherencia de A . Si $x < 1$, tomando $\varepsilon = |x - 1|$ el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ no contiene puntos de A . Del mismo modo, si $x > 2$, tomando $\varepsilon = |x - 2|$ el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tampoco contiene puntos de A . Finalmente, si $1 < x \leq 2$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$. Tomando $\varepsilon = \min(|x - \frac{1}{n+1}|, |x - \frac{1}{n}|)$ también se tiene que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ no contiene puntos de A . Por tanto, $\text{Adh}(A) = A \cup \{1\}$.

Para calcular los puntos de acumulación de A , ya sabemos que 1 es un punto de acumulación y faltaría por ver si algún otro punto de A es un punto de acumulación de A , ya que el resto de puntos no pertenecen a la adherencia y por tanto no pueden ser puntos de acumulación al ser $\text{Ac}(A) \subseteq \text{Adh}(A)$. Ahora bien, si $x \in A$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 1 + \frac{1}{n}$, de manera que tomando $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ se tiene que el entorno reducido $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$ no contiene puntos de A , por lo que x no es punto de acumulación de A . Así pues, $\text{Ac}(A) = \{1\}$.

Ejercicio 3.11. Calcular los puntos de adherencia y de acumulación de \mathbb{Z} y también de \mathbb{Q} .

💡 Solución

$$\text{Adh}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ y } \text{Ac}(\mathbb{Z}) = \emptyset.$$

$$\text{Adh}(\mathbb{Q}) = \text{Ac}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$$

Ejercicio 3.12. Dar un ejemplo de dos conjuntos no abiertos pero cuya intersección es abierta.

💡 Solución

Si se toma $A = [0, 2)$ y $B = (1, 3]$, tanto A como B no son abiertos, pero $A \cap B = (1, 2)$ que es un conjunto abierto.

Ejercicio 3.13. ★ Estudiar si el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} es abierto o cerrado.

💡 Solución

\mathbb{Q} no es abierto ya que como se vio en el Ejercicio 3.5 $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. En el mismo ejercicio se vio también que $\text{Int}(\overline{\mathbb{Q}}) = \text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, por lo que \mathbb{Q} tampoco es cerrado.

Ejercicio 3.14. Probar las siguientes propiedades:

- La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.
- La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

💡 Solución

a. Sea A_n $n \in \mathbb{N}$ una colección arbitraria de conjuntos abiertos y sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, y como A_n es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, por lo que x es un punto interior de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

b. Vamos a probarlo por inducción. Sean A_1 y A_2 dos conjuntos abiertos. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x \in A_1 \cap A_2$. Entonces, como $x \in A_1$ existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq A_1$, y como $x \in A_2$ existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq A_2$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_1$ y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_2$, por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_1 \cap A_2$, y $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto.

Sea ahora una colección A_1, \dots, A_m, A_{m+1} una colección de conjuntos abiertos y supongamos que $A = \bigcap_{n=1}^m A_n$ es un conjunto abierto. Si $A \cap A_{m+1} = \emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x \in A \cap A_{m+1}$. Entonces, como $x \in A$ existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq A$, y como $x \in A_{m+1}$ existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq A_{m+1}$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_{m+1}$, por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap A_{m+1}$, y $\bigcap_{n=1}^{m+1} A_n$ es un conjunto abierto.

c. Sea A_n , $n \in \mathbb{N}$, una colección arbitraria de conjuntos cerrados. Entonces, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Como A_n es cerrado, $\overline{A_n}$ es abierto $\forall n \in \mathbb{N}$, y por el apartado (a), se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$ es abierto y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es cerrado.

d. Sea ahora una colección A_1, \dots, A_n una colección de conjuntos cerrados. De nuevo, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Como

A_i es cerrado, $\overline{A_i}$ es abierto $\forall i = 1, \dots, n$, y por el apartado (b), se tiene que $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ es abierto y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es cerrado.

Ejercicio 3.15. Demostrar que la adherencia de cualquier conjunto es siempre cerrada.

💡 Solución

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Para probar que $\text{Adh}(A)$ es un conjunto cerrado, veremos que $\overline{\text{Adh}(A)}$ es abierto. Si $x \in \overline{\text{Adh}(A)}$, entonces $x \notin \text{Adh}(A)$, y existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Para cualquier $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, se tiene, tomando $\varepsilon' = \min(\{x - \varepsilon - y, x + \varepsilon - y\})$, que $(y - \varepsilon', y + \varepsilon') \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y por tanto $(y - \varepsilon', y + \varepsilon') \cap A = \emptyset$, por lo que $y \notin \text{Adh}(A)$. Así pues, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{\text{Adh}(A)}$, y por consiguiente $\overline{\text{Adh}(A)}$ es abierto y $\text{Adh}(A)$ es cerrado.

Ejercicio 3.16. Demostrar que cualquier conjunto es cerrado si y solo si coincide con su adherencia.

💡 Solución

Sea A un conjunto cerrado. Ya sabemos que $A \subseteq \text{Adh}(A)$. Supongamos ahora que existe un punto $x \in \text{Adh}(A) \setminus A$. Entonces, como x es un punto de adherencia de A , para cualquier $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pero como $x \notin A$, también se cumple que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$, por lo que x es un punto de acumulación de A , pero eso contradice que A sea un conjunto cerrado, pues no contiene a todos sus puntos de acumulación (ver [teorema](#)). Así pues, $\text{Adh}(A) = A$.

Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que $\text{Adh}(A) = A$. Entonces, para cualquier $x \in \overline{A}$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A = \emptyset$, por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$ y \overline{A} es abierto, de manera que A es cerrado.

4 Sucesiones de números reales

Ejercicio 4.1. Una *sucesión constante* es una sucesión de números reales en la que cada término es igual que el anterior. Demostrar que una sucesión constante siempre converge.

Solución

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión con $a_n = c$ constante. Veamos que converge a c . Para cualquier $\varepsilon > 0$ basta tomar $k = 1$, de manera que $\forall n \geq k$ se tiene que $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Ejercicio 4.2. Una *sucesión aritmética* es una sucesión de números reales en la que cada término se obtienen sumando un número constante $c \in \mathbb{R}$ al anterior, es decir, $x_1 = c$ y $x_{n+1} = c + x_n \quad \forall n = 2, 3, \dots$. Estudiar la convergencia de las sucesiones aritméticas.

Solución

Si $c = 0$ entonces la sucesión es constante y por el Ejercicio 4.1, la sucesión converge. Supongamos que $c > 0$ y veamos que la sucesión aritmética $(nc)_{n=1}^{\infty}$ no converge a ningún número $x \in \mathbb{R}$. Para ello, basta tomar $\varepsilon = 1$, de manera que por la propiedad arquimediana se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x+1}{c} < m$, así que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tomando $n = \max(\{k, m\})$, se cumple que existe $n \geq k$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{c} < m \leq n &\Rightarrow x+1 < nc = x_n \\ &\Rightarrow x_n - x > 1 \\ &\Rightarrow |x_n - x| > 1 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión diverge. De forma similar se puede probar que si $c < 0$ la sucesión también diverge.

Otra forma de demostrarlo es probar que la sucesión es monótona y no acotada y aplicar el [teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#) para concluir que la sucesión no converge.

Ejercicio 4.3. Una *sucesión geométrica* es una sucesión de números reales en la que cada término se obtienen multiplicando un número constante $c \in \mathbb{R}$ por el anterior, es decir, $x_1 = c$ y $x_{n+1} = cx_n$. Estudiar la convergencia de las sucesiones geométricas.

💡 Solución

Si $c = 0$ o $c = 1$ entonces la sucesión es constante y por el Ejercicio 4.1, la sucesión converge.

Supongamos que $c > 1$ y veamos que la sucesión geométrica $(c^n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a ningún número $x \in \mathbb{R}$. Para ello, basta probar que la sucesión es creciente y no acotada. Probaremos que por inducción que la sucesión es creciente. $x_1 = c < cc = c^2 = x_2$ por ser $c > 1$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$, entonces $x_n = c^n < cc^n = c^{n+1} = x_{n+1}$. Por tanto, la sucesión es creciente.

Veamos ahora que no está acotada por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > x_n \forall n \in \mathbb{N}$. Como $c > 1$, podemos escribir $x_n = c^n = (1 + a)^n$ con $a > 0$. Aplicando ahora el teorema del binomio, se tiene

$$\begin{aligned}(1 + a)^n &= \binom{n}{0} 1^n a^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} a^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 a^n \\&= 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 + \dots + a^n \\&\geq 1 + na.\end{aligned}$$

Aplicando ahora la propiedad arquimediana, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x-1}{a} < n$, de modo que

$$\frac{x-1}{a} < n \Rightarrow x - 1 < na \Rightarrow x < 1 + na < (1 + a)^n = x_n,$$

por lo que x no puede ser cota de la sucesión. Por consiguiente, la sucesión es monótona y no acotada, y por el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas la sucesión diverge.

De forma similar se puede prueba que si $c < 0$ la sucesión también diverge.

Veamos finalmente que si $0 < c < 1$ entonces la sucesión converge a 0.

Ejercicio 4.4. * Una *sucesión alternada* es una sucesión de números reales en la que cada término tiene signo distinto del anterior. Demostrar que la sucesión alternada $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente. ¿Puede una sucesión alternada ser convergente?

💡 Solución

Veamos que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = x$. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ es sencillo, ya que tomando $\varepsilon = |1 - |x||$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$ se tiene que $|x_n - x| = |(-1)^n - x| \geq ||(-1)^n| - |x|| = |1 - |x|| = \varepsilon$, por tanto, la sucesión no converge a x .

Veamos ahora que la sucesión no converge a 1. Para ello basta tomar $\varepsilon = 1$, de manera que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $n = 2k + 1 \geq k$ tal que $|x_n - 1| = |(-1)^{2k+1} - 1| = |-1 - 1| = |-2| = 2 > 1 = \varepsilon$.

Del mismo modo se puede probar que tampoco converge a -1 . Para ello basta tomar de nuevo $\varepsilon = 1$, de manera que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $n = 2k \geq k$ tal que $|x_n - (-1)| = |(-1)^{2k} - (-1)| = |1 - (-1)| = |2| = 2 > 1 = \varepsilon$.

Otra forma de demostrar la no convergencia de la sucesión es tomar las subsucesiones suyas $((-1)^{2n})_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente, al ser constantes, de manera que aplicando el [teorema de la convergencia de las subsucesiones](#), se tiene que las sucesión original no converge.

Por otro lado, no toda sucesión alternada es divergente. Por ejemplo, las sucesiones $(\frac{(-1)^n}{n})_{n=1}^{\infty}$ y $(\frac{(-1)^n}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ son alternadas y convergen a 0.

Ejercicio 4.5. ¿Cómo podríamos demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas?

- En cada banco de una ciudad existe al menos un cliente moroso.
- Existe un banco en una ciudad donde cada cliente tiene una pensión o una hipoteca.
- Para todos los bancos de una ciudad existe un cliente que cada mes usa una tarjeta de crédito o de débito.

💡 Solución

- Para refutar la afirmación habría que encontrar un banco en el que no hubiese al menos un cliente moroso, es decir, que todos sus clientes no fuesen morosos.
- Para refutar la afirmación habría que mostrar que todos los bancos de la ciudad tienen algún cliente que no tiene pensión ni hipoteca.
- Para refutar la afirmación habría que encontrar un banco en el que ningún cliente usase cada mes la tarjeta de crédito o de débito, es decir, en el que para todos los clientes hay algún mes que no usan ni la tarjeta de crédito ni la de débito.

Ejercicio 4.6. ★ Dar un ejemplo de sucesión que cumpla las siguientes condiciones, o, en caso de no existir ninguna, explicar porqué.

- Una sucesión con un número infinito de ceros que no converge a 0.
- Una sucesión con un número infinito de unos que converge a un número distinto de uno.
- Una sucesión divergente tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se pueden encontrar n ceros consecutivos en la sucesión.

 Solución

a. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ 1 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

b. No existe.

c. La sucesión 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,

Ejercicio 4.7. ★ Demostrar, aplicando la definición de límite de una sucesión, que las siguientes sucesiones de números reales convergen a los valores dados.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} = 0$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + n - 2} = \frac{1}{3}$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2 - n} = 3$

 Solución

a.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

b.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + n - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1 - 0}{3 + 0 - 0} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \\
&= \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.8. ★ Dar un ejemplo de sucesiones que cumplan las siguientes condiciones, o, en caso de no existir ninguna, explicar porqué.

- a. Dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que divergen pero $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.
- b. Dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que convergen pero $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.
- c. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge y otra $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que diverge, pero tales que $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.
- d. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge y otra $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que diverge, pero tales que $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.
- e. Dos sucesiones divergentes $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ con $y_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ tales que $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge.

💡 Solución

- a. $(n)_{n=1}^{\infty}$ y $(-n)_{n=1}^{\infty}$ divergen, pero $(n + (-n))_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty}$ converge por ser constante.
 - b. No es posible (ver [proposición](#)).
 - c. Para ver que no es posible, daremos una demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge. Entonces, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, se tiene que $((x_n + y_n) - x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge (ver [proposición](#)), con lo que se llega a una contradicción pues partíamos de que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente.
 - d. $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ converge y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge, pero $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge.
 - e. $(n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente, pero $(\frac{n}{n})_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ converge por ser constante.
- Otro ejemplo son $((-1)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ y $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ que divergen, pero $(\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n})_{n=1}^{\infty} = (\frac{(-1)^n(-1)}{(-1)^n})_{n=1}^{\infty} = (-1)_{n=1}^{\infty}$ converge al ser constante.

Ejercicio 4.9. Demostrar que si una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge un número x , entonces la sucesión $(x_n - x)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

 Solución

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon \forall n \geq k$, pero entonces es obvio que $|(x_n - x) - 0| < \varepsilon \forall n \geq k$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) = 0$.

Ejercicio 4.10. Dado un polinomio $p(x)$, demostrar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = p(x)$.

 Solución

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ un polinomio cualquiera y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_1x_n + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} a_mx_n^m \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} a_m \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^m \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} a_m (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^m \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = p(x).\end{aligned}$$

Ejercicio 4.11. Demostrar que si una sucesión de números reales converge a x , entonces la sucesión de sus valores absolutos converge a $|x|$. ¿Es cierto lo contrario?

 Solución

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon \forall n \geq k$, pero entonces, aplicando la desigualdad triangular, también se tiene que $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon \forall n \geq k$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |x|$.

Ejercicio 4.12. Demostrar que si una sucesión de números reales no negativos converge a x , entonces la sucesión de sus raíces cuadradas positivas converge a \sqrt{x} .

Solución

Veamos primero el caso en que $x = 0$. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\varepsilon_1 = \varepsilon^2 > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon_1 \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{0}$.

Supongamos ahora que $x > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\varepsilon_2 = \varepsilon\sqrt{x} > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon_2 \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$\begin{aligned} |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| &= \left| \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \right| \\ &= \frac{|(\sqrt{x_n})^2 - (\sqrt{x})^2|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\ &\leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{x}} = \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

Ejercicio 4.13. Demostrar que si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de números reales acotada e $(y_n)_{n=1}^\infty$ es otra sucesión que converge a 0, entonces la sucesión $(x_n y_n)_{n=1}^\infty$ también converge a 0.

Solución

Sea c una cota de la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$, es decir, $|x_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - 0| = |y_n| < \varepsilon' \forall n \geq k$, pero entonces, también se cumple que

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n| |y_n| \leq c \varepsilon' = c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

Ejercicio 4.14. ★ Demostrar las siguientes sucesiones convergen a 0.

a. $\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1} \right)_{n=1}^\infty$

b. $\left(\frac{2^n}{n!} \right)_{n=1}^\infty$

c. $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

 Solución

a. Como $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ se tiene que $\frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n+\cos(n)}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{0-0}{1+0} = 0.\end{aligned}$$

y del mismo modo, se puede probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$, por lo que aplicando el [teorema de compresión de sucesiones convergentes](#) se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\cos(n)}{n^2+1} = 0$.

b. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n 2n!}{2^n(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,\end{aligned}$$

por el [criterio del cociente](#) se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

c. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

por el [criterio del cociente](#) se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

Ejercicio 4.15. ★ Demostrar que las siguientes sucesiones de números reales son monótonas y calcular su límite cuando exista.

a. $\left(\frac{3n}{2n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

- b. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- c. $\left(\frac{n^2}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- d. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- e. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{4x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

- a. $\left(\frac{3n}{2n^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{3}{2}\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, que es decreciente al ser $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ decreciente. Como además está acotada, por el [teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#), se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\left\{\frac{3}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.
- b. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < 2 = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2} > \frac{x_{n-1}+3}{2} = x_n$. Veamos ahora que 3 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 3$. Supongamos que $x_n < 3$. Entonces, $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2} < \frac{3+3}{2} = 3$. Así pues, según el [teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#) la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 3}{2} = \frac{x + 3}{2}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \frac{x + 3}{2} \Rightarrow 2x = x + 3 \Rightarrow x = 3.$$

- c. Para ver que la sucesión es creciente, probaremos que la sucesión de sus inversos es decreciente.

$$\left(\frac{n^2}{2n+1}\right)^{-1} = \frac{2n+1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, la sucesión no está acotada, ya que para cualquier $c \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c < n < \frac{n^2}{2n+1} = x_n$ si $n > 2$. Por tanto, según el [el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#) la sucesión diverge.

- d. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < \sqrt{7} = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} > \sqrt{x_{n-1} + 6} = x_n$.

Veamos ahora que 3 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 3$. Supongamos que $x_n < 3$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$.

Así pues, según el [teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#) la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n + 6} = \sqrt{x + 6}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \sqrt{x + 6} \Rightarrow x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 3.$$

Como $x = -2$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se concluye que $x = 3$.

- e. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < 2 = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n} > \sqrt{4x_{n-1}} = x_n$.

Veamos ahora que 4 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 4$. Supongamos que $x_n < 4$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n} < \sqrt{4 \cdot 4} = 4$.

Así pues, según el [teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#) la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

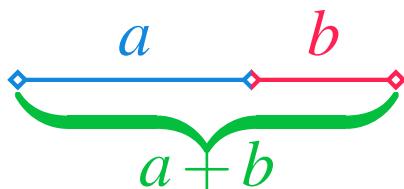
$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4x_n} = \sqrt{4x}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \sqrt{4x} \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 4.$$

Como $x = 0$ no puede ser al ser $x_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, se concluye que $x = 4$.

Ejercicio 4.16. ★ Dado un segmento como el de la figura de más abajo,



tal que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$. A este número se le conoce como **número áureo** y es el número irracional $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749\dots$

Demostrar que este número es el límite de las siguientes sucesiones de números reales.

- a. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \forall n \in \mathbb{N}$
- b. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \forall n \in \mathbb{N}$

Solución

- a. Veamos en primer lugar que la sucesión está acotada. De la definición resulta obvio que $x_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$. De esto se deduce que, $\frac{1}{x_n} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x_n} \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, $1 \leq x_n \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que la subsucesión de los términos impares $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge. Para ello veremos que es creciente por inducción. $y_1 = 1 < y_2 = 1.5$. Supongamos que $y_{n-1} < y_n$. Entonces,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{x_{2n}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_n}} \\ &> 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n-3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{x_{2n-2}} = x_{2n-1} = y_n. \end{aligned}$$

Como la subsucesión también está acotada, por el **teorema de la convergencia de sucesiones monótonas** converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y}}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{\frac{y+1}{y}} = \frac{y}{y+1} \\ &\Rightarrow (y-1)(y+1) = y \\ &\Rightarrow y^2 - 1 = y \Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ o } y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Como $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se tiene que $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Del mismo modo se puede probar que la subsucesión de los términos pares $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ también converge a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalmente, se deja como ejercicio probar que si las subsucesiones de los términos pares e impares de una sucesión convergen al mismo límite, entonces la sucesión converge al mismo límite.

- b. Veamos que la sucesión es creciente por inducción. $x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$. Supongamos ahora que $x_{n-1} < x_n$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} > \sqrt{1+x_{n-1}} = x_n$.

Veamos ahora que 2 es una cota superior de la sucesión también por inducción. $x_1 = 1 < 2$. Supongamos que $x_n < 2$. Entonces, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$.

Así pues, según el [teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#) la sucesión converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+x}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} x = \sqrt{1+x} &\Rightarrow x^2 = 1+x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Como $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se concluye que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ejercicio 4.17. Dada una sucesión de números reales tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, probar o refutar las siguientes proposiciones:

- Si cada x_n es una cota superior de un conjunto A , entonces x es también una cota superior de A .
- Si $x_n \in \overline{(a, b)} \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \overline{(a, b)}$.
- Si $x_n \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{Q}$.

Solución

- a. Si x_n es cota superior de $A \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que para cualquier $a \in A$, $a \leq x_n$. Veamos que entonces que $a \leq x$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$ pero $a > x$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, se tiene que para $\varepsilon = a - x > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| \leq a - x \forall n \geq k$, pero entonces también se cumple

$$|x_n - x| = x_n - x < a - x \Rightarrow x_n < a,$$

por lo que x_n no sería cota superior de A , así que, necesariamente x tiene que ser cota superior de A .

- b. Como $\overline{(a, b)}$ es un conjunto cerrado, para demostrar la proposición basta aplicar este [teorema](#).
- c. Veamos que la proposición es falsa con un contraejemplo. La sucesión $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \forall n = 2, 3, \dots$ está formada por números racionales, sin embargo, su límite es el número irracional $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749 \dots$ (ver Ejercicio 4.16).

Ejercicio 4.18. ★ Una cuenta de ahorro ofrece el primer año un tipo de interés $x_1 = 0.5\%$ y los años sucesivos un interés $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}\%$. Si se mantiene la cuenta abierta por un periodo indefinido, ¿hacia donde tienden los tipos de interés?

Solución

- a. Veamos en primer lugar que la sucesión está acotada. De la definición resulta obvio que $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ pues todos los términos son positivos. De esto se deduce que, $\frac{3}{2+x_n} \leq \frac{3}{2} \forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2} \forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que la subsucesión de los términos impares $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge. Para ello veremos que es creciente por inducción. $y_1 = 0.5 < y_2 = 0.9375$. Supongamos que $y_{n-1} < y_n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = \frac{3}{2+x_{2n}} \\
&= \frac{3}{2+\frac{3}{2+x_{2n-1}}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_n}} \\
&> \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_{n-1}}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+x_{2n-3}}} \\
&= \frac{3}{2+x_{2n-2}} = x_{2n-1} = y_n.
\end{aligned}$$

Como la subsucesión también está acotada, por el [teorema de la convergencia de sucesiones monótonas](#) converge. Para calcular el límite, aprovechando la definición recursiva de la sucesión se tiene

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2+\frac{3}{2+y_n}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y}}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$\begin{aligned}
y = \frac{3}{2+\frac{3}{2+y}} &\Rightarrow y = \frac{3}{\frac{(4+2y)+3}{2+y}} = \frac{3(2+y)}{2y+7} \\
&\Rightarrow y(2y+7) = 3y+6 \\
&\Rightarrow 2y^2 + 4y - 6 = 0 \\
&\Rightarrow y = -3 \text{ o } y = 1.
\end{aligned}$$

Como $y = -3$ no puede ser al ser todos los términos de la sucesión positivos, se tiene que $y = 1$.

Del mismo modo se puede probar que la subsucesión de los términos pares $(z_n)_{n=1}^\infty = (x_{2n})_{n=1}^\infty$ también converge a 1.

Finalmente, como las subsucesiones de los términos pares e impares de una sucesión convergen al mismo límite, entonces la sucesión converge al mismo límite.

Ejercicio 4.19. Determinar cuáles de las siguientes sucesiones de números reales son de Cauchy.

a. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^\infty$

b. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^\infty$

c. $\left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

d. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Solución

a. Es una sucesión de Cauchy ya que converge a 0, pues las subsucesiones de los términos pares e impares, convergen a 0 al ser monótonas y acotadas.

b. Es una sucesión de Cauchy ya que converge a 1, pues

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

c. Es una sucesión de Cauchy ya que converge a 0. Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Por tanto, para cualquier $n, m \geq k$ se tiene

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} - \frac{\operatorname{sen}(m)}{m} \right| \leq \left| \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \right| + \left| \frac{\operatorname{sen}(m)}{m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

d. No es una sucesión de Cauchy, pues tomando $\varepsilon = 1/2$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$, entonces n o $n+1$ debe ser impar, y suponiendo que es $n+1$ (la otra suposición lleva a un razonamiento similar) se tiene

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+1}| &\geq ||x_{n+1}| - |x_n|| = \left| \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n} \right| \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión no converge.

5 Límites de funciones

Ejercicio 5.1. Sea $f(x) = c$ una función constante. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

 Solución

Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta = 1$ tal que si $|x - a| < \delta = 1$, entonces $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Ejercicio 5.2. ★ Dada la función $f(x) = 4x - 10$, demostrar usando la definición de límite que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$.

 Solución

Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ tal que si $|x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$, entonces

$$|f(x) - 2| = |4x - 10 - 2| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Ejercicio 5.3. ★ Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$, usar el criterio de las sucesiones para demostrar que no existe el límite de f en 0.

 Solución

Tomando las sucesión $(\frac{-1}{n})_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|-1/n|}{-1/n} = -1.$$

Y tomando la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ que también converge a 0, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1/n|}{1/n} = 1.$$

Por tanto, por el criterio de las sucesiones convergentes, no existe el límite de f en 0.

Ejercicio 5.4. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

se conoce como la *función de Dirichlet*. Demostrar que no existe el límite de f en cualquier número real.

 Solución

Tomemos cualquier $a \in \mathbb{R}$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números racionales que converja a a . Entonces la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 1. Por otro lado, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números irracionales que converja a a . Entonces la sucesión $(f(y_n))_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0. Por tanto, por el criterio de las sucesiones convergentes no existe el límite de f en a .

Ejercicio 5.5. ★ Demostrar que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

 Solución

Tomando la sucesión $\left(\frac{1}{(2n-1)\pi/2}\right)_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n-1)\pi/2}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n-1)\pi/2) = 0.$$

Y tomando la sucesión $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)_{n=1}^{\infty}$, que también converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1.$$

Por tanto, por el criterio de las sucesiones convergentes, no existe el límite de $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.

Ejercicio 5.6. Dado un polinomio $p(x)$, demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

 Solución

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, entonces, por el álgebra de límites se tiene,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} p(x) &= \lim_{x \rightarrow a} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\
&= \lim_{x \rightarrow a} a_0 + \lim_{x \rightarrow a} a_1 x + \lim_{x \rightarrow a} a_2 x^2 + \cdots + \lim_{x \rightarrow a} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 \lim_{x \rightarrow a} x + a_2 \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \cdots + a_n \lim_{x \rightarrow a} x^n \\
&= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \cdots + a_n a^n = p(a)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.7. Dada una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) \neq 0$, demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$.

💡 Solución

Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios. Entonces, por el ejercicio anterior y el álgebra de límites se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a).$$

Ejercicio 5.8. ★ Demostrar, haciendo uso del [teorema de compresión de funciones](#) que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$.

💡 Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)^2}{x(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^2}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.9. ★ Calcular los siguientes límites si existen:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin(a)}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^{2x}}$

e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - 1)}{x + 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1/x)}{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})}$

g. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \quad n \in \mathbb{N}$

h. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} \quad n, m \in \mathbb{Z}$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$

j. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)}$

k. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$

l. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$

m. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x^2}$

n. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}(x)}$

ñ. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{1/\operatorname{sen}(x)}$

o. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{4 + e^{-1/x}}$

p. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} \right).$

q. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sec(x) - \operatorname{tg}(x)$

💡 Solución

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{1} = 5.$

b.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x^2 + 2x + 3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c. Aplicando la propiedad trigonométrica $\sin(x + a) = \sin(x)\cos(a) + \cos(x)\sin(a)$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin(a)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(a) + \cos(x)\sin(a) - \sin(a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(a) - \sin(a)(1 - \cos(x))}{x} \\ &= \cos(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} - \sin(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \\ &= \cos(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \sin(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x} \quad (1) \\ &= \cos(a) \cdot 1 - \sin(a) \cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

$$(1)\sin(x) \approx x \text{ y } \cos(x) \approx x^2/2.$$

d. Como $x < e^x \forall x > 0$, se tiene que

$$0 < \frac{x}{2} < e^{x/2} \Rightarrow 0 < x < 2e^{x/2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{e^{2x}} < \frac{2e^{x/2}}{e^{2x}} = \frac{2}{e^{3x/2}},$$

de modo que, como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{3x/2}} = 0$, aplicando el teorema de compresión de funciones se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$.

Usando este resultado se tiene,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}} - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0.$$

e. Cuando $x \rightarrow \infty$, $\frac{\log(x^2-1)}{x+2} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ que es indeterminado. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$f. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1/x)}{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \log(1/x)}{\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{\log(1)}{\operatorname{tg}(1 + \frac{\pi}{2})} = 0$$

- g. $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
 Así pues,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1} \\ &= a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1}\end{aligned}$$

- h. Cuando $x \rightarrow 1$ $\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \rightarrow \frac{0}{0}$ que es indeterminado. Usando el resultado del límite anterior se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/n} - 1}{x^{1/m} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^{1/n}-1}{x-1}}{\frac{x^{1/m}-1}{x-1}} \\ &= \frac{1/n}{1/m} = \frac{m}{n}.\end{aligned}$$

- i. Cuando $x \rightarrow 0$ $\frac{\sin(x)-x}{x^3} \rightarrow \frac{0}{0}$ que es indeterminado. Aplicando la regla de L'Hôpital varias veces se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{6x} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{6} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

- j. Aplicando propiedades trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \tan(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\cos(x)}{\frac{1}{\cos(x)}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

- k. Cuando $x \rightarrow 0$, $x^2 e^{1/x^2} \rightarrow 0 \cdot \infty$, que es indeterminado. Transformando la indeterminación en una de tipo cociente y aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2} \cdot -2}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2} = \infty.$$

- l. Cuando $x \rightarrow 0$, $(1+x)^{1/x} \rightarrow 1^\infty$, que es una indeterminación de tipo potencia. Aplicando el logaritmo y su inversa, la función exponencial, se convierte en una indeterminación de tipo cociente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((1+x)^{1/x})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} && (\ln(1+x) \approx x) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} 1} = e^1 = e. \end{aligned}$$

- m. Cuando $x \rightarrow \infty$, $\sqrt[x]{x^2} = x^{2/x} \rightarrow \infty^0$, que es indeterminado. Transformando la indeterminación en una de tipo cociente y aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(x^{2/x})} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\ln(x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}} = 1. \end{aligned}$$

- n. Cuando $x \rightarrow 0^+$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}(x)} \rightarrow \infty^0$, que es una indeterminación de tipo potencia. Para convertirla en una de tipo cociente aplicamos el logaritmo y su inversa, la función exponencial.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}(x)}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg}(x) \ln\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}(x)^2}}} && (\text{L'Hôpital}) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)^2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(x) \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} && (\operatorname{sen}(x) \approx x) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(x)} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

- ñ. Cuando $x \rightarrow 0$, $\cos(x)^{1/\operatorname{sen}(x)} \rightarrow 1^\infty$, que es una indeterminación de tipo potencia. Para convertirla en una de tipo cociente aplicamos el logaritmo y su inversa, la función exponencial.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{1/\sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos(x)^{1/\sin(x)})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} 1/\sin(x) \ln(\cos(x))} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x))}{\cos(x)}} \quad (\text{L'Hôpital}) \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)^2}} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

- o. Como el signo del exponente de la función exponencial $1/x$ depende de si x se aproxima a 0 por la izquierda o por la derecha, en este caso estudiamos los límites laterales.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = \infty$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6}{4 + e^{-1/x}} = \frac{6}{4 + e^\infty} = 0.$$

Y como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6}{4 + e^{-1/x}} = \frac{6}{4 + e^{-\infty}} = \frac{6}{4}.$$

Como los límites laterales son distintos, no existe el límite global.

- p. Cuando $x \rightarrow \infty$, $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} \rightarrow \infty - \infty$, que es una indeterminación de tipo diferencia. Para transformarla en una indeterminación de tipo cociente multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 1})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x^2 - 2x - 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) + x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

- q. Cuando $x \rightarrow \pi/2$, $\sec(x) - \tan(x) \rightarrow \infty - \infty$, que es una indeterminación del tipo diferencia. Ahora bien, en este caso si escribimos la secante en función del seno y la tangente en función de seno y el coseno, la indeterminación se transforma en otra de tipo cociente.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sec(x) - \tan(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = 0.\end{aligned}\quad (\text{L'Hôpital})$$

Ejercicio 5.10. ★ Dar ejemplo de funciones que cumplan las siguientes condiciones:

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.
- c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

💡 Solución

- a. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
- b. $g(x) = \frac{x}{x-3}$.
- c. $h(x) = -\ln(x)$.

Ejercicio 5.11. ★ Sea $g(x) = e^{1/x}$ $\forall x \neq 0$. Demostrar que no existe el límite de g en 0.

💡 Solución

Basta con probar que el límite lateral por la derecha no existe. Para ello, tomando la sucesión de términos positivos $(\frac{1}{n})_1^\infty$ que converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty.$$

Así pues, según el criterio de las sucesiones convergentes, no existe el límite por la derecha de g en 0, y por tanto tampoco existe el límite.

Ejercicio 5.12. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 1, \\ ax - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valor de a existe el límite de f en 1?

 Solución

Los límites laterales en 1 valen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax - 1 = a - 1.$$

Para que exista el límite de f en 1 debe ser $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, es decir, $1 = a - 1$, luego debe ser $a = 2$.

Ejercicio 5.13. ★ Calcular los límites laterales de la función $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$ en el punto $x = 1$. ¿Existe el límite en ese punto?

 Solución

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + e^\infty} = \frac{1}{1 + \infty} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.\end{aligned}$$

Como los límites laterales son distintos, no existe el límite de f en 1.

Ejercicio 5.14. ★ Calcular las asíntotas de las siguientes funciones:

- a. $f(x) = (1 - x)e^x$
- b. $g(x) = xe^{1/x}$
- c. $h(x) = 2x^2 - \ln(x)$
- d. $i(x) = \log(x^2 + 3x + 2)$
- e. $j(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$
- f. $k(x) = \cos x - \log(\cos x)$

Solución

a. f está definida en \mathbb{R} , así que no tiene asíntotas verticales.

Para ver si f tiene asíntotas horizontales estudiamos los límites en el infinito. Cuando $x \rightarrow -\infty$ $(1-x)e^x \rightarrow -\infty \cdot 0$ que es indeterminado. Transformando la indeterminación en una de tipo cociente

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}}.\end{aligned}$$

Por otro lado $\forall x < 0$ se cumple que $e^{-x} \geq x^2$, por lo que $0 \leq \frac{-x}{e^{-x}} \leq \frac{-x}{x^2} = \frac{1}{x}$, y como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, por el teorema de compresión de funciones se tiene que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$.

Así pues, $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Por otro lado, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)e^x = -\infty \cdot \infty = -\infty$, de modo que no hay asíntota horizontal en ∞ .

Finalmente para ver si f tiene asíntotas oblicuas, estudiamos el límite de $f(x)/x$ en ∞ (en $-\infty$ no puede haber asíntota oblicua porque existe una horizontal).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = -1 \cdot \infty = -\infty.$$

Por tanto, tampoco existe asíntota oblicua en ∞ .

b. g está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, así que, el único punto donde pueden existir asíntotas verticales es $x = 0$. Calculando los límites laterales se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{1/x})'}{(1/x)'} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}(1/x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty.\end{aligned}$$

Por tanto, g tiene asíntota vertical $x = 0$ por la derecha, pero no por la izquierda.

Para ver si g tiene asíntotas horizontales estudiamos los límites en el infinito.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = \infty \cdot 1 = \infty. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = \infty \cdot 1 = \infty.\end{aligned}$$

Así pues, ambos límites no existen y, por tanto, g no tiene asíntotas horizontales.

Finalmente para ver si f tiene asíntotas oblicuas, estudiamos el límite de $f(x)/x$ en $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Luego, existe una asíntota oblicua en $-\infty$ con pendiente 1. Para ver el término independiente de la asíntota calculamos el límite de $f(x) - 1 \cdot x$ en $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1/x} - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{1/x} - 1)'}{(1/x)'} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1/x}(1/x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1.\end{aligned}$$

Así pues, g tiene una asíntota oblicua $y = x + 1$ en $-\infty$. Del mismo modo se puede probar que esta misma recta es asíntota oblicua en ∞ .

- c. $h(x)$ está definida en \mathbb{R}^+ , así que, el único punto donde pueden existir asíntotas verticales $x = 0$. Como h no está definida para $x < 0$, estudiaremos el límite por la derecha en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 - \ln(x) = 0 - \ln(0) = \infty$$

Por tanto, h tiene una asíntota vertical $x = 0$ por la derecha, pero no por la izquierda.

Para ver si g tiene asíntotas horizontales estudiamos el límite en el infinito (en $-\infty$ no puede haber asíntota horizontal al no estar definida la función para $x < 0$).

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^{2x^2 - \ln(x)}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^{2x^2}}{e^{\ln(x)}}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x^2}}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{2x^2})'}{x'}\right) \quad (\text{L'Hôpital}) \\
&= \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x^2} \cdot 4x}{1}\right) = \ln(\infty) = \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, h no tiene asíntotas horizontales.

Finalmente, veamos si existe asíntota oblicua en ∞ .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - \ln(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \frac{\ln(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{x'} \quad (\text{L'Hôpital}) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \infty - 0 = \infty.
\end{aligned}$$

Luego, h tampoco tiene asíntota oblicua en ∞ .

Ejercicio 5.15. * Mediante simulación por ordenador se ha podido cuantificar la cantidad de agua almacenada en un acuífero en función del tiempo, $m(t)$, en millones de metros cúbicos, y el tiempo t en años transcurridos desde el instante en el que se ha hecho la simulación, teniendo en cuenta que la ecuación sólo tiene sentido para $t > 0$:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

¿Qué cantidad de agua almacenada habrá en el acuífero asintóticamente?

Solución

Cuando $t \rightarrow \infty$, $\frac{\sqrt{t}}{e^t} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ que es indeterminado. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 10 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{t}e^t} = 10.$$

Por tanto el volumen del lato tiende asintóticamente a 10 millones de metros cúbicos.

Ejercicio 5.16. ★ La cosecha de trigo de una plantación (en toneladas) depende de la cantidad de abono x según la función $f(x) = T(1 - \frac{1}{2}e^{-kx})$, donde T es la extensión del terreno (en hectáreas) y k es la proporción de humedad. ¿Para qué cantidad de abono se conseguiría una cosecha de T toneladas de trigo?

💡 Solución

Como $k > 0$ se tiene $\frac{1}{2}e^{-kx} = \frac{1}{2e^{kx}} < 1 \forall x > 0$, de manera que $f(x) < T \forall x > 0$. Si calculamos ahora el límite en infinito se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T\left(1 - \frac{1}{2}e^{-kx}\right) = T\left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{kx}}\right) = T(1 - 0) = T.$$

De modo la cantidad de trigo cosechada tiene asintóticamente a T , pero al ser menor que T , nunca llegará a valer T .

Ejercicio 5.17. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Demostrar lo siguiente:

- Si f está acotada superiormente, entonces existe $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.
- Si f no está acotada superiormente, entonces $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$.

💡 Solución

- Supongamos que f está acotada, entonces, por el axioma de completitud de los números reales existe el supremo c de las imágenes de (a, b) mediante f . Veamos que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = c$.

Ejercicio 5.18. Demostrar que la función $f(x) = \cos(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

💡 Solución

Sea $a \in \mathbb{R}$. Usando propiedades trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(a)| &= \left| -2 \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \frac{|x-a|}{2} = |x-a|, \end{aligned}$$

ya que $\sin(x) \leq x \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $\sin(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que si $|x - a| < \delta = \varepsilon$, entonces $|\cos(x) - \cos(a)| < |x - a| = \varepsilon$, y por tanto, $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$, lo que demuestra que la función coseno es continua en todo su dominio.

Ejercicio 5.19. ★ ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$? Redefinir la función para que sea continua en dicho punto.

💡 Solución

La función no está definida en $x = 0$ por lo que es discontinua en este punto. Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en el punto. Como $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \forall x \neq 0$, podemos encajar f entre las siguientes funciones

$$-x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x,$$

y como $\lim_{x \rightarrow 0^-} -x = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, por el teorema de compresión de límites se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Y del mismo modo, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, por lo que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Así pues, el límite existe y la discontinuidad es de tipo evitable. Para conseguir que la función sea continua en $x = 0$ basta con definir la función en este punto como el valor de su límite, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5.20. ★ Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, en el punto $x = 0$.

b.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

c.

$$h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

d.

$$i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

Solución

- a. La función no está definida en $x = 0$ que para este valor se anula el denominador, por lo que la función es discontinua en ese punto. Para ver qué tipo de discontinuidad presenta en el punto estudiamos los límites laterales de f en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0.$$

Por tanto, f tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

- b. Estudiamos los límites laterales de g en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}} = \frac{1 + e^{-\infty}}{1 - e^{-\infty}} = \frac{1}{1} = 1,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} - 1}{-e^{1/x} - 1} \quad (\text{L'Hôpital})$$
$$= \frac{-1}{1} = -1.$$

Como ambos límites existen pero son distintos, g tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

- c. Como $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1 \forall x \neq 0$, podemos encajar h entre las siguientes funciones

$$-x \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x,$$

y como $\lim_{x \rightarrow 0} -x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$, por lo que la función es continua en $x = 0$.

- d. Estudiamos los límites laterales de i en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2^{1/x}} = \frac{1}{2^{-\infty}} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^{1/x}} = \frac{1}{2^\infty} = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = \infty$, i tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

Ejercicio 5.21. Clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones

a.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

b.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0, \\ e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

💡 Solución

a. A simple vista, podemos ver que se trata de una función racional y estará definida en todo \mathbb{R} salvo en los puntos que anulen alguno de los denominadores. Dichos puntos son fáciles de obtener igualando a 0 los denominadores:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x + 1 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x} &= 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos 4 punto de discontinuidad, que son: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Para clasificar estas cuatro discontinuidades, tenemos que estudiar los correspondientes límites por la izquierda y por la derecha.

- Discontinuidad en $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned}$$

Como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable.

- Discontinuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{6} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0}{6} = 0.$$

De nuevo, como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable.

- Discontinuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2}{-0 \cdot -1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2}{+0 \cdot -1} = \infty.$$

Como ambos límites divergen, se trata de una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

- Discontinuidad en $x = -\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow -1/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{-3/2}{1/2 \cdot -0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{-2}{1/2 \cdot +0} = -\infty.$$

Por último, como ambos límites divergen, se trata también de una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

- b. La función $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y en consecuencia es continua en la región donde está definida, es decir $(-\infty, 0)$. Por su parte, la función $e^{\frac{1}{x-1}}$ es continua en todos los puntos en que sea continuo el exponente $\frac{1}{x-1}$, es decir en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, en consecuencia, es continua en toda la región en donde está definida, menos en el 1. Así pues, reduciremos el estudio de la continuidad a dos puntos, el 0 por ser donde cambia la definición de la función y el 1, por no estar definida la función $e^{\frac{1}{x-1}}$.

Estudiamos primero la continuidad en el punto $x = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}.\end{aligned}$$

Como ambos límites laterales son distintos, en $x = 0$ hay una discontinuidad de salto.

Estudiamos ahora la continuidad en el punto $x = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-\infty} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\infty} = \infty.\end{aligned}$$

Como el límite lateral por la derecha no existe, en $x = 1$ hay una discontinuidad de salto infinito.

Ejercicio 5.22. ★ Calcular una raíz de la función $f(x) = x^5 - x + 1$ con una aproximación de 2 decimales.

Solución

Como la función f es un polinomio, que es continua en todo \mathbb{R} , utilizaremos el [teorema de Bolzano](#) para aproximar la raíz. Para ello, basta con encontrar un intervalo $[a, b]$ en el que $f(a)$ tenga signo distinto que $f(b)$. Podemos tomar el intervalo $[-2, -1]$ ya que $f(-2) = -29$ y $f(-1) = 1$.

Si tomamos el centro del intervalo, $f\left(\frac{(-2)+(-1)}{2}\right) = f(-1.5) = -5.0937 < 0$, por lo que podemos repetir el procedimiento para el intervalo $[-1.5, -1]$.

Tomamos ahora centro del intervalo, $f\left(\frac{(-1.5)+(-1)}{2}\right) = f(-1.25) = -0.8018 < 0$, por lo que podemos repetir el procedimiento para el intervalo $[-1.25, -1]$.

Tomamos de nuevo centro del intervalo, $f\left(\frac{(-1.25)+(-1)}{2}\right) = f(-1.125) = 0.323 > 0$, por lo que podemos repetir el procedimiento para el intervalo $[-1.25, -1.125]$.

Tomamos otra vez el centro del intervalo, $f\left(\frac{(-1.25)+(-1.125)}{2}\right) = f(-1.1875) = -0.1739 < 0$, por lo que podemos repetir el procedimiento para el intervalo $[-1.1875, -1.125]$.

Tomamos una vez más el centro del intervalo, $f\left(\frac{(-1.1875)+(-1.125)}{2}\right) = f(-1.15625) = 0.0897 > 0$, por lo que podemos repetir el procedimiento para el intervalo

$[-1.1875, -1.15625]$.

Tomamos de nuevo el centro del intervalo, $f\left(\frac{(-1.1875)+(-1.15625)}{2}\right) = f(-1.171815) = -0.0382 < 0$, por lo que podemos repetir el procedimiento para el intervalo $[-1.171875, -1.15625]$.

Tomamos otra vez centro del intervalo, $f\left(\frac{(-1.171875)+(-1.15625)}{2}\right) = f(-1.1640625) = 0.02668 > 0$, por lo que podemos repetir el procedimiento para el intervalo $[-1.171875, -1.1640625]$.

Tomamos una última vez centro del intervalo, $f\left(\frac{(-1.171875)+(-1.1640625)}{2}\right) = f(-1.16796875) = -0.0055 < 0$, por lo que la raíz está en el intervalo $[-1.16796875, -1.1640625]$, por lo que podemos concluir que la raíz será aproximadamente -1.16 .

Ejercicio 5.23. Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ con $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

💡 Solución

Tomemos la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Como f y g son continuas en $[a, b]$, h también lo es. Además, se cumple que $h(a) = f(a) - g(a) < 0$ y $h(b) = f(b) - g(b) > 0$, por lo que podemos aplicar el [teorema de Bolzano](#) a h y se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = f(c) - g(c) = 0$, de donde se deduce que $f(c) = g(c)$.

Ejercicio 5.24. ★ Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real.

- a. $\cos(x) = x$.
- b. $e^x = -x$.

💡 Solución

- a. Si tomamos la función $f(x) = \cos(x) - x$, se trata de encontrar al menos una raíz de la función. Como se trata de una función continua en todo \mathbb{R} , basta con aplicar el [teorema de Bolzano](#) en un intervalo $[a, b]$ que cumpla que $f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$. Como $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ y $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) - \pi/2 = -\pi/2 < 0$, f tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, \pi/2]$ y la ecuación tiene solución en ese intervalo.
- b. Si tomamos la función $g(x) = e^x + x$, se trata de nuevo de encontrar al menos una raíz de la función. Al igual que antes, como se trata de una función continua en todo \mathbb{R} , basta con aplicar el [teorema de Bolzano](#) en un intervalo $[a, b]$ que cumpla que $f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$. Como $g(-1) = e^{-1}(-1) < 0$ y $g(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$, g tiene al menos una raíz en el intervalo $[-e^{-1}, 0]$ y la

ecuación tiene solución en ese intervalo.

6 Derivadas de funciones

Ejercicio 6.1. Usando la definición de derivada, demostrar que la derivada de la función $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

💡 Solución

Ver Ejercicio 5.9 apartado (g).

Ejercicio 6.2. Demostrar que la función $f(x) = |x - 1|$ es continua en $x = 1$ pero no es derivable en dicho punto.

💡 Solución

Si calculamos los límites laterales tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1| - |1 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1.$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1| - |1 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1.$$

Como el límite por la izquierda y por la derecha son distintos, no existe la derivada de f en 1.

Ejercicio 6.3. Estudiar si es derivable la función $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ en el punto $x = 1$.

💡 Solución

Si calculamos los límites laterales tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{1-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{(x-1)^2}}{(x-1) \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) \sqrt[3]{(x-1)^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \infty.
\end{aligned}$$

Como el límite no existe, no existe la derivada de f en 1.

Ejercicio 6.4. Estudiar la derivabilidad de f en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{si } x < -1, \\ \sin(\pi x) & \text{si } x \in [-1, 2], \\ x/2 & \text{si } x \in (2, 3), \\ 3/2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Solución

Las funciones de todos los trozos son derivables en todo su dominio, por lo que estudiaremos la derivada por la izquierda y por la derecha en cada uno de los puntos. Derivabilidad en $x = -1$:

$$\begin{aligned}
f'^{-}(-1) &= \frac{-1}{-1} = 1 \\
f'^{+}(-1) &= \pi \cos(-\pi) = -\pi
\end{aligned}$$

Como $f'^{-}(-1) \neq f'^{+}(-1)$ la función no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 2$:

$$\begin{aligned}
f'^{-}(2) &= \pi \cos(2\pi) = \pi \\
f'^{+}(2) &= 1/2
\end{aligned}$$

Como $f'^{-}(2) \neq f'^{+}(2)$ la función no es derivable en $x = 2$.

Derivabilidad en $x = 3$:

$$\begin{aligned}
f'^{-}(3) &= 1/2 \\
f'^{+}(3) &= 0
\end{aligned}$$

Como $f'^{-}(3) \neq f'^{+}(3)$ la función no es derivable en $x = 3$.

Ejercicio 6.5. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista.

a.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

b. $g(x) = 2x + |x^2 - 2|$.

💡 Solución

- a. La función $1-x$ es un polinomio y por tanto es derivable en todo \mathbb{R} . Del mismo modo, la función e^{-x} es una función exponencial que también es derivable en todo \mathbb{R} . Por tanto, faltaría estudiar si existe la derivada en el punto donde cambia la definición de la función, es decir, en $x = 0$. Estudiaremos la derivada por la izquierda y por la derecha en ese punto.

$$\begin{aligned} f'^-(0) &= -1 \\ f'^+(0) &= -e^0 = -1 \end{aligned}$$

Como $f'^-(0) = f'^+(0)$ la función es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$.

Así pues, la función derivada de f es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- b. Para estudiar la derivabilidad de g primero vamos a expresar la función $|x^2 - 2|$ como una función a trozos. Para ello necesitamos saber en qué puntos la función $x^2 - 2$ es positiva, y en qué puntos es negativa. Si calculamos las raíces de esta función tenemos:

$$|x^2 - 2| = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Si estudiamos el signo en los intervalos definidos por las raíces, podemos comprobar fácilmente sin más que calcular la función en cualquier punto de los intervalos que $x^2 - 2$ es negativa en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y positiva en el resto de su dominio. Por tanto, podemos expresar el valor absoluto de la siguiente manera:

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ -x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

y entonces, la función original puede expresarse como:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2x - x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 2x + x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ahora, si estudiamos la derivabilidad de cada una de estas funciones en los trozos correspondientes, vemos que ambas son polinomios y por tanto son derivables en sus dominios. Faltaría por estudiar la derivabilidad en los puntos donde cambia la definición de la función. Para ello estudiamos la derivada por la izquierda y por la derecha en esos puntos. En el punto $x = -\sqrt{2}$ tenemos:

$$\begin{aligned} g'^{-}(-\sqrt{2}) &= 2 - 2\sqrt{2} \\ g'^{+}(-\sqrt{2}) &= 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Y como ambas derivadas no coinciden la función no es derivable en $x = -\sqrt{2}$. En $x = \sqrt{2}$ tenemos:

$$\begin{aligned} g'^{-}(\sqrt{2}) &= 2 - 2\sqrt{2} \\ g'^{+}(\sqrt{2}) &= 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ambas derivadas no coinciden y tampoco es derivable en $x = \sqrt{2}$.

Así pues, la derivada de g vale:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 2 + 2x & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ejercicio 6.6. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)^2 & \text{si } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leq c, \\ \ln(x) & \text{si } c < x, \end{cases}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, ¿existe algún valor de las constantes de manera que la función sea continua y derivable en todo su dominio?

Solución

Estudiaremos primero la continuidad y luego la derivabilidad.

Las funciones $\operatorname{sen}(x)^2$, $ax^2 + b$ y $\ln(x)$ son todas continuas en sus dominios, por tanto, basta con estudiar los puntos donde cambia la definición de la función.

En el punto $x = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen}(x)^2 = \operatorname{sen}(0)^2 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + b = a0^2 + b = b, \\ f(0) &= \operatorname{sen}(0)^2 = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, la función será continua en $x = 0$ si y sólo si $b = 0$.

En el punto $x = c$ tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} ax^2 + b = ac^2 + b, \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} \ln(x) = \ln(c), \\ f(c) &= ac^2 + b.\end{aligned}$$

Luego la función será continua en $x = c$ si y sólo si $ac^2 + b = \ln(c)$.

Por consiguiente, para que la función sea continua en todo su dominio deben cumplirse las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln(c) \end{cases}$$

Con la derivabilidad ocurre lo mismo pues las funciones $\operatorname{sen}(x)^2$, $ax^2 + b$ y $\ln(x)$ son derivables en su dominio y basta con estudiar la derivada por la izquierda y por la derecha en los puntos donde cambia la definición de la función.

En el punto $x = 0$ (imponemos $b = 0$ pues de lo contrario la función no sería continua en este punto y tampoco derivable) tenemos:

$$\begin{aligned}f'^-(0) &= 2 \operatorname{sen}(0) \cos(0) = 0 \\ f'^+(0) &= 2a \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Luego la función es derivable en $x = 0$ si y sólo si $b = 0$.

En el punto $x = c$ tenemos:

$$\begin{aligned}f'^-(c) &= 2ac \\ f'^+(c) &= 1/c\end{aligned}$$

Luego, para que la función sea derivable en $x = c$, además de la condición de continuidad, se debe cumplir $2ac = \frac{1}{c}$.

Así pues, para que la función sea continua y derivable en todo su dominio deben cumplirse las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln(c) \\ 2ac = \frac{1}{c} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema llegamos a:

$$a = \frac{1}{2c^2} \Rightarrow \ln(c) = ac^2 + b = \frac{1}{2c^2}c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = e^{1/2},$$

y, por tanto,

$$a = \frac{1}{2(e^{1/2})^2} = \frac{1}{2e}.$$

Los valores de las constantes que hacen que la función sea continua y derivable en todo su dominio son:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2e}, \\ b &= 0, \\ c &= e^{1/2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.7. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto a indicado.

a. $y = x^{\operatorname{sen}(x)}$, $a = \pi/2$.

b. $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $a = 0$.

Solución

La ecuación de la recta tangente a la función f en el punto $x = a$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ y la ecuación de la recta normal en ese mismo punto es $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$, de modo que necesitamos calcular la derivada de la función en el punto dado.

a. $y' = x^{\operatorname{sen}(x)} \left(\cos(x) \ln(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right)$, y en $x = \pi/2$ se tiene $y'(\pi/2) = (\pi/2)^{\operatorname{sen}(\pi/2)} \left(\cos(\pi/2) \ln(\pi/2) + \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{\pi/2} \right) = 1$.

Por tanto, como $(\frac{\pi}{2})^{\operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{\pi}{2}$, la ecuación de la recta tangente en $x = \pi/2$ es

$y = \frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2} = x$, y la ecuación de la recta normal es $y = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2} = -x + \pi$.

b. Es este caso, antes de derivar conviene simplificar la función.

$$\begin{aligned}y' &= \left(\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)' = \left(\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \right)' \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

, y en $x = 0$ se tiene $y'(0) = 1$.

Por tanto, como $\ln \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 0$, la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = x$, y la ecuación de la recta normal es $y = -x$.

Ejercicio 6.8. Dadas las funciones $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2}\right)$ y $g(x) = x^3 + 2$, ¿existe algún valor de x en el que la recta normal a f y la recta tangente a g en dicho punto sean paralelas?

Solución

Para ver si dos rectas son paralelas, basta con ver si tienen la misma pendiente.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\ln\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)' = (2\ln(x) - \ln(2))' = \frac{2}{x} \\g'(x) &= 3x^2\end{aligned}$$

Así pues, la pendiente de la recta normal a f en x es $\frac{-1}{f'(x)} = \frac{-x}{2}$ y la pendiente de la recta tangente a g en x es $3x^2$. Igualando las dos pendientes y resolviendo la ecuación resultante, se tiene

$$\frac{-x}{2} = 3x^2 \Leftrightarrow 6x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(6x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = -\frac{1}{6}.$$

Ahora bien, como f no está definida en $x = 0$, el único valor de x para el que la recta normal a f es paralela a la recta tangente a g es $x = -1/6$.

Ejercicio 6.9. Demostrar que cualquier función polinómica $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$ es derivable en todo \mathbb{R} .

 Solución

Sea el polinomio $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el álgebra de derivadas, se tiene

$$\begin{aligned}f'(x) &= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)' \\&= c'_0 + (c_1x)' + (c_2x^2)' + \dots + (c_nx^n)' \\&= c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1},\end{aligned}$$

que existe para todo \mathbb{R} .

Ejercicio 6.10. Demostrar que cualquier función racional $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ funciones polinómicas, es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$.

 Solución

Como $f(x)$ y $g(x)$ son dos polinomios, por el ejercicio anterior se tiene que son derivables en todo \mathbb{R} , y aplicando el álgebra de derivadas se tiene $h(x)$ es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$, y

$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ejercicio 6.11. Hallar la expresión de la derivada n -ésima de las siguientes funciones:

- a. $f(x) = a^x \ln(a).$
- b. $g(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}.$
- c. $h(x) = \frac{9x^2 - 2x - 25}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$
- d. $j(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$

Solución

a.

$$\begin{aligned}f'(x) &= a^x \ln(a)^2, \\f''(x) &= a^x \ln(a)^3, \\f'''(x) &= a^x \ln(a)^4, \\&\vdots \\f^{(n)}(x) &= a^x \ln(a)^{n+1}\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2}, \\g''(x) &= \frac{-\sin(x) - \cos(x)}{2}, \\g'''(x) &= \frac{-\cos(x) + \sin(x)}{2}, \\g^{(4)}(x) &= \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}\end{aligned}$$

Como $g''' = g$, las derivadas se van a repetir cíclicamente cada múltiplo de cuatro. Podemos expresar la derivada de orden n de la siguiente forma

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} & \text{si } n = 4k, \\ \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} & \text{si } n = 4k+1, \\ \frac{-\sin(x)-\cos(x)}{2} & \text{si } n = 4k+2, \\ \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} & \text{si } n = 4k+3. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

c. Descomponiendo primero en fracciones simples, se tiene que

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{9x^2 - 2x - 25}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{9x^2 - 2x - 25}{(x-3)(x-1)(x+2)} \\&= \frac{5}{x-3} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2} \\&= 5(x-3)^{-1} + 3(x-1)^{-1} + (x+2)^{-1}\end{aligned}$$

Calculamos ahora las sucesivas derivadas.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 5(-1)(x-3)^{-2} + 3(-1)(x-1)^{-2} + (-1)(x+2)^{-2} \\
h''(x) &= 5(-1)(-2)(x-3)^{-3} + 3(-1)(-2)(x-1)^{-3} + (-1)(-2)(x+2)^{-3} \\
h'''(x) &= 5(-1)(-2)(-3)(x-3)^{-4} + 3(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} + (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4} \\
&\vdots \\
h^{(n)}(x) &= 5(-1)^n n!(x-3)^{-(n+1)} + 3(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} + (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

d. $j(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$.

$$\begin{aligned}
j'(x) &= \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \\
j''(x) &= \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2} \\
j'''(x) &= \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2}(1+x)^{-7/2} \\
&\vdots \\
j^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i-1}{2^n} (1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.12. Se sabe que la demanda de un producto, en decenas de miles de unidades, depende de su precio según la función $D(x) = \ln(10/x)$. Si el precio mensual evoluciona según la función $x(t) = 2 + \frac{t}{10}$, ¿cuál será la tasa de variación de la demanda en el instante $t = 5$? Según esta tasa de variación de la demanda, ¿qué demanda aproximada se espera tener un mes después?

Solución

La función que expresa la demanda en función del tiempo es la composición de x con D . Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$D'(t) = \frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{x} \frac{1}{10} = \frac{-1}{(2 + \frac{t}{10})10} = \frac{-1}{20+t}.$$

En el instante $t = 5$ la tasa de variación instantánea de la demanda es

$$D'(5) = \frac{-1}{20+5} = \frac{-1}{25},$$

es decir, la demanda decrecerá $10000/25 = 400$ unidades al mes, a partir de ese instante.

Para predecir la demanda aproximada un mes después se puede utilizar la recta tangente a D en el instante $t = 5$, que tiene ecuación,

$$y = D(5) + D'(5)(t - 5) = \ln\left(\frac{10}{2 + \frac{5}{10}}\right) - \frac{1}{25}(t - 5) = \ln(4) + \frac{1}{5} - \frac{t}{25}.$$

La predicción de la recta tangente un mes después, es decir para $t = 6$ es $\ln(4) + \frac{1}{5} - \frac{6}{25} = 1.35$ decenas de miles de unidades.

Ejercicio 6.13. Un balón lleno de aire tiene radio 10 cm cuando se empieza a introducir más aire, de manera que el radio se incrementa con una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad varía el volumen en ese instante?

💡 Solución

Suponiendo que el balón tiene forma esférica, el volumen de aire depende del radio del balón según la función $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Ahora bien, como empezamos a introducir aire en el balón, el radio dependerá del tiempo, según la función $r(t)$, y por tanto el volumen depende también del tiempo según la función $V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$.

La velocidad con la que varía el volumen en el instante t_0 en que el radio es $r(t_0) = 10$ cm y empieza a variar con una velocidad $r'(t_0) = 2$ cm/s, es

$$\begin{aligned} V(r(t_0))' &= \frac{dV}{dr}(r(t_0)) \frac{dr}{dt}(t_0) = \frac{4}{3}\pi 3r(t_0)^2 r'(t_0) \\ &= 4\pi(10 \text{ cm})^2 \cdot 2 \text{ cm/s} = 800\pi \text{ cm}^3/\text{s}. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.14. Una pipeta cilíndrica de radio 5 mm almacena una solución. Si la pipeta empieza a vaciarse a razón de 0.5 ml por segundo, ¿a qué velocidad disminuye el nivel de la pipeta?

💡 Solución

Como el radio de la pipeta es constante $r = 5$ mm, el volumen de solución en la pipeta depende del nivel de la pipeta y según la función $V(h) = \pi(5 \text{ mm})^2 h$. Ahora bien, como la pipeta empieza a vaciarse, el nivel de la pipeta dependerá del tiempo según la función $h(t)$, y por tanto, el volumen también depende del tiempo según la función $V(h(t)) = \pi(5 \text{ mm})^2 h(t)$.

La velocidad con la que cambia el volumen en el instante t_0 es, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} V(h(t_0))' &= \frac{dV}{dh}(h(t_0)) \frac{dh}{dt}(t_0) = 25\pi \text{ mm}^2 h'(t_0) = -500 \text{ mm}^3/\text{s} \\ \Rightarrow h'(t_0) &= \frac{-500 \text{ mm}^3/\text{s}}{25\pi \text{ mm}^2} = \frac{-20}{\pi} \text{ mm/s} \approx -6.37 \text{ mm/s}. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.15. Un cilindro de 4 cm de radio (r) y 3 cm de altura (h) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que $\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = 1$ cm/s. Hallar de forma aproximada la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

Solución

El volumen de un cilindro depende del radio de la base r y de la altura h , según la fórmula $V(r, h) = \pi r^2 h$. Ahora bien, como el proceso de calentamiento provoca un cambio de las dimensiones, podemos decir que el radio cambia con el tiempo según la función $r(t)$ y la altura cambia también con el tiempo según la función $h(t)$, de manera que el volumen también depende del tiempo según la función $V(r(t), h(t)) = \pi r(t)^2 h(t)$. La tasa de variación instantánea del volumen en el instante t_0 en el que comienza el calentamiento es, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} V(r(t_0), h(t_0))' &= \pi((r(t_0)^2)'h(t_0) + r(t_0)^2h'(t_0)) \\ &= \pi(2r(t_0)r'(t_0)h(t_0) + r(t_0)^2h'(t_0)) \end{aligned}$$

En el instante t_0 en el que comienza el proceso de calentamiento, sabemos que $r(t_0) = 4$ cm, $h(t_0) = 3$ cm y $r'(t_0) = h'(t_0) = 1$ cm/s, de manera que sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$V(r(t_0), h(t_0))' = \pi(2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm/s} \cdot 3 \text{ cm} + (4 \text{ cm})^2 \cdot 1 \text{ cm/s}) = 40\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Así pues $\frac{dV}{dt} = 40\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, de donde se deduce que $dV = 40\pi \text{ cm}^3/\text{s} dt$, de manera que para una variación de tiempo $dt = 5$ s, la variación aproximada del volumen será $dV = 40\pi \text{ cm}^3/\text{s} \cdot 5 \text{ s} = 200\pi \text{ cm}^3$, y para una variación de tiempo $dt = 10$ s, la variación aproximada del volumen será $dV = 40\pi \text{ cm}^3/\text{s} \cdot 10 \text{ s} = 400\pi \text{ cm}^3$.

Ejercicio 6.16. La ventas mensuales de bicicletas en una ciudad depende del precio de las bicicletas x , en euros, y el precio del combustible y , en céntimos de euro, según la función $v(x, y) = 200 - 10\sqrt{x} + (\frac{y}{10} + 20)^{3/2}$. Si en un determinado instante el precio de las bicicletas es de 200 € y el precio del combustible es de 1€, y el precio de las bicicletas comienza a subir a razón de 1€ al mes, mientras que el precio del combustible empieza a subir a razón de 5 céntimos al mes. ¿Qué tasa de variación experimentarán las ventas de bicicletas en ese instante? Según esta tasa de variación, ¿qué ventas aproximadas se espera tener el próximo mes?

Solución

Como el precio de las bicicletas y del combustible no son constantes, sino que dependen del tiempo según las funciones $x(t)$ y $y(t)$ respectivamente, las ventas también dependen del tiempo según la función $v(x(t), y(t)) = 200 - 10\sqrt{x(t)} + (\frac{y(t)}{10} + 20)^{3/2}$. Por tanto, la tasa de variación instantánea de las ventas es, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}v(x(t), y(t))' &= (200)' - \left(10\sqrt{x(t)}\right)' + \left(\left(\frac{y(t)}{10} + 20\right)^{3/2}\right)' \\&= \frac{-10}{2\sqrt{x(t)}}x'(t) + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y(t)}{10} + 20}\frac{y'(t)}{10} \\&= \frac{-5x'(t)}{\sqrt{x(t)}} + \frac{3y'(t)}{20}\sqrt{\frac{y(t)}{10} + 20}.\end{aligned}$$

En el instante t_0 en el que el precio de las bicicletas es $x(t_0) = 200$ €, el precio del combustible es $y(t) = 100$ céntimos, y la tasa de variación instantánea del precio de las bicicletas es $x'(t_0) = 1$ €/mes y del precio del combustible $y(t_0) = 5$ céntimos/mes, sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$\begin{aligned}v(x(t_0), y(t_0))' &= \frac{-5x'(t_0)}{\sqrt{x(t_0)}} + \frac{3y'(t_0)}{20}\sqrt{\frac{y(t_0)}{10} + 20} \\&= \frac{-5 \cdot 1}{\sqrt{200}} + \frac{3 \cdot 5}{20}\sqrt{\frac{100}{10} + 20} = 3.75 \text{ unidades/mes}.\end{aligned}$$

Para predecir las ventas el próximo mes, podemos utilizar la aproximación de la recta tangente a v en ese instante, que tiene ecuación

$$\begin{aligned}y &= v(t_0) + v'(t_0)(t - t_0) \\&= 200 - 10\sqrt{200} + \left(\frac{100}{10} + 20\right)^{3/2} + 3.75(t - t_0) \\&= 222.9 + 3.75(t - t_0).\end{aligned}$$

Si queremos predecir las ventas el mes siguiente, la variación del tiempo es $t - t_0 = 1$ mes, y sustituyendo en la ecuación de la tangente se tiene que las ventas aproximadas serán $222.9 + 3.75 \cdot 1 = 226.65$ unidades.

Ejercicio 6.17. Dada la función $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, calcular la derivada de su función inversa $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x) \forall x \in (-1, 1)$.

Solución

Aplicando la regla para la derivada de la función inversa, se tiene

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} \forall x \in (-1, 1).$$

Por otro lado, como $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, se deduce que $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$, de manera que sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsen(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \forall x \in (-1, 1).$$

Ejercicio 6.18. Se desea medir la superficie de una célula esférica y para ello se ha medido el radio de una célula de $5 \mu\text{m}$ con un error de $0.2 \mu\text{m}$. ¿Cuál será el error aproximado cometido en el cálculo de la superficie de la célula? En general, si al medir el radio se comete siempre un error relativo del 2%? ¿Cómo afecta esto al error de la medida de la superficie de la célula?

Solución

La superficie de una esfera depende del radio según la función $S(r) = 4\pi r^2$.

Como $S'(r) = \frac{dS}{dr}$ se deduce que $dS = S'(r)dr$, de manera que si se interpreta la variación del radio dr como el error en su medición, y la variación de la superficie dS como el error en su medición, el error en la medición del radio se transmite a la medición de la superficie multiplicando por la derivada de la superficie. Como $S'(r) = 8\pi r$, para un radio de $5 \mu\text{m}$ se tiene $S'(5) = 8\pi 5 \mu\text{m} = 40\pi \mu\text{m}$. Por tanto, un error en la medición del radio de $dt = 0.2 \mu\text{m}$, producirá un error en la medición de la superficie de $dS = 40\pi \mu\text{m} \cdot 0.2 \mu\text{m} = 8\pi \mu\text{m}^2$.

Para la segunda parte del problema, hay que tener en cuenta que si dr se interpreta como el error absoluto del radio, $\frac{dr}{r}$ es el error relativo en la medición del radio, y $\frac{dS}{S}$ es el error relativo en la medición de la superficie. Así pues, se tiene

$$\frac{dS}{S} = \frac{S'(r)dr}{S} = \frac{8\pi r dr}{4\pi r^2} = 2 \frac{dr}{r}.$$

Como el error relativo en la medición del radio es del 2%, se tiene que $\frac{dr}{r} = 0.02$ y sustituyendo en el resultado anterior se tiene

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dr}{r} = 2 \cdot 0.02 = 0.04,$$

de manera que el error relativo en la medición de la superficie es del 4%.

Ejercicio 6.19. La velocidad de la sangre que fluye por una arteria está dada por la ley

de Poiseuille

$$v(r) = cr^2,$$

donde v es la velocidad de la sangre, r es el radio de la arteria y c es una constante. Si se puede medir el radio de la arteria con una precisión del 5 %, ¿qué precisión tendrá el cálculo de la velocidad?

💡 Solución

Si se interpreta dr como el error absoluto del radio de la arteria, $\frac{dr}{r}$ es el error relativo en la medición del radio, y $\frac{dv}{v}$ es el error relativo en la medición de la velocidad de la sangre. Así pues, se tiene

$$\frac{dv}{v} = \frac{v'(r)dr}{v} = \frac{2cr \cdot dr}{cr^2} = 2\frac{dr}{r}.$$

Como el error relativo en la medición del radio es del 5 %, se tiene que $\frac{dr}{r} = 0.05$ y sustituyendo en el resultado anterior se tiene

$$\frac{dv}{v} = 2\frac{dr}{r} = 2 \cdot 0.05 = 0.1,$$

de manera que el error relativo en la medición de la velocidad de la sangre es del 10 %.

Ejercicio 6.20. En muchos vertebrados existe una relación entre la longitud del cráneo y la longitud de la espina dorsal que puede expresarse mediante la ecuación

$$C(t) = aE(t)^b$$

donde $a > 0$ y b son constantes y t es el tiempo. Esta ecuación se conoce como *ecuación alométrica*. ¿Cómo se relaciona la tasa de crecimiento de la espina dorsal con la del cráneo? ¿Para qué valores de b es la función C creciente, pero de forma que la relación C/E disminuye al aumentar E ? ¿En qué estado de desarrollo tienen los vertebrados cráneos mayores en relación con la longitud de sus cuerpos?

💡 Solución

La tasa de crecimiento de la espina dorsal es E' y la del cráneo es C' , así que se trata de ver la relación entre las dos derivadas. Si calculamos la derivada de la longitud del cráneo, como $E(t)$ es una función que depende del tiempo, aplicando la regla de la cadena se tiene

$$C'(t) = abE(t)^{b-1}E'(t)$$

Para que la C sea creciente su derivada debe ser positiva, es decir, $abE(t)^{b-1}E'(t) > 0$. Como $E(t)$ es la longitud de la espina dorsal, que es positiva, $E'(t)$ es la tasa de crecimiento de la espina dorsal que en los vertebrados también es positiva ya que crece con los años, y $a > 0$, para que $C'(t) > 0$ debe ser $b > 0$.

Por otro lado, la relación E/C es

$$\frac{C(t)}{E(t)} = \frac{aE(t)^b}{E(t)} = aE(t)^{b-1},$$

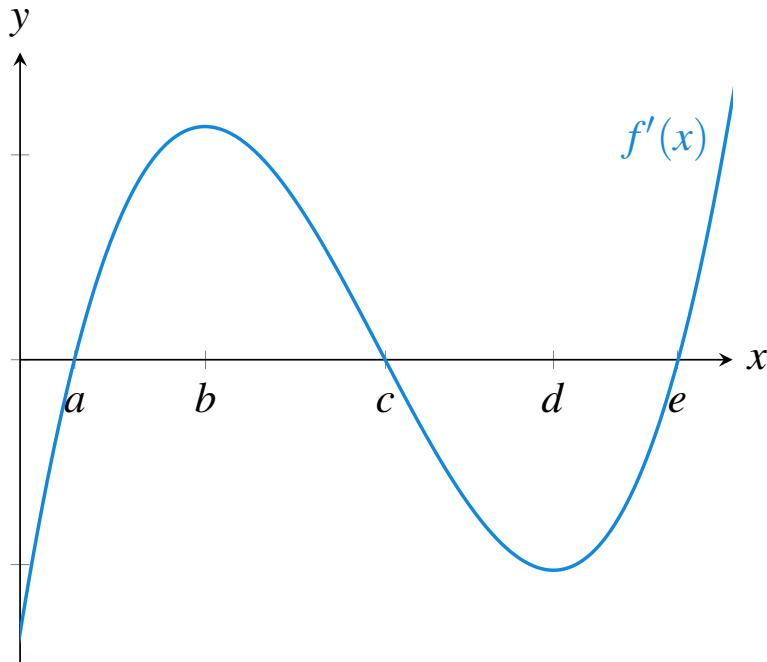
y su derivada vale

$$\left(\frac{C(t)}{E(t)} \right)' = a(b-1)E(t)^{b-2}.$$

Como $a > 0$ y $E(t) > 0$, para que la derivada sea negativa tiene que ser $(b-1) < 0$, es decir, $b < 1$. Por tanto, se debe cumplir $0 < b < 1$.

Por tanto, si $0 < b < 1$ se tiene que C/E es decreciente y eso quiere decir que la espina dorsal crece más rápidamente que el cráneo en los vertebrados, por lo que el cráneo será mayor en relación a la espina dorsal al nacer.

Ejercicio 6.21. La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de una función f . Estudiar el comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y puntos de inflexión).



Solución

A la vista de la gráfica de $f'(x)$ se observa que los puntos críticos de f (los puntos que anulan la derivada) son $x = a$ y $x = c$ y $x = e$.

Estudio del crecimiento

Observando el signo de f' podemos estudiar el crecimiento de f aplicando el criterio del signo de la primera derivada. A la vista de la gráfica se observa que $f'(x) > 0 \forall x \in (a, c) \cup (e, \infty)$, y, por tanto, f es creciente en estos intervalos, y $f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty, a) \cup (c, e)$, y, por tanto, f es decreciente en estos intervalos.

Estudio de los extremos

Los posibles extremos de f estarán entre sus puntos críticos. Observando el crecimiento de la f a la izquierda y a la derecha de cada punto crítico podemos determinar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

- En $x = a$ f decrece a la izquierda y crece a la derecha, luego hay un mínimo relativo.
- En $x = c$ f crece a la izquierda y decrece a la derecha, luego hay un máximo relativo.
- En $x = e$ f decrece a la izquierda y crece a la derecha, luego hay un mínimo relativo.

Estudio de la concavidad

Para estudiar la concavidad utilizaremos el criterio del signo de la segunda derivada. Para ver el signo de f'' basta con observar el crecimiento de f' en la gráfica ya que f'' es la derivada de f' y por tanto su signo depende del crecimiento de f' . Observando la gráfica de f' se tiene que $f'(x)$ es creciente en $(-\infty, b)$ y (d, ∞) de manera que $f''(x) > 0 \forall x \in (-\infty, b) \cup (d, \infty)$, y, por tanto, la f es cóncava hacia arriba en estos intervalos. Por otro lado, $f'(x)$ es decreciente en el intervalo (b, d) , por lo que $f''(x) < 0 \forall x \in (b, d)$ y, por tanto, f es cóncava hacia abajo en este intervalo.

Estudio de los puntos de inflexión

Los puntos de inflexión son los puntos donde cambia la concavidad de la función, de modo que, según el estudio de la concavidad, f tiene puntos de inflexión en $x = b$ y $x = d$.

Ejercicio 6.22. Hallar a , b y c en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $x = 3$, pase por el punto $(1, 0)$ y alcance un máximo en $x = 1$.

Solución

Calculamos las dos primeras derivadas.

$$f'(x) = 3x^2 - 2bx + c$$

$$f''(x) = 6x - 2b$$

Para que la función tenga un punto de inflexión en $x = 3$ debe ser $f''(3) = 0$, es decir, $f''(3) = 6 \cdot 3 - 2b = 18 - 2b = 0$, de donde se deduce que $b = 9$.

Para que la función tenga un máximo en $x = 1$ debe ser $f'(1) = 0$, es decir, $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 9 \cdot 1 + c = 3 - 18 + c = -15 + c = 0$, de donde se deduce que $c = 15$.

Finalmente, para que pase por el punto $(1, 0)$ debe ser $f(1) = 0$, es decir, $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + d = 1 - 9 + 15 + d = 7 + d = 0$, de donde se deduce que $d = -7$.

Ejercicio 6.23. La cantidad de trigo en una cosecha C depende del nivel de nitrógeno en el suelo n según la ecuación

$$C(n) = \frac{n}{1+n^2}, \quad n \geq 0.$$

¿Para qué nivel de nitrógeno se obtendrá la mayor cosecha de trigo?

💡 Solución

Se trata de calcular el valor de n donde se alcanza el máximo de $C(n)$. Veremos primero si hay algún máximo relativo. Para ello calculamos los puntos críticos.

$$C'(n) = \frac{(n)'(1+n^2) - n(1+n^2)'}{(1+n^2)^2} = \frac{(1+n^2) - n(2n)}{(1+n^2)^2} = \frac{1-n^2}{(1+n^2)^2}$$

$$C'(n) = 0 \Leftrightarrow 1-n^2 = 0 \Leftrightarrow n^2 = 1 \Leftrightarrow n = \pm 1.$$

Como no tienen sentido cantidades de nitrógeno negativas, el único punto crítico está en $n = 1$. Para ver si se trata de un máximo, estudiamos ahora el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha de este punto. Tomando, por ejemplo $n = 0$, se tiene $C'(0) = \frac{1-0^2}{(1+0^2)^2} = 1 > 0$, por lo que la función es creciente a la izquierda de $n = 1$. Y tomando, por ejemplo $n = 2$, se tiene $C'(2) = \frac{1-2^2}{(1+2^2)^2} = -3/25 < 0$, por lo que la función es decreciente a la derecha de $n = 1$. Por tanto, en $n = 1$ existe un máximo relativo, que además, es único.

Como la función es continua en todo \mathbb{R} al ser una función racional y no anularse nunca su denominador, se tiene que el máximo absoluto coincide con el relativo, de manera que el nivel de nitrógeno para el que la cosecha será máxima es $n = 1$.

Ejercicio 6.24. La velocidad v de una reacción irreversible $A + B \rightarrow AB$ es función de la concentración x del producto AB y puede expresarse según la ecuación

$$v(x) = 4(3 - x)(5 - x).$$

¿Qué valor de x maximiza la velocidad de reacción?

💡 Solución

Veremos primero si hay algún máximo relativo. Para ello calculamos los puntos críticos de $v(x) = 4(3 - x)(5 - x) = 4x^2 - 32x + 60$.

$$v'(x) = 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Para ver si se trata de un máximo relativo, estudiamos el signo de la segunda derivada en el punto crítico. $v''(x) = 8 > 0$, luego la función es cóncava hacia arriba en todo \mathbb{R} y en particular en $x = 4$, por lo que tiene un mínimo local en $x = 4$.

Como el dominio de la función es $[0, \infty)$ ya que las concentraciones no pueden ser negativas, y $\lim_{n \rightarrow \infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x^2 - 32x + 60 = \infty$, la función no tiene máximo local, por lo que no existe un valor de x que maximice la velocidad de reacción.

Ejercicio 6.25. Un naufrago se encuentra en una isla situada en un plano con coordenadas $(2, 0)$. Se sabe que un ferry hace siempre la trayectoria dada por la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Hacia qué punto de la trayectoria del ferry debe nadar el naufrago para recorrer la menor distancia posible? ¿Qué distancia recorrerá si nada hacia ese punto?

💡 Solución

El ferry pasará por todos los puntos $(x, f(x))$, por lo que se trata de averiguar el valor de x que hace mínima la distancia del punto $(2, 0)$ a $(x, f(x))$, o lo que es lo mismo, minimizar el módulo del vector $(x, f(x)) - (2, 0) = (x - 2, f(x))$, que vale

$$|(x - 2, f(x))| = \sqrt{(x - 2)^2 + (\sqrt{x+1})^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 5}.$$

Se trata, por tanto, de calcular el mínimo de la función $d(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$. Calculamos los puntos críticos.

$$d'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2.$$

Para ver si se trata de un mínimo relativo, estudiamos el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Tomando, por ejemplo, $x = 1$, se tiene $d'(1) = \frac{2 \cdot 1 - 3}{2\sqrt{1^2 - 3 \cdot 1 + 5}} = -\sqrt{3}/6 < 0$, de manera que la distancia decrece a la izquierda de $x = 3/2$. Y tomando, por ejemplo, $x = 2$, se tiene que $d'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2\sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 5}} = \sqrt{3}/6 > 0$, de manera que la distancia crece a la derecha de $x = 3/2$. Por tanto, la

función de la distancia tiene un mínimo relativo en $x = 3/2$, que además es único, y como d es continua en todo \mathbb{R} , el mínimo relativo es también mínimo absoluto, y por tanto, el naufrago debe nadar hacia el punto $(3/2, \sqrt{3}/2)$.

Ejercicio 6.26. Un hotel alquila habitaciones por un precio entre 40€ y 100€ diarios. Se ha observado que el número de habitaciones que alquilan depende del precio x según la función $h(x) = 300 - 3x$. ¿Qué precio se debe cobrar por habitación para obtener los máximos ingresos?

💡 Solución

Los ingresos vienen dados por la función

$$f(x) = xh(x) = x(300 - 3x) = 300x - 3x^2.$$

Se trata de calcular el máximo absoluto de esta función. Para ello veremos primero si tiene algún máximo relativo. Calculamos los puntos críticos.

$$f'(x) = 300 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 50.$$

Para ver si se trata de un máximo relativo, estudiamos el signo de la segunda derivada en el punto crítico. $f''(x) = -6 < 0$, por lo que la función es cóncava hacia abajo en todo \mathbb{R} , y en particular en $x = 50$, por lo que f tiene un máximo relativo en este punto, que además es único. Como f es continua en todo \mathbb{R} , el máximo relativo es también absoluto, y el precio de las habitaciones que maximiza los ingresos es $x = 50\text{€}$.

Ejercicio 6.27. Existen organismos que se reproducen una sola vez en su vida como por ejemplo los salmones. En este tipo de especies, la velocidad de incremento per cápita v , que mide la capacidad reproductiva, depende de la edad x según la ecuación

$$v(x) = \frac{\ln(p(x)h(x))}{x},$$

donde $p(x)$ es la probabilidad de sobrevivir hasta la edad x y $h(x)$ es el número de nacimientos de hembras a la edad x . Calcular la edad óptima de reproducción, es decir, el valor que maximice v , para $p(x) = e^{-0.1x}$ y $h(x) = 4x^{0.9}$.

💡 Solución

Se trata de calcular el máximo absoluto de la función

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \frac{\ln(e^{-0.1x} 4x^{0.9})}{x} = \frac{\ln(e^{-0.1x}) + \ln(4) + \ln(x^{0.9})}{x} \\
 &= \frac{-0.1x + \ln(4) + 0.9 \ln(x)}{x} = -0.1 + \frac{\ln(4) + 0.9 \ln(x)}{x}.
 \end{aligned}$$

Veamos primero si la función tiene algún máximo relativo. Calculamos los puntos críticos.

$$\begin{aligned}
 v'(x) &= \frac{(x)'(\ln(4) + 0.9 \ln(x)) - x(\ln(4) + 0.9 \ln(x))'}{x^2} \\
 &= \frac{\ln(4) + 0.9 \ln(x) - 0.9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(4) + 0.9 \ln(x) - 0.9 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{0.9 - \ln(4)}{0.9} \Leftrightarrow x = e^{\frac{0.9 - \ln(4)}{0.9}} \approx 0.5826.
 \end{aligned}$$

Para ver si v tiene un máximo relativo en este punto, estudiamos el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Tomando, por ejemplo, $x = 0$, se tiene $v'(0.5) \approx 0.5502 > 0$, por lo que la función crece a la izquierda de $x = 0.5826$. Y tomando, por ejemplo, $x = 0.6$, se tiene que $v'(0.6) \approx -0.0738 < 0$, por lo que v decrece a la derecha de $x = 0.5826$, así que, v tiene un máximo relativo en $x = 0.5826$, que además es único. Como v es continua en $(0, \infty)$, que es el dominio que tiene sentido en el contexto del problema, el máximo relativo es también absoluto y la edad óptima de reproducción es a los 0.5826 años.

Ejercicio 6.28. Un lata de refresco cilíndrica contiene 33 cl. Hallar las dimensiones de la lata para que la cantidad de aluminio utilizada en su creación sea mínima.

Ejercicio 6.29. La distancia en kilómetros que recorre un coche de alquiler con 1 litro de gasolina depende de la velocidad a la que circule según la función $d(x) = 18 - \frac{x}{20}$ para $x \in (50, 200)$. Si el coste de la gasolina es de 2 €/l y el coste del alquiler es de 5 €/h, ¿a qué velocidad debe circular para que el coste del trayecto sea mínimo? ¿Cuál será el coste por kilómetro si circula a esa velocidad?

💡 Solución

Como la distancia recorrida a una velocidad x es $d(x) = 18 - \frac{x}{20}$ y, como la velocidad es $x = \frac{d(x)}{t}$, el tiempo necesario para recorrer esa distancia es $\frac{d(x)}{x}$, de manera que el coste del alquiler para recorrer esa distancia es $\frac{d(x)}{x} \cdot 5$. A esto hay que sumar el precio del litro de gasolina necesario para recorrer esa distancia, de manera que el coste de recorrer esa distancia es $\frac{d(x)}{x} \cdot 5 + 2$. Por tanto, el coste por kilómetro para una velocidad x viene dado por la función

$$c(x) = \frac{\frac{d(x)}{x}5 + 2}{d(x)} = \frac{-35x - 1800}{x^2 - 360x}$$

Para determinar el mínimo de la función calculamos los puntos críticos. La derivada vale

$$c'(x) = \frac{-35(x^2 - 360x) - (-35x - 1800)(2x - 360)}{(x^2 - 360x)^2} = \frac{35x^2 + 3600x - 648000}{(x^2 - 360x)^2}$$

y resolviendo la ecuación $35x^2 + 3600x - 648000 = 0$ se obtienen los puntos críticos $x = 94.0334$ y $x = -196.8905$. Como el segundo punto crítico queda fuera del rango de velocidades de 50 a 200, estudiaremos solo el primero. Usando el criterio de la primera derivada, estudiamos el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico, por ejemplo $c'(90) = -1/14580 < 0$ y $c'(100) = 31/338000 > 0$, por lo que c tiene un mínimo en $x = 94.0334$, es decir, la velocidad a la que debe viajar para que el coste sea mínimo es 94.0334 km/h, y el precio por kilómetro a esa velocidad será $c(94.0334) = 0.2036$ €/km.

Ejercicio 6.30. En un tramo de carretera limitado a una velocidad máxima de 70 km/h existe un semáforo de tramo. Según el registro del semáforo, un vehículo pasa por el comienzo del tramo, situado en el kilómetro 12 a las 8:00 y pasa por el final del tramo, situado en el kilómetro 14, un minuto y medio después. ¿Será sancionado el vehículo por exceso de velocidad?

Solución

Suponiendo que la función f que determina la posición del vehículo en cada instante es continua y derivable en el tramo del enunciado, según el [teorema del valor medio](#), existe al menos un instante c en el que

$$f'(c) = \frac{14 - 12}{8.025 - 8} = \frac{2}{0.025} I = 80 \text{ km/h.}$$

Como f' es la velocidad instantánea, se puede concluir que en algún momento la velocidad instantánea fue de 80 km/h, y como la máxima velocidad permitida en el tramo es de 70 km/h, el vehículo será sancionado.

Ejercicio 6.31. La posición que ocupa un coche que se mueve en línea recta, puede expresarse en función del tiempo según la ecuación

$$e(t) = 4t^3 - 2t + 1.$$

Calcular su velocidad y aceleración en cualquier instante.

Nota: La aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad.

Solución

La velocidad es la tasa de variación instantánea del espacio con respecto al tiempo, es decir, la primera derivada de e , que vale $e'(t) = 12t^2 - 2$.

La aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, la segunda derivada de e , que vale $e''(t) = 24t$.

Ejercicio 6.32. El espacio recorrido por un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba, sin tener en cuenta la resistencia del aire, viene dado por la ecuación

$$e(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

donde v_0 es la velocidad inicial con que se lanza el objeto, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y t es el tiempo transcurrido desde que el objeto se lanza.

- Calcular la velocidad y la aceleración en cualquier instante.
- Si el objeto se lanza inicialmente a 50 km/h, ¿cuál será la altura máxima que alcanzará el objeto? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?
- ¿En qué instante volverá a tocar la tierra el objeto? ¿Con qué velocidad?

Solución

- La velocidad es la tasa de variación instantánea con respecto al tiempo, es decir, la primera derivada de e , que vale, $e'(t) = v_0 - gt$. Y la aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, la segunda derivada de e , que vale $e''(t) = -g$.
- Para ver en qué punto el objeto alcanza la altura máxima, estudiamos primero si la función tiene un máximo relativo. Calculamos los puntos críticos, tomando $v_0 = 50 \text{ km/h} = \frac{125}{9} \text{ m/s}$.

$$e'(t) = \frac{125}{9} - 9.81t = 0 \Leftrightarrow t \approx 1.42 \text{ s.}$$

Para ver si se trata de un máximo relativo, estudiamos el signo de la segunda derivada en el punto. Como $e''(t) = -9.81 < 0$ la función es cóncava hacia abajo en todo \mathbb{R} , y en particular en $t \approx 1.42$, de manera que e tiene un máximo relativo en $t \approx 1.42$, que además es único. Como la función es continua en todo \mathbb{R} , el máximo relativo es también absoluto, y por tanto, la altura máxima que alcanzará el objeto es aproximadamente $e(1.42) = 9.83 \text{ m}$. En ese instante, la velocidad del objeto será nula ya que se trata de un punto crítico y $e'(1.42) = 0$.

- Para ver cuándo el objeto vuelve a tocar el suelo basta con resolver la ecuación

$$e(t) = 50t - \frac{1}{2}9.81t^2 = 0 \Leftrightarrow t(50 - 4.905t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o } t \approx 2.83 \text{ s.}$$

Por tanto, el objeto volverá a tocar suelo a los 2.83 segundos aproximadamente. En ese instante la velocidad será $e'(2.83) = \frac{125}{9} - 9.81 \cdot 2.83 \approx -13.89 \text{ m/s}$, que es la misma velocidad con la que se lanzó pero negativa.

Ejercicio 6.33. Una partícula se mueve a lo largo de la curva

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg}(t), \\ y = t^2 - 2t + 3. \end{cases}$$

donde x e y están medidos en metros y el tiempo t en segundos.

- a. Hallar $\frac{dy}{dx}$ en $t = 0$.
- b. Hallar la tangente a la trayectoria en el punto $(0, 3)$.

💡 Solución

- a. Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

y en consecuencia,

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{dy/dt}{dx/dt}(t) = \frac{2t - 2}{1 + \operatorname{tg}(t)^2}.$$

En el punto $t = 0$ tendremos

$$\frac{dy}{dx}(0) = \frac{-2}{1 + \operatorname{tg}(0)^2} = -2.$$

- b. La ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x(t_0), y(t_0))$ correspondiente al instante t_0 , viene dada por la expresión

$$y - y(t_0) = \frac{dy}{dx}(t_0)(x - x(t_0)).$$

Como el punto $(0, 3)$ se alcanza precisamente en el instante $t = 0$ tenemos que la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en dicho instante es:

$$y - y(0) = \frac{dy}{dx}(0)(x - x(0)),$$

es decir,

$$y - 3 = -2(x - 0),$$

y simplificando obtenemos:

$$y = 3 - 2x.$$

Ejercicio 6.34. Las coordenadas paramétricas de un punto material lanzado bajo un ángulo respecto al horizonte son

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$ es el tiempo contado a partir del instante en que el punto llega a la posición más alta, v_0 es la velocidad horizontal en el instante $t = 0$ y $g = 9.81 \text{ m}^2/\text{s}$ es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. ¿En qué instante la magnitud de la velocidad horizontal será igual a la de la velocidad vertical? ¿Cuánto debería valer v_0 para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente? Calcular la ecuación de la recta tangente en dicho instante con el valor de v_0 calculado.

Solución

La velocidad horizontal es la derivada del espacio recorrido horizontalmente (componente x) con respecto al tiempo, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t) = v_0.$$

Del mismo modo, la velocidad vertical es la derivada del espacio recorrido verticalmente (componente y) en relación al tiempo,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2} g t^2\right) = -gt$$

Para ver en qué instante ambas magnitudes serán iguales, las igualamos y resolvemos la ecuación:

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \left| \frac{dy}{dt} \right| \Leftrightarrow v_0 = gt \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{9.81} \text{ s.}$$

Para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente, debe cumplirse que $x(v_0/9.81) = 100$ m, de lo que se deduce:

$$x(v_0/9.81) = v_0 \frac{v_0}{9.81} = \frac{v_0^2}{9.81} = 100 \Leftrightarrow v_0^2 = 981 \Leftrightarrow v_0 = +\sqrt{981} = 31.32 \text{ m/s.}$$

Por tanto, el instante en cuestión es $t = v_0/9.81 = 31.32/9.81 = 3.19$ s.

Por último, la ecuación de la recta tangente en dicho instante, para el valor de v_0 calculado es:

$$y = y(3.19) + \frac{dy}{dx}(3.19)(x - x(3.19))$$

Ya hemos visto que $x(3.19) = 100$, y que en dicho instante la velocidad horizontal y vertical coinciden, de manera que

$$\frac{dy}{dx}(3.19) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -1,$$

de modo que sólo nos queda calcular el espacio vertical recorrido en dicho instante, que es

$$y(3.19) = -\frac{1}{2}9.81 \cdot 3.19^2 = -49.91.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a la recta tangente:

$$y = -49.91 - (x - 100) \Leftrightarrow y = -x + 50.09.$$

Ejercicio 6.35. La cantidad de árboles en un ecosistema depende del tiempo según la función $a(t) = 100 \ln(t^2 + 1)$, y la cantidad de un determinado parásito de los árboles, también depende del tiempo según la función $p(t) = \sqrt[3]{t^2 + 2}$. Calcular la tasa de variación instantánea del número de árboles en relación al número de parásitos, en el instante en que el número de parásitos es 3.

💡 Solución

$$\frac{da}{dp} = \frac{da/dt}{dp/dt} = \frac{\frac{200t}{t^2+1}}{\frac{2t}{3\sqrt[3]{(t^2+2)^2}}} = \frac{200t \cdot 3\sqrt[3]{(t^2+2)^2}}{2t(t^2+1)} = \frac{600t\sqrt[3]{(t^2+2)^2}}{2t^3+2t}.$$

El instante en el que el número de parásitos es 3 es

$$p(t) = \sqrt[3]{t^2 + 2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2 = 27 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5.$$

Como en el contexto del problema podemos suponer que el tiempo es positivo, el instante en el que el número de parásitos es 3 es $t = 5$, y

$$\frac{da}{dp}(t=3) = \frac{600 \cdot 5 \sqrt[3]{(5^2 + 2)^2}}{2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5} \approx 103.85 \text{ árboles/parásitos.}$$

Ejercicio 6.36. Dada la función $xy + e^x - \log y = 0$, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a ella en $x = 0$.

💡 Solución

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación de la curva implícita se tiene

$$0 \cdot y + e^0 - \ln(y) = 0 \Leftrightarrow \ln(y) = 1 \Leftrightarrow y = e.$$

Así pues, hay que calcular la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto $(0, e)$.

La ecuación de la recta tangente en $(0, e)$ es $y = e + \frac{dy}{dx}(x=0)(x-0)$. Para calcular $\frac{dy}{dx}$ tenemos que derivar implícitamente la ecuación de la curva.

$$\begin{aligned} (xy + e^x - \ln(y))' &= (0)' \Leftrightarrow y + xy' + e^x - \frac{y'}{y} = 0 \\ \Leftrightarrow xy' - \frac{y'}{y} &= -y - e^x \Leftrightarrow y'(x - \frac{1}{y}) = -y - e^x \\ \Leftrightarrow y' \frac{xy - 1}{y} &= -y - e^x \Leftrightarrow y' = \frac{(-y - e^x)y}{xy - 1}, \end{aligned}$$

que en el punto $(0, e)$ vale

$$\frac{dy}{dx}(0, e) = \frac{(-e - e^0)e}{0e - 1} = e^2 + e.$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente a la curva implícita en el punto $(0, e)$ es $y = e + (e^2 + e)x$.

Por otro lado, la ecuación de la recta normal a la curva implícita en el punto $(0, e)$ es $y = e - \frac{1}{dy/dx(x=0)}(x - 0) = e - \frac{x}{e^2 + e}$.

Ejercicio 6.37. Suponiendo que la temperatura, T en grados centígrados, y el volumen, V en metros cúbicos, de un gas real encerrado en un contenedor de volumen variable están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$T^2(V^2 - \pi^2) - V \cos(TV) = 0.$$

- Calcular la derivada del volumen con respecto a la temperatura en el momento en el que el volumen es de $\pi \text{ m}^3$ y la temperatura es medio grado centígrado.

- b. ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que daría el volumen en función de la temperatura en el mismo punto del apartado anterior? Suponiendo que tanto la temperatura como el volumen son, a su vez, funciones de la presión, qué ecuación ligaría la derivada de la temperatura con respecto a la presión con la derivada del volumen con respecto a la presión.

 Solución

- $\frac{dV}{dT} = \frac{-2T(V^2 - \pi^2) - V^2 \operatorname{sen}(TV)}{2T^2V - \cos(TV) + TV \operatorname{sen}(TV)}$ y $\frac{dV}{dT}(V = \pi, T = 0.5) = -\pi \text{ m}^3/\text{°C}$.
- Tangente: $V = \pi(-T + 1.5)$.
- $2T \frac{dT}{dP}(V^2 - \pi^2) + T^2(2V \frac{dV}{dT}) - \frac{dV}{dT} \cos(VT) - V(-\operatorname{sen}(TV)(\frac{dT}{dP}V + T \frac{dV}{dP})) = 0$.

Ejercicio 6.38. Un cuerpo se mueve en el plano a través de los puntos de coordenadas (x, y) relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$2e^{xy} \operatorname{sen}(x) + y \cos(x) = 2.$$

- Calcular su posición cuando $x = \pi/2$.
- Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuando $x = 0$.

 Solución

- El punto (x, y) en el que se encontrará el cuerpo cuando $x = 0$ cumple la ecuación del enunciado, de manera que sustituyendo $x = 0$, se tiene

$$2e^0 \operatorname{sen}(0) + y \cos(0) = 2 \Leftrightarrow y = 2.$$

Por tanto el cuerpo se encontrará en la posición $(0, 2)$.

- Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de coordenadas (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

En nuestro caso, no tenemos la expresión explícita de la función $y = f(x)$, pero sí que tenemos la expresión de partida que define a y como función de x de forma implícita. Suponiendo que y es función de x y derivando implícitamente con respecto a x , obtenemos:

$$2e^{xy}(y + xy') \operatorname{sen}(x) + 2e^{xy} \cos(x) + y' \cos(x) - y \operatorname{sen}(x) = 0$$

Y sacando como factor común y' y despejando, nos queda:

$$y' = \frac{-2e^{xy}y\sin(x) - 2e^{xy}\cos(x) + y\sin(x)}{2xe^{xy}\sin(x) + \cos(x)}$$

Y en el punto $(0, 2)$ vale

$$y'(0, 2) = \frac{-2e^0\cos(0)}{\cos(0)} = -2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

Ejercicio 6.39. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $x^2 + y^2 = 3xy - 1$ en los puntos en que $x = 1$. Calcular también los extremos relativos y decir si son máximos o mínimos.

💡 Solución

Consideremos y como función de x . Veamos primero los puntos de la curva en los que $x = 1$:

$$1^2 + y^2 = 3 \cdot 1 \cdot y - 1 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos dos soluciones $y = 1$ e $y = 2$, de modo que existen dos puntos para los que $x = 1$, que son el $(1, 1)$ y el $(1, 2)$.

Para calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal en estos puntos, necesitamos calcular la derivada dy/dx en dichos puntos. Derivamos implícitamente:

$$\begin{aligned} d(x^2 + y^2) &= d(3xy - 1) \Leftrightarrow 2xdx + 2ydy = 3(dxy + xdy) \\ &\Leftrightarrow (2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x},$$

que en el punto $(1, 1)$ vale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1} = -1,$$

y en el punto $(1, 2)$ vale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = 4.$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 1)$ es

$$y - 1 = \frac{dy}{dx}(1, 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2 - x,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{dy/dx}(1, 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x,$$

mientras que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 2)$ es

$$y - 2 = \frac{dy}{dx}(1, 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 2,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 2 = -\frac{1}{dy/dx}(1, 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{9 - x}{4}.$$

Por otro lado, para calcular los extremos relativos, primero calculamos los puntos críticos, que son los que anulan la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x} = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x/3.$$

Pero además deben cumplir la ecuación de la curva implícita,

$$\begin{aligned} x^2 + (2x/3)^2 &= 3x(2x/3) - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2/9 = 2x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 9/5 \Leftrightarrow x = \pm 3/\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Así pues, existen dos puntos críticos que son el $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$. Para ver si son puntos de máximo o mínimo relativos, necesitamos calcular la segunda derivada en dichos puntos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{3y - 2x}{2y - 3x} \right) = \frac{(3 \frac{dy}{dx} - 2)(2y - 3x) - (2 \frac{dy}{dx} - 3)(3y - 2x)}{(2y - 3x)^2}.$$

En el punto, $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = \frac{(3 \cdot 0 - 2)(2 \frac{2}{\sqrt{5}} - 3 \frac{3}{\sqrt{5}}) - (2 \cdot 0 - 3)(3 \frac{2}{\sqrt{5}} - 2 \frac{3}{\sqrt{5}})}{(2 \frac{2}{\sqrt{5}} - 3 \frac{3}{\sqrt{5}})^2} = 2\sqrt{5},$$

que al ser positiva, indica que el punto $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ es un punto de mínimo relativo. En el punto, $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) = \frac{(3 \cdot 0 - 2)(2 \frac{-2}{\sqrt{5}} - 3 \frac{-3}{\sqrt{5}}) - (2 \cdot 0 - 3)(3 \frac{-2}{\sqrt{5}} - 2 \frac{-3}{\sqrt{5}})}{(2 \frac{-2}{\sqrt{5}} - 3 \frac{-3}{\sqrt{5}})^2} = -2\sqrt{5},$$

que al ser negativa, indica que el punto $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ es un punto de máximo relativo.

Ejercicio 6.40. Dada la curva $x^2 - xy + y^2 = 3$,

- Calcular los posibles extremos relativos de y , considerando y como función implícita de x . ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?
- Analizar si los puntos anteriores son máximos o mínimos haciendo uso de la derivada segunda.

💡 Solución

- Derivamos implícitamente la ecuación

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}3 = 0$$

Derivando el lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) &= \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \\ &= 2x - \left(\frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = \\ &= 2x - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} \\ &= 2x - y + (2y - x)\frac{dy}{dx} = 0\end{aligned}$$

Los posibles extremos serán los puntos donde se anule la derivada, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$. Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$$2x - y + (2y - x) \cdot 0 = 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Y sustituyendo ahora en la ecuación de la función tenemos

$$x^2 - x \cdot 2x + (2x)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Por tanto, los posibles puntos de extremo serán $(1, 2)$ y $(-1, -2)$.

- Para ver si los puntos anteriores son efectivamente extremos, calculamos la derivada segunda en dichos puntos.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - xy + y^2) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) \right) = \\
&= \frac{d}{dx} \left(2x - y + (2y - x) \frac{dy}{dx} \right) = \\
&= \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}y + \left(\frac{d}{dx}(2y - x) \frac{dy}{dx} + (2y - x) \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} \right) = \\
&= 2 - \frac{dy}{dx} + \left(2 \frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dx} \right) \frac{dy}{dx} + (2y - x) \frac{d^2y}{dx^2} = \\
&= 2 - \frac{dy}{dx} + 2 \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + (2y - x) \frac{d^2y}{dx^2} \\
&= 2 - 2 \frac{dy}{dx} + (2y - x + 2) \frac{d^2y}{dx^2} = 0
\end{aligned}$$

Para el primer punto tenemos que sustituir $x = 1$, $y = 2$ y $\frac{dy}{dx} = 0$, y queda

$$2 - 2 \cdot 0 + (2 \cdot 2 - 1 + 2) \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow 2 + 5 \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{5},$$

que al ser negativo indica que en el punto $(1, 2)$ hay un máximo relativo.

Para el segundo punto tenemos que sustituir $x = -1$, $y = -2$ y $\frac{dy}{dx} = 0$, y queda

$$2 - 2 \cdot 0 + (2 \cdot (-2) - (-1)1 + 2) \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2,$$

que al ser positivo indica que en el punto $(-1, -2)$ hay un mínimo relativo.

Ejercicio 6.41. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, se pide:

- Obtener el polinomio de Taylor de tercer grado de f en el punto $a = \pi/6$ y usarlo para aproximar $\operatorname{sen}(1/2)$ dando una cota del error cometido.
- Dar una aproximación de $\operatorname{sen}(1/2)$ usando el polinomio de Taylor de quinto grado en el punto $a = 0$, acotando el error cometido.

💡 Solución

- La fórmula del polinomio de Taylor de tercer grado de f en el punto $a = \pi/6$ es

$$P_{f,\pi/6}^3(x) = f(\pi/6) + f'(\pi/6)(x - \pi/6) + \frac{f''(\pi/6)}{2}(x - \pi/6)^2 + \frac{f'''(\pi/6)}{3!}(x - \pi/6)^3.$$

Necesitamos calcular, por tanto, hasta la tercera derivada en el punto $a = \pi/6$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(x) & f(\pi/6) = 0.5 \\ f'(x) = \cos(x) & f'(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \\ f''(x) = -\sin(x) & f''(\pi/6) = -0.5 \\ f'''(x) = -\cos(x) & f'''(\pi/6) = -\sqrt{3}/2. \end{array}$$

Así pues, sustituyendo en la ecuación del polinomio anterior se llega a

$$P_{f,\pi/6}^3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) - \frac{1}{4}(x - \pi/6)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \pi/6)^3.$$

Sustituyendo en $x = 1/2$ se tiene que $\sin(1/2) \approx P_{f,\pi/6}^3(1/2) = 0.4794255322$.

El error cometido en la aproximación es el resto $R_{f,\pi/6}^3(1/2)$. Expresando el resto de Taylor en la forma de Lagrange se tiene

$$R_{f,\pi/6}^3(1/2) = \frac{f'''(x)}{4!} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \right)^4 = \frac{\sin(x)}{24} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \right)^4 \text{ con } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Como $|\sin(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que una cota del error cometido es

$$|R_{f,\pi/6}^3(1/2)| \leq \frac{1}{24} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \right)^4 = 6.46 \cdot 10^{-9}.$$

b. La fórmula del polinomio de Maclaurin de quinto grado de f es

$$P_{f,0}^3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \frac{f'''''(0)}{5!}x^5$$

Calculando hasta la quinta derivada en 0 y sustituyendo en esta fórmula se tiene

$$P_{f,0}^5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Sustituyendo en $x = 1/2$ se tiene que $\sin(1/2) \approx P_{f,0}^5(1/2) = 0.4794270833$, y podemos obtener una cota del error cometido de forma similar a la del apartado anterior, obteniendo $|R_{f,0}^5(1/2)| \leq 2.170 \cdot 10^{-5}$.

Ejercicio 6.42. Calcular el polinomio de Maclaurin de tercer grado para la función $f(x) = \arcsen(x)$.

 Solución

La fórmula del polinomio de Maclaurin de quinto grado de f es

$$P_{f,0}^3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Calculamos hasta la tercera derivada de f en $a = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsen(x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= x(1-x^2)^{-3/2} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2} & f'''(0) &= 1. \end{aligned}$$

Así pues, sustituyendo en la fórmula anterior del polinomio se tiene

$$P_{f,0}^3(x) = x + \frac{1}{6}x^3.$$

Ejercicio 6.43. Calcular $\cos(1)$ con un error menor que 10^{-7} usando aproximaciones de Taylor.

 Solución

Para calcular de forma aproximada $\cos(1)$ utilizaremos un polinomio de Maclaurin para la función $f(x) = \cos(x)$.

El resto del polinomio de Taylor de orden n de f en $a = 0$ en la forma de Lagrange, para $x = 1$ es

$$R_{f,0}^n(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} 1^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \text{ con } t \in [0, 1].$$

Como

$$|f^{(n)}(t)| = \begin{cases} |\operatorname{sen}(t)| & \text{si } n = 2k+1 \\ |\cos(t)| & \text{si } n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

se tiene que $|f^{(n+1)}(t)| \leq 1 \forall t \in \mathbb{R}$, por lo que una cota del resto es $R_{f,0}^n(t) \leq 1/(n+1)!$. Probando con sucesivos valores de n , el primer valor que cumple que $R_{f,0}^n(t) \leq 1/(n+1)! \leq 10^{-7}$ es $n = 10$, por lo que necesitamos calcular el polinomio de Maclaurin de orden 10, que vale

$$P_{f,0}^{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!},$$

que para $x = 1$ vale

$$P_{f,0}^{10}(1) = 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} - \frac{1^6}{6!} + \frac{1^8}{8!} - \frac{1^{10}}{10!} \approx 0.5403023037919.$$

Ejercicio 6.44. Obtener polinomio de Maclaurin de grado 3 de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\operatorname{tg}(x)$, y utilizar los polinomios anteriores para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

Solución

La formula general para calcular el polinomio de Maclaurin de grado 3 de una función $f(x)$ es:

$$P_0^3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Consideremos, en primer lugar, la función $\operatorname{sen}(x)$, y calculemos sus tres primeras derivadas en 0:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x) & f(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0, \\ f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= \cos(0) = 1, \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f''(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0, \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -\cos(0) = -1. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de arriba, llegamos al primer polinomio que buscamos:

$$P_0^3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

Consideremos ahora la función $\operatorname{tg}(x)$ y calculemos sus tres primeras derivadas en 0:

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{tg}(x) & g(0) &= \operatorname{tg}(0) = 0 \\ g'(x) &= 1 + \operatorname{tg}(x)^2 & g'(0) &= 1 + \operatorname{tg}(0)^2 0 = 1 \\ g''(x) &= 2 \operatorname{tg}(x) + 2 \operatorname{tg}(x)^3 & g''(0) &= 2 \operatorname{tg}(0) + 2 \operatorname{tg}(0)^3 = 0 \\ g'''(x) &= 2 + 8 \operatorname{tg}(x)^2 + 6 \operatorname{tg}(x)^4 & g'''(0) &= 2 + 8 \operatorname{tg}(0)^2 + 6 \operatorname{tg}(0)^4 = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo de nuevo en la fórmula de arriba, pero utilizando esta vez $g(x)$ en lugar de $f(x)$, llegamos al otro polinomio que buscamos:

$$Q_0^3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}$$

Finalmente, para calcular ahora el límite que nos piden, podemos sustituir $\sin(x)$ por $P_0^3(x)$ y $\operatorname{tg}(x)$ por $Q_0^3(x)$, teniendo en cuenta dichos polinomios se comportan de igual forma que las correspondientes funciones en un entorno del 0. Así pues, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q_0^3(x) - x}{x - P_0^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x}{x - x + \frac{x^3}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{3} = 2.$$

Ejercicio 6.45. La función $C(t)$ da la concentración (en mg/dl) de un fármaco en el torrente sanguíneo en función del tiempo (en horas):

$$C(t) = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$$

- Calcular el polinomio de Maclaurin de orden 3.
- Utilizando el polinomio anterior, calcular aproximadamente la concentración del fármaco transcurridos 15 minutos.

💡 Solución

- La fórmula del polinomio de Maclaurin de orden 3 para la función $C(t)$ es:

$$P_{C,0}^3(t) = C(0) + \frac{dC}{dt}(0)t + \frac{d^2C}{dt^2}(0)\frac{t^2}{2!} + \frac{d^3C}{dt^3}(0)\frac{t^3}{3!}$$

Necesitamos calcular las tres primeras derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{2e^{-2t}}{(1+e^{-2t})^2}, \\
\frac{d^2C}{dt^2} &= \frac{\frac{d}{dt}(2e^{-2t})(1+e^{-2t})^2 - 2e^{-2t}\frac{d}{dt}(1+e^{-2t})^2}{(1+e^{-2t})^4} = \\
&= \frac{-4e^{-2t}(1+e^{-2t})^2 - 2e^{-2t}2(1+e^{-2t})(-2e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^4} = \frac{-4e^{-2t} + 4e^{-4t}}{(1+e^{-2t})^3}, \\
\frac{d^3C}{dt^3} &= \frac{\frac{d}{dt}(-4e^{-2t}1 + 4e^{-4t})(1+e^{-2t})^3 - (-4e^{-2t} + 4e^{-4t})\frac{d}{dt}(1+e^{-2t})^3}{(1+e^{-2t})^6} = \\
&= \frac{(8e^{-2t} - 16e^{-4t})(1+e^{-2t})^3 - (-4e^{-2t} + 4e^{-4t})3(1+e^{-2t})^2(-2e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^6} = \\
&= \frac{(8e^{-2t} - 16e^{-4t})(1+e^{-2t}) - (-4e^{-2t} + 4e^{-4t})(-6e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^4} = \\
&= \frac{(8e^{-2t} - 8e^{-4t} - 16e^{-6t}) - (24e^{-4t} - 24e^{-6t})}{(1+e^{-2t})^4} = \\
&= \frac{8e^{-2t} - 32e^{-4t} + 8e^{-6t}}{(1+e^{-2t})^4}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo para $t = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
C(0) &= \frac{1}{1+e^{-2\cdot 0}} = \frac{1}{2}, \\
\frac{dC}{dt}(0) &= \frac{2e^{-2\cdot 0}}{(1+e^{-2\cdot 0})^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, \\
\frac{d^2C}{dt^2}(0) &= \frac{-4e^{-2\cdot 0} + 4e^{-4\cdot 0}}{(1+e^{-2\cdot 0})^3} = \frac{-4 + 4}{2^3} = 0, \\
\frac{d^3C}{dt^3}(0) &= \frac{(8e^{-2\cdot 0} - 32e^{-4\cdot 0} + 8e^{-6\cdot 0})}{(1+e^{-2\cdot 0})^4} = \frac{8 - 32 + 8}{16} = -1.
\end{aligned}$$

Y por último, sustituyendo en la fórmula del polinomio anterior se tiene que

$$P_{C,0}^3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + 0\frac{t^2}{2!} - 1\frac{t^3}{3!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3.$$

- b. La concentración del fármaco transcurridos 15 minutos (0.25 horas) es aproximadamente

$$C(0.25) \approx P_{C,0}^3(0.25) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.25 - \frac{1}{6}0.25^3 = 0.6223958333 \text{ mg/dl.}$$

7 Integrales de funciones

Ejercicio 7.1. Calcular las sumas inferior y superior de Riemann de las siguientes funciones en el intervalo $[0, 1]$, tomando particiones de igual tamaño con n puntos, desde $n = 2$ hasta $n = 5$.

- a. $f(x) = 1 - x$
- b. $g(x) = x^2$
- c. $h(x) = e^{-x}$

Solución

Tomaremos particiones de igual tamaño $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
2	0.25	0.75
3	$1/3$	$2/3$
4	0.375	0.625
5	0.4	0.6

a.

n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
2	0.125	0.625
3	0.1852	0.5185
4	0.2188	0.4687
5	0.24	0.44

b.

n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
2	0.4872	0.8033
3	0.5326	0.7433
4	0.5564	0.7144
5	0.571	0.6974

c.

Ejercicio 7.2. Usar las sumas inferiores y superiores de Riemann para dar una aproximación del área contenida entre la gráfica de la función $\sin(x)$ y el eje x en el intervalo $[0, \pi/2]$, usando 4 rectángulos de igual base.

Solución

Tomando la partición $P = \{0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/4, \pi/2\}$ se tiene

$$s(f, P) = \sin(0)\frac{\pi}{8} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{8} + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} = 0.7908.$$

$$S(f, P) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{8} + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\frac{\pi}{8} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{8} = 1.1835.$$

Ejercicio 7.3. Calcular la integral inferior y superior de Riemann de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es una función integrable Riemann?

Pista

Usar las fórmulas $\sum_{n=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solución

Para calcular las sumas inferiores y superiores de Riemann utilizaremos la partición $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Como $f(x) = x^2$ es una función monótona creciente en $[0, 1]$, el mínimo en cada subintervalo se alcanzará en el extremo inferior y el máximo en el superior.

$$\begin{aligned}s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \\&= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \\S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\end{aligned}$$

Para calcular las integrales inferior y superior, basta con calcular el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de las sumas inferiores y superiores, respectivamente.

$$\begin{aligned}\underline{\int_0^1 x^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} \\\overline{\int_0^1 x^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Como $\underline{\int_0^1 x^2} = \overline{\int_0^1 x^2} = \frac{1}{3}$, la función $f(x) = x^2$ es integrable Riemann en $[0, 1]$ y $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

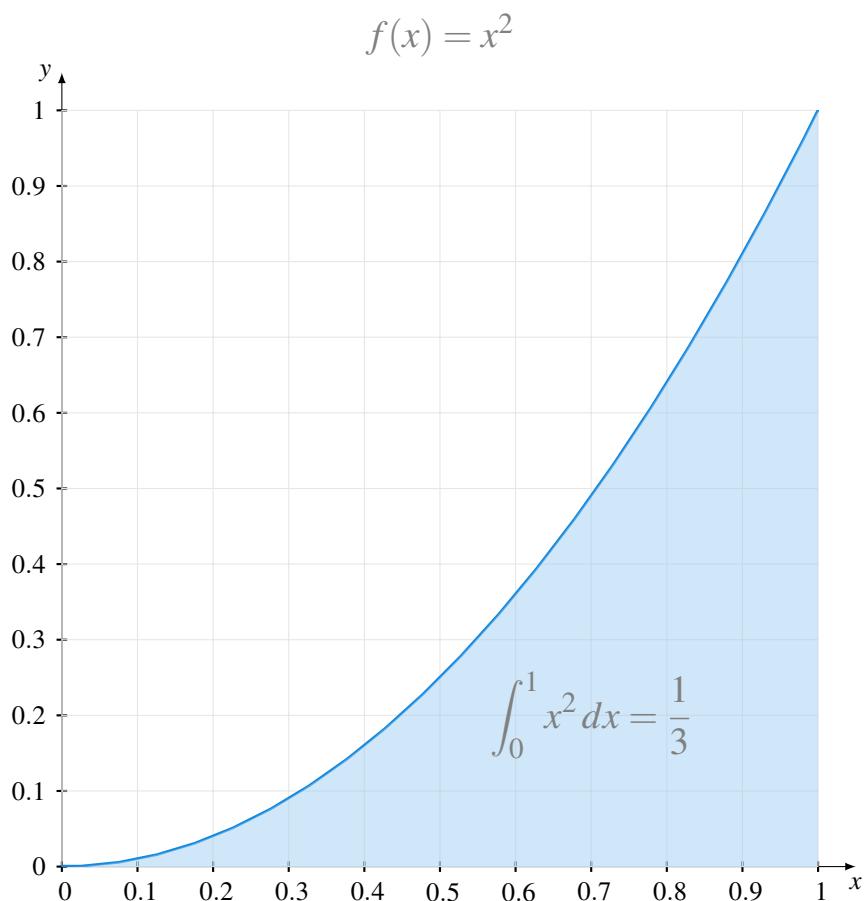


Figura 7.1: Integral de Riemann de $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$.

Ejercicio 7.4. Calcular la integral de Riemann de la función $f(x) = x^3 - 2x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

i Pista

Usar la fórmula $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

💡 Solución

Aplicando la linealidad de la integral, se tiene que

$$\int_0^1 x^3 - 2x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx - 2 \int_0^1 x^2 dx$$

Para calcular $\int_0^1 x^3 dx$ seguiremos el mismo procedimiento del ejercicio anterior. Tomando la partición $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Como $f(x) = x^3$ es una función monótona creciente en $[0, 1]$, el mínimo en cada subintervalo se alcanzará en el extremo inferior y el máximo en el superior.

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n (i^3 - 3i^2 + 3i - 1) = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^3 - 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{n^4} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4} \\ S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} \end{aligned}$$

Para calcular las integrales inferior y superior, basta con calcular el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de las sumas inferiores y superiores, respectivamente.

$$\begin{aligned} \underline{\int_0^1 x^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \\ \overline{\int_0^1 x^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como $\underline{\int_0^1 x^2} = \overline{\int_0^1 x^2} = \frac{1}{4}$, la función $f(x) = x^3$ es integrable Riemann en $[0, 1]$ y $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

Así pues, utilizando el resultado del ejercicio anterior se tiene

$$\int_0^1 x^3 - 2x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx - 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{4} - 2 \frac{1}{3} = \frac{-5}{12}$$

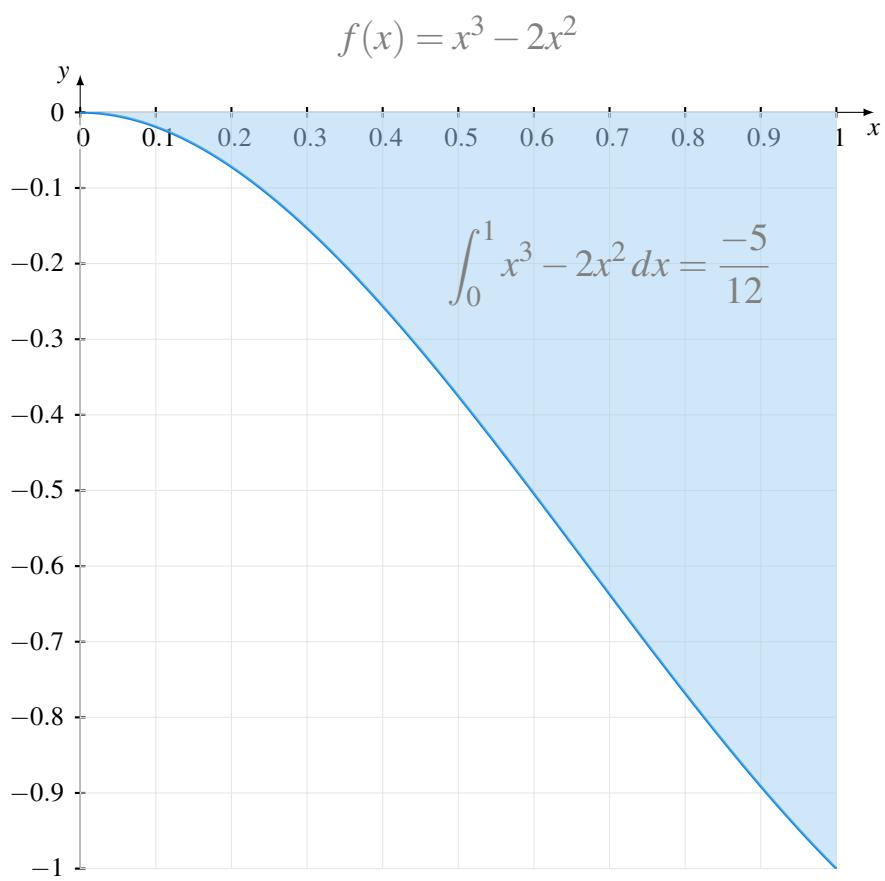


Figura 7.2: Integral de Riemann de $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $[0, 1]$.

Ejercicio 7.5. Calcular la integral de Riemann de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[a, b]$.

i Pista

Usar la sucesión de particiones $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ con $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = a(1+c)^i$ para $i = 1, \dots, n$.

? Solución

Sea $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = a(1+c)^i$ para $i = 1, \dots, n$ una partición del intervalo $[a, b]$. Como el último punto de la partición debe ser b , se debe cumplir $a(1+c)^n = b$, de donde se deduce que $c = (\frac{b}{a})^{1/n} - 1$.

Calcularemos la suma superior de Riemann de f en el intervalo $[a, b]$. Como $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función monótona decreciente, se alcanza el máximo en el extremo inferior de cada subintervalo. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}}(a(1+c)^i - a(1+c)^{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{a(1+c)^{i-1}}(ca(1+c)^{i-1}) = \sum_{i=1}^n c = nc = n \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1 \right) \\ &= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Para calcular la integral superior de Riemann, basta con calcular el límite de las sumas superiores cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x - 1}{x} \quad (x = \frac{1}{n}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{b}{a}\right)^x \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a). \quad (\text{L'Hôpital}) \end{aligned}$$

Del mismo modo se puede probar que $\underline{\int_a^b} f = \ln(b) - \ln(a)$, por lo que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable Riemann en $[a, b]$ y $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$.

Ejercicio 7.6. Demostrar que si f es una función integrable Riemann en un intervalo $I = [a, b]$, se puede calcular $\int_a^b f(x) dx$ mediante sumas de Riemann tomando como altura de los rectángulos el valor de la función en cualquier punto de los subintervalos de la partición.

💡 Solución

Si f es una función integrable en $I = [a, b]$, por el criterio de integrabilidad de Riemann, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$, es decir, existe una sucesión de particiones $(P_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - s(f, P_n) = 0$.

Sea x_i^* cualquier valor del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como $s(f, P_n) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ con $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ con $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, se cumple que

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, P_n)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n).$$

Ejercicio 7.7. Demostrar que $1 \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 2$.

💡 Solución

Por las propiedades de la integral (ver [corolario](#)), sabemos que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

donde m y M son el mínimo y el máximo de la función f en el intervalo $[a, b]$. En el caso concreto del ejercicio se tiene que $f'(x) = \frac{-2x}{x^4+2x^2+1}$ que se anula solo en $x = 0$. Estudiando el signo de la derivada a la izquierda y la derecha del punto crítico se concluye fácilmente que f alcanza un máximo relativo en este punto y $f(0) = 1$. Por otro lado $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$, por lo que se puede concluir que el mínimo absoluto de la función en $[-1, 1]$ es $m = \frac{1}{2}$ y el máximo absoluto $M = 1$. Y aplicando el corolario anterior se tiene

$$\frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1 \leq \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1(1 - (-1)) = 2.$$

Ejercicio 7.8. Calcular las siguientes integrales definidas

a. $\int_1^2 x^4 - 2x dx$

b. $\int_0^\pi \sin(x) dx$

c. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

d. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$

e. $\int_1^e \ln(x) dx$

f. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^3+x^2+x} dx$

g. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 dx$

h. $\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

i. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$

j. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}(x)^3}{\cos(x)^2} dx$

💡 Solución

a. $\int_1^2 x^4 - 2x dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^2 \right]_1^2 = \frac{16}{5}.$

b. $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2.$

c. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\operatorname{arctg}]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$

d. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left[2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} \right]_{-2}^2 = 2\pi.$

e. $\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^e = 1.$

f. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^3+x^2+x} dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_1^2 \approx 0.0782.$

g. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} \right]_0^{\pi/2} \approx 0.8172.$

h. $\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = [x + 2\sqrt{x}]_1^2 = -2\sqrt{3} + 5.$

i. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = \left[e^x \left(\frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2} \right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{e^{-\pi/2}+e^{\pi/2}}{2}.$

j. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}(x)^3}{\cos(x)^2} dx = \left[\frac{\operatorname{tg}(x)^4}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$

Ejercicio 7.9. Un vehículo parte del origen y se desplaza en línea recta con velocidad constante de 60 km/h. Calcular el espacio recorrido por el vehículo a las 2 horas.

Si a partir de las 2 horas el vehículo se mueve con una aceleración constante de 10 km/h², ¿cuál será la velocidad del vehículo a las 4 horas? ¿Y su posición?

💡 Solución

La velocidad del vehículo es la variación del espacio recorrido respecto al tiempo, de manera que si $s(t)$ es la función que indica el espacio recorrido en cada instante, se tiene que $s'(t) = 60$ km/h. Como el vehículo se desplaza de forma continua, $s(t)$

es una función continua en el intervalo $[0, 2]$, y aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos que el espacio recorrido es

$$s(2) - s(0) = \int_0^2 s'(t) dt = \int_0^2 60 dt = [60t]_0^2 = 60 \cdot 2 - 60 \cdot 0 = 120 \text{ km.}$$

Del mismo modo, la aceleración del vehículo es la variación de la velocidad respecto al tiempo, de manera que si $v(t)$ es la función que indica la velocidad del vehículo en cada instante, se tiene que $v'(t) = 10 \text{ m/s}^2$. Aplicando de nuevo el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$v(4) - v(2) = \int_0^2 v'(t) dt = \int_0^2 10 dt = [10t]_0^2 = 10 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 20 \text{ km/h.}$$

de donde se deduce que $v(4) = v(2) + 20 = 60 + 20 = 80 \text{ km/h}$.

De igual modo podemos obtener la velocidad en cualquier instante del intervalo $[2, 4]$.

$$v(t) - v(2) = \int v'(t) dt = \int 10 dt = [10t]_2^t = 10t - 20 \text{ km/h.}$$

de donde se deduce que $v(t) = v(2) + 10t - 20 = 60 + 10t - 20 = 10t + 40$. Por tanto, el espacio recorrido por el vehículo en el intervalo $[2, 4]$ es

$$s(4) - s(2) = \int_2^4 v(t) dt = \int_2^4 10t + 40 dt = [5t^2 + 40t]_2^4 = 140 \text{ km.}$$

y la posición del vehículo a las 4 horas es $s(4) = s(2) + 140 = 120 + 140 = 260 \text{ km}$.

Ejercicio 7.10. Un cuerpo humano de peso medio tiene alrededor de $3 \cdot 10^{14}$ átomos de carbono 14 en vida. Después de morir, los átomos de C14 comienzan a desintegrarse a un ritmo dado por la función $-3.63 \cdot 10^{10} e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t}$ átomos por año. Si se ha encontrado unos restos humanos con solo $0.3 \cdot 10^{14}$ átomos de C14, ¿cuánto tiempo ha pasado desde la muerte de la persona?

💡 Solución

Llamando $c(t)$ a la cantidad de átomos de C14 que contiene el cuerpo en cada instante t , se tiene que $c'(t) = -3.63 \cdot 10^{10} e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t}$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que la cantidad de átomos de C14 que se desintegran en un intervalo de tiempo $[0, t]$ es

$$\begin{aligned}
c(t) - c(0) &= \int_0^t c'(t) dt = \int_0^t -3.63 \cdot 10^{10} e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t} dt \\
&= \left[\frac{3.63 \cdot 10^{10}}{1.21 \cdot 10^{-4}} e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t} \right]_0^t = \frac{-3.63 \cdot 10^{10}}{-1.21 \cdot 10^{-4}} (e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t} - 1) \\
&= 3 \cdot 10^{14} (e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t} - 1),
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}
c(t) &= c(0) + 3 \cdot 10^{14} (e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t} - 1) \\
&= 3 \cdot 10^{14} + 3 \cdot 10^{14} (e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t} - 1) = 3 \cdot 10^{14} (e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t}).
\end{aligned}$$

Para calcular el tiempo que tarda en desaparecer el 90 % de los átomos de C14, basta con resolver la ecuación

$$3 \cdot 10^{14} (e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t}) = 0.3 \cdot 10^{14} \Leftrightarrow e^{-1.21 \cdot 10^{-4} t} = 0.1 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0.1)}{-1.21 \cdot 10^{-4}} \approx 19030 \text{ años.}$$

Ejercicio 7.11. Calcular el área encerrada entre la gráfica de las siguientes funciones y el eje x en los intervalos dados.

- a. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ en $[1, 2]$.
- b. $g(x) = \cos(x)$ en $[0, 2\pi]$.
- c. $h(x) = xe^{-x}$ en $[-1, 2]$.
- d. $i(x) = \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ en $[-1, 1]$.

💡 Solución

a. $\int_1^2 \left| \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right| dx = - \left[x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x \right]_1^2 = 1 - \ln(2).$

b.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\cos(x)| dx &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x) dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x) dx \\
&= [\operatorname{sen}(x)]_0^{\pi/2} - [\operatorname{sen}(x)]_{\pi/2}^{3\pi/2} + [\operatorname{sen}(x)]_{3\pi/2}^{2\pi} = 1 + 2 + 1.
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 |xe^{-x}| dx &= - \int_{-1}^0 xe^{-x} dx + \int_0^2 xe^{-x} dx \\ &= -[-e^{-x}(1+x)]_{-1}^0 + [-e^{-x}(1+x)]_0^2 = 1 + 1 - \frac{3}{e^2} = 2 - \frac{3}{e^2}\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left| \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} \right| dx &= - \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx \\ &= - \left[\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsen\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]_{-1}^0 \\ &\quad + \left[\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsen\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{-\pi}{6} + 2\sqrt{3} - 2\end{aligned}$$

Ejercicio 7.12. Calcular el área comprendida entre las funciones f y g en los intervalos dados en los siguientes apartados:

- $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = -\cos(x)$ en $[0, 2\pi]$.
- $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 2]$.
- $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ y $g(x) = x$ en $[-1, 1]$.
- $f(x) = 2^{-x}$ y $g(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ en $[0, 2]$.

Solución

a.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\cos(x) + \cos(x)| dx &= \int_0^{\pi/2} 2 \cos(x) dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2 \cos(x) dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 2 \cos(x) dx \\ &= [2 \operatorname{sen}(x)]_0^{\pi/2} - [2 \operatorname{sen}(x)]_{\pi/2}^{3\pi/2} + [2 \operatorname{sen}(x)]_{3\pi/2}^{2\pi} \\ &= 2 + 4 + 2 = 8\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^2 - \sqrt{x}| dx &= \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - \sqrt{x} dx \\&= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right]_1^2 \\&= \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 3 = \frac{-4\sqrt{2} + 10}{3}.\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |\operatorname{tg}(x) - x| dx &= \int_{-1}^0 x - \operatorname{tg}(x) dx + \int_0^1 \operatorname{tg}(x) - x dx \\&= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|\cos(x)| \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{x^2}{2} - \ln|\cos(x)| \right]_0^1 \\&= 0.1156 + 0.1156 = 0.2313.\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left| 2^{-x} - \frac{x^2}{1+x^3} \right| dx &= \int_0^1 2^{-x} - \frac{x^2}{1+x^3} dx + \int_1^2 \frac{x^2}{1+x^3} - 2^{-x} dx \\&= \left[\frac{-2^{-x}}{\ln(2)} - \frac{\ln|x^3+1|}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{\ln|x^3+1|}{3} + \frac{2^{-x}}{\ln(2)} \right]_1^2 \\&= 0.4903 + 0.1407 = 0.631.\end{aligned}$$

Ejercicio 7.13. Calcular el área encerrada entre la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $y = 2x - 1$.

Solución

Igualando las dos ecuaciones obtenemos los puntos donde se cortan la parábola y la recta.

$$2x - x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Así pues, el área encerrada entre la parábola y la recta es

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |2x - x^2 - (2x - 1)| dx &= \int_{-1}^1 -x^2 + 1 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Ejercicio 7.14. Para evaluar un test diagnóstico se suele utilizar la curva ROC (Receiver Operating Characteristics) que resulta de representar la razón de verdaderos positivos (sensibilidad) frente a la razón de falsos positivos (1-especificidad) para los diferentes umbrales de positivo del test. Esta curva se representa en el cuadrante $[0, 1] \times [0, 1]$ y está siempre por encima de la recta $y = x$ que representa un diagnóstico aleatorio. El área por debajo de la curva ROC se conoce como AUC (area under the curve), y cuanto mayor sea, mejor es el test diagnóstico.

Se dispone de dos test diagnósticos para detectar el virus SARS-CoV, el primero con una curva ROC $f(x) = \sqrt{x}$ y el segundo con una curva $g(x) = -x^2 + 2x$. ¿Qué test diagnóstico es mejor?

Solución

La medida AUC para el primer test diagnóstico es

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Y para el segundo test diagnóstico es

$$\int_0^1 -x^2 + 2x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Por tanto, ambos test tienen la misma AUC y desde este punto de vista serían iguales.

Ejercicio 7.15. La [curva de Lorenz](#) se utiliza en Economía para representar la distribución relativa de los ingresos o la riqueza de una población. Esta curva se representa siempre en el cuadrante $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano y cada punto (x, y) de la curva representa qué proporción de la riqueza total y acumula la proporción de la población x . De este modo, la bisectriz del (recta $y = x$) representa una distribución equitativa de la riqueza, y cuanto más se desvíe la curva de esta recta, mayor desigualdad habrá en el reparto de la riqueza.

Para medir la desigualdad en el reparto de la riqueza se suele utilizar el [coeficiente Gini](#), que se define como el doble del área encerrada entre la recta $y = x$ y la curva de Lorenz. En una población con una distribución equitativa de la riqueza, el coeficiente de Gini

vale 0, mientras que en una población con la mayor desigualdad posible en el reparto de la riqueza, este coeficiente vale 1.

Si las curvas de Lorenz de dos poblaciones vienen dadas por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - \cos(x\frac{\pi}{2})$, ¿qué población es más desigual?

💡 Solución

Para la primera población el área entre la recta $y = x$ y su curva de Lorenz es

$$\int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

por lo que su coeficiente Gini es $G_1 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Del mismo modo, para la segunda población se tiene

$$\int_0^1 x - \left(1 - \cos\left(x\frac{\pi}{2}\right)\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{\pi} \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right) \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 1 + \frac{2}{\pi} \approx 0.1366.$$

por lo que su coeficiente Gini es $G_2 = 2 \left(\frac{-1}{2} + \frac{2}{\pi}\right) \approx 0.2732$.

Como $G_1 > G_2$ la primera población es un poco más desigual que la segunda.

Ejercicio 7.16. Encontrar el valor c tal que la recta $y = c$ divide la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$ en dos regiones con la misma área.

💡 Pista

Expresar x en función de y , e integrar con respecto a y .

💡 Solución

El problema resulta más sencillo de resolver si se integra con respecto a y . Despejando x de la ecuación de la parábola se tiene que $x = \pm\sqrt{y}$, de manera que área encerrada entre la recta $y = 4$ y la parábola $y = x^2$ es la misma que el área encerrada entre las funciones \sqrt{y} y $-\sqrt{y}$ en el intervalo $[0, 4]$, que vale

$$\int_0^4 \sqrt{y} - (-\sqrt{y}) dy = \int_0^4 2\sqrt{y} dy = \left[\frac{4}{3}x^{3/2} \right]_0^4 = \frac{4}{3}4^{3/2} = \frac{32}{3}$$

Así pues, tenemos que buscar la recta $y = c$ que cumple que el área encerrada entre ella y la parábola es la mitad del área anterior, es decir, $16/3$. Como el área encerrada entre la recta $y = c$ y la parábola $y = x^2$ es igual que el área encerrada entre las funciones \sqrt{y} y $-\sqrt{y}$ en el intervalo $[0, c]$, que vale

$$\int_0^c \sqrt{y} - (-\sqrt{y}) dy = \int_0^c 2\sqrt{y} dy = \left[\frac{4}{3}x^{3/2} \right]_0^c = \frac{4}{3}c^{3/2},$$

se tiene que cumplir que $\frac{4}{3}c^{3/2} = \frac{16}{3}$, es decir, $c^{3/2} = 4$, de donde se deduce $c = 4^{2/3}$.

Ejercicio 7.17. En geometría, la ecuación $y^2 = x^2(x + 3)$ define una curva implícita conocida como la [cúbica de Tschirnhausen](#). Calcular el área encerrada por esta curva.

💡 Solución

La curva se puede expresar mediante dos ramas, una positiva y otra negativa, dadas por $y = \pm\sqrt{x^2(x + 3)}$, que coinciden en $x = -3$ y $x = 0$ ya que son los puntos donde se anula y . Así pues, podemos calcular el área encerrada por la curva, descomponiéndola en dos mitades, la positiva y la negativa.

La semiárea positiva se calcula mediante la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 \sqrt{x^2(x + 3)} dx &= \int_{-3}^0 x\sqrt{(x + 3)} dx = \int_0^3 (u - 3)\sqrt{u} du \quad (\text{Cambio } u = x + 3) \\ &= \int_0^3 u^{3/2} - 3u^{1/2} du = \left[\frac{u^{5/2}}{5/2} - 3\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^3 \\ &= \frac{3^{5/2}}{5/2} - 3\frac{3^{3/2}}{3/2} = -4.1569, \end{aligned}$$

por lo que el área total es $2 \cdot |-4.1569| = 8.3138$.

Ejercicio 7.18. La tasa de nacimientos de una población viene dada por la función $n(t) = 5000e^{0.03t}$ personas por año, mientras que la tasa de defunciones viene dada por la función $m(t) = 3500e^{0.02t}$ personas por año. Calcular el área comprendida entre n y m entre 0 y 5 años. ¿Qué representa esta área?

💡 Solución

Como $n(t) \geq m(t) \forall t \geq 0$, el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo $[0, 5]$ viene dada por la integral definida

$$\begin{aligned}
\int_0^5 n(t) - m(t) dt &= \int_0^5 5000e^{0.03t} - 3500e^{0.02t} dt \\
&= 5000 \int_0^5 e^{0.03t} dt - 3500 \int_0^5 e^{0.02t} dt \\
&= \frac{5000}{0.03} [e^{0.03t}]_0^5 - \frac{3500}{0.02} [e^{0.02t}]_0^5 \\
&= \frac{5000}{0.03} (e^{0.03 \cdot 5} - e^0) - \frac{3500}{0.02} (e^{0.02 \cdot 5} - e^0) = 8567.4631
\end{aligned}$$

La integral de la tasa de nacimientos nos da el número de personas que han nacido en el periodo de 0 a 5 años y la integral de la tasa de defunciones nos da el número de personas fallecidas en ese mismo periodo, por lo que el área comprendida entre las dos funciones es el incremento de la población en ese periodo.

Ejercicio 7.19. Calcular el área de un círculo de radio r en coordenadas polares.

💡 Solución

La curva que define una circunferencia de radio r en coordenadas polares es $f(\theta) = r$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, que es una función constante. Por tanto, el área del círculo de radio r puede calcularse mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\theta = \left[\frac{r^2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2} 2\pi = \pi r^2.$$

Ejercicio 7.20. Calcular el área encerrada por la curva polar $r = \cos(2\theta)$.

💡 Solución

La curva $r = \cos(2\theta)$ tiene periodo 2π , por lo que hay que integrar la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$, de manera que el área encerrada por la curva es

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)^2}{2} d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4} 2\pi + \frac{\sin(8\pi)}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.21. Calcular el área encerrada por las siguientes curvas polares $r = f(\theta)$ en los intervalo dados.

- a. $f(\theta) = \theta^2$ para $\theta \in [-\pi, \pi]$.
- b. $f(\theta) = e^{\theta/2}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.
- c. $f(\theta) = \sqrt{1 + \cos(4\theta)^2}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.

 Solución

a.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\theta^2)^2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^5}{5} - \frac{(-\pi)^5}{5} \right) = \frac{\pi^5}{5}$$

b.

$$\int_0^{2\pi} \frac{(e^{\theta/2})^2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^\theta d\theta = \frac{1}{2} [e^\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(e^{2\pi} - 1).$$

c.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(\sqrt{1 + \cos(4\theta)^2})^2}{2} d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(4\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(4\theta)^2 d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left([\theta]_0^{2\pi} + \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(8\theta)}{16} \right]_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{2\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.22. Calcular el área sombreada entre las curvas polares $r = 3 \operatorname{sen}(\theta)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$.

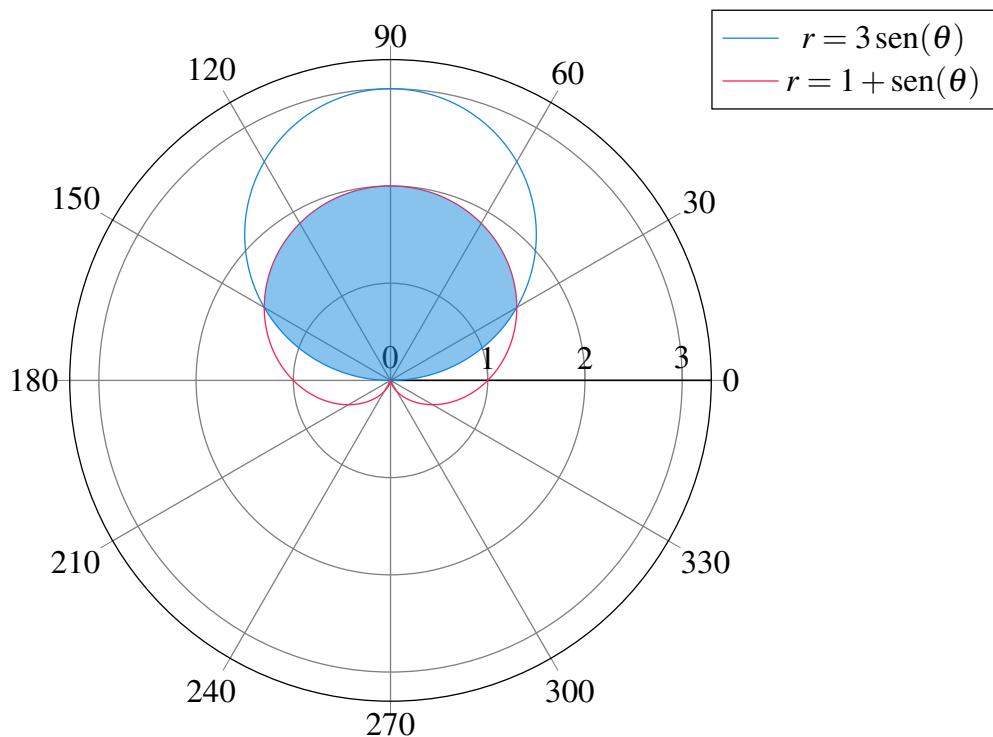


Figura 7.3: Área entre curvas polares

💡 Solución

Sea $f(\theta) = 3 \sin(\theta)$ la función que define el círculo y $g(\theta) = 1 + \sin(\theta)$ la función que define el cardioide. Para determinar el área de la región sombreada entre las dos curvas polares, calcularemos el área del círculo $f(\theta)$ y le restaremos el área que queda fuera de la región sombreada. Para calcular el área de esta última región con forma de media luna, primero determinamos los puntos de corte entre las dos curvas, que son

$$f(\theta) = g(\theta) \Leftrightarrow 3 \sin(\theta) = 1 + \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}.$$

Así pues, el área de la región con forma de media luna viene dada por la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{f(\theta)^2}{2} d\theta - \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{g(\theta)^2}{2} d\theta &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{(3 \operatorname{sen}(\theta))^2}{2} d\theta - \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{(1 + \operatorname{sen}(\theta))^2}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 8 \operatorname{sen}(\theta)^2 - 2 \operatorname{sen}(\theta) - 1 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[8 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right) + 2 \cos(\theta) - \theta \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\
&= \frac{1}{2} [3\theta - 2 \operatorname{sen}(2\theta) + 2 \cos(\theta)]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\
&= \frac{1}{2} \left[3 \frac{5\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \left(2 \frac{5\pi}{6} \right) + 2 \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) - 3 \frac{\pi}{6} + 2 \operatorname{sen} \left(2 \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Finalmente, el área de la región sombreada es el área del círculo menos el área de la región con forma de media luna, y como el círculo tiene radio $3/2$, se tiene

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \pi - \pi = \frac{9\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Ejercicio 7.23. Calcular el área encerrada entre las siguientes curvas y el eje x en los intervalos dados.

- a. $y = \frac{1}{1+x^2}$ en $(-\infty, \infty)$.
- b. $y = \frac{\ln(x)}{x^2}$ en $[1, \infty)$.
- c. $y = \frac{e^{1/x}}{x^3}$ en $(-\infty, 0]$.

Solución

a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\operatorname{arctg}(x)]_{-t}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(-t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

b.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{1}{1} + \frac{\ln(1)}{1} = 1.$$

c.

$$\int_{-\infty}^0 \left| \frac{e^{1/x}}{x^3} \right| dx = - \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x} \right]_t^{0^-} = - \left(\lim_{t \rightarrow 0^-} e^{1/t} - \frac{e^{1/t}}{t} - \lim_{n \rightarrow -\infty} e^{1/t} + \frac{e^{1/t}}{t} \right) = 1.$$

Ejercicio 7.24. Un criterio para estudiar la convergencia de una serie $\sum a_n$ es estudiar la integral impropia $\int_1^\infty a_n dn$. La serie converge si y solo si la integral es finita.

Usar este criterio para demostrar que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge y que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

¿Para qué valores de p la integral $\int_1^\infty \frac{1}{n^p} dn$ converge?

Solución

Para la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{n} dn = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |n|]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) - \ln(1) = \infty.$$

Por tanto, la serie armónica diverge.

Para la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{n^2} dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{n} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{t} - \frac{-1}{1} = 1,$$

y por tanto, la serie converge.

Veamos ahora para qué valores de p la integral impropia de $\frac{1}{n^p}$ converge.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{n^p} dn &= \int_1^\infty n^{-p} dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{(-p+1)} \right]_1^t \\ &= \frac{1}{-p+1} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-p+1} - 1^{-p+1} = \frac{1}{-p+1} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-p+1} - 1. \end{aligned}$$

Este límite existe para $p > 1$ por lo que la integral impropia converge para esos valores de p .

Ejercicio 7.25. En Estadística, la [distribución exponencial](#) se utiliza para modelar el tiempo que tarda en ocurrir un evento en un proceso de Poisson, es decir, un proceso en el que ocurren fenómenos puntuales de marea continua e independiente a un ritmo constante λ . La función de densidad de probabilidad la distribución exponencial de parámetro λ es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Comprobar que f es una función de densidad de probabilidad, es decir, que el área total encerrada entre su gráfica y el eje x es 1.
- Calcular la media de la distribución.

c. Calcular la varianza de la distribución.

i Pista

La media de una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f es $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$ y la varianza $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$.

💡 Solución

a.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-\lambda x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-\lambda t} - (-1) = 1.\end{aligned}$$

Luego, $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad.

b.

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-\lambda x - 1}{\lambda e^{\lambda x}} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\lambda t - 1}{\lambda e^{\lambda t}} - \left(\frac{-\lambda \cdot 0 - 1}{\lambda e^{\lambda \cdot 0}} \right) = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= 0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-\lambda^2 x^2 - 2\lambda x - 2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} \right]_0^t - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\lambda^2 t^2 - 2\lambda t - 2}{\lambda^2 e^{\lambda t}} - \left(\frac{-\lambda^2 \cdot 0^2 - 2\lambda \cdot 0 - 2}{\lambda^2 e^{\lambda \cdot 0}} \right) - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Ejercicio 7.26. Una tomografía ofrece secciones transversales del cerebro de un paciente cada 1.5 cm. Las áreas de cada una de las secciones transversales tomadas fueron

0, 32, 65, 115, 132, 147, 155, 141, 123, 93, 58, 0

Calcular de forma aproximada el volumen del cerebro.

Solución

Podemos calcular el volumen del cerebro de manera aproximada tomando secciones cilíndricas con base la sección transversal, cuya área es conocida, y altura la distancia entre las secciones consecutivas, en este caso 1.5 cm. Así se obtiene la siguiente suma de Riemann.

$$(32 + 65 + 115 + 132 + 147 + 155 + 141 + 123 + 93 + 58) * 1.5 = 1591.5 \text{ cm}^3.$$

Ejercicio 7.27. Calcular el volumen de la esta **pirámide** con base cuadrada de lado 2 y altura 2. Calcular a continuación el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado l y altura h .

Solución

Calcularemos el volumen de la pirámide tomando secciones transversales con respecto al eje x en el intervalo $[0, 2]$. El apotema de la pirámide está inscrito en la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 1$, por lo que, para cualquier $a \in [0, 2]$, la intersección de la pirámide con el plano $x = a$ es un cuadrado de lado $2(-\frac{a}{2} + 1) = 2 - a$, y por tanto su área es $(2 - a)^2$. Así pues, para calcular el volumen de la pirámide basta con integrar la función $f(x) = (2 - x)^2$, que nos da el área de la sección transversal al eje x en x , en el intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 (2 - x)^2 dx = \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right) = 8/3 \text{ unidades}^3.\end{aligned}$$

En general, para una pirámide de lado l y altura h , lo único que cambia es el intervalo de integración, que será $[0, h]$, y la recta que define el apotema, que será $y = -\frac{l}{2h}x + \frac{l}{2}$, por lo que el área de las secciones transversales vendrá dado por la función

$$f(x) = \left(2 \left(-\frac{lx}{2h} + \frac{l}{2} \right) \right)^2 = \left(-\frac{lx}{h} + l \right)^2 = \frac{l^2 x^2}{h^2} - \frac{2l^2 x}{h} + l^2.$$

Así pues, el volumen viene dado por la siguiente integral.

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x) dx &= \int_0^h \frac{l^2 x^2}{h^2} - \frac{2l^2 x}{h} + l^2 dx = \left[\frac{l^2 x^3}{3h^2} - \frac{l^2 x^2}{h} + l^2 x \right]_0^h \\ &= \left(\frac{l^2 h^3}{3h^2} - \frac{l^2 h^2}{h} + l^2 h \right) = \frac{1}{3} l^2 h,\end{aligned}$$

que efectivamente es la fórmula que da el volumen de una pirámide de base cuadrada con lado l y altura h .

Ejercicio 7.28. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación al rededor del eje y del área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Calcular también el volumen del sólido de revolución generado al rotar esa misma área alrededor de la recta $x = 1$.

💡 Solución

Para ver los puntos donde se cortan las gráficas de las dos funciones resolvemos la ecuación que surge al igualarlas.

$$x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 1.$$

Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar alrededor del eje y la región comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo $[0, 1]$, utilizaremos sumas de Riemann de [envoltorios cilíndricos](#). Para ello hay que calcular la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 2\pi x(f(x) - g(x)) dx &= \int_0^1 2\pi x(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right) = \pi/6. \end{aligned}$$

Si en lugar de rotar la región alrededor de la recta $x = 0$ la rotamos alrededor de la recta $x = 1$, lo único que cambia, al utilizar envoltorios cilíndricos es el radio del círculo de la base de los cilindros, que ahora será $1 - x$ en lugar de x , por lo que el volumen del sólido de revolución generado viene dado por la integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 2\pi(1-x)(f(x) - g(x)) dx &= \int_0^1 2\pi(1-x)(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1^2}{2} - 2\frac{1^3}{3} + \frac{1^4}{4} \right) = \pi/6. \end{aligned}$$

Así pues, se obtiene el mismo volumen.

Ejercicio 7.29. Calcular el volumen de este [toro](#) obtenido al rotar la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y . Calcular a continuación el volumen de un toro de radio mayor R y radio menor r .

Ejercicio 7.30. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación al rededor del eje y del área comprendida entre las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = (x - 1)^2$.

💡 Solución

Para ver los puntos donde se cortan las gráficas de las dos funciones resolvemos la ecuación que surge al igualarlas.

$$x + 1 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 3.$$

Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar alrededor del eje y la región comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo $[0, 3]$, utilizaremos sumas de Riemann de [envoltorios cilíndricos](#). Para ello hay que calcular la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_0^3 2\pi x(f(x) - g(x)) dx &= \int_0^3 2\pi x(x + 1 - (x - 1)^2) dx = 2\pi \int_0^3 3x^2 - x^3 dx \\ &= 2\pi \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = 2\pi \left(3^3 - \frac{3^4}{4} \right) = \frac{27\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.31. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación al rededor del eje x de la región comprendida entre las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Calcular también el volumen del sólido de revolución generado al rotar la misma área alrededor del eje y .

💡 Solución

Veamos primero en qué puntos se cortan las gráficas de las dos funciones.

$$\cos(x) = \operatorname{sen}(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En el intervalo de integración el único valor donde se cortan las gráficas de las dos funciones es en $x = \pi/4$. Es fácil comprobar que $f(x) > g(x) \forall x \in [0, \pi/4]$ y $f(x) < g(x) \forall x \in (\pi/4, \pi/2]$, por lo que tenemos que descomponer el intervalo de integración en estos dos subintervalos.

Para calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación alrededor del eje x de la región comprendida entre $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ podemos utilizar sumas de Riemann de [discos cilíndricos](#) transversales al eje x . Para ello hay que calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/4} \pi(f(x)^2 - g(x)^2) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \pi(g(x)^2 - f(x)^2) dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \pi(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \pi(\sin(x)^2 - \cos(x)^2) dx \\
&= \pi \int_0^{\pi/4} -\cos(2x) dx + \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(2x) dx = \pi \left[\frac{-\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4} + \pi \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}(-\sin(2\pi/4)) + \sin(0) + \frac{\pi}{2}(\sin(2\pi/4) - \sin(2\pi/2)) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar esta región alrededor del eje y es más sencillo utilizar las sumas de Riemann de [envoltorios cilíndricos](#). Para ello hay que calcular la siguiente integral

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/4} 2\pi x(f(x) - g(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\pi x(g(x) - f(x)) dx \\
&= \int_0^{\pi/4} 2\pi x(\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\pi x(\sin(x) - \cos(x)) dx \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} x \cos(x) - x \sin(x) dx + 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \sin(x) - x \cos(x) dx \\
&= 2\pi [x \sin(x) + \cos(x) + x \cos(x) - \sin(x)]_0^{\pi/4} + 2\pi [-x \cos(x) + \sin(x) - x \sin(x) - \cos(x)]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) + 2\pi \left(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right) = \sqrt{2}\pi^2 - \pi^2 \approx 4.0881.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.32. Una tienda de campaña de base cuadrada como la de la figura tiene sección vertical parabólica dada por la función $y = 1 - x^2$ (en m). ¿Cuál es su volumen?



Figura 7.4: Tienda de campaña tipo iglú.

Solución

Como las secciones transversales con respecto al eje y son figuras regulares, en este caso cuadrados, calcularemos el volumen de la tienda integrando a lo largo del eje y las áreas de esos cuadrados. Para cualquier sección transversal en $y = a$, el semi-lado del cuadrado resultante es

$$a = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - a \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - a},$$

por lo que el área de la sección transversal es

$$f(y) = (2\sqrt{1 - y})^2 = 4(1 - y) = 4 - 4y.$$

Por otro lado, es fácil ver que el máximo de la curva $y = 1 - x^2$ es $y = 1$ por lo que el intervalo de integración es $[0, 1]$. Así pues, el volumen de la tienda de campaña viene dado por la siguiente integral

$$\int_0^1 4 - 4y \, dy = [4y - 2y^2]_0^1 = 4 - 2 = 2 \text{ m}^3$$

Ejercicio 7.33. Un pluviómetro tiene la forma de un sólido de revolución obtenido al rotar la gráfica de la función $f(x) = x^3$ ($x \geq 0$) alrededor del eje y . ¿Cuál debe ser su altura para que sea capaz de almacenar 1 litro de agua?

Solución

Al rotar la gráfica de f alrededor del eje y , las secciones transversales con respecto al eje y del sólido de revolución generado serán círculos cuyo radio vendrá dado por la función inversa de y , $x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$. Por tanto, para calcular el volumen del sólido de revolución podemos tomar [discos cilíndricos](#), de manera que el volumen del pluviómetro de altura h viene dado por la integral

$$\int_0^h \pi f^{-1}(y)^2 dy = \pi \int_0^h y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3} \right]_0^h = \frac{3\pi}{5} h^{5/3}.$$

Por consiguiente, para que el pluviómetro pueda almacenar 1 litro de agua, es decir 1000 cm^3 , su altura debe ser

$$\frac{3\pi}{5} h^{5/3} = 1000 \Leftrightarrow h^{5/3} = \frac{5000}{3\pi} \Leftrightarrow h = \left(\frac{5000}{3\pi} \right)^{3/5} = 43.134 \text{ cm.}$$

Ejercicio 7.34. Calcular la longitud de una circunferencia de radio r centrada en el origen.

Solución

La ecuación de la circunferencia de radio r centrada en el origen es $x^2 + y^2 = r^2$, de donde se deduce que $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Si tomamos la función correspondiente a la semicircunferencia positiva $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, podemos calcular la [longitud de la curva](#) de la semicircunferencia con la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_{-r}^r \sqrt{1 + (\sqrt{r^2 - x^2})^2} dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2}}} dx = \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} r du && (\text{Cambio } u = \frac{x}{r}) \\ &= r[\arcsen(u)]_{-1}^1 = r \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi r. \end{aligned}$$

Y por tanto, la longitud de la circunferencia será el doble $2\pi r$.

Ejercicio 7.35. Calcular la longitud de las siguientes curvas en los intervalos dados

- $y = x^2$ en $[0, 1]$.
- $y^2 = 4x^3$ en $[0, 2]$.
- $y = \ln(\sin(x))$ en $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Solución

a. Tomando $f(x) = x^2$, la longitud de la curva de la gráfica de f en el intervalo $[0, 1]$ es

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \int_0^{\arctg(2)} \sec(\theta) \frac{1}{2} \sec(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\arctg(2)} \sec(\theta)^3 d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{\sec(\theta) \tg(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \tg(\theta)|}{2} \right]_0^{\arctg(2)} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\sqrt{1+4x^2} 2x + \ln(\sqrt{1+4x^2} + 2x)}{4} \right]_0^1 \quad (\text{Deshacer 1}) \\ &= \frac{\sqrt{1+4 \cdot 1^2} 2 + \ln(\sqrt{1+4 \cdot 1^2} + 2)}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1.4789 \end{aligned}$$

(1) Cambio $\tg(\theta) = 2x$, $\sec(\theta) = \sqrt{1 + 4x^2}$.

(2) Ver [integral secante cúbica](#).

b. $y^2 = 4x^3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4x^3} = \pm 2x^{3/2}$, así que tomaremos $f(x) = 2x^{3/2}$ y calcularemos la longitud de rama positiva.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx \\ &= \left[\frac{1}{9} \frac{(1+9x)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{27} (19^{3/2} - 1) \approx 6.0607. \end{aligned}$$

Por tanto, por simetría, la longitud de la curva será el doble $2 \cdot 6.0607 = 12.1213$.

- c. Tomando $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x))$, la longitud de la curva de la gráfica de f en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$ es

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\cos(x)^2}{\operatorname{sen}(x)^2}} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)^2}} dx \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc(x) dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc(x) \frac{\csc(x) + \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\csc(x)^2 + \csc(x)\cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx \\
&= \int_{1+\sqrt{2}}^1 \frac{-1}{u} du \\
&= [-\ln(u)]_{1+\sqrt{2}}^1 = -\ln(1) + \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.8814. \tag{1}
\end{aligned}$$

(1) Cambio $u = \csc(x) + \cot(x)$.

Ejercicio 7.36. Un tramo de una montaña rusa tiene la forma de la curva $y = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$, donde x viene dado en decámetros. ¿Qué longitud tiene el rail del tramo desde el origen hasta el punto que alcanza la misma altura?

💡 Solución

La longitud del rail es la longitud de la curva correspondiente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$. Resulta sencillo ver que las dos raíces de esta función son $x = 0$ (el origen) y $x = 3$, por lo que hay que el intervalo de integración es $[0, 3]$. Para calcular la **longitud de la curva** correspondiente a la gráfica de f en este intervalo hay que calcular la siguiente integral

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} \left(\sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}}\right)\right)^2} dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1}{9} \left(x + (x-3) + \frac{(x-3)^2}{4x}\right)} dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{4x}} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{4x}} dx \\
&= \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^3 x^{1/2} dx + \int_0^3 x^{-1/2} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^3 + \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_0^3 \right) = \left[\frac{x^{3/2}}{3} + x^{1/2} \right]_0^3 \\
&= \frac{3^{3/2}}{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3.4641 \text{ Dm.}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.37. Calcular la longitud de un cable eléctrico con forma de catenaria que cuelga entre dos postes separados 10 metros de distancia con una altura mínima sobre el suelo de 5 metros.

Nota: La ecuación que define una curva con forma de catenaria centrada en el eje y es $y = a \cosh(\frac{x}{a})$, donde a es la altura mínima de la catenaria.

💡 Solución

La longitud del cable eléctrico es la **longitud de la curva** correspondiente a la gráfica de la función $f(x) = 5 \cosh(x/5)$ en el intervalo $[-5, 5]$, que viene dado por la integral

$$\begin{aligned}
\int_{-5}^5 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_{-5}^5 \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(x/5)^2} dx \\
&= \int_{-5}^5 \sqrt{\cosh^2(x/5)^2} dx = \int_{-5}^5 \cosh(x/5) dx \\
&= [5 \operatorname{senh}(x/5)]_{-5}^5 = 5(\operatorname{senh}(1) - \operatorname{senh}(-1)) \\
&= 5(e - e^{-1}) \approx 11.7520 \text{ m.}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.38. Calcular la superficie de los sólidos de revolución obtenidos al girar las siguientes funciones alrededor del eje x en los intervalos dados.

a. $f(x) = 2\sqrt{1-x}$ en $[-1, 1]$.

c. $h(x) = e^x$ en $[0, 1]$.

 Solución

- a. La **superficie del sólido de revolución** que se obtiene al rotar la gráfica de la función $f(x)$ alrededor del eje x en el intervalo $[-1, 1]$, viene dada por la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= 2\pi \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x} \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x} \sqrt{1 + \frac{1}{1-x}} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 2\sqrt{(1-x)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right)} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 2\sqrt{2-x} dx = 2\pi \left[\frac{-4}{3}(2-x)^{3/2} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{-8\pi}{3}(1 - 3^{3/2}) \approx 35.1536. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2\pi h(x) \sqrt{1 + h'(x)^2} dx &= 2\pi \int_{-1}^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\ &= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2} du \quad (\text{cambio } u = e^x) \\ &= 2\pi \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}(e)} \sec(\theta)^3 d\theta \quad (1) \\ &= 2\pi \frac{1}{2} [\sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)|]_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}(e)} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pi(\sec(\operatorname{arctg}(e)) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e)) + \ln |\sec(\operatorname{arctg}(e)) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e))|) - \sqrt{2} - \\ &= \pi(e\sqrt{1+e^2} + \ln(e + \sqrt{1+e^2})) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)) \approx 22.943. \end{aligned}$$

(1) Cambio $\operatorname{tg}(\theta) = u$, $\sec(\theta) = \sqrt{1+u^2}$.

(2) Ver [integral secante cúbica](#).

Ejercicio 7.39. Un depósito metálico tiene la forma del elipsoide que se obtiene al rotar la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ alrededor del eje x , con x en metros. Calcular la cantidad de chapa

metálica necesaria para construir el depósito. ¿Y si el depósito se construye rotando la elipse alrededor del eje y ?

Solución

Para averiguar la cantidad de chapa necesaria para construir el depósito tenemos que calcular el área de la superficie del depósito.

De la ecuación de la elipse se tiene

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

de manera que el depósito se genera al rotar alrededor del eje x la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ en el intervalo $[-2, 2]$.

El [área de la superficie del sólido de revolución](#) que se obtiene al rotar la gráfica de f alrededor del eje x en el intervalo $[a, b]$ viene dado por la integral

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Como

$$f'(x) = \frac{-x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}},$$

sustituyendo en la integral anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{16(1 - \frac{x^2}{4})}} dx \\
&= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \left(1 + \frac{x^2}{16(1 - \frac{x^2}{4})}\right)} dx \\
&= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{16}} dx \\
&= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{1 - \frac{3x^2}{16}} dx \\
&= 2\pi \int_{-2}^2 \frac{1}{4} \sqrt{16 - 3x^2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{4^2 - (\sqrt{3}x)^2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\arcsen(\sqrt{3}/2)}^{\arcsen(-\sqrt{3}/2)} \sqrt{4^2 - 4^2 \sin(\theta)^2} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos(\theta) d\theta \quad (1) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4 \cos(\theta) \frac{4}{\sqrt{3}} \cos(\theta) d\theta \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin(\theta) \cos(\theta) \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi/3}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi/3) \cos(\pi/3) - \frac{-\pi/3}{2} - \frac{1}{2} \sin(-\pi/3) \cos(-\pi/3) \right) \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - \frac{-\pi}{6} + \frac{1}{2} \frac{-\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\
&= \frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}} + 2\pi \approx 21.4784 \text{ m}^2.
\end{aligned}$$

(1) Cambio $x = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(\theta)$.

Ejercicio 7.40. Calcular el área de la superficie de este toro obtenido al rotar la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y . Calcular a continuación la superficie de un toro de radio mayor R y radio menor r .

💡 Solución

Calcularemos directamente la superficie de un toro con radio mayor R y radio menor r , que tiene ecuación

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - (x - R)^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - (x - R)^2},$$

donde la rama positiva corresponde al semi-toro positivo y la negativa al semi-toro negativo. Por simetría, para calcular el área de la superficie del toro basta con calcular el área de las superficies del semi-toro positivo y multiplicarla por 2. El [área de la superficie del sólido de revolución](#) que se obtiene al rotar la gráfica de una función f alrededor del eje y en un intervalo $[a, b]$ viene dado por la integral

$$\int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

En este caso, tomando $f(x) = \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{R - x}{\sqrt{r^2 - (x - R)^2}} = \frac{R - x}{f(x)}$$

y

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + f'(x)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{R - x}{f(x)}\right)^2} = \sqrt{\frac{f(x)^2 + (x - R)^2}{f(x)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{f(x)^2}} = \frac{r}{f(x)} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - R)^2}}\end{aligned}$$

Así pues, sustituyendo en la integral anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{R-r}^{R+r} 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_{R-r}^{R+r} 2\pi x \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x-R)^2}} dx \\
&= 2\pi r \int_{R-r}^{R+r} \frac{x}{\sqrt{r^2 - (x-R)^2}} dx \\
&= 2\pi r \int_{-1}^1 \frac{ur + R}{\sqrt{r^2 - (ur)^2}} r du \quad (\text{Cambio } u = \frac{x-R}{r}) \\
&= 2\pi r \int_{-1}^1 \frac{ur + R}{\sqrt{1 - u^2}} du \\
&= 2\pi r \left(\int_{-1}^1 \frac{ur}{\sqrt{1 - u^2}} du + \int_{-1}^1 \frac{R}{\sqrt{1 - u^2}} du \right) \\
&= 2\pi r \left(r[-\sqrt{1 - u^2}]_{-1}^1 + R[\arcsen(u)]_{-1}^1 \right) \\
&= 2\pi r R \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi^2 r R.
\end{aligned}$$

Por tanto, el área de las superficie del toro es el doble, $4\pi^2 r R$.

Ejercicio 7.41. Se lanza una pelota verticalmente desde la ventana de un edificio situada a 20 m sobre el suelo con una velocidad inicial de 10 m/s. ¿A qué distancia del suelo estará la pelota transcurridos 3 segundos? ¿Qué distancia habrá recorrido hasta ese instante?

💡 Solución

La posición que ocupa la pelota en cada instante t viene dada por la integral de la velocidad $v(t)$, $\int_0^t v(t) dt$, pero, a su vez, la velocidad en cada instante viene dada por la integral de la aceleración. En este caso la aceleración que sufre la pelota es la de la fuerza de la gravedad, que es constante y negativa, por lo que tenemos

$$v(t) = v(0) + \int_0^t g dx = v(0) + [g]_0^t = v(0) + gt.$$

Por tanto, el espacio en cada instante t es

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(0) + gx dx = s(0) + \left[v(0)x + g \frac{x^2}{2} \right]_0^t = s(0) + v(0)t + g \frac{t^2}{2}.$$

Como la posición en el instante inicial es $s(0) = 20m$, la velocidad inicial es $v(0) = 10$ m/s y $g = -9.81$ m/s², sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$s(t) = 20 + 10t - 9.81 \frac{t^2}{2}.$$

Así pues, la posición de la pelota a los 3 segundos es

$$s(3) = 20 + 10 \cdot 3 - 9.81 \frac{3^2}{2} = 5.855 \text{ m.}$$

Para calcular la distancia recorrida hasta los 3 segundos tenemos que descomponer la región de integración en los intervalos donde la velocidad es positiva y los intervalos donde es negativa, y calcular la integral por separado. Para ello obtenemos el instante donde la velocidad se anula

$$v(t) = v(0) + gt = 10 - 9.81t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{9.81} = 1.0194 \text{ s.}$$

Por tanto, la velocidad es positiva en el intervalo $[0, 1.0194]$ y negativa en el intervalo $[1.0194, 3]$, de manera que la distancia recorrida hasta los 3 segundos es

$$\begin{aligned} \int_0^3 |10 - 9.81t| dt &= \int_0^{1.0194} 10 - 9.81t dt - \int_{1.0194}^3 10 - 9.81t dt \\ &= \left[10t - 9.81 \frac{t^2}{2} \right]_0^{1.0194} - \left[10t - 9.81 \frac{t^2}{2} \right]_{1.0194}^3 \\ &= 10 \cdot 1.0194 - 9.81 \frac{1.0194^2}{2} - \left(10 \cdot 3 - 9.81 \frac{3^2}{2} - 10 \cdot 1.0194 + 9.81 \frac{1.0194^2}{2} \right) \\ &= 5.0968 + 19.2418 = 24.3387 \text{ m.} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.42. Un vehículo se mueve con una aceleración dada por la función $a(t) = 10 \cos(2t)$. Suponiendo que el vehículo parte de un estado de reposo en la posición 0, ¿cuál será la distancia neta recorrida por el vehículo en el intervalo de $[0, \pi]$? ¿Y la distancia total?

Solución

Calculamos primero la velocidad en cada instante t .

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + \int_0^t a(x) dx = 0 + \int_0^t 10 \cos(2x) dx = 5[\operatorname{sen}(2x)]_0^t \\ &= 5(\operatorname{sen}(2t) - \operatorname{sen}(0)) = 5 \operatorname{sen}(2t). \end{aligned}$$

Y ahora calculamos la distancia neta recorrida.

$$\int_0^\pi v(t) dt = \int_0^\pi 5 \operatorname{sen}(2t) dt = -\frac{5}{2}[\cos(2x)]_0^\pi = -\frac{5}{2}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0.$$

Es decir, la distancia neta recorrida en el intervalo $[0, \pi]$ es nula y, por tanto, el vehículo vuelve a la posición inicial en el instante π .

Para calcular la distancia neta, debemos descomponer el intervalo de integración en los subintervalos donde la velocidad es positiva y los subintervalos donde es negativa, y calcular la integral por separado. Para ello, obtenemos primero los valores donde la velocidad es nula.

$$v(t) = 5 \operatorname{sen} 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\arcsen(0)}{2} = \pi/2.$$

Así pues, la velocidad es positiva en el intervalo $[0, \pi/2]$ y negativa en el intervalo $[\pi/2, \pi]$, de manera que a distancia total recorrida por el vehículo en el intervalo $[0, 2\pi]$ es

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |v(t)| dt &= \int_0^{\pi/2} v(t) dt - \int_{\pi/2}^\pi v(t) dt = \int_0^{\pi/2} 5 \operatorname{sen}(2t) dt - \int_{\pi/2}^\pi 5 \operatorname{sen}(2t) dt \\ &= -\frac{5}{2} [\cos(2t)]_0^{\pi/2} + \frac{5}{2} [\cos(2t)]_{\pi/2}^\pi \\ &= -\frac{5}{2} (\cos(\pi) - \cos(0)) + \frac{5}{2} (\cos(2\pi) - \cos(\pi)) \\ &= -\frac{5}{2} (-4) = 10.\end{aligned}$$

Ejercicio 7.43. La [ley de Hooke](#) establece que la fuerza necesaria para estirar un muelle es proporcional a la distancia de estiramiento, es decir, cumple la ecuación

$$F = kx$$

donde x es la distancia de estiramiento desde la posición natural del muelle, y k es una constante de proporcionalidad que es propia del tipo de muelle.

Si al aplicar una fuerza de 3 N se consigue comprimir el muelle una distancia de 0.1 m desde su posición natural, ¿qué trabajo se realiza al estirar el muelle 0.2 m desde su posición natural?

💡 Solución

Como al aplicar una fuerza de 3 N el muelle se comprime 0.1 m, aplicando la ley de Hooke se puede calcular la constante de proporcionalidad del muelle.

$$3 \text{ N} = k \cdot 0.1 \text{ m} \Leftrightarrow k = \frac{3 \text{ N}}{0.1 \text{ m}} = 30 \text{ N/m.}$$

Así pues, la fuerza ejercida por el muelle a una distancia x de su posición natural viene dada por la función $F(x) = 30x$, y el trabajo realizado al estirarlo 0.2 m es

$$\int_0^{0.2} F(x) dx = \int_0^{0.2} 30x dx = 30 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.2} = 30 \frac{0.2^2}{2} = 0.6 \text{ J.}$$

Ejercicio 7.44. ¿Qué trabajo se realiza al lanzar un cohete de 50 toneladas desde la superficie de la tierra a una órbita situada a 100 km sobre la superficie terrestre?

Nota: Debe tenerse en cuenta que la aceleración de la gravedad disminuye con la altura según la fórmula

$$g_h = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2,$$

donde g_h es la aceleración de la gravedad a una altura h sobre la superficie terrestre, $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, y $R = 6371 \text{ km}$ es el radio de la Tierra.

💡 Solución

Ejercicio 7.45. Un depósito con forma de cono invertido de radio 2 m y altura 5 m está lleno de agua. ¿Qué trabajo se realiza al vaciar el tanque por arriba?

Nota: La densidad del agua es $\delta = 1000 \text{ kg/m}^3$.

💡 Solución

En este caso, aunque la aceleración de la gravedad es constante, el volumen de agua a cada altura y es distinto, por lo que su masa y la fuerza necesaria para elevarla será distinta.

Siguiendo la misma estrategia de las sumas de Riemann, podemos descomponer el intervalo $[0, 5]$ de la altura del depósito en subintervalos de igual amplitud de acuerdo a una partición $P_n = \{y_0 = 0, y_1, \dots, y_n = 5\}$, y considerar, para cada subintervalo $[y_{i-1}, y_i]$ el cilindro de radio $x_i = f(y_i)$, donde $f(y)$ es la función de la generatriz del cono, y altura $\Delta y = y_i - y_{i-1}$. Como la ecuación de la recta que define la generatriz del cono es $y = \frac{5}{2}x$, expresando x en función de y se tiene que $x_i = \frac{2}{5}y_i$, de manera que el volumen del cilindro correspondiente al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es

$$V_i = \pi \left(\frac{2}{5}y_i \right)^2 \Delta y = \frac{4}{25}\pi y_i^2 \Delta y.$$

Teniendo en cuenta la densidad del agua, la masa de este cilindro de agua es

$$M_i = \delta V_i = 1000 \frac{4}{25} \pi y_i^2 \Delta y = 160\pi y_i^2 \Delta y,$$

y por tanto, la fuerza que hay que aplicar para elevar esa masa es

$$F_i = g M_i = 9.81 \cdot 160\pi y_i^2 \Delta y = 1569\pi y_i^2 \Delta y.$$

Como el agua de este sector cilíndrico hay que subirla una distancia $5 - y_i$, el trabajo realizado al elevar este cilindro de agua hasta el desagüe del tanque es

$$W_i = (5 - y_i) 1569\pi y_i^2 \Delta y = 1569\pi (5y_i^2 - y_i^3) \Delta y.$$

Por tanto, el trabajo realizado al elevar todos los cilindros de agua de la partición viene dado por la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n W_i$$

lo que nos da una aproximación del trabajo real realizado al vaciar el depósito. A medida que tomemos más subintervalos, en el límite cuando n tiende a ∞ , esta suma de Riemann se transforma en la integral definida

$$\int_0^5 1569\pi(5y^2 - y^3) dy,$$

que nos dará el trabajo necesario para vaciar el tanque.

Así pues, resolviendo la integral se tiene

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 1569\pi 5y^2 - y^3 dy, = 1569\pi \left[5\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^5 \\ &= 1569\pi \left(5\frac{5^3}{3} - \frac{5^4}{4} \right) = 256727.02 \text{ J}. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.46. Un depósito con forma de sólido de revolución generado al rotar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ alrededor del eje y en el intervalo de 0 a 4 m, contiene 100000 l de aceite con una densidad $\delta = 900 \text{ kg/m}^3$. ¿Qué trabajo se realiza al vaciar el depósito por arriba?

💡 Solución

El problema es similar al anterior, pero ahora, el radio de los sectores circulares viene dado por la función $y = \frac{x^2}{2}$, de manera que $x = \sqrt{2y}$.

Tal y como vimos en el [cálculo de volúmenes de sólidos de revolución](#), el volumen almacenado en el depósito hasta una altura h es

$$V(h) = \int_0^h \pi \sqrt{2y^2} dy = \pi \int_0^h 2y dy = \pi[y^2]_0^h = \pi h^2 \text{ m}^3.$$

Por tanto, si el volumen almacenado es de 100 m³ de aceite, el nivel del depósito es

$$V(h) = \pi h^2 = 100 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{100}{\pi}} = 5.6419 \text{ m.}$$

Por tanto, siguiendo la misma estrategia del problema anterior, el trabajo total realizado al vaciar el depósito por arriba, viene dado por la integral definida

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{5.6419} g \delta \pi \sqrt{2y^2} (8-y) dy, = \int_0^{5.6419} 9.81 \cdot 900 \pi 2y(8-y) dy, \\ &= 17658\pi \int_0^{5.6419} 8y - y^2 dy, = 17658\pi \left[8\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{5.6419} \\ &= 17658\pi \left(8\frac{5.6419^2}{2} - \frac{5.6419^3}{3} \right) \approx 3742383 \text{ J.} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.47. Una varilla metálica de 20 m de longitud, tiene una densidad $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + 1$ a una distancia x de su extremo izquierdo. Calcular su centro de masas.

💡 Solución

Para calcular el [centro de masas de una varilla con densidad variable](#) $f(x)$ tenemos que dividir su momento y su masa, es decir, calcular el cociente de integrales

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{20} x f(x) dx}{\int_0^{20} f(x) dx},$$

así que procedemos a calcular estas dos integrales,

$$\begin{aligned} \int_0^{20} f(x) dx &= \int_0^{20} \operatorname{sen}(\pi x) + 1 dx = \frac{-1}{\pi} [\cos(\pi x)]_0^{20} + [x]_0^{20} \\ &= \frac{-1}{\pi} (\cos(20\pi) - \cos(0)) + 20 = 20 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_0^{20} xf(x) dx &= \int_0^{20} x(\operatorname{sen}(\pi x) + 1) dx = \int_0^{20} x \operatorname{sen}(\pi x) dx + \int_0^{20} x dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} [\operatorname{sen}(\pi x)]_0^{20} - \frac{1}{\pi} [x \cos(\pi x)]_0^{20} + \frac{1}{2} [x^2]_0^{20} \quad (\text{partes}) \\
&= \frac{1}{\pi^2} (\operatorname{sen}(20\pi) - \operatorname{sen}(0)) - \frac{1}{\pi} (20 \cos(20\pi) - 0 \cos(0)) + \frac{20^2}{2} \\
&= -\frac{20}{\pi} + 200 \approx 193.6338
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{20} xf(x) dx}{\int_0^{20} f(x) dx}, = \frac{193.6338}{20} = 9.6817.$$

Ejercicio 7.48. Calcular el centroide del sector circular definido por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante.

Solución

En primer lugar expresamos y en función de x , de manera que se obtiene $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Como estamos interesados en la región del primer cuadrante, tomamos la raíz positiva, es decir, la función que delimita la región es $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Para calcular el [centro de masas una región plana con densidad constante](#) $f(x)$ tenemos que calcular las coordenadas del centroide por separado. Para calcular la primera coordenada del centroide tenemos que calcular el cociente de integrales

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx},$$

así que procedemos a calcular estas dos integrales. Calculamos primero la integral del denominador que se corresponde con el área encerrada entre la gráfica de la función y y el eje x en el intervalo $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)^2 d\theta \quad (\text{cambio } x = \operatorname{sen}(\theta)) \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854.
\end{aligned}$$

Y ahora calculamos la integral del numerador que se corresponde con el momento de la región con respecto al eje y .

$$\begin{aligned}\int_0^{20} xf(x) dx &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_1^0 u^{1/2} du \quad (\text{cambio } u = 1-x^2) \\ &= \frac{-1}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^0 = \frac{-1}{3} [u^{3/2}]_1^0 = \frac{-1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{1/3}{\pi/4} = \frac{4}{3\pi} \approx 0.4244.$$

Y para calcular la segunda coordenada del centroide tenemos que calcular el cociente de integrales

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 f(x)^2 dx}{2 \int_0^1 f(x) dx},$$

La integral del denominador ya la hemos calculado previamente, así que queda calcular la integral del numerador.

$$\begin{aligned}\int_0^{20} f(x)^2 dx &= \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_0^1 1-x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 f(x)^2 dx}{2 \int_0^1 f(x) dx} = \frac{2/3}{2\pi/4} = \frac{4}{3\pi} \approx 0.4244.$$

Así pues, el centroide es el punto de coordenadas $(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$. Como se observa las dos coordenadas son iguales, algo que tiene sentido desde un punto de vista geométrico.

Ejercicio 7.49. Calcular el centroide de la región encerrada por la recta $y = x$ y la curva $y = x^2$.

Solución

En primer lugar calculamos los valores de x en los que las gráficas de ambas funciones se cortan, resolviendo la ecuación que resulta de igualar sus ecuaciones.

$$x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 1.$$

Así pues se trata de calcular el centroide de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Para calcular el [centro de masas una región plana con densidad constante](#) $f(x)$ tenemos que calcular las coordenadas del centroide por separado. Para calcular la primera coordenada del centroide tenemos que calcular el cociente de integrales

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(f(x) - g(x)) dx}{\int_0^1 f(x) - g(x) dx},$$

así que procedemos a calcular estas dos integrales. Calculamos primero la integral del denominador que se corresponde con el área encerrada entre las gráficas de las dos funciones.

$$\int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Ahora calculamos la integral del numerador que se corresponde con el momento de la región con respecto al eje y .

$$\int_0^1 x(x - x^2) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{1}{12}.$$

Por tanto, la primera coordenada del centroide es

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(f(x) - g(x)) dx}{\int_0^1 f(x) - g(x) dx} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Y para calcular la segunda coordenada del centroide tenemos que calcular el cociente de integrales

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 f(x)^2 - g(x)^2 dx}{2 \int_0^1 f(x) - g(x) dx},$$

La integral del denominador ya la hemos calculado previamente, así que queda calcular la integral del numerador.

$$\int_0^1 x^2 - (x^2)^2 dx = \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right) = \frac{2}{15}.$$

Por tanto, se tiene

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 f(x)^2 - g(x)^2 dx}{2 \int_0^1 f(x) - g(x) dx} = \frac{2/15}{2/6} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Así pues, el centroide es el punto de coordenadas $(0.5, 0.4)$.

Ejercicio 7.50. El teorema de Pappus establece que si una región plana está a un lado de una recta l , el volumen de revolución generado al rotar la región alrededor de la recta l coincide con el producto del área de la región y la distancia recorrida por su centroide en la rotación. Dar una demostración del teorema para el caso particular en el que la región plana está delimitada por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$ y el eje de rotación es el eje y .

💡 Solución

Aplicando el método de los envoltorios cilíndricos para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo $[a, b]$ alrededor del eje y se tiene

$$V = \int_a^b 2\pi x(f(x) - g(x)) dx = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx$$

Ahora bien, como la primera coordenada del centroide se calcula mediante el cociente de integrales

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx},$$

de aquí se deduce que

$$\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx = \bar{x} \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Así pues, el volumen es

$$2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx = 2\pi \bar{x} \int_a^b f(x) - g(x) dx,$$

donde $2\pi\bar{x}$ es la distancia recorrida por el centroide en una rotación completa alrededor del eje y , y $\int_a^b f(x) - g(x) dx$ es el área de la región encerrada entre las gráficas de f y g en el intervalo $[a, b]$.

Ejercicio 7.51. Calcular el valor medio de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

💡 Solución

Para calcular el [valor medio de una función](#) en el intervalo $[-1, 1]$ tenemos que calcular la siguiente integral

$$\begin{aligned}\bar{f}[-1, 1] &= \frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \quad (\text{cambio } x = \sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{4} \left[x + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(\pi)}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ejercicio 7.52. Se deja caer una pelota desde la terraza de un edificio situada a una altura de 25 m. Suponiendo que no hubiese rozamiento, ¿cuál es la velocidad media de la pelota desde su lanzamiento hasta que toca el suelo?

💡 Solución

La única fuerza que actúa sobre la pelota es la fuerza de la gravedad, que podemos suponer con una aceleración constante $g = -9.81 \text{ m/s}^2$. Según las fórmulas de [cinemática](#), la posición que ocupa la pelota en cada instante t viene dada por la expresión

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(x) dx,$$

donde $s(0)$ es la posición inicial, en este caso 25 m, y $v(x)$ es la función velocidad, que, a su vez, se obtiene mediante la expresión

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(x) dx,$$

donde $v(0)$ es la velocidad inicial, en este caso 0 m/s, y $a(x)$ es la función aceleración, que en este caso es constante $g = -9.81$ m/s², de manera que se tiene

$$v(t) = \int_0^t -9.81 dx = -9.81[x]_0^t = -9.81t,$$

y sustituyendo en la expresión de la posición de la pelota se tiene

$$s(t) = 25 + \int_0^t -9.81x dx, = 25 - 9.81 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^t = 25 - 4.905t^2.$$

Igualando la posición a 0 obtenemos el tiempo que tarda la pelota en alcanzar el suelo.

$$s(t) = 0 \Leftrightarrow 25 - 4.905t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{25}{4.905} = 5.0968 \Leftrightarrow t = \sqrt{5.0968} = 2.2576 \text{ s.}$$

Así pues, tenemos que calcular la velocidad media en el intervalo $[0, 2.2576]$. El **valor medio de la función** velocidad en ese intervalo viene dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \bar{v}[0, 2.2576] &= \frac{1}{2.2576} \int_0^{2.2576} v(x) dx = \frac{1}{2.2576} \int_0^{2.2576} -9.81x dx \\ &= \frac{-9.81}{2.2576} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2.2576} = \frac{-9.81}{2.2576} \frac{2.2576^2}{2} = -11.0735 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.53. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X es $f(x) = \frac{k}{(1+x)^4}$ para $x \geq 0$.

- ¿Cuándo debe valer k para que se cumpla que f es una función de densidad?
- Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en el intervalo $[0, 1]$.
- Calcular la mediana.
- Calcular la media.
- Calcular la varianza.

Solución

- Para que f sea una función de densidad, la integral de f en todo su dominio debe ser igual a 1. Por tanto, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{k}{(1+x)^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{k}{(1+x)^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{k}{3(1+x)^3} \right]_0^t = \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3.$$

Por tanto, la función de densidad de X es $f(x) = \frac{3}{(1+x)^4}$.

- b. La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en el intervalo $[0, 1]$ es

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{3}{(1+x)^4} dx = \left[-\frac{3}{3(1+x)^3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}.$$

- c. La mediana es el valor Me que deja acumulada la mitad de la probabilidad, es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^{Me} \frac{3}{(1+x)^4} dx &= \frac{1}{2} \Rightarrow \left[-\frac{3}{3(1+x)^3} \right]_0^{Me} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+Me)^3} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(1+Me)^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow (1+Me)^3 = 2 \Rightarrow Me = \sqrt[3]{2} - 1. \end{aligned}$$

- d. La media es

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \frac{3}{(1+x)^4} dx = 3 \int_0^\infty \frac{1+x-1}{(1+x)^4} dx \\ &= 3 \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+x)^4} \right) dx \\ &= 3 \left[-\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{3(1+x)^3} \right]_0^\infty = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- e. La varianza es

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^\infty x^2 \frac{3}{(1+x)^4} dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= 3 \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^4} dx - \frac{1}{4} = 3 \int_0^\infty \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x - 1}{(1+x)^4} dx - \frac{1}{4} \\
&= 3 \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4} \right) dx - \frac{1}{4} \\
&= 3 \left[-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{3(1+x)^3} \right]_0^\infty - \frac{1}{4} \\
&= 3 \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

8 Series de números reales

Ejercicio 8.1. Demostrar que cualquier sucesión puede expresarse como una serie.

Solución

Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, veamos cómo podemos expresarla como una serie. Para ello, basta con construir la sucesión de las diferencias de dos términos consecutivos, es decir, la sucesión $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por:

$$\begin{aligned}d_1 &= a_1 \\d_2 &= a_2 - a_1 \\d_3 &= a_3 - a_2 \\\vdots \\d_{n+1} &= a_{n+1} - a_n\end{aligned}$$

Resulta sencillo comprobar que $a_n = \sum_{i=1}^n d_i$, por lo que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^n d_i\right)_{n=1}^{\infty} = \sum d_n$.

Ejercicio 8.2. Demostrar que la serie $\sum \frac{9}{10^n}$ converge y calcular su límite.

Solución

Los primeros términos de la serie son

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^1 \frac{9}{10^i} &= \frac{9}{10} = 0.9 \\\sum_{i=1}^2 \frac{9}{10^i} &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = 0.99 \\\sum_{i=1}^3 \frac{9}{10^i} &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} = 0.999 \\\vdots\end{aligned}$$

por lo que las sumas parciales cada vez están más cerca de 1 y se puede probar fácilmente que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{9}{10^i} = 1$. Para ello, dado un $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana se puede tomar $k \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{k} < \varepsilon$, de manera que $|\sum_{i=1}^n \frac{9}{10^i} - 1| < \frac{1}{10^k} < \frac{1}{k} < \varepsilon \forall n \geq k$.

Ejercicio 8.3. Si $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n-1}{n+1}$, ¿cuál es el término general de la sucesión a_n ? Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

💡 Solución

Sea $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ la suma parcial de los n primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Entones, el primer término de la sucesión es $a_1 = A_1 = \sum_{i=1}^1 a_i = \frac{1-1}{1+1} = 0$. Por otro lado, $A_n = A_{n-1} + a_n$ por lo que $a_n = A_n - A_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n(n+1)}$. Por último, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

Ejercicio 8.4. Demostrar que una serie geométrica $\sum ar^n$ converge si y solo si $|r| < 1$.

💡 Pista

Utilizar la igualdad $(1 + r + r^2 + \dots + r^n)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$.

💡 Solución

Usando la igualdad $(1 + r + r^2 + \dots + r^n)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$ se tiene

$$\sum_{i=0}^n ar^i = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = a \left(\frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \right).$$

Si $|r| < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1 - r} = 0$, de manera que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n ar^i = \frac{a}{1 - r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1 - r} = \infty$, y la serie no converge.

Si $r = 1$ entonces $\sum_{i=0}^n 1^i = n + 1$ que tampoco converge, y si $r = -1$, se obtiene una sucesión de sumas alternadas, ya que $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i = 1$ y $\sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i = 0$, por lo que la serie tampoco converge.

Ejercicio 8.5. Un enfermo crónico toma cada día una pastilla con 200 mg de un principio activo. Su cuerpo es capaz de metabolizar diariamente el 90 % de la cantidad de principio

activo presente. ¿Qué cantidad de principio activo quedará en el cuerpo del enfermo tras n días tomando la pastilla? ¿Qué cantidad de principio activo quedará en el cuerpo del enfermo a largo plazo?

💡 Solución

Sea A_n la cantidad de medicamento que queda en el cuerpo del enfermo tras n días tomando la pastilla. Veamos cuáles son las cantidades de principio activo que quedan en el cuerpo del enfermo los primeros días.

$$A_1 = 0.1 \cdot 200 \text{ mg}$$

$$A_2 = 0.1(200 + 0.1 \cdot 200) = 0.1 \cdot 200 + 0.1^2 \cdot 200 = A_1 + 0.1^2 \cdot 200 \text{ mg}$$

$$A_3 = 0.1(200 + 0.1 \cdot 200 + 0.1^2 \cdot 200) = 0.1 \cdot 200 + 0.1^2 \cdot 200 + 0.1^3 \cdot 200 = A_2 + 0.1^3 \cdot 200 \text{ mg}$$

⋮

$$A_n = A_{n-1} + 0.1^n \cdot 200 \text{ mg}$$

Por tanto, el término general de la sucesión que subyace a la serie es $a_n = A_n - A_{n-1} = 200 \cdot 0.1^n$, de manera que se trata de la serie geométrica $\sum 200 \cdot 0.1^n$, y, por el ejercicio anterior, como $0.1 < 1$, la serie converge a $\sum_{n=1}^{\infty} 200 \cdot 0.1^n = \sum_{n=1}^{\infty} 200 \cdot 0.1^n - 200 = 200 \frac{1}{1-0.1} - 200 \approx 222.2222 - 200 = 22.2222 \text{ mg}$.

Ejercicio 8.6. Cuando una persona gasta una cantidad de dinero en un bien o servicio, la persona que recibe el dinero directa o indirectamente, también gasta un porcentaje k de esa cantidad en otros bienes y servicios, mientras que ahorra el resto. En Economía, el valor $\frac{k}{100}$ se conoce como *propensión marginal al consumo* mientras que $1 - \frac{k}{100}$ se conoce como *propensión marginal al ahorro*. Si una persona inicia el proceso gastando una cantidad x , qué cantidad total se habrá gastado después de n transacciones? ¿Hacia dónde converge el gasto cuando se realiza un número infinito de transacciones? ¿A largo plazo, cuál es el efecto multiplicador sobre el gasto inicial de una propensión marginal al consumo de 0.6?

💡 Solución

Sea a_n el dinero total gastado en la transacción n . Veamos el total de dinero gastado en las primeras n transacciones.

$$\begin{aligned}
a_0 &= x \\
a_1 &= x \frac{k}{100} \\
a_2 &= x \left(\frac{k}{100} \right)^2 \\
&\vdots \\
a_n &= x \left(\frac{k}{100} \right)^n
\end{aligned}$$

Por tanto, el dinero total gastado tras n transacciones será $\sum_{i=0}^n x \left(\frac{k}{100} \right)^i$, y como se trata de una serie geométrica, tal y como se ha visto en el Ejercicio 8.4, la suma vale

$$\sum_{i=0}^n x \left(\frac{k}{100} \right)^i = x \frac{1 - \left(\frac{k}{100} \right)^{n+1}}{1 - \frac{k}{100}}.$$

Como la razón es $\frac{k}{100} < 1$, la serie converge y

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \left(\frac{k}{100} \right)^n = \frac{x}{1 - \frac{k}{100}},$$

es decir, la cantidad inicial dividida por la propensión marginal al ahorro.

Para una propensión marginal al consumo de 0.6 se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} x (0.6)^n = \frac{x}{1-0.6} = 2.5x$, así que se produce un efecto multiplicador del 2.5.

Ejercicio 8.7. Una cuenta de ahorro ofrece un 5% de interés anual. Una persona abre la cuenta de ahorro con un depósito de 2000€ y cada año que pasa hace un depósito de 1000€. Calcular la cantidad de dinero que habrá en la cuenta después de n años de forma cerrada. ¿Converge la serie asociada?

💡 Solución

Sea A_n la cantidad de dinero en la cuenta tras n años. Veamos cuáles son las cantidades en la cuenta durante los primeros años.

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2000 \cdot 1.05\text{€} \\
A_2 &= ((2000 \cdot 1.05) + 1000) \cdot 1.05\text{€} = 2000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05\text{€} \\
A_3 &= ((2000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05) + 1000) \cdot 1.05\text{€} \\
&= 2000 \cdot 1.05^3 + 1000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05\text{€} ;
\end{aligned}$$

A partir de aquí, se intuye que la suma parcial de orden n es

$$A_n = 2000 \cdot 1.05^n + \sum_{i=1}^{n-1} 1000 \cdot 1.05^i \epsilon.$$

Como se trata de una serie geométrica, haciendo uso de la pista del Ejercicio 8.4, se puede concluir que

$$\begin{aligned} A_n &= 2000 \cdot 1.05^n + 1000 \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1} - 1000 \\ &= 2000 \cdot 1.05^n + 20000(1.05^n - 1) - 1000 \\ &= 22000 \cdot 1.05^n - 21000\epsilon. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.8. Supongamos un experimento aleatorio que consiste en repetir una prueba con dos posibles resultados (éxito y fracaso) hasta que se obtiene el primer éxito (por ejemplo tirar una moneda hasta que sale la primera cara). La distribución de la variable aleatoria que mide el número de repeticiones hasta obtener el primer éxito se conoce como *distribución hipergeométrica* y su función de probabilidad es

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p,$$

donde p es la probabilidad de que ocurra éxito en cada repetición de la prueba.

Una de las condiciones que debe cumplir una función de probabilidad de una variable aleatoria es que la suma de las probabilidades de todos los posibles valores de la variable debe ser 1. Demostrar que la función de probabilidad de la variable hipergeométrica lo cumple.

💡 Solución

El conjunto de posibles valores que puede tomar la variable aleatoria X es \mathbb{N} . Si consideramos la suma de las probabilidades de todos los posibles valores de la variable se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} p = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p)^n p$, que, al tratarse de una serie geométrica de razón $(1 - p) < 1$, converge, y como se ha visto en el Ejercicio 8.4, la suma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^n p = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1.$$

Por tanto, cumple la condición para ser una función de probabilidad.

Ejercicio 8.9. El [conjunto de cantor](#) es un subconjunto fractal del intervalo $[0, 1]$ que se construye de manera recursiva eliminando en cada paso el tercio central de los intervalos que van resultando. El procedimiento sería el siguiente:

1. Quitar del intervalo $[0, 1]$ el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
2. Quitar de los intervalos restantes, los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.
3. Quitar de los intervalos restantes, los intervalos $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$ y $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$.
4. ...

Demostrar que la longitud total de todos los intervalos eliminados es 1, y que, a pesar de ello, el conjunto de Cantor tiene un número infinito de puntos. Se dice que este conjunto es un conjunto de medida nula, pero que ni es vacío ni numerable.

Solución

Sea a_n la longitud de los segmentos eliminados en la etapa n . Veamos cuál es la longitud de los segmentos eliminados en las primeras etapas.

En la primera etapa se quita el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, y $a_1 = \frac{1}{3}$.

En la segunda etapa se quitan los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, y por tanto, $a_2 = 2\frac{1}{9}$.

En la tercera etapa se quitan los intervalos $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$ y $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$, y por tanto, $a_3 = 4\frac{1}{27}$.

En consecuencia, se deduce que $a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$.

Así pues, la suma de las longitudes de los intervalos quitados es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, que, al ser una serie geométrica con razón $\frac{2}{3} < 1$, converge, y como se ha visto en el Ejercicio 8.4, su suma vale

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Así pues, el conjunto de Cantor es de medida nula. Para ver que, a pesar de ello tiene infinitos números, basta con ver que contiene, entre otros, los números $\frac{1}{3^n} \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8.10. Haciendo uso del polinomio de Taylor del logaritmo, demostrar que una serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge y calcular su suma.

Solución

El polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto $a = 1$ es

$$\begin{aligned} P_{f,1}^n(x) &= 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\ &= 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}(x-1)^n \end{aligned}$$

y en $x = 2$ se tiene

$$P_{f,1}^n(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{f,1}^n(2) = \ln(2)$.

Ejercicio 8.11. Haciendo uso del polinomio de Maclaurin de la función exponencial, demostrar que una serie $\sum \frac{1}{n!}$ converge y calcular su suma.

💡 Solución

El polinomio de Maclaurin de grado n de la función $f(x) = e^x$ es

$$P_{f,0}^n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

y en $x = 1$ se tiene

$$P_{f,0}^n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{f,0}^n(1) = e^1 = e$.

Ejercicio 8.12. Demostrar que las siguientes series divergen.

- a. $\sum \frac{n^2}{n+1}$
- b. $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
- c. $\sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- d. $\sum \frac{1}{2n}$

💡 Solución

a. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$, por la [condición de convergencia](#), la serie $\sum \frac{n^2}{n+1}$ diverge.

b. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, por la [condición de convergencia](#), la serie

- $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.
- c. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sen\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, por la condición de convergencia, la serie $\sum n \sen\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.
- d. $\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ y como la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ también.

Ejercicio 8.13. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

i Pista

Descomponer el término general de la sucesión subyacente a la serie en fracciones simples.

? Solución

El término general de la sucesión se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente manera $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, que es una serie telescópica, de modo que la suma parcial de los n primeros términos de la serie es

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Así pues,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Ejercicio 8.14. Estudiar la convergencia de las siguientes series telescópicas.

- a. $\sum \cos(n^2) - \cos((n+1)^2)$
- b. $\sum \sen\left(\frac{1}{n}\right) - \sen\left(\frac{1}{n+1}\right)$
- c. $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- d. $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{n^2-1}$

? Solución

- a. Como se trata de una serie telescópica, se tiene que la suma parcial de orden n es

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^n \cos(i^2) - \cos((i+1)^2) \\
&= \cos(1) - \cos(2^2) + \cos(2^2) - \cos(3^2) + \cdots + \cos(n^2) - \cos((n+1)^2) \\
&= \cos(1) - \cos((n+1)^2).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) - \cos((n+1)^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1) - \cos((n+1)^2) \\
&= \cos(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((n+1)^2).
\end{aligned}$$

Pero como no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos((n+1)^2)$, la serie no converge.

- b. Como se trata de una serie telescopica, se tiene que la suma parcial de orden n es

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{1}{i}\right) - \sin\left(\frac{1}{i+1}\right) \\
&= \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sin(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = \sin(1),
\end{aligned}$$

y, por tanto, la serie converge a $\sin(1)$.

- c. $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum \ln(n+1) - \ln(n)$ que de nuevo es una serie telescopica, por lo que su suma parcial de orden n es

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^n \ln(i+1) - \ln(i) \\
&= \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \cdots + \ln(n+1) - \ln(n) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty,$$

y, por tanto, la serie diverge.

- d. $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, que también es una serie telescópica, cuya suma parcial de orden n es

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=2}^n \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2},$$

y, por tanto, la serie converge a $\frac{3}{2}$.

Ejercicio 8.15. Estudiar la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral y calcular sus sumas de manera aproximada cuando converjan dando una cota del error cometido.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

💡 Solución

- Se trata de una serie de términos positivos, ya que $\frac{1}{n^2+1} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Para ver si converge utilizando el criterio de la integral, se tiene que estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg(x)]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(b) - \arctg(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Así pues, como la integral converge, por el criterio de la integral, la serie $\sum \frac{1}{n^2+1}$ también converge.

Para aproximar la suma podemos utilizar cualquier suma parcial de la serie, por ejemplo, la suma parcial de orden $n = 5$:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} \approx 0.8973.$$

Para dar una cota del error cometido, se puede utilizar de nuevo el teorema de la integral, que dice que el error cometido al aproximar la suma de la serie por la integral es menor que el valor de la integral en el intervalo $[n, \infty)$, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} - \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^2 + 1} &< \int_5^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg(x)]_5^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(b) - \arctg(5) = \frac{\pi}{2} - 1.3734 = 0.1974. \end{aligned}$$

- b. Se trata de una serie de términos positivos, ya que $\frac{1}{n \ln(n)} > 0 \ \forall n \geq 2$. Para ver si converge utilizando el criterio de la integral, se tiene que estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(\ln(x))]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2)) = \infty.$$

Así pues, como la integral diverge, por el criterio de la integral, la serie $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ también diverge.

- c. También se trata de una serie de términos positivos ya que $ne^{-n^2} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Para ver si converge utilizando el criterio de la integral, se tiene que estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{\infty} ne^{-n^2} dn = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-n^2} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

Así pues, como la integral converge, por el criterio de la integral, la serie $\sum ne^{-n^2}$ también converge.

Para aproximar la suma podemos utilizar cualquier suma parcial de la serie, por ejemplo, la suma parcial de orden $n = 5$:

$$\sum_{i=1}^5 ie^{-i^2} = 1e^{-1} + 2e^{-4} + 3e^{-9} + 4e^{-16} + 5e^{-25} \approx 0.4049.$$

Para dar una cota del error cometido, se puede utilizar de nuevo el teorema de la integral, que dice que el error cometido al aproximar la suma de la serie por la integral es menor que el valor de la integral en el intervalo $[n, \infty)$, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} - \sum_{i=1}^5 ie^{-i^2} &< \int_5^{\infty} ne^{-n^2} dn = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-n^2} \right]_5^b \\ &= \frac{1}{2} e^{-25} = 6.9 \cdot 10^{-12}. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.16. Estudiar la convergencia de las siguientes series comparándolas con otras conocidas.

- a. $\sum \frac{2n}{4n^3 - n + 1}$
- b. $\sum \frac{\ln(n)}{n}$
- c. $\sum \frac{3^n}{2^n - 1}$
- d. $\sum \frac{n+1}{\sqrt[n]{n^3}}$
- e. $\sum \frac{e^{1/n}}{n}$
- f. $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- g. $\sum \frac{n+1}{n!}$
- h. $\sum \frac{n^n}{n!}$

💡 Solución

- a. $\frac{2n}{4n^3 - n + 1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que se trata de una serie de términos positivos.
Como $4n^3 - n + 1 > 4n^3 - n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{2n}{4n^3 - n + 1} < \frac{2n}{4n^3 - n} = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así pues, por el criterio de comparación de series, $\sum \frac{2n}{4n^3 - n + 1}$ converge si

$\sum \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ converge. Pero esta última serie es una serie telescópica, y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, converge, de manera que $\sum \frac{2n}{4n^3-n+1}$ también converge.

- b. $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que se trata de una serie de términos positivos. Como $\ln(n) > 1 \forall n \geq 3$, se tiene que $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n} \forall n \geq 3$, y como $\sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge, por el criterio de la comparación de series, $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ también diverge.
- c. $\frac{3^n}{2^n-1} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Como $2^n - 1 < 2^n \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{3^n}{2^n-1} > \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \forall n \in \mathbb{N}$. Y como $\sum \left(\frac{3}{2}\right)^n$ diverge al ser una serie geométrica de razón $\frac{3}{2} > 1$, por el criterio de comparación de series se tiene que $\sum \frac{3^n}{2^n-1}$ también diverge.
- d. $\frac{n+1}{\sqrt[n^3]{n^3}} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Por otro lado,

$$\sum \frac{n+1}{\sqrt[n^3]{n^3}} = \sum \frac{n+1}{n^{3/2}} = \sum \left(\frac{n}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \sum \frac{1}{n^{1/2}} + \sum \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Como $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ es una serie p con $p < 1$, diverge, y por tanto, $\sum \frac{n+1}{\sqrt[n^3]{n^3}}$ también diverge.

- e. $\frac{e^{1/n}}{n} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Como $e^{1/n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{e^{1/n}}{n} > \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$, y como $\sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge, por el criterio de la comparación de series, $\sum \frac{e^{1/n}}{n}$ también diverge.
- f. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Haciendo el cambio de variable $x = \frac{1}{n}$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

al ser $\sin(x)$ y x infinitésimos equivalentes en 0. Así pues, por el criterio del cociente, se tiene que $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si y solo si $\sum \frac{1}{n}$ converge, pero $\sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge, y por tanto, $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ también diverge.

- g. $\frac{n+1}{n!} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Por otro lado, se tiene

$$\sum \frac{n+1}{n!} = \sum \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} = \sum \frac{1}{(n-1)!} + \sum \frac{1}{n!},$$

y como se ha visto en el Ejercicio 8.11, tanto $\sum \frac{1}{(n-1)!}$ como $\sum \frac{1}{n!}$ convergen, por lo que $\sum \frac{n+1}{n!}$ también converge.

- h. $\frac{n^n}{n!} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que se trata de una serie de términos positivos. Por otro lado, se tiene

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \frac{n}{n-1} \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{1} \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y como $\sum n$ diverge, por el criterio de comparación de series, $\sum \frac{n^n}{n!}$ también diverge.

Ejercicio 8.17. Demostrar que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series de términos positivos entonces se cumple que

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

Solución

- Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Entonces, para $\varepsilon = 1$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{a_n}{b_n} < 1 \forall n \geq k$, y por tanto, $a_n < b_n \forall n \geq k$. Así pues, por el criterio de comparación de series, si $\sum_{n \geq k} b_n$ converge, $\sum_{n \geq k} a_n$ también, y como un número finito de términos no influye en la convergencia de una serie, $\sum a_n$ converge.
- Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Entonces, para $\varepsilon = 1$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{a_n}{b_n} > 1 \forall n \geq k$, y por tanto, $a_n > b_n \forall n \geq k$. Así pues, por el criterio de comparación de series, si $\sum_{n \geq k} b_n$ diverge, $\sum_{n \geq k} a_n$ también, y como un número finito de términos no influye en la convergencia de una serie, $\sum a_n$ diverge.

Ejercicio 8.18. Dada una serie de términos positivos $\sum a_n$ convergente, estudiar si las siguientes series convergen.

- $\sum a_n^2$
- $\sum \frac{1}{a_n^3}$
- $\sum \ln(1 + a_n)$
- $\sum \operatorname{sen}(a_n)$

Solución

- a. Por el criterio de divergencia, como $\sum a_n$ converge, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Por otro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, y por lo visto en el Ejercicio 8.17, como $\sum a_n$ converge, $\sum a_n^2$ también.
- b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$, ya que, según el apartado anterior $\sum a_n^2$ converge, y por lo visto en el Ejercicio 8.17, como $\sum a_n$ converge, $\sum a_n^3$ también. Finalmente, como $\sum a_n^3$ converge, la serie de los inversos $\sum a_n^{-3}$ diverge.
- c. Por el criterio de divergencia, como $\sum a_n$ converge, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, y haciendo el cambio de variable $x = a_n$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1,$$

ya que $\ln(1 + x)$ y x son infinitésimos equivalentes en 0. Por tanto, por el criterio del cociente, $\sum \ln(1 + a_n)$ también converge.

- d. Por el criterio de divergencia, como $\sum a_n$ converge, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, y haciendo el cambio de variable $x = a_n$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

ya que $\sin(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en 0. Por tanto, por el criterio del cociente, $\sum \sin(a_n)$ también converge.

Ejercicio 8.19. Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas.

- a. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$
- b. $\sum (-1)^n e^{-n}$
- c. $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- d. $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Solución

- a. $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como además $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ converge.

- b. $(e^{-n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $e^{-n} > e^{-(n+1)} \forall n \in \mathbb{N}$. Como además $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum (-1)^n e^{-n}$ converge.
- c. $(\sin(\frac{\pi}{n}))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $\sin(\frac{\pi}{n}) > \sin(\frac{\pi}{n+1}) \forall n \geq 2$. Como además $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{\pi}{n}) = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$ converge.
- d. Sea A_n la suma parcial de orden n de la serie $\sum (-1)^n (\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}})$. Si desarrollamos las primeras sumas parciales se tiene

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} \\ A_2 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ A_3 &= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \\ A_4 &= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &\vdots \\ A_n &= 1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Como la sucesión $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente, ya que $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, y por tanto, $\sum (-1)^n (\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 + 2 \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ también converge.

Ejercicio 8.20. El movimiento de un **muelle amortiguado** con un peso colgado de él es oscilante. Si la posición que ocupa el peso en cada periodo de oscilación n viene dado por la serie $\sum (-1)^{n-1} e^{-n/2}$, ¿llegará a estabilizarse en una posición de equilibrio a largo plazo?

💡 Solución

$(e^{-n/2})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente, ya que $e^{-n/2} > e^{-(n+1)/2} \forall n \in \mathbb{N}$. Como además $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n/2} = 0$, por el criterio de la serie alternada se tiene que $\sum (-1)^{n-1} e^{-n/2}$ converge, así que el peso colgado del muelle se estabilizará a largo plazo en la posición $\sum (-1)^{n-1} e^{-n/2}$.

Ejercicio 8.21. Estudiar la convergencia absoluta de las siguientes series.

- a. $\sum \frac{(-2)^n}{n^2}$.
- b. $\sum \frac{n}{3^n}$
- c. $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$.
- d. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$
- e. $\sum \left(\frac{n^2+1}{2n^2-1} \right)^n$
- f. $\sum \frac{n!}{n^n}$

💡 Solución

a. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1,$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{(-2)^n}{n^2}$ diverge.

b. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1,$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{n}{3^n}$ es absolutamente convergente.

c. Como $\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}$, y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge al ser una serie p con $p = 2 > 1$, por el criterio de comparación de series, $\sum \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|$ converge, y por tanto, $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ es absolutamente convergente.

d. $\sum \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right| = \sum \frac{1}{\ln(n)} \forall n > 1$, y como $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n} \forall n > 1$, por el criterio de comparación de series, $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge ya que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Por tanto, $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ no es absolutamente convergente.

e. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n^2+1}{2n^2-1} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2} < 1,$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \left(\frac{n^2+1}{2n^2-1} \right)^n$ es absolutamente convergente.

f. Como

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1,\end{aligned}$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{n!}{n^n}$ es absolutamente convergente.

Ejercicio 8.22. Demostrar que el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum c_n x^n$ se puede calcular mediante las siguientes fórmulas

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{o} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Solución

Para probar la validez de la primera fórmula utilizaremos el criterio de la raíz para convergencia absoluta de series.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Y para probar la validez de la segunda fórmula utilizaremos el criterio de la razón para la convergencia absoluta de series.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Ejercicio 8.23. Calcular el radio de convergencia y el dominio de convergencia puntual de las siguientes series de potencias.

- a. $\sum n x^n$
- b. $\sum \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$
- c. $\sum n! (x-1)^n$
- d. $\sum \frac{(x-2)^n}{n^3}$
- e. $\sum \frac{n! (x-3)^n}{n^n}$

f. $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)(x+1)^n$

 Solución

a. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1.$$

Para $x = 1$ se tiene la serie $\sum n$, que diverge, y para $x = -1$ se tiene la serie $\sum (-1^n)n$, que es una serie alternada pero también diverge ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $(-1, 1)$.

b. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1.$$

Para $x = 1$ se tiene la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, que es una serie alternada que converge ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, y para $x = -1$ se tiene la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que diverge al ser una serie p con $p \leq 1$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $(-1, 1]$.

c. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por tanto, la serie de potencias solo converge en $x = 1$.

d. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1.$$

Por tanto, la serie de potencias converge para $|x-2| < 1$, es decir, en $(1, 3)$. Para $x = 1$ se tiene la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$, que es una serie alternada que converge ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$, y para $x = -1$ se tiene la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ que también converge al ser una serie p con $p > 1$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $[1, 3]$.

e. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Por tanto, la serie de potencias converge para $|x-3| < e$, es decir, en $(3-e, 3+e)$. Para $x = 3 + e$ se tiene la serie $\sum \frac{n!e^n}{n^n}$ diverge ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!e^n}{n^n} = \infty$, y para $x = 3 - e$ se tiene la serie $\sum (-1)^n \frac{n!e^n}{n^n}$, que es una serie alternada que también diverge por la misma razón que la anterior. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $(3 - e, 3 + e)$.

f. Aplicando el criterio de la razón se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n+1})} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos(\frac{1}{n}) \frac{-1}{n^2}}{\cos(\frac{1}{n+1}) \frac{-1}{(n+1)^2}} \right| \quad (\text{L'Hôpital})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Por tanto, la serie de potencias converge para $|x+1| < 1$, es decir, en $(-2, 0)$. Para $x = 0$ se tiene la serie $\sum \sin(\frac{1}{n})$ que diverge según se vio en el Ejercicio 8.16, y para $x = -2$ se tiene la serie $\sum (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$, que es una serie alternada que converge al ser $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{1}{n}) = 0$. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $[-2, 0]$.

Ejercicio 8.24. Demostrar que la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Demostrar también que la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ cumple la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$. ¿Qué otras funciones conoces que la cumplen?

Demostrar finalmente que $f(x) = e^x$.

Solución

Como

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x x^n|}{(n+1)n!}}{\frac{|x^n|}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

por el criterio de la razón, se tiene que $\sum \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea $A_n(x)$ la función de la suma parcial de orden n de la serie anterior para cualquier $x \in \mathbb{R}$, es decir,

$$A_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Entonces, su derivada vale

$$\begin{aligned}A'_n(x) &= (1)' + (x)' + \left(\frac{x^2}{2!}\right)' + \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^4}{4!}\right)' + \cdots + \left(\frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = A_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Así pues, si tomamos la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$, su derivada vale

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = f(x).$$

Por tanto, la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ cumple la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$. Otra función conocida que cumple esa ecuación diferencial es $g(x) = e^x$. Veamos que $f(x) = e^x$.

Ejercicio 8.25. Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular la suma de la serie de potencias $\sum \frac{(x+2)^n}{(n+1)!}$.

Solución

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{(x+2)(n+1)!} = \frac{1}{x+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = \frac{e^{x+2} - 1}{x+2}.$$

Ejercicio 8.26. La *distribución de Poisson* es una de las distribuciones de probabilidad más importantes, ya que explica la probabilidad de que ocurra un número determinado de fenómenos puntuales en un soporte continuo (como por ejemplo el número de llamadas

telefónicas que llegan a un servicio de atención al cliente en un intervalo de tiempo). Su función de probabilidad es

$$P(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $\lambda > 0$ es su media.

Demostrar que esta función es una función de masa de probabilidad.

💡 Solución

El conjunto de posibles valores que puede tomar la variable aleatoria X es $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Si consideramos la suma de las probabilidades de todos los posibles valores de la variable se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Como se ha visto en el Ejercicio 8.24, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, en particular se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$, por lo que finalmente se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

y se cumple la condición para ser una función de probabilidad.

Ejercicio 8.27. Calcular la serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos dados.

- $f(x) = \cos(x)$ en $a = \pi$.
- $g(x) = \ln(x + 1)$ en $a = 0$.
- $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $a = 1$.

💡 Solución

- Calculamos las primeras derivadas de f en π para llegar a la expresión de la derivada n -ésima.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos(x) & f(\pi) = \cos(\pi) = -1, \\
f'(x) = -\operatorname{sen}(x) & f'(\pi) = -\operatorname{sen}(\pi) = 0, \\
f''(x) = -\cos(x) & f''(\pi) = -\cos(\pi) = 1, \\
f'''(x) = \operatorname{sen}(x) & f'''(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0 \\
f''''(x) = \cos(x) & f''''(\pi) = \cos(\pi) = -1.
\end{array}$$

Así pues, las derivadas se repiten en órdenes múltiplos de 4, y la expresión general de la derivada de orden n en π es

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \\ (-1)^{k+1} & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto, la serie de Taylor de f en π es

$$\sum \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!} (x - \pi)^n = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x - \pi)^{2k}.$$

- b. Calculamos las primeras derivadas de g en 0 para llegar a la expresión de la derivada n -ésima.

$$\begin{array}{ll}
g(x) = \ln(x + 1) & g(0) = \ln(1) = 0, \\
g'(x) = (x + 1)^{-1} & g'(0) = 1^{-1} = 1, \\
g''(x) = -(x + 1)^{-2} & g''(0) = -(1)^{-2} = -1, \\
g'''(x) = 2(x + 1)^{-3} & g'''(0) = 2(1)^{-3} = 2, \\
g''''(x) = -3!(x + 1)^{-4} & g''''(0) = -3!(1)^{-4} = -3!.
\end{array}$$

Así pues, la derivada de orden n en 0 es

$$g^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} x^n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

- c. Calculamos las primeras derivadas de h en 1 para llegar a la expresión de la derivada n -ésima.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} & h(1) &= 1^{-1/2} = 1, \\ h'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} & h'(1) &= -\frac{1}{2}1^{-3/2} = -\frac{1}{2}, \\ h''(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}x^{-5/2} & h''(1) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}1^{-5/2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}, \\ h'''(x) &= -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}x^{-7/2} & h'''(1) &= -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}1^{-7/2} = -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Así pues, la derivada de orden n en 1 es

$$h^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)}{2^n},$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{h^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \sum (-1)^n \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)}{2^n n!} (x-1)^n.$$

Ejercicio 8.28. Construir la serie de Maclaurin de la función $f(x) = (1+x)^k$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$ y estudiar su dominio de convergencia. ¿Qué serie se obtiene cuando $k \in \mathbb{N}?$

Solución

Calculamos las primeras derivadas de f en 0 para llegar a la expresión de la derivada n -ésima.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1^k = 1, \\ f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k(1)^{k-1} = k, \\ f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1)(1)^{k-2} = k(k-1), \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2)(1)^{k-3} = k(k-1)(k-2). \end{aligned}$$

Así pues, la derivada de orden n en 0 es

$$f^{(n)}(0) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n.$$

Cuando $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la derivada de orden k es

$$f^k(x) = k(k-1)\cdots(k-k+1)(1+x)^{k-k} = k!$$

y, a partir de aquí las siguientes derivadas se anulan, por lo que, al sustituir en la fórmula de las serie de Maclaurin se obtiene la suma finita

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{i=1}^k \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-i+1)}{i!} x^i = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i,$$

que es el desarrollo del binomio.

Ejercicio 8.29. Calcular la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \arctg(x)$ y utilizarla para obtener una serie cuya suma sea π .

💡 Solución

Calculamos las primeras derivadas de f en 0 para llegar a la expresión de la derivada n -ésima.

$f(x) = \arctg(x)$	$f(0) = \arctg(0) = 0,$
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$	$f'(0) = 1^{-1} = 1,$
$f''(x) = -(1+x^2)^{-2}2x$	$f''(0) = -(1)^{-2}2 \cdot 0 = 0,$
$f'''(x) = 2(1+x^2)^{-3}4x^2 - 2(1+x^2)^{-2}$	$f'''(0) = 2(1)^{-3}4 \cdot 0 - 2(1)^{-2} = -2.$
$f''''(x) = -3!(1+x^2)^{-4}2^3x^3 + 4!(1+x^2)^{-3}x$	$f''''(0) = -3!(1)^{-4}2^3 \cdot 0^3 + 4!(1)^{-3}0 = 0.$
$f'''''(x) = 4!(1+x^2)^{-5}2^4x^4 - 288(1+x^2)^{-5}x^2 + 4!(1+x^2)^{-3}$	$f'''''(0) = 4!.$

Así pues, la derivada de orden n en 0 es

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ (-1)^k(2k)! & \text{si } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

y sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se tiene

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum \frac{(-1)^k(2k)!}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Se puede probar que el radio de convergencia de esta serie es $|x| \leq 1$, por lo que para $x = 1$ se tiene que

$$\sum (-1)^k \frac{1^{2k+1}}{2k+1} = \sum \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctg(1) = \pi/4,$$

de manera que

$$4 \sum \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi.$$

Ejercicio 8.30. Usando desarrollos de Taylor, calcular los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)-x}{x^3}$

💡 Solución

- a. El desarrollo de Maclaurin de la función $\ln(1 + x)$ es $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ con dominio de convergencia $(-1, 1]$. Así que sustituyendo en el límite se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\right) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n} = -1/2. \end{aligned}$$

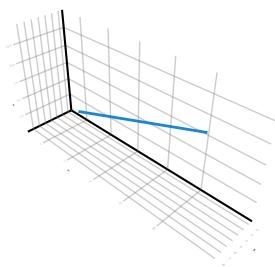
- b. El desarrollo de Maclaurin de la función $\arctg(x)$ es $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ con dominio de convergencia $(-1, 1)$. Así que sustituyendo en el límite se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{2n+1} = -1/3. \end{aligned}$$

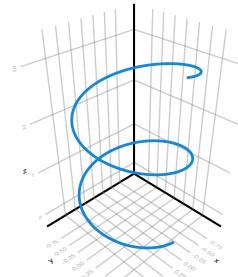
9 Funciones vectoriales

Ejercicio 9.1. Emparejar las siguientes funciones vectoriales con las trayectorias de más abajo.

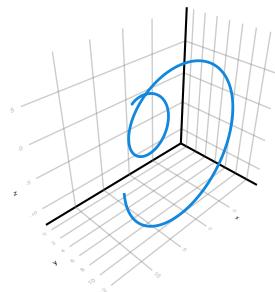
A



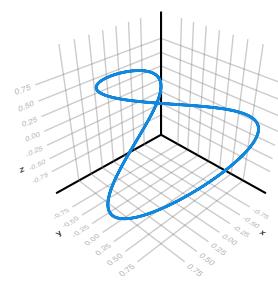
B



C



D



- a. $\mathbf{f}(t) = (\sin(t), \cos(t), t/4)$
- b. $\mathbf{g}(t) = \left(\frac{t}{2} + 2, 2t - 1, t + 1\right)$
- c. $\mathbf{h}(t) = (\cos(2t), \sin(t), \cos(t))$
- d. $\mathbf{i}(t) = (t \cos(t), t, t \sin(t))$

Solución

La gráfica A corresponde a $\mathbf{g}(t)$.

La gráfica B corresponde a $\mathbf{f}(t)$.

La gráfica C corresponde a $\mathbf{i}(t)$.

La gráfica D corresponde a $\mathbf{h}(t)$.

Ejercicio 9.2. Determinar la función vectorial cuya trayectoria coincide de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ y el plano $2x - z = 1$.

Solución

Como la proyección del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ sobre el plano xy es una circunferencia, podemos parametrizarla de la manera habitual haciendo $x = \sqrt{2} \sin(t)$ e $y = \sqrt{2} \cos(t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Por otro lado, de la ecuación del plano se deduce que $z = 2x - 1$, y sustituyendo la parametrización anterior se tiene $z = 2\sqrt{2} \sin(t) - 1$.

Así pues, la función vectorial que resulta es

$$\mathbf{f}(t) = \sqrt{2} \sin(t) \mathbf{i} + \sqrt{2} \cos(t) \mathbf{j} + (2\sqrt{2} \sin(t) - 1) \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ejercicio 9.3. Dos aviones vuelan siguiendo las trayectorias dadas por las funciones vectoriales $\mathbf{f}(t) = t^2 \mathbf{i} + (2t + 1) \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ y $\mathbf{g}(t) = (t - 2) \mathbf{i} + \frac{t}{2} \mathbf{j} + (3t + 10) \mathbf{k}$. ¿Se cortan sus trayectorias? Llegarán a chocar en algún momento?

Solución

Para ver si las trayectorias de los dos aviones se cortan deben existir instantes t_1 y t_2 tales que $f(t_1) = g(t_2)$, es decir,

$$\begin{aligned} t_1^2 &= t_2 - 2 \\ 2t_1 + 1 &= \frac{t_2}{2} \\ t_1^3 &= 3t_2 + 10 \end{aligned}$$

Despejando t_2 en la primera ecuación se tiene $t_2 = t_1^2 + 2$ y sustituyendo en la segunda llegamos a

$$2t_1 + 1 = \frac{t_1^2 + 2}{2} \Leftrightarrow \frac{t_1^2}{2} - 2t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 \left(\frac{t_1}{2} - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \text{ o } t_1 = 4.$$

Para $t_1 = 0$ se tiene que $t_2 = 0^2 + 2 = 2$, que no cumplen la tercera ecuación, ya que $0^3 = 0 \neq 3 \cdot 2 + 10 = 16$. Y para $t_1 = 4$ se tiene que $t_2 = 4^2 + 2 = 18$, que sí

cumple la tercera ecuación, ya que $4^3 = 64 = 3 \cdot 18 + 10$.

Así pues, para $t_1 = 4$ y $t_2 = 18$ se tiene que $\mathbf{f}(4) = (16, 9, 64) = \mathbf{g}(18)$, por lo que las trayectorias de \mathbf{f} y \mathbf{g} se cortan en el punto $(16, 9, 64)$. Sin embargo, los aviones no llegan a colisionar ya que para ello los dos aviones deberían estar en ese punto en el mismo instante.

Ejercicio 9.4. Dadas dos funciones vectoriales \mathbf{f} y \mathbf{g} en \mathbb{R}^n , demostrar que si existen sus límites cuando $t \rightarrow a$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) + \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{g}(t).$
- $\lim_{t \rightarrow a} c\mathbf{f}(t) = c \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{g}(t).$
- $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) \times \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{g}(t).$

 Solución

Ejercicio 9.5. Calcular los siguientes límites de funciones vectoriales.

- $\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2 e^{-t}, \frac{\operatorname{tg}(t)}{t} \right).$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 + 2t}{2t^2 - 1}, t \cos(t^{-1}), \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t} \right).$

 Solución

a.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2 e^{-t}, \frac{\operatorname{tg}(t)}{t} \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^2 e^{-t}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(t)}{t} \right) = (0, 1).$$

b.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 + 2t}{2t^2 - 1}, t \cos(t^{-1}), \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t} \right) &= \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t}{2t^2 - 1}, \lim_{t \rightarrow \infty} t \cos(t^{-1}), \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \infty, 0 \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 9.6. Calcular la derivada de las siguientes funciones vectoriales

a. $\mathbf{f}(t) = \left(t^2 e^{-t}, \frac{\operatorname{tg}(t)}{t} \right).$

b. $\mathbf{g}(t) = \left(\frac{t^2 + 2t}{2t^2 - 1}, t \cos(t^{-1}), \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t} \right).$

💡 Solución

a.

$$\mathbf{f}'(t) = \left((t^2 e^{-t})', \left(\frac{\operatorname{tg}(t)}{t} \right)' \right) = \left(-t^2 e^{-t} + 2t e^{-t}, \frac{\operatorname{tg}(t)^2 + 1}{t} - \frac{\operatorname{tg}(t)}{t^2} \right)$$

a.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(t) &= \left(\left(\frac{t^2 + 2t}{2t^2 - 1} \right)', (t \cos(t^{-1}))', \left(\frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t} \right)' \right) \\ &= \left(\frac{4t^3 + 8t^2}{(2t^2 - 1)^2}, \cos(t^{-1}) + \frac{\operatorname{sen}(t^{-1})}{t}, 2 \cos(t^2) - \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^2} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 9.7. Una partícula se mueve a lo largo de una curva $y = \cos(2x + 1)$, siendo $x = t^2 + 1$ y t el tiempo en segundos. ¿Con qué velocidad está desplazándose respecto a las direcciones vertical y horizontal cuando $t = 2$ s?

💡 Solución

Velocidad horizontal: $\frac{dx}{dt} = 2t$ y en el instante $t = 2$, $\frac{dx}{dt}(t = 2) = 4$.

Velocidad vertical: $\frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen}(2t^2 + 3)4t$ y en el instante $t = 2$, $\frac{dy}{dt} = -8 \operatorname{sen}(11)$.

Ejercicio 9.8. Un punto se mueve en el plano siguiendo una trayectoria

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg}(t), \\ y = t^2 - 2t + 3. \end{cases}$$

a. Hallar $\frac{dy}{dx}$ en $t = 0$.

b. Hallar la tangente a la trayectoria en el punto $(0, 3)$.

Solución

Se trata de la ecuación paramétrica de una función vectorial en el plano real.

- a. Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

en consecuencia,

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{dy/dt}{dx/dt}(t) = \frac{2t - 2}{1 + \operatorname{tg}(t)^2}.$$

En el punto $t = 0$ tendremos

$$\frac{dy}{dx}(0) = \frac{-2}{1 + \operatorname{tg}(0)^2} = -2.$$

- b. La ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x(t_0), y(t_0))$ correspondiente al instante t_0 , viene dada por la expresión

$$y - y(t_0) = \frac{dy}{dx}(t_0)(x - x(t_0)).$$

Como el punto $(0, 3)$ se alcanza precisamente en el instante $t = 0$ tenemos que la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en dicho instante es:

$$y - y(0) = \frac{dy}{dx}(0)(x - x(0)),$$

es decir,

$$y - 3 = -2(x - 0),$$

y simplificando obtenemos:

$$y = 3 - 2x.$$

Ejercicio 9.9. Una partícula se mueve a lo largo de la curva

$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen}(t), \\ y = \sqrt{3} \cos(t), \end{cases}$$

donde x e y están medidos en metros y el tiempo t en segundos.

- a. Hallar la ecuación de la rectas tangente y normal a la trayectoria en el punto $(1, 3/2)$.
- b. ¿Con qué velocidad se mueve la partícula respecto a las direcciones vertical y horizontal en dicho punto?

Solución

Sea $\mathbf{f}(t) = (2 \sin(t), \sqrt{3} \cos(t))$.

- a. La partícula pasa por el punto $(1, 3/2)$ en el instante $t = \pi/6$, por lo que hay que calcular la ecuación de las rectas tangente y normal en ese instante.

La derivada de la función vectorial es

$$\mathbf{f}'(t) = (2 \cos(t), -\sqrt{3} \sin(t)),$$

y en el instante $t = \pi/6$ vale

$$\mathbf{f}'(\pi/6) = (2 \cos(\pi/6), -\sqrt{3} \sin(\pi/6)) = \left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta tangente a la trayectoria de \mathbf{f} en ese instante es

$$\left(1, \frac{3}{2} \right) + t \left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(1 + \sqrt{3}t, \frac{3 - \sqrt{3}t}{2} \right),$$

y la de la recta normal

$$\left(1, \frac{3}{2} \right) + t \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} \right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{3}{2} + \sqrt{3}t \right).$$

- b. La velocidad con la que se mueve con respecto a la dirección horizontal es $\frac{dx}{dt}(\pi/6) = x'(\pi/6) = \sqrt{3}$ m/s, y con respecto a la dirección vertical $\frac{dy}{dt}(\pi/6) = y'(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s.

Ejercicio 9.10. Determinar el ángulo con el que se cortan las trayectorias de las funciones vectoriales $\mathbf{f}(t) = (2t + 1, \sqrt{t}, t^2)$ y $\mathbf{g}(t) = \left(\frac{t^2+6}{2}, e^{2t}, \cos(t) \right)$ en el punto $(3, 1, 1)$.

💡 Solución

El ángulo con el que se cortan dos trayectorias es el ángulo que forman sus vectores tangentes en el punto de corte.

La primera función pasa por el punto $(3, 1, 1)$ en $t = 1$, mientras que la segunda pasa por este mismo punto en $t = 0$.

El vector tangente de $\mathbf{f}(t)$ es

$$\mathbf{f}'(t) = \left(2, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t \right),$$

que en $t = 1$ vale $\mathbf{f}'(1) = (2, 1/2, 2)$.

Por otro lado, el vector tangente de $\mathbf{g}(t)$ es

$$\mathbf{g}'(t) = (t, 2e^{2t}, -\sin(t)),$$

que en $t = 0$ vale $\mathbf{g}'(0) = (0, 2, 0)$.

Para obtener el ángulo θ que forman estos dos vectores, de la fórmula del producto escalar tenemos

$$\cos(\theta) = \frac{(2, 1/2, 2)(0, 2, 0)}{|(2, 1/2, 2)|(0, 2, 0)|} = \frac{2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (\frac{1}{2})^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{33}},$$

de donde se deduce que $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{33}}) = 1.3958$ rad.

Ejercicio 9.11. Una trayectoria pasa por el punto $(3, 6, 5)$ en el instante $t = 0$ con velocidad $\mathbf{i} - \mathbf{k}$. Hallar la ecuación del plano normal y de la recta tangente en ese instante.

💡 Solución

Plano normal: $x - z + 2 = 0$.

Recta tangente: $(3 + t, 6, 5 - t)$.

Ejercicio 9.12. Una partícula sigue la trayectoria

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \\ z = \cos(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

hasta que se sale por la tangente en el instante $t = 0$. ¿Dónde estará en el instante $t = 3$?

Solución

Recta tangente: $(1+t, 1-t, 1)$.

Posición en el instante $t = 3$: $(4, -2, 1)$.

Ejercicio 9.13. Un móvil sigue la trayectoria en el espacio real dada por una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ con módulo constante. ¿Cómo es la trayectoria que describe? Demostrar que su vector velocidad es ortogonal al vector posición.

Solución

Supongamos que $|\mathbf{f}(t)| = c \ \forall t \in \mathbb{R}$. Resulta sencillo ver el tipo de trayectoria que seguirá el móvil si pasamos a coordenadas esféricas. Al ser el módulo constante, independientemente del ángulo, la trayectoria estará inscrita en la esfera centrada en el origen de radio c .

Para ver que su vector velocidad es ortogonal al vector de posición, se tiene que

$$\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = |\mathbf{f}(t)|^2 = c^2,$$

que al ser constante, tendrá derivada nula, y por tanto,

$$(\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t))' = \mathbf{f}(t)' \cdot \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = 2\mathbf{f}(t)' \cdot \mathbf{f}(t) = 0.$$

Así pues, el vector velocidad $\mathbf{f}'(t)$ y el vector posición $\mathbf{f}(t)$ son ortogonales ya que su producto escalar es nulo.

Ejercicio 9.14. Calcular la longitud de las trayectorias de las siguientes funciones vectoriales en los intervalos dados.

- $\mathbf{f}(t) = (t^2, \frac{t^3}{3}) \ t \in [0, 1].$
- $\mathbf{g}(t) = (2 \operatorname{sen}(t), \frac{t}{2}, 2 \cos(t)) \ t \in [-1, 1].$
- $\mathbf{h}(t) = (\operatorname{sen}(t), \ln(\cos(t)), \cos(t)) \ t \in [0, \pi/4].$

Solución

- $\mathbf{f}'(t) = (2t, t^2)$ y la longitud de la trayectoria de $\mathbf{f}(t)$ para $t \in [0, 1]$ es

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\mathbf{f}'(t)| dt &= \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (t^2)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^4 + 4t^2} dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{t^2(t^2 + 4)} dt = \int_0^1 t\sqrt{t^2 + 4} dt \\
&= \int_4^5 \frac{1}{2}\sqrt{u} du = \left[\frac{u^{3/2}}{3} \right]_4^5 \quad (u = t^2 + 4) \\
&= \frac{5^{3/2}}{3} - \frac{4^{3/2}}{3} \approx 1.0601.
\end{aligned}$$

- b. $\mathbf{g}'(t) = (2 \cos(t), \frac{1}{2}, -2 \sin(t))$ y la longitud de la trayectoria de $\mathbf{g}(t)$ para $t \in [-1, 1]$ es

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 |\mathbf{g}'(t)| dt &= \int_{-1}^1 \sqrt{(2 \cos(t))^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2 \sin(t))^2} dt \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{4} + 4(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{4} + 4} dt \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{17}{4}} dt = \left[\frac{\sqrt{17}}{2} t \right]_{-1}^1 = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}.
\end{aligned}$$

- c. $\mathbf{h}'(t) = (\cos(t), -\operatorname{tg}(t), -\sin(t))$ y la longitud de la trayectoria de $\mathbf{h}(t)$ para $t \in [0, \pi/4]$ es

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} |\mathbf{h}'(t)| dt &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos(t)^2 + (-\operatorname{tg}(t))^2 + (-\sin(t))^2} dt \\
&= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}(t)^2} dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec(t)^2} dt \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec(t) dt = \int_0^{\pi/4} \sec(t) \frac{\sec(t) + \operatorname{tg}(t)}{\sec(t) + \operatorname{tg}(t)} dt \\
&= \int_1^{1+\frac{2}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u} du = [\ln|u|]_1^{1+\frac{2}{\sqrt{2}}} \quad (1) \\
&= \ln \left| 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right| - \ln|1| \approx 0.8814.
\end{aligned}$$

(1) Cambio de variable $u = \sec(t) + \operatorname{tg}(t)$.

Ejercicio 9.15. Demostrar, usando la fórmula de la longitud de una trayectoria, que la longitud de la gráfica de una función real $f(x)$ para $a \leq x \leq b$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ejercicio 9.16. Dar una parametrización de una espiral de radio r centrada en el eje z , que de n vueltas completas y la distancia entre cada dos vueltas consecutivas sea $h\pi$. Deducir una fórmula para calcular su longitud. Utilizar la fórmula obtenida para calcular la cantidad de alambre necesario para construir la espiral de un cuaderno de 30 cm de altura con radio 1 cm y distancia entre cada dos vueltas consecutivas $\frac{\pi}{4}$.

Solución

Una parametrización de esta espiral viene dada por la función $\mathbf{f}(t) = (r \cos(t), r \sen(t), \frac{h}{2}t)$, con derivada $\mathbf{f}'(t) = (-r \sen(t), r \cos(t), \frac{h}{2})$, por lo que su longitud en el intervalo $t \in [a, b]$ es

$$\begin{aligned} \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt &= \int_a^b \sqrt{(-r \sen(t))^2 + (r \cos(t))^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} dt = \left[\frac{\sqrt{h^2 + 4r^2}}{2} t \right]_a^b = \frac{\sqrt{h^2 + 4r^2}}{2} (b - a). \end{aligned}$$

Como la espiral da una vuelta completa cada 2π unidades de t , se tiene que $b - a = 2\pi n$, y por tanto la longitud de la espiral es $n\sqrt{h^2 + 4r^2}\pi$.

Para calcular ahora la cantidad de alambre necesaria para construir la espiral del cuaderno, como la altura del cuaderno viene dada por la componente z de la función vectorial, se tiene que

$$\frac{1/4}{2}t = 30 \Leftrightarrow t = 30 * 8 = 240$$

por lo que la espiral del cuaderno es la trayectoria recorrida por la función vectorial en el intervalo $t \in [0, 240]$, que según la fórmula anterior es

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{4^2} + 4}}{2} (240 - 0) = \frac{\sqrt{65}}{8} 240 \approx 241.8677 \text{ cm.}$$

Ejercicio 9.17. Construir la parametrización de la longitud de arco de las trayectorias de las siguientes funciones vectoriales para $t > 0$.

- a. $\mathbf{f}(t) = (3t + 1, 1 - 2t)$.

b. $\mathbf{g}(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t), 1)$

 Solución

a. $\mathbf{f}'(t) = (3, -2)$ y su módulo vale $|\mathbf{f}'(t)| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, por lo que su función longitud de arco para $t > 0$ es

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{f}'(x)| dx = \int_0^t \sqrt{13} dx = [\sqrt{13}x]_0^t = \sqrt{13}t.$$

Tomando la inversa de la función longitud de arco $t = \frac{s}{\sqrt{13}}$ y haciendo el cambio de variable en $\mathbf{f}(t)$, llegamos a la parametrización de longitud de arco

$$\tilde{\mathbf{f}}(s) = \left(\frac{3s}{\sqrt{13}} + 1, 1 - \frac{2s}{\sqrt{13}} \right).$$

a. $\mathbf{g}'(t) = (e^t(\sin(t) + \cos(t)), e^t(\cos(t) - \sin(t)), 0)$ y su módulo vale

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}'(t)| &= \sqrt{(e^t(\sin(t) + \cos(t)))^2 + (e^t(\cos(t) - \sin(t)))^2 + 0^2} \\ &= e^t \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2 + 2 \sin(t) \cos(t) + \sin(t)^2 + \cos(t)^2 - 2 \sin(t) \cos(t)} \\ &= e^t \sqrt{2}, \end{aligned}$$

por lo que su función longitud de arco para $t > 0$ es

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{g}'(x)| dx = \int_0^t \sqrt{2} e^t dx = [\sqrt{2} e^t]_0^t = \sqrt{2} e^t - \sqrt{2}.$$

Tomando la inversa de la función longitud de arco

$$s = \sqrt{2} e^t - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} e^t = s + \sqrt{2} \Leftrightarrow e^t = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$$

y haciendo el cambio de variable en $\mathbf{g}(t)$, llegamos a la parametrización de longitud de arco

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}(s) &= \left(e^{\ln(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})} \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) + e^{\ln(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})} \cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), 1 \right) \\ &= \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) + \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), 1 \right). \end{aligned}$$

Ejercicio 9.18. Calcular la curvatura de las trayectorias de las siguientes funciones vectoriales en los puntos dados:

- $\mathbf{f}(t) = (t^2, \ln(t))$ en $t = 1$
- $\mathbf{g}(t) = (\sin(2t), 3\cos(t), e^t)$ en $t = 0$.

💡 Solución

a. Aunque se trata de una trayectoria en el plano real \mathbb{R}^2 , podemos trabajar en el espacio real \mathbb{R}^3 añadiendo una tercera componente nula, es decir, considerando la función vectorial $\mathbf{f}(t) = (t^2, \ln(t), 0)$.

La derivada de esta función vectorial es $\mathbf{f}'(t) = (2t, 1/t, 0)$ y la derivada segunda es $\mathbf{f}''(t) = (2, -1/t^2, 0)$. Por tanto, aplicando la [fórmula de la curvatura en el espacio](#) a $\mathbf{f}(t)$ en $t = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}\kappa(1) &= \frac{|\mathbf{f}'(1) \times \mathbf{f}''(1)|}{|\mathbf{f}'(1)|^3} = \frac{|(2, 1, 0) \times (2, -1, 0)|}{|(2, 1, 0)|^3} \\ &= \frac{|(0, 0, -4)|}{(2^2 + 1^2)^{3/2}} = \frac{4}{5^{3/2}} \approx 0.358.\end{aligned}$$

b. La derivada de esta función es

$$g'(t) = (2\cos(2t), -3\sin(t), e^t),$$

y la derivada segunda es

$$g''(t) = (-4\sin(2t), -3\cos(t), e^t).$$

Por tanto, aplicando la [fórmula de la curvatura en el espacio](#) a $\mathbf{g}(t)$ en $t = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\kappa(0) &= \frac{|\mathbf{g}'(0) \times \mathbf{g}''(0)|}{|\mathbf{g}'(0)|^3} = \frac{|(2, 0, 1) \times (0, -3, 1)|}{|(2, 0, 1)|^3} \\ &= \frac{|(3, -2, -6)|}{(2^2 + 0^2 + 1^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{49}}{5^{3/2}} \approx 0.626.\end{aligned}$$

Ejercicio 9.19. Calcular la curvatura de un círculo de radio r .

💡 Solución

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el círculo está centrado en el origen de coordenadas, por lo que una parametrización suya es la función vectorial $\mathbf{f}(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$.

La derivada de esta función vectorial es $\mathbf{f}'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$ y el vector tangente unitario

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = \frac{(-r \sin(t), r \cos(t))}{\sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2}} \\ &= \frac{(-r \sin(t), r \cos(t))}{\sqrt{r^2(\sin(t)^2 + \cos(t)^2)}} = \frac{(-r \sin(t), r \cos(t))}{r} \\ &= (-\sin(t), \cos(t)).\end{aligned}$$

Por tanto, aplicando la fórmula de la curvatura de una trayectoria, se tiene

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|} = \frac{|(-\cos(t), -\sin(t))|}{|(-r \sin(t), r \cos(t))|} \\ &= \frac{\sqrt{(-\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2}}{\sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2}} = \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Es decir, la curvatura de un círculo es el inverso de su radio.

Ejercicio 9.20. Usar la fórmula de la curvatura de la trayectoria de una función vectorial para obtener una fórmula para calcular la curvatura de la gráfica de una función real $f(x)$.

💡 Solución

Dada una función real $y = f(x)$ podemos representar la trayectoria de su gráfica mediante la función vectorial $\mathbf{f}(t) = (t, f(t), 0)$ en el espacio real. En tal caso, según la [fórmula de la curvatura de una trayectoria en el espacio real](#), su curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|^3}.$$

Así pues, necesitamos la primera y la segunda derivada de la función vectorial, que son $\mathbf{f}'(t) = (1, f'(t), 0)$ y $\mathbf{f}''(t) = (0, f''(t), 0)$ respectivamente, y su producto vectorial es

$$\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(t) & 0 \\ 0 & f''(t) & 0 \end{bmatrix} = f''(t)\mathbf{k}$$

Por tanto,

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|^3} = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Ejercicio 9.21. Las coordenadas paramétricas de un punto material lanzado bajo un ángulo respecto al horizonte son

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$ es el tiempo contado a partir del instante en que el punto llega a la posición más alta, v_0 es la velocidad horizontal en el instante $t = 0$ y $g = 9.8 \text{ m}^2/\text{s}$ es la aceleración de la gravedad. ¿En qué instante la magnitud de la velocidad horizontal será igual a la de la velocidad vertical? ¿Cuánto debería valer v_0 para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente? Calcular la ecuación de la recta tangente en dicho instante con el valor de v_0 calculado.

💡 Solución

La velocidad horizontal es la derivada del espacio recorrido horizontalmente (componente x) con respecto al tiempo, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t) = v_0.$$

Del mismo modo, la velocidad vertical es la derivada del espacio recorrido verticalmente (componente y) en relación al tiempo,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}gt^2\right) = -gt$$

Para ver en qué instante ambas magnitudes serán iguales, las igualamos y resolvemos la ecuación:

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \left| \frac{dy}{dt} \right| \Leftrightarrow v_0 = gt \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{9.8}.$$

Para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente, debe cumplirse que $x(v_0/9.8) = 100$, de lo que se deduce:

$$x(v_0/9.8) = v_0 \frac{v_0}{9.8} = \frac{v_0^2}{9.8} = 100 \Leftrightarrow v_0^2 = 980 \Leftrightarrow v_0 = +\sqrt{980} = 31.3.$$

Por tanto, el instante en cuestión es $t = v_0/9.8 = 31.3/9.8 = 3.19$.

Por último, la ecuación de la recta tangente en dicho instante, para el valor de v_0 calculado es:

$$y = y(3.19) + \frac{dy}{dx}(3.19)(x - x(3.19))$$

Ya hemos visto que $x(3.19) = 100$, y que en dicho instante la velocidad horizontal y vertical coinciden, de manera que

$$\frac{dy}{dx}(3.19) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -1,$$

de modo que sólo nos queda calcular el espacio vertical recorrido en dicho instante, que es

$$y(3.19) = -\frac{1}{2}9.8 \cdot 3.19^2 = -49.86.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a la recta tangente:

$$y = -49.86 - (x - 100) \Leftrightarrow y = -x + 50.14.$$

Ejercicio 9.22. Una avión parte de la posición $\mathbf{f}(0) = (1, 1, 1)$ con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = (0, 1, -2)$ y aceleración $\mathbf{a}(t) = t^2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determinar el vector velocidad y el vector posición en cada instante.

💡 Solución

La velocidad en cada instante es la integral de la aceleración, es decir,

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + \int_0^t a(x) dx = (0, 1, -2) + \int_0^t (x^2, -1/2, 2) dx \\ &= (0, 1, -2) + \left(\frac{t^3}{3}, \frac{-t}{2}, 2t\right) = \left(\frac{t^3}{3}, \frac{-t}{2} + 1, 2t - 2\right). \end{aligned}$$

Y la posición en cada instante es la integral de la velocidad, es decir,

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \int_0^t v(x) dx = (1, 1, 1) + \int_0^t (x^3/3, -x/2 + 1, 2x - 2) dx \\ &= (1, 1, 1) + \left(\frac{t^4}{12}, \frac{-t^2}{4} + t, t^2 - 2t\right) = \left(\frac{t^4}{12} + 1, \frac{-t^2}{4} + t, 1 + t^2 - 2t\right). \end{aligned}$$

Ejercicio 9.23. Calcular la rapidez máxima y mínima con la que se mueve una partícula cuya posición viene dada por la función vectorial $\mathbf{f}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + \cos(t)\mathbf{k}$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución

El vector velocidad vale

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}'(t) = (-2\sin(2t), \cos(t), -\sin(t)),$$

y la rapidez con la que se mueve la partícula es su módulo

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-2\sin(2t))^2 + \cos(t)^2 + (-\sin(t))^2} = \sqrt{4\sin(2t)^2 + 1}.$$

Para ver cuándo la rapidez es máxima o mínima tenemos que calcular la derivada de esta función e igualarla a cero para obtener sus puntos críticos.

$$|\mathbf{v}(t)|' = \frac{8\sin(2t)\cos(2t)}{\sqrt{4\sin(2t)^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow \sin(2t)\cos(2t) = 0.$$

Por tanto la derivada se anula si $\sin(2t) = 0$ o $\cos(2t) = 0$, que en el intervalo $[0, \pi]$ se cumple para $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/4$.

Para ver si en cada uno de estos instantes hay un máximo, mínimo o punto de inflexión, estudiamos el signo de la derivada en instantes próximos anteriores y posteriores.

- En instantes anteriores a $t = 0$ $\sin(2t) < 0$ y $\cos(2t) > 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' < 0$, y en instantes posteriores $\sin(2t) > 0$ y $\cos(2t) > 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' > 0$, y por tanto, hay un mínimo relativo en $t = 0$.
- En instantes anteriores a $t = \pi/4$ $\sin(2t) > 0$ y $\cos(2t) > 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' > 0$, y en instantes posteriores $\sin(2t) > 0$ y $\cos(2t) < 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' < 0$, y por tanto, hay un máximo relativo en $t = 0$.
- En instantes anteriores a $t = \pi/2$ $\sin(2t) > 0$ y $\cos(2t) < 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' < 0$, y en instantes posteriores $\sin(2t) < 0$ y $\cos(2t) < 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' > 0$, y por tanto, hay un mínimo relativo en $t = 0$.
- En instantes anteriores a $t = 3\pi/4$ $\sin(2t) < 0$ y $\cos(2t) < 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' > 0$, y en instantes posteriores $\sin(2t) < 0$ y $\cos(2t) > 0$ por lo que $|\mathbf{v}(t)|' < 0$, y por tanto, hay un máximo relativo en $t = 0$.

Ejercicio 9.24. Calcular las componentes tangencial y normal del vector aceleración de las siguientes funciones vectoriales.

- $f(t) = (2\cos(t), \sin(2t)).$
- $g(t) = (3t^2, 2t^3, \ln(t)).$

Ejercicio 9.25. Calcular la fuerza necesaria para que la partícula de masa m se mueva con posición dada por la función vectorial $\mathbf{g}(t) = (3t, \ln(t), t^2)$. ¿Cómo se interpreta este vector?

 Solución

El vector velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}'(t) = \left(3, \frac{1}{t}, 2t \right),$$

y el vector aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}''(t) = \left(0, -\frac{1}{t^2}, 2 \right).$$

Por tanto, la fuerza necesaria para imprimir esta aceleración a una partícula de masa m en cada instante t es

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = \left(0, -\frac{m}{t^2}, 2m \right).$$

Esto quiere decir que no hay que aplicar fuerza en el sentido del eje x , una fuerza inversamente proporcional al cuadrado del tiempo en la dirección opuesta al eje y y una fuerza constante del doble de la masa en la dirección del eje z .

Ejercicio 9.26. Se aplica una fuerza de 2 N a una pelota de 100 g en el sentido de la bisectriz del plano yz . Si la pelota parte del origen de coordenadas con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ m/s, ¿qué posición y con qué rapidez se moverá la pelota en cada instante?

 Solución

Un vector con la dirección de la bisectriz del plano yz es $(0, 1, 1)$, de manera que un vector unitario en esa dirección será $\mathbf{u} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, y como la intensidad de la fuerza es 2 N, se tiene que el vector fuerza es

$$\mathbf{F}(t) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Como por la segunda ley de Newton $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$, se tiene que

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}(t)}{m} = \frac{(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})}{0.1} = (0, 10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}).$$

Integrando el vector aceleración obtenemos el vector velocidad

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) dt = \int (0, 10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}) dt = (0, 10\sqrt{2}t, 10\sqrt{2}t) + C.$$

Como en el instante $t = 0$ la velocidad es \mathbf{v}_0 , se tiene que

$$\mathbf{v}(0) = (0, 10\sqrt{2} \cdot 0, 10\sqrt{2} \cdot 0) + C = (0, 0, 0) + C = C = \mathbf{v}_0,$$

por lo que el vector velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = (0, 10\sqrt{2}t, 10\sqrt{2}t) + \mathbf{v}_0 = (0, 10\sqrt{2}t, 10\sqrt{2}t) + (2, -1, 0) = (2, 10\sqrt{2}t - 1, 10\sqrt{2}t).$$

Ahora integrando el vector velocidad obtenemos el vector de posición de la pelota.

$$\mathbf{f}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt = \int (2, 10\sqrt{2}t - 1, 10\sqrt{2}t) dt = (2t, 5\sqrt{2}t^2 - t, 5\sqrt{2}t^2) + C$$

Como la pelota parte del origen de coordenadas, $f(0) = (0, 0, 0)$, por lo que

$$\mathbf{f}(0) = (0, 5\sqrt{2} \cdot 0^2 - 0, 5\sqrt{2} \cdot 0^2) + C = (0, 0, 0) + C = C = (0, 0, 0),$$

por lo que, finalmente, el vector de posición es $\mathbf{f}(t) = (2t, 5\sqrt{2}t^2 - t, 5\sqrt{2}t^2)$ m, y su rapidez

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2^2 + (10\sqrt{2}t - 1)^2 + (10\sqrt{2}t)^2}.$$

Ejercicio 9.27. Un atleta lanza la jabalina con un ángulo θ sobre la horizontal y una velocidad inicial \mathbf{v}_0 . Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre ella es la de la gravedad, ¿qué distancia horizontal alcanzará la jabalina? ¿Qué valor de θ maximiza la distancia horizontal recorrida?

Ejercicio 9.28. La cantidad de árboles en un ecosistema, a , depende del tiempo según la expresión

$$a(t) = 100 \ln(t^2 + 1),$$

y la cantidad de un determinado parásito de los árboles, p , que también depende del tiempo, viene dada por

$$p(t) = \sqrt[3]{t^2 + 2}.$$

- Calcular el número de parásitos cuando el número de árboles sea 500.
- La derivada del número de parásitos con respecto al número de árboles cuando el número de parásitos sea 3. ¿Cómo la interpretarías?

Solución

a. Para ver en qué instante hay 500 árboles, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned}a(t) = 500 &\Leftrightarrow 100 \ln(t^2 + 1) = 500 \Leftrightarrow \ln(t^2 + 1) = 5 \\&\Leftrightarrow t^2 + 1 = e^5 \Leftrightarrow t^2 = e^5 - 1 \Leftrightarrow t = \sqrt{e^5 - 1} \approx 12.1414.\end{aligned}$$

Por tanto, el número de parásitos en ese instante es

$$p(\sqrt{e^5 - 1}) = \sqrt[3]{(\sqrt{e^5 - 1})^2 + 2} = \sqrt[3]{e^5 - 1 + 2} = \sqrt[3]{e^5 + 1} \approx 5.3064.$$

b. Para ver en qué instante hay 3 parásitos, resolvemos la ecuación

$$p(t) = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{t^2 + 2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2 = 3^3 \Leftrightarrow t^2 = 27 - 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{25} = 5.$$

Por otro lado, la derivada del número de parásitos con respecto al número de árboles es

$$\frac{dp}{da} = \frac{dp/dt}{da/dt} = \frac{\frac{2t}{3(t^2+2)^{2/3}}}{\frac{200t}{t^2+1}},$$

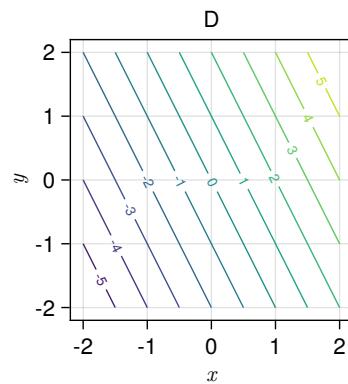
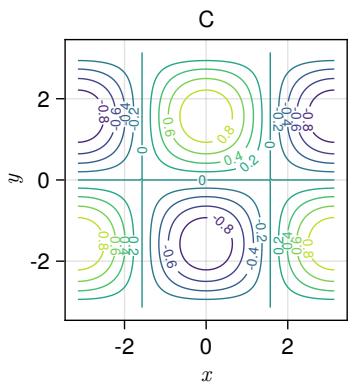
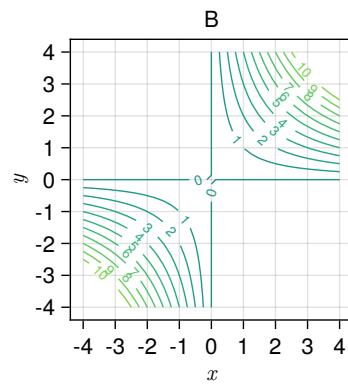
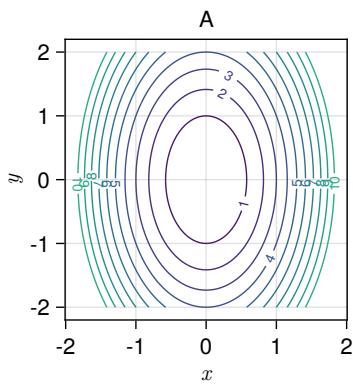
y en el instante $t = 5$ se tiene

$$\frac{dp}{da}(5) = \frac{\frac{2.5}{3(5^2+2)^{2/3}}}{\frac{200.5}{5^2+1}} = \frac{\frac{10}{27}}{\frac{1000}{26}} \approx 0.0096.$$

Eso quiere decir que por cada parásito más que haya en el ecosistema, el número de árboles aumenta en 0.0096.

10 Derivadas de funciones de varias variables

Ejercicio 10.1. Emparejar las siguientes funciones de dos variables con sus curvas de nivel.



- a. $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$
- b. $g(x, y) = xy$
- c. $h(x, y) = 2x + y$
- d. $i(x, y) = 3x^2 + y^2$

Solución

La gráfica A corresponde a $i(x, y)$.

La gráfica B corresponde a $g(x, y)$.

La gráfica C corresponde a $f(x, y)$.

La gráfica D corresponde a $h(x, y)$.

Ejercicio 10.2. La [ecuación de los gases perfectos](#) relaciona la presión, el volumen y la temperatura de un gas perfecto. Esta ecuación se suele escribir de la forma

$$PV = nRT$$

donde P es la presión, V es el volumen, T la temperatura, R es la constante universal de los gases perfectos y n es el número de moles del gas, que también es constante para cada gas.

- ¿Cómo varía la presión de un gas perfecto cuando se aumenta la temperatura, manteniendo constante el volumen?
- ¿Cómo varía la presión de un gas perfecto cuando se aumenta el volumen, manteniendo constante la temperatura?

Solución

Podemos expresar la presión en función del volumen y la temperatura del gas perfecto mediante la función $P(V, T) = \frac{nRT}{V}$.

- La variación de la presión con respecto a la temperatura, manteniendo constante el volumen es la derivada parcial de la presión con respecto a la temperatura, que vale

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}.$$

Como el volumen siempre es positivo, esto quiere decir que al aumentar la temperatura, manteniendo constante el volumen, la presión aumenta.

- La variación de la presión con respecto al volumen, manteniendo constante la temperatura es la derivada parcial de la presión con respecto al volumen, que vale

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-nRT}{V^2}.$$

Como el volumen y la temperatura son siempre positivos, esto quiere decir que al aumentar el volumen, manteniendo constante la temperatura, la presión disminuye.

Ejercicio 10.3. La asimilación de CO₂ de una planta depende de la temperatura ambiente (t) y de la intensidad de la luz (l), según la función

$$f(t, l) = ctl^2,$$

donde c es una constante.

Estudiar cómo evoluciona la asimilación de CO₂ para distintas intensidades de luz, cuando se mantiene la temperatura constante. Estudiar también cómo evoluciona para distintas temperaturas cuando se mantiene la intensidad de la luz constante.

💡 Solución

La variación de la asimilación de CO₂ con respecto a la intensidad de la luz viene dada por la derivada parcial con respecto a l , que vale

$$\frac{\partial f}{\partial l}(t, l) = 2ctl,$$

y la variación de la asimilación de CO₂ con respecto a la temperatura viene dada por la derivada parcial con respecto a t , que vale

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, l) = cl^2.$$

Ejercicio 10.4. La función de producción de Cobb-Douglas

$$p(t, k) = at^\alpha k^{1-\alpha}$$

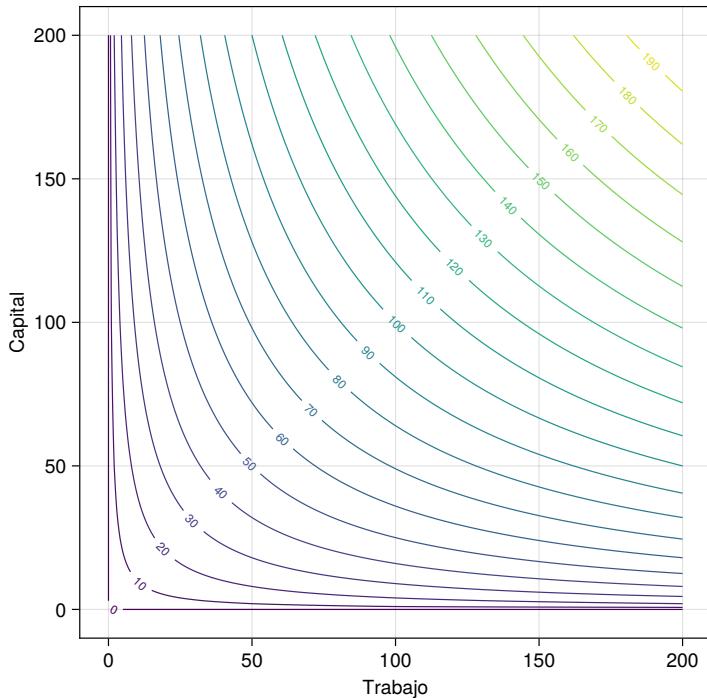
se utiliza en Econometría para modelizar, de manera simplificada, la producción económica de un país, es decir, el valor monetario de los bienes que se producen en un año, en función de la cantidad de trabajo t y el capital invertido k , y donde a es una constante conocida como factor total de productividad y α es otra constante que mide la elasticidad del producto del trabajo y el capital.

- Tomando $a = 1$ y $\alpha = 0.5$, ¿cómo son las curvas de nivel de esta función de producción?
- ¿Cómo varía la producción cuando aumenta la cantidad de trabajo y se mantiene constante el capital?

c. ¿Cómo varía la producción cuando disminuye el capital?

 Solución

- a. Para $a = 1$ y $\alpha = 0.5$ se tiene la función $p(t, k) = 1 \cdot t^{0.5}k^{0.5} = \sqrt{tk}$. Los puntos de la curva de nivel c cumplirán que $\sqrt{tk} = c$, de donde se deduce que $t = \frac{c^2}{k}$ y, por tanto, se trata de una función inversa. En la siguiente gráfica aparecen algunas curvas de nivel de esta función de producción.



- b. La variación de la producción con respecto al trabajo, manteniendo constante el capital, lo da la derivada parcial con respecto al trabajo, que vale

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\alpha t^{\alpha-1}k^{1-\alpha}.$$

En el caso particular de $a = 1$ y $\alpha = 0.5$ se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}t^{-1/2}k^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{t}}.$$

Esto quiere decir que al aumentar el trabajo la producción económica aumenta a razón de esta cantidad. Se observa que la cantidad de trabajo aparece en el denominador, por lo que cuando la cantidad del trabajo es grande, el incremento de producción es pequeño.

- c. La variación de la producción con respecto a al capital, manteniendo constante el trabajo, lo da la derivada parcial con respecto al capital, que vale

$$\frac{\partial p}{\partial k} = at^\alpha(1-\alpha)k^{1-\alpha-1} = a(1-\alpha)t^\alpha k^{-\alpha}.$$

En el caso particular de $a = 1$ y $\alpha = 0.5$ se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}t^{1/2}k^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{k}}.$$

Esto quiere decir que al aumentar el capital la producción económica aumenta a razón de esta cantidad. Al igual que antes, se observa que el capital aparece en el denominador, por lo que cuando el capital es grande, el incremento de producción es pequeño.

Ejercicio 10.5. Se tiene un cilindro de radio 5 cm y altura 3 cm. ¿Es el volumen del cilindro más sensible a una pequeña variación de su radio o de su altura? ¿Cuál debería ser la altura del cilindro para que su volumen fuese igual se sensible a una pequeña variación de su radio que a una pequeña variación de su altura?

💡 Solución

El volumen de un cilindro depende de su radio y de su altura según la función $v(r, h) = \pi r^2 h$.

La tasa de variación del volumen con respecto al radio es la derivada parcial del volumen con respecto al radio, es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi rh,$$

que para un cilindro de radio 5 cm y altura 3 cm es $\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$.

Del mismo modo, la tasa de variación del volumen con respecto a la altura es la derivada parcial del volumen con respecto a la altura, es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial h} = \pi r^2,$$

que para un cilindro de radio 5 cm y altura 3 cm es $\frac{\partial v}{\partial h} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$.

Así pues, el volumen de este cilindro es más sensible a una pequeña variación del radio que de la altura.

Para que fuese igualmente sensible a la variación del radio y de la altura, ambas derivadas parciales deberían ser iguales, es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial h} \Leftrightarrow 2\pi rh = \pi r^2 \Leftrightarrow h = r/2.$$

Ejercicio 10.6. Una empresa fabrica helados de tres sabores. El coste total de producción viene dada por la función

$$c(x, y, z) = \frac{1}{10} \sqrt[3]{xyz} + \frac{x}{20} + \frac{y}{40} + \frac{z}{30} + 100,$$

donde x es el número de helados de chocolate, y el número de helados de fresa y z el número de helados de vainilla. Calcular el coste marginal para cada uno de los tipos de helados.

Solución

El coste marginal es la derivada parcial del coste total con respecto al número de helados producidos de cada tipo. Así, el coste marginal de los helados de chocolate es

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{30}yz(xyz)^{-2/3} + \frac{1}{20}.$$

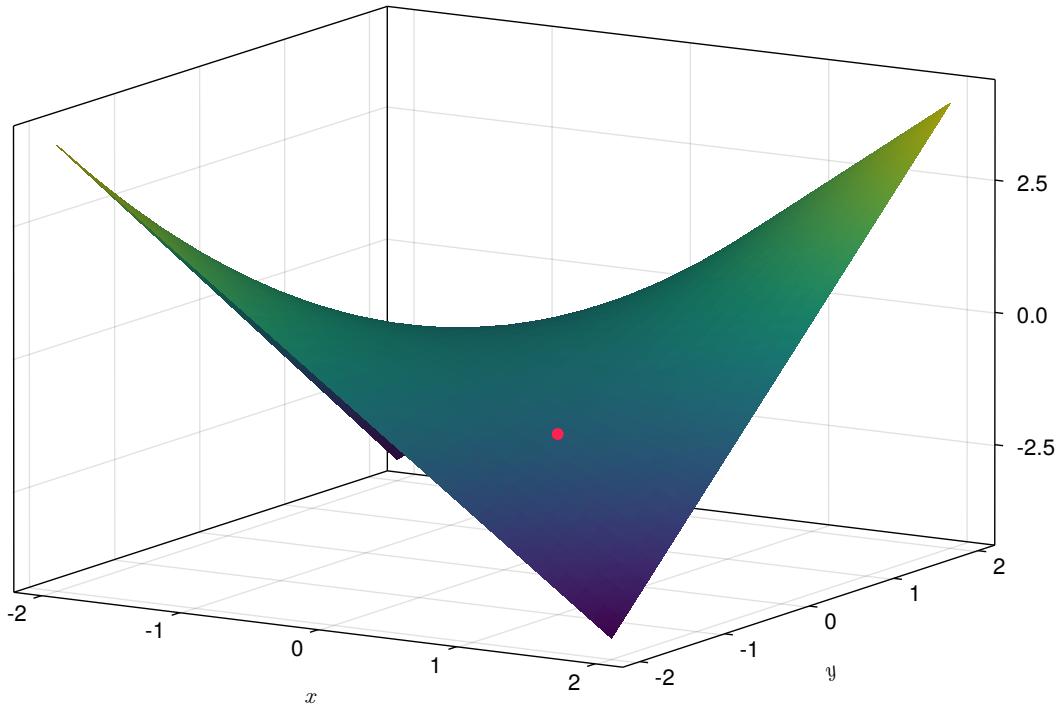
El coste marginal de los helados de fresa es

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{30}xz(xyz)^{-2/3} + \frac{1}{40}.$$

Y el coste marginal de los helados de vainilla es

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{30}xy(xyz)^{-2/3} + \frac{1}{30}.$$

Ejercicio 10.7. La gráfica de una función $f(x, y)$ se muestra a continuación.



¿Qué signo tienen las derivadas parciales en el punto $(1, -1)$. ¿Y en el punto $(0,0)$?

Solución

En el punto $(1, -1)$ derivada parcial con respecto a x es negativa, y la derivada parcial con respecto a y es positiva.

En el punto $(0,0)$ ambas derivadas parciales se anulan.

Ejercicio 10.8. Obtener la ecuación del plano tangente y de la recta normal las siguientes superficies en los puntos indicados.

- $xyz = 8$ en el punto $(4, -2, -1)$.
- $f(x, y) = y \ln(xy)$ en el punto $(1/2, 2, 0)$.

Solución

- Tomando la función $f(x, y, z) = xyz - 8$, se trata de calcular la ecuación de la recta normal y el plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = 0$ en

el punto $P = (4, -2, -1)$. Por este **teorema** sabemos que el vector gradiente $\nabla f(4, -2, -1)$ es perpendicular a la superficie de nivel en el punto $(4, -2, -1)$ por lo que basta tomar este vector como vector director de la recta normal.

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (yz, xz, xy),$$

y en el punto $(4, -2, -1)$ vale

$$\nabla f(4, -2, -1) = ((-2) \cdot (-1), 4 \cdot (-1), 4 \cdot (-2)) = (2, -4, -8).$$

Así pues, la ecuación vectorial de la recta normal es

$$P + t\nabla f(P) = (4, -2, -1) + t(2, -4, -8) = (4 + 2t, -2 - 4t, -1 - 8t).$$

Y la ecuación del plano tangente

$$((x, y, z) - P)\nabla f(P) = ((x, y, z) - (4, -2, -1))(2, -4, -8) = 2x - 4y - 8z + 24 = 0.$$

- b. La ecuación de la recta tangente a la superficie de $f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$\left(a + t \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), b + t \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), f(a, b) - t \right).$$

Las derivadas parciales de f son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y \frac{1}{xy} y = \frac{y}{x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \ln(xy) + y \frac{1}{xy} x = \ln(xy) + 1, \end{aligned}$$

y en el punto $(1/2, 2)$ valen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1/2, 2) &= \frac{2}{1/2} = 4, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, 2) &= \ln\left(\frac{1}{2}2\right) + 1 = 1. \end{aligned}$$

Así pues, sustituyendo en la ecuación de la recta tangente a $f(x, y)$ en $(1/2, 2, 0)$ se tiene

$$\left(\frac{1}{2} + 4t, 2 + t, -t \right).$$

Y la ecuación del plano normal es

$$\begin{aligned} z &= \frac{\partial f}{\partial x}(1/2, 2) \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, 2)(y - 2) + f(1/2, 2) \\ &= 4 \left(x - \frac{1}{2} \right) + (y - 2) + 0 = 4x + y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.9. Calcular el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = \log \frac{\sqrt{x}}{yz} + \arcsen(xz).$$

 Solución

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{z}{\sqrt{1-x^2 z^2}} + \frac{1}{2x}, \frac{-1}{y}, \frac{x}{\sqrt{1-x^2 z^2}} - \frac{1}{z} \right)$$

Ejercicio 10.10. Una nave espacial está en problemas cerca del sol. Se encuentra en la posición $(1, 1, 1)$ y la temperatura de la nave cuando está en la posición (x, y, z) viene dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}$ donde x, y, z se miden en metros. ¿En qué dirección debe moverse la nave para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible?

 Solución

Para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible la nave debe moverse en la dirección opuesta al vector gradiente.

Como el gradiente de f vale

$$\nabla f(x, y, z) = (-2xe^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}, -4ye^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}, -6ze^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}),$$

en el punto $(1, 1, 1)$ se tiene $-\nabla f(1, 1, 1) = e^{-6}(2, 4, 6)$.

Ejercicio 10.11. Supongamos que la cantidad de agua almacenada en un pantano al final del año hidrológico, A en hectómetros cúbicos, viene dada por la función

$$A(p, t, c) = \sqrt{\frac{p^3}{t-1} - c^2 e^{cpt}}$$

donde p es la precipitación en litros/m² caída durante el año hidrológico, t es la temperatura media del año hidrológico en °C y c el consumo debido a abastecimiento de poblaciones cercanas y riego, en hectómetros cúbicos.

- Calcular el gradiente de la cantidad de agua almacenada.
- Suponiendo que hubiese algún año en el que el consumo fuese nulo, ¿qué condición tendría que cumplir la temperatura para que la derivada del agua almacenada con respecto a la temperatura fuese igual a la derivada con respecto a la precipitación?

Solución

- Las derivadas parciales de la función A son

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial p}(p, t, c) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{t-1} - c^2 e^{cpt} \right)^{-1/2} \frac{3p^2}{t-1} - c^2 e^{cpt} ct \\ \frac{\partial A}{\partial t}(p, t, c) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{t-1} - c^2 e^{cpt} \right)^{-1/2} \frac{-p^3}{(t-1)^2} - c^2 e^{cpt} cp \\ \frac{\partial A}{\partial c}(p, t, c) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{t-1} - c^2 e^{cpt} \right)^{-1/2} - 2ce^{cpt} - c^2 e^{cpt} pt\end{aligned}$$

Así pues, el gradiente de A es

$$\nabla A(c, p, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{t-1} - c^2 e^{cpt} \right)^{-1/2} \left(\frac{3p^2}{t-1} - c^2 e^{cpt} ct, \frac{-p^3}{(t-1)^2} - c^2 e^{cpt} cp, -e^{cpt}(2c + c^2 pt) \right)$$

- Suponiendo $c = 0$ las derivadas parciales con respecto a la precipitación y la temperatura valen

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial p}(p, t, 0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{t-1} \right)^{-1/2} \frac{3p^2}{t-1} \\ \frac{\partial A}{\partial t}(p, t, 0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{t-1} \right)^{-1/2} \frac{-p^3}{(t-1)^2}\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial p}(p, t, 0) &= \frac{\partial A}{\partial t}(p, t, 0) \Leftrightarrow \frac{3p^2}{t-1} = \frac{-p^3}{(t-1)^2} \\ \Leftrightarrow 3 &= \frac{-p}{t-1} \Leftrightarrow t = \frac{-p}{3} + 1.\end{aligned}$$

Ejercicio 10.12. La variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right)}$$

se conoce como normal bidimensional con X e Y independientes, de parámetros $= (\mu_x, \mu_y)$ y $= (\sigma_x, \sigma_y)$.

Calcular el gradiente de f e interpretarlo. ¿En qué punto se anula el gradiente? ¿Qué conclusiones sacas? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de f cuando $x \rightarrow \infty$?

Solución

$$\nabla f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right)} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x^2}, \frac{y-\mu_y}{\sigma_y^2} \right).$$

El gradiente $\nabla f(a, b)$ es un vector que indica la dirección en la que hay que moverse desde un punto (a, b) para que el valor de la función crezca lo más rápidamente posible. Como la función exponencial es siempre positiva y las desviaciones típicas también, la dirección del vector gradiente será la misma que la del vector $(\frac{\mu_x-x}{\sigma_x^2}, \frac{\mu_y-y}{\sigma_y^2})$, lo que indica que habrá que moverse hacia el punto de medias.

Por otro lado, este vector se anula cuando $(\mu_x - x, \mu_y - y) = (0, 0)$, es decir, en el punto de medias $(x = \mu_x, y = \mu_y)$.

Finalmente, si fijamos y como constante, como la exponencial tiene exponente negativo, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\nabla f(x, y)| = -\frac{\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^4} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^4} \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sigma_y e^{\frac{1}{2} \left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right)}}.$$

Como en el numerador tenemos un polinomio en x y en el denominador una función exponencial, cuando $x \rightarrow \infty$ la función exponencial crece mucho más rápidamente que cualquier polinomio, y por tanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} |\nabla f(x, y)| = 0$.

Ejercicio 10.13. Tenemos dos objetos de masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa a través de una polea como la de la siguiente figura.

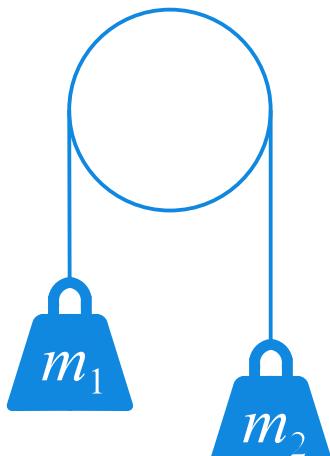


Figura 10.1: Polea

Si $m_1 \geq m_2$, la aceleración del objeto de masa m_1 viene dada por la ecuación

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

siendo g la aceleración de la gravedad.

Demostrar que se cumple la ecuación

$$m_1 \frac{\partial a}{\partial m_1} + m_2 \frac{\partial a}{\partial m_2} = 0.$$

¿Qué ecuación cumplirán las fuerzas que se aplican sobre estos objetos?

Solución

Calculamos las derivadas parciales de la aceleración con respecto a las masas

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial m_1} &= \frac{2gm_2}{(m_1 + m_2)^2}, \\ \frac{\partial a}{\partial m_2} &= \frac{-2gm_1}{(m_1 + m_2)^2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación es inmediato ver que se cumple,

$$m_1 \frac{\partial a}{\partial m_1} + m_2 \frac{\partial a}{\partial m_2} = \frac{2gm_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{-2gm_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0.$$

Por el funcionamiento de la polea, si a es la aceleración que experimenta el primer objeto, la aceleración del segundo objeto será de la misma magnitud pero opuesta,

es decir $-a$. Por tanto, las fuerzas que deben actuar sobre los objetos para producir estas aceleraciones son $f_1 = m_1 a$ y $f_2 = -m_2 a$, respectivamente. Si calculamos la derivadas parciales de estas fuerzas con respecto a m_1 y m_2 respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial m_1} &= a + m_1 \frac{\partial a}{\partial m_1}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial m_2} &= -a - m_2 \frac{\partial a}{\partial m_2}.\end{aligned}$$

Por tanto la ecuación que relaciona las fuerzas es

$$\frac{\partial f_1}{\partial m_1} - \frac{\partial f_2}{\partial m_1} = a + m_1 \frac{\partial a}{\partial m_1} + a + m_2 \frac{\partial a}{\partial m_2} = 2a.$$

Ejercicio 10.14. Utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables para demostrar las reglas de derivación de funciones de una variable real

$$\begin{aligned}(u + v)' &= u' + v' \\ (u - v)' &= u' - v' \\ (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ (u/v)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

donde u y v son funciones de una variable real.

Solución

Sean $u(t)$ y $v(t)$ dos funciones de una variable. Si tomamos la función de dos variables $f(x + y) = x + y$ y la función vectorial $g(t) = (u(t), v(t))$, entonces, aplicando la regla de la cadena se tiene

$$(u + v)' = f(g(t))' = \nabla f(g(t))g'(t) = (1, 1)(u', v') = u' + v'.$$

Aplicando el mismo procedimiento, si se toma $f(x, y) = x - y$ se tiene

$$(u - v)' = f(g(t))' = \nabla f(g(t))g'(t) = (1, -1)(u', v') = u' - v'.$$

Del igual modo, si se toma $f(x, y) = xy$ se tiene

$$(u - v)' = f(g(t))' = \nabla f(g(t))g'(t) = (v, u)(u', v') = u'v + uv'.$$

Y finalmente, si se toma $f(x, y) = \frac{x}{y}$ se tiene

$$(u - v)' = f(g(t))' = \nabla f(g(t))g'(t) = \left(\frac{1}{v}, -\frac{u}{v^2} \right) (u', v') = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ejercicio 10.15. En un equilibrio químico, la concentración de una sustancia z depende de las concentraciones de otras dos sustancias x e y según la ecuación $\frac{z}{\sqrt{xy}} - \ln\left(\frac{x+y}{y}\right) = 0$. Usar el diferencial para predecir la variación que experimentará la concentración de z si la concentración de x aumenta 0.1 mg/mm³ y la de y disminuye 0.2 mg/mm³ en el instante en que las concentraciones de x e y son 1 mg/mm³.

Solución

Despejando z de la ecuación se tiene la función de dos variables

$$z = f(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{y}\right)(xy)^{1/2} = (\ln(x+y) - \ln(y))(xy)^{1/2}.$$

Las derivadas parciales de f son

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x+y}(xy)^{1/2} + \ln\left(\frac{x+y}{y}\right) \frac{1}{2}(xy)^{-1/2}y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y}\right)(xy)^{1/2} + \ln\left(\frac{x+y}{y}\right) \frac{1}{2}(xy)^{-1/2}x.\end{aligned}$$

Estas funciones son continuas en un entorno del punto $(1, 1)$, por lo que la función f es diferenciable en $(1, 1)$ y podemos utilizar el diferencial total para aproximar la variación de z ,

$$dz = \nabla f(1, 1)(dx, dy) = \left(\frac{\ln(2) + 1}{2}, \frac{\ln(2) - 1}{2} \right) (dx, dy) = \frac{(\ln(2) + 1)dx}{2} + \frac{(\ln(2) - 1)dy}{2}.$$

Así pues, para variaciones de las concentraciones $\Delta x = 0.1$ y $\Delta y = -0.2$ mg/mm³, respectivamente, se tiene que la variación de z es

$$\Delta z \approx \frac{(\ln(2) + 1)0.1}{2} + \frac{(\ln(2) - 1)(-0.2)}{2} \approx 0.1153 \text{ mg/mm}^3.$$

Ejercicio 10.16. Un cilindro metálico de radio 30cm y altura 50cm se dilata de manera que la tasa de variación de su radio es 1 cm/s y la tasa de variación de su altura es 2 cm/s. ¿Cuál es la tasa de variación de su volumen?

💡 Solución

La fórmula del volumen de un cilindro de radio r y altura h es la función de dos variables $V(r, h) = \pi r^2 h$, pero como tanto el radio como la altura dependen del tiempo debido al proceso de dilatación, en realidad se tiene que el volumen depende del tiempo según la fórmula $V(t) = \pi r(t)^2 h(t)$. Así pues, podemos calcular la derivada del volumen aplicando la regla de la cadena.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{dh}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}.$$

Y en el instante en que $r = 30$ y $h = 50$ y empezamos a cambiar el radio con una tasa de variación $\frac{dr}{dt} = 1$ cm/s y la altura con una tasa de variación $\frac{dh}{dt} = 2$ cm/s, la tasa de variación del volumen es

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi 30 \cdot 50 \cdot 1 + \pi 30^2 \cdot 2 = 4800\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Ejercicio 10.17. Dos planetas se mueven en un mismo plano describiendo órbitas dadas por las funciones vectoriales $f(t) = (3 \cos(t), \sin(t))$ y $g(t) = (2 \sin(t/2), 3 \cos(t/2))$. Usar la regla de la cadena para funciones de varias variables para calcular la derivada de la distancia entre los planetas en el instante $t = \pi$. ¿Los planetas se están acercando o alejando?

💡 Solución

La distancia euclídea entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano euclídeo es $D(x, y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Suponiendo que estos puntos son las posiciones de los planetas, que dependen del tiempo según las funciones vectoriales $f(t)$ y $g(t)$, aplicando la regla de la cadena, la derivada de la distancia entre los planetas es

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \frac{\partial D}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial D}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial D}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial D}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} \\ &= \frac{1}{2}((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{-1/2}(-2)(x_2 - x_1) \frac{dx_1}{dt} \\ &\quad + \frac{1}{2}((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{-1/2}2(x_2 - x_1) \frac{dx_2}{dt} \\ &\quad + \frac{1}{2}((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{-1/2}(-2)(y_2 - y_1) \frac{dy_1}{dt} \\ &\quad + \frac{1}{2}((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{-1/2}2(y_2 - y_1) \frac{dy_2}{dt} \\ &= \frac{(-x_2 + x_1) \frac{dx_1}{dt} + (x_2 - x_1) \frac{dx_2}{dt} + (-y_2 + y_1) \frac{dy_1}{dt} + (y_2 - y_1) \frac{dy_2}{dt}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \end{aligned}$$

Como en el instante $t = \pi$ tenemos

$$\begin{aligned}f(\pi) &= (3 \cos(\pi), \sin(\pi)) = (-3, 0), \\g(\pi) &= (2 \sin(\pi/2), 3 \cos(\pi/2)) = (2, 0), \\f'(\pi) &= (-3 \sin(\pi), \cos(\pi)) = (0, 1), \\g'(\pi) &= \left(\frac{2}{2} \cos(\pi/2), -\frac{3}{2} \sin(\pi/2) \right) = (0, -3/2),\end{aligned}$$

sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$\frac{dD}{dt} = \frac{(-2 - 3)0 + (2 + 3)0 + (-0 + 0)1 + (0 - 0)(-3/2)}{\sqrt{(2 + 3)^2 + (0 - 0)^2}} = 0.$$

Como la derivada es nula, en el instante $t = \pi$ los planetas ni se están acercando ni alejando. De hecho, en ese instante la distancia entre los planetas es máxima, tal y como puede apreciarse en la siguiente gráfica.

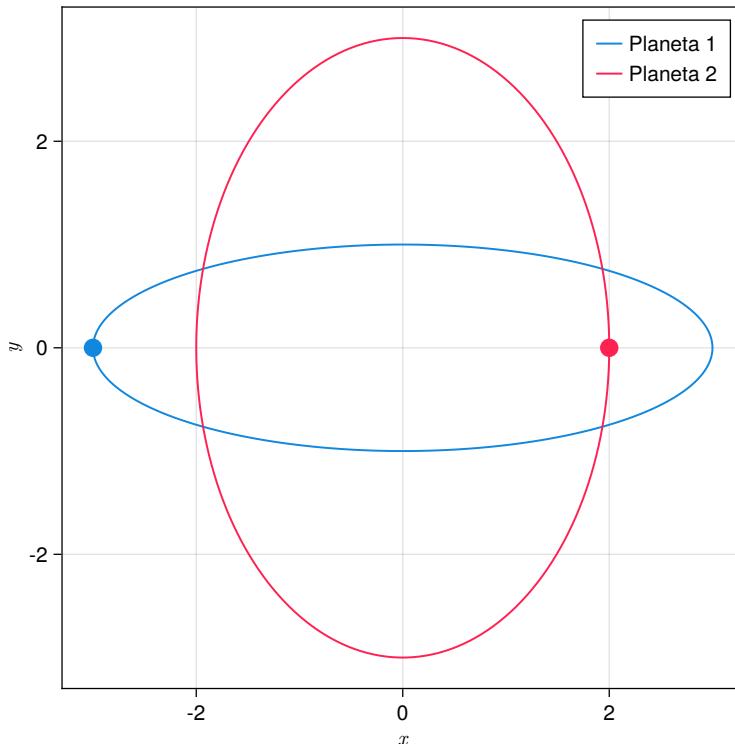


Figura 10.2: Orbitas de los planetas.

Ejercicio 10.18. Para calcular el caudal de una fuente se ha llenado un depósito de

base cuadrada 30 ± 0.2 cm y altura 50 ± 0.3 cm en un tiempo de 20 ± 0.5 s. Expresar el caudal de la fuente incluyendo error en la medida.

Solución

El caudal de la fuente es el volumen dividido por el tiempo, pero el volumen del depósito depende de sus dimensiones, la función que da el caudal de la fuente es $c(x, y, t) = \frac{x^2 y}{t}$, donde x es el lado de la base, y es la altura y t es el tiempo, y su gradiente vale

$$\nabla c(x, y, t) = \left(\frac{2xy}{t}, \frac{x^2}{t}, \frac{-x^2 y}{t^2} \right).$$

Para calcular el error en la medición del caudal de manera aproximada usando el diferencial del caudal,

$$\begin{aligned} dc &= \nabla c(30, 50, 20)(dx, dy, dt) \\ &= (150, 45, -112.5)(dx, dy, dz) \\ &= 150dx + 45dy - 112.5dz, \end{aligned}$$

que para unos errores $dx = \pm 0.2$, $dy = \pm 0.3$ y $dt = \pm 0.5$ se tiene

$$dc = 150(\pm 0.2) + 45(\pm 0.3) - 112.5(\pm 0.5) = \pm 99.75.$$

Así pues, la expresión del caudal, incluyendo el error en la medida, es

$$c(30, 50, 20) \pm dc = 2250 \pm 99.75 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Ejercicio 10.19. La potencia eléctrica P en un circuito depende de el voltaje E y la resistencia R según la fórmula $P = E^2/R$. Si los errores cometidos al medir el voltaje y la resistencia son de un 1% y un 2% respectivamente, ¿cuál será el error relativo en el cálculo de la potencia eléctrica?

Solución

Usando el diferencial como una aproximación del error en la medición de las magnitudes, se tiene que el error relativo en la medición del potencial es

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= \frac{\nabla P(dE, dR)}{E^2/R} = \frac{\left(\frac{2E}{R}, \frac{-E^2}{R^2} \right) (dE, dR)}{E^2/R} \\ &= \frac{R \left(\frac{2E}{R} dE - \frac{E^2}{R^2} dR \right)}{E^2} = 2 \frac{dE}{E} - \frac{dR}{R}. \end{aligned}$$

Y como $\frac{dE}{E}$ y $\frac{dR}{R}$ son los errores relativos en las mediciones del voltaje y la resistencia, respectivamente, se tiene que el error relativo en la medición del potencial es

$$\frac{dP}{P} = 2 \cdot (\pm 0.01) - (\pm 0.02) = \pm 0.04,$$

es decir, un 4 %.

Ejercicio 10.20. La Quimiotaxis es el movimiento de los organismos dirigido por un gradiente de concentración, es decir, en la dirección en la que la concentración aumenta con más rapidez. El moho del cieno *Dictyoselium discoideum* muestra este comportamiento. En esta caso, las amebas unicelulares de esta especie se mueven según el gradiente de concentración de una sustancia química denominada adenosina monofosfato (AMP cíclico). Si suponemos que la expresión que da la concentración de AMP cíclico en un punto de coordenadas (x, y, z) es:

$$C(x, y, z) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^4 + 1}}$$

y se sitúa una ameba de moho del cieno en el punto $(-1, 0, 1)$, ¿en qué dirección se moverá la ameba?

💡 Solución

La dirección en la que más rápidamente aumenta la concentración de AMP es la dirección del gradiente de C , que vale

$$\begin{aligned}\nabla C(x, y, z) &= \left(4 \frac{-1}{2} (x^2 + y^2 + z^4 + 1)^{-3/2} 2x, \right. \\ &\quad 4 \frac{-1}{2} (x^2 + y^2 + z^4 + 1)^{-3/2} 2y, \\ &\quad \left. 4 \frac{-1}{2} (x^2 + y^2 + z^4 + 1)^{-3/2} 4z^3 \right) \\ &= -4(x^2 + y^2 + z^4 + 1)^{-3/2}(x, y, 2z^3),\end{aligned}$$

y en el punto $(-1, 0, 1)$ vale $(4/\sqrt{27}, 0, -8/\sqrt{27})$.

Ejercicio 10.21. Se sabe que un gas perfecto a una presión de 1 atmósfera y una temperatura de 273.1 K ocupa un volumen de 22.4 litros.

- ¿En qué dirección deben cambiarse la presión y la temperatura para conseguir el mayor aumento del volumen?

- b. ¿Cómo varía el volumen si comenzamos a incrementar la temperatura a razón del doble del incremento de la presión?
- c. ¿Cuánto tendría que aumentar la temperatura por cada atmósfera de presión que se aumente para que el volumen permanezca constante?

 Solución

La ecuación de los gases perfectos es $PV = cT$, donde c es una constante que depende del gas. En el caso particular del gas del ejercicio se tiene

$$c = \frac{PV}{T} = \frac{1 \cdot 2.4}{273.1} \approx 0.082 \text{ atm} \cdot \text{l/K}.$$

Si de la ecuación de los gases perfectos despejamos el volumen, se tiene la función de dos variables $V(P, T) = \frac{cT}{P}$.

- a. La dirección en la que hay que cambiar la temperatura y la presión para que el volumen aumente lo más rápidamente posible, es la dirección el vector gradiente,

$$\nabla V(P, T) = \left(\frac{-cT}{P^2}, \frac{c}{P} \right),$$

que para la temperatura y la presión dadas vale

$$\nabla V(1, 273.1) = \left(\frac{-0.082 \cdot 273.1}{1^2}, \frac{0.082}{1} \right) = (-22.4, 0.082).$$

- b. Para incrementar la temperatura a razón del doble del incremento de la presión, debemos cambiar la presión y la temperatura en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, 2)$, y la variación que experimenta el volumen en esta dirección viene dado por la derivada direccional del volumen en la dirección de \mathbf{u} , que vale

$$\begin{aligned} V'_{\mathbf{u}}(1, 273.1) &= \nabla V(1, 273.1) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = (-22.4, 0.082) \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{-22.4 \cdot 1 + 0.082 \cdot 2}{\sqrt{5}} \approx -9.9442 \text{ l}. \end{aligned}$$

- c. Tomemos un vector unitario cualquiera $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$. Como \mathbf{u} es unitario, se cumple que $u_x^2 + u_y^2 = 1$, por lo que, $u_y = \sqrt{1 - u_x^2}$, y el vector tiene componentes $\mathbf{u} = (u_x, \sqrt{1 - u_x^2})$. Para que el volumen permanezca constante, al cambiar la presión y la temperatura en la dirección de \mathbf{u} , la derivada direccional del volumen en esa dirección debe ser nula, es decir,

$$\begin{aligned}
V'_{\mathbf{u}}(1, 273.1) &= \nabla V(1, 273.1) \mathbf{u} = (-22.4, 0.082)(u_x, \sqrt{1 - u_x^2}) \\
&= -22.4u_x + 0.082\sqrt{1 - u_x^2} = 0 \\
\Leftrightarrow 22.4u_x &= 0.082\sqrt{1 - u_x^2} \Leftrightarrow 273.1u_x = \sqrt{1 - u_x^2} \\
\Leftrightarrow 273.1^2u_x^2 &= 1 - u_x^2 \Leftrightarrow 273.1^2u_x^2 + u_x^2 = 1 \\
\Leftrightarrow u_x^2 &= \frac{1}{273.1^2 + 1} \Leftrightarrow u_x = \pm\sqrt{\frac{1}{273.1^2 + 1}} \approx \pm 0.0037.
\end{aligned}$$

Por tanto, habrá que cambiar la presión y la temperatura en la dirección del vector $\mathbf{u} = (0.0037, \sqrt{1 - 0.0037^2}) = (0.0037, 0.9999)$.

Podríamos haber resuelto el problema de manera más sencillas usando la propiedad de que el vector gradiente es ortogonal a la curva de nivel, y por tanto, para obtener la dirección en la que el volumen permanece constante bastaría con tomar un vector ortogonal al vector gradiente, como por ejemplo $\mathbf{u} = (0.082, 22.4)$.

Ejercicio 10.22. Se han diseñado unas cápsulas con forma piramidal con base un rectángulo de lados $a=3$ cm, $b=4$ cm, y altura $h=6$ cm.

- ¿Cómo deben cambiar las dimensiones de la cápsula para que el volumen aumente lo más rápidamente posible? ¿Cuál sería la tasa de variación del volumen si cambian las dimensiones de la cápsula en las proporciones anteriores?
- Si se empiezan a cambiar las dimensiones de la cápsula de manera que el lado mayor del rectángulo disminuye la mitad de lo que aumenta el lado menor, y la altura aumenta el doble de lo que aumenta el lado menor, ¿cuál sería la tasa de variación del volumen de la cápsula en las condiciones anteriores?

💡 Solución

El volumen de la cápsula viene dado por la función $V(a, b, c) = \frac{1}{3}abc$.

- La dirección de máximo crecimiento del volumen es la dirección del vector gradiente,

$$\nabla V(a, b, c) = \frac{1}{3}(bc, ac, ab).$$

que en el punto $(3, 4, 6)$ vale $\nabla V(3, 4, 6) = (8, 6, 4)$. La tasa de variación del volumen si se cambian sus dimensiones en la dirección del vector gradiente es

$$|\nabla V(3, 4, 6)| = |(8, 6, 4)| = \sqrt{8^2 + 6^2 + 4^2} = 10.7703 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

- b. La derivada direccional de V en $(3, 4, 6)$ siguiendo la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, -1/2, 2)$ es

$$\begin{aligned} V'_{\mathbf{u}}(3, 4, 6) &= \nabla V(3, 4, 6) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = (8, 6, 4) \frac{(1, -1/2, 2)}{\sqrt{1^2 + (-1/2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{8 \cdot 1 - 6 \cdot (1/2) + 4 \cdot 2}{\sqrt{5.25}} \approx 5.6737 \text{ cm}^3/\text{s}. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.23. ¿En qué direcciones se anulará la derivada direccional de la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

en el punto $P = (1, 1)$?

💡 Solución

Tomemos un vector unitario cualquiera $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$. Como \mathbf{u} es unitario, se cumple que $u_x^2 + u_y^2 = 1$, por lo que, $u_y = \sqrt{1 - u_x^2}$, y el vector tiene componentes $\mathbf{u} = (u_x, \sqrt{1 - u_x^2})$. Para calcular la derivada direccional de f en la dirección del vector \mathbf{u} , primero necesitamos el gradiente de f ,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right), \end{aligned}$$

que en el punto $(1, 1)$ vale

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{4 \cdot 1 \cdot 1^2}{(1^2 + 1^2)^2}, \frac{-4 \cdot 1^2 \cdot 1}{(1^2 + 1^2)^2} \right) = (1, -1).$$

Así pues, la derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{u} es

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{u}}(1, 1) &= \nabla f(1, 1) \mathbf{u} = (1, -1)(u_x, \sqrt{1 - u_x^2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x - \sqrt{1 - u_x^2} = 0 \Leftrightarrow u_x = \sqrt{1 - u_x^2} \\ &\Leftrightarrow u_x^2 = 1 - u_x^2 \Leftrightarrow u_x^2 = 1/2 \Leftrightarrow u_x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, la derivada direccional será nula en la dirección del vector $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Ejercicio 10.24. ¿Existe alguna dirección en la que la derivada direccional en el punto $P = (1, 2)$ de la función $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ valga 14?

 Solución

El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = (2x - 3y, -3x + 8y),$$

que en el punto $(1, 2)$ vale

$$\nabla f(1, 2) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2, -3 \cdot 1 + 8 \cdot 2) = (-4, 13)$$

Como el máximo crecimiento de una función se da en la dirección del vector gradiente, se tiene que el máximo crecimiento de f es

$$|\nabla f(1, 2)| = |(-4, 13)| = \sqrt{(-4)^2 + 13^2} \approx 13.6015.$$

Por tanto, no existe ninguna dirección en la que la derivada direccional de f sea 14.

Ejercicio 10.25. La derivada direccional de una función f en un punto P es máxima en la dirección del vector $(1, 1, -1)$ y su valor es $2\sqrt{3}$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en P en la dirección del vector $(1, 1, 0)$?

 Solución

La derivada direccional de una función es máxima en la dirección del vector gradiente, por lo que el vector $(1, 1, -1)$ tiene la misma dirección del vector gradiente, es decir, $\nabla f(P) = k(1, 1, -1)$. Como además, su módulo debe ser $2\sqrt{3}$ se tiene

$$|\nabla f(P)| = |k(1, 1, -1)| = k\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = k\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

de donde se deduce que $k = 2$, y por tanto, el vector gradiente es $\nabla f(P) = (2, 2, -2)$. Así pues, la derivada direccional de f en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ es

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{u}}(P) &= \nabla f(P) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = (2, 2, -2) \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2+2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.26. Dado el campo escalar

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xyz^3 - zx,$$

- a. Calcular la derivada direccional de f en $(1, 2, 3)$ a lo largo del vector unitario $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.
- b. ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional de f en el punto anterior? Obtener el valor de dicha derivada direccional.

 Solución

- a. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + yz^3 - z, -2y + xz^3, 3xyz^2 - x),$$

que en el punto $(1, 2, 3)$ vale

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 2, 3) &= (2 \cdot 1 + 2 \cdot 3^3 - 3, -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3^3, 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3^2 - 1) \\ &= (53, 23, 53).\end{aligned}$$

Por tanto, la derivada direccional de f en la dirección del vector \mathbf{u} es

$$\begin{aligned}f'_{\mathbf{u}}(1, 2, 3) &= \nabla f(1, 2, 3)\mathbf{u} = (53, 23, 53) \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{53 - 23}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}.\end{aligned}$$

- b. La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente $(53, 23, 53)$ y vale $|\nabla f(1, 2, 3)| = \sqrt{6147}$.

Ejercicio 10.27. Sea $f(x, y, z) = 0$ la ecuación que define una superficie en el espacio real. Demostrar que el vector gradiente de f en cualquier punto (a, b, c) es normal a la superficie en ese punto.

 Solución

Consideremos una función vectorial $g(t)$ cuya trayectoria circule sobre la superficie $f(x, y, z) = 0$ y tal que $g(0) = (a, b, c)$. Entonces, como los puntos de g están en la superficie, cumplirán la ecuación $f(g(t)) = 0$, de manera que si calculamos su derivada se tiene

$$f(g(t))' = \nabla f(g(t))g'(t) = 0.$$

En particular en $t = 0$ se tiene

$$\nabla f(g(0))g'(0) = \nabla f(a, b, c)g'(0) = 0,$$

de donde se deduce que los vectores $\nabla f(a, b, c)$ y $g'(0)$ son normales. Pero como $g'(0)$ es el vector tangente a la trayectoria de g en el punto (a, b, c) y esto ocurre para cualquier trayectoria inscrita en la superficie que pase por (a, b, c) en $t = 0$, se concluye que $\nabla f(a, b, c)$ es normal a la superficie en (a, b, c) .

Ejercicio 10.28. Un cuerpo se mueve en el plano a través de los puntos de coordenadas (x, y) relacionadas mediante la siguiente expresión $2e^{xy} \operatorname{sen}(x) + y \cos(x) = 2$. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la trayectoria del cuerpo cuando $x = 0$.

💡 Solución

Veamos primero cuáles son las coordenadas del punto donde hay que calcular las rectas tangente y normal a la trayectoria. Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación anterior se tiene

$$2e^0 \operatorname{sen} 0 + y \cos 0 = 2 \Rightarrow y = 2,$$

y, por tanto, se trata del punto $(0, 2)$.

Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de coordenadas $(a, f(a))$ es:

$$y - a = f'(a)(x - a)$$

En nuestro caso, no tenemos la expresión explícita de la función f , pero sí que tenemos la ecuación

$$F(x, y) = 2e^{xy} \operatorname{sen}(x) + y \cos(x) - 2 = 0,$$

que define a y como función implícita de x . Podemos afirmar que esta función existe en un entorno de $x = 0$ ya que se cumplen las condiciones del [teorema de la función implícita](#), es decir,

- a. $F(0, 2) = 2e^0 \operatorname{sen}(0) + 2 \cos(0) - 2 = 0$.
- b. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2e^{xy}y \operatorname{sen}(x) + 2e^{xy} \cos(x) - y \operatorname{sen}(x)$.
 $\frac{\partial F}{\partial y} = 2e^{xy}x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$.
Son continuas en un entorno de $(0, 2)$.
- c. $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 2) = 2e^{0 \cdot 2}0 \operatorname{sen}(0) + \cos(0) = 1 \neq 0$.

Así pues, la derivada de y con respecto a x es

$$\frac{dy}{dx}(0, 2) = -\frac{F'_x(0, 2)}{F'_y(0, 2)} = -\frac{2e^{0 \cdot 2}2 \operatorname{sen}(0) + 2e^{0 \cdot 2} \cos(0) - y \operatorname{sen}(0)}{2e^{0 \cdot 2}0 \operatorname{sen}(0) + \cos(0)} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 2,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Podríamos haber llegado al mismo resultado sabiendo que $\nabla F(x, y)$ es normal a la trayectoria $F(x, y) = 0$. Como $\nabla F(0, 2) = (2, 1)$, la ecuación vectorial de la recta normal es

$$(0, 2) + t(2, 1) = (2t, 2 + t),$$

y la ecuación vectorial de la recta tangente es

$$(0, 2) + t(1, -2) = (t, 2 - 2t),$$

que son las mismas rectas calculadas antes.

Ejercicio 10.29. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $x^2 + y^2 = 3xy - 1$ en los puntos en que $x = 1$. Calcular también los extremos relativos y decir si son máximos o mínimos.

💡 Solución

Consideremos y como función de x . Veamos primero los puntos de la curva en los que $x = 1$:

$$1^2 + y^2 = 3 \cdot 1 \cdot y - 1 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos dos soluciones $y = 1$ e $y = 2$, de modo que existen dos puntos para los que $x = 1$, que son el $(1, 1)$ y el $(1, 2)$.

Para calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal en estos puntos, necesitamos calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$ en dichos puntos, pero antes hay que asegurarse de que la ecuación

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0$$

define a y con función implícita de x en un entorno de los puntos $(1, 1)$ y $(1, 2)$. Veamos que se cumplen las condiciones del [teorema de la función implícita](#).

- $F(1, 1) = 1^2 + 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 0$ y $F(1, 2) = 1^2 + 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 = 0$.
- $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3y$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 3x$, que son continuas en todo su dominio, en particular en $(1, 1)$ y $(1, 2)$.

c. $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1 \neq 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Así pues, $F(x, y) = 0$ define a y como función implícita de x en un entorno de los puntos $(1, 1)$ y $(1, 2)$, de modo que la derivada de y con respecto a x en estos puntos es

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}(1, 1) &= -\frac{F'_x(1, 1)}{F'_y(1, 1)} = -\frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1} = -\frac{-1}{-1} = -1, \\ \frac{dy}{dx}(1, 2) &= -\frac{F'_x(1, 2)}{F'_y(1, 2)} = -\frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = -\frac{-4}{1} = 4.\end{aligned}$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 1)$ es

$$y - 1 = \frac{dy}{dx}(1, 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2 - x,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{dy/dx}(1, 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x,$$

mientras que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 2)$ es

$$y - 2 = \frac{dy}{dx}(1, 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 2,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 2 = -\frac{1}{dy/dx}(1, 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{9 - x}{4}.$$

Por otro lado, para calcular los extremos relativos, primero calculamos los puntos críticos, que son los que anulan la primera derivada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x} = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x/3.$$

Pero además deben pertenecer a la curva de la función, y por tanto deben satisfacer la ecuación de la función.

$$x^2 + (2x/3)^2 = 3x(2x/3) - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2/9 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 9/5 \Leftrightarrow x = \pm 3/\sqrt{5}.$$

Así pues, existen dos puntos críticos que son el $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$. Para ver si son puntos de máximo o mínimo relativos, necesitamos calcular la segunda derivada en dichos puntos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{3y - 2x}{2y - 3x} \right) = \frac{(3 \frac{dy}{dx} - 2)(2y - 3x) - (2 \frac{dy}{dx} - 3)(3y - 2x)}{(2y - 3x)^2}.$$

En el punto, $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = \frac{(3 \cdot 0 - 2)(2\frac{2}{\sqrt{5}} - 3\frac{3}{\sqrt{5}}) - (2 \cdot 0 - 3)(3\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\frac{3}{\sqrt{5}})}{(2\frac{2}{\sqrt{5}} - 3\frac{3}{\sqrt{5}})^2} = 2\sqrt{5},$$

que al ser positiva, indica que el punto $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ es un punto de mínimo relativo. En el punto, $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) = \frac{(3 \cdot 0 - 2)(2\frac{-2}{\sqrt{5}} - 3\frac{-3}{\sqrt{5}}) - (2 \cdot 0 - 3)(3\frac{-2}{\sqrt{5}} - 2\frac{-3}{\sqrt{5}})}{(2\frac{-2}{\sqrt{5}} - 3\frac{-3}{\sqrt{5}})^2} = -2\sqrt{5},$$

que al ser negativa, indica que el punto $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ es un punto de máximo relativo.

Ejercicio 10.30. En una reacción química se cumple la ecuación

$$x \ln(y) + \frac{2e^{y^2+z}}{x} - \frac{x}{z^2} = -1$$

donde x , y y z son las concentraciones de tres sustancias. ¿Cómo cambia la concentración de z si empezamos a disminuir x al mismo ritmo que se incrementa y en el instante en que $x = 2$, $y = 1$ y $z = -1$?

Solución

Consideremos la función $F(x, y, z) = x \ln(y) + \frac{2e^{y^2+z}}{x} - \frac{x}{z^2} + 1$ y veamos si se cumplen las condiciones del [teorema de la función implícita](#) en un entorno del punto $(2, 1, -1)$.

a. $F(2, 1, -1) = 2 \ln(1) + \frac{2e^{1^2-1}}{2} - \frac{2}{(-1)^2} + 1 = 0.$

b. Las derivadas parciales de F son

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \ln(y) - \frac{2e^{y^2+z}}{x^2} - \frac{1}{z^2}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x}{y} - \frac{4ye^{y^2+z}}{x}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{2e^{y^2+z}}{x} + \frac{2x}{z^3},\end{aligned}$$

que son continuas en un entorno del punto $(2, 1, -1)$.

c. $\frac{\partial F}{\partial z}(2, 1, -1) = \frac{2e^{1^2-1}}{2} + \frac{2 \cdot 2}{(-1)^3} = -3 \neq 0.$

Así pues, se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita y $F(x, y, z) = 0$ define a z como función implícita $z = f(x, y)$ en un entorno de $(2, 1, -1)$. Las derivadas parciales de z son

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1, -1) &= -\frac{F_x(2, 1, -1)}{F_z(2, 1, -1)} = -\frac{-3/2}{-3} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1, -1) &= -\frac{F_y(2, 1, -1)}{F_z(2, 1, -1)} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3},\end{aligned}$$

por lo que el vector gradiente de f es $\nabla f(2, 1) = (-\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$.

Finalmente, la derivada parcial de f en la dirección del vector $\mathbf{u} = (-1, 1)$ es

$$\begin{aligned}f'_{\mathbf{u}}(2, 1) &= \nabla f(2, 1) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) \frac{(-1, 1)}{|(-1, 1)|} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{11}{6\sqrt{2}},\end{aligned}$$

lo que quiere decir que por cada unidad que cambiemos las concentraciones de x e y en la dirección del vector $(-1, 1)$, la concentración de z aumentará $\frac{11}{6\sqrt{2}}$ unidades.

Ejercicio 10.31. Una función $f(x, y)$ se llama homogénea de grado n si satisface que $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Demostrar que si f es homogénea de grado n se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned}x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= n f(x, y), \\ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= n(n-1)f(x, y).\end{aligned}$$

Solución

En primer lugar, veamos que una función homogénea de grado n cumple que sus derivadas parciales son homogéneas de grado $n-1$. Derivando ambos lados de la igualdad $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ con respecto a x se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x} &= \frac{\partial t^n f(x, y)}{\partial x} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x} tx \frac{d(tx)}{dx} &= t^n \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x} t &= t^n \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x} &= t^{n-1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},
\end{aligned}$$

por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es homogénea de grado $n - 1$, y del mismo modo se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y}$ también lo es.

Veamos ahora que se cumple la primera ecuación. Consideremos la función vectorial $g(t) = (tx, ty)$, entonces $f(g(t)) = f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ y derivando con respecto a t ambos lados de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{df(tx, ty)}{dt} &= \frac{d(t^n f(x, y))}{dt} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial tx} \frac{d(tx)}{dt} + \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial ty} \frac{d(ty)}{dt} &= nt^{n-1} f(x, y) \\
\Leftrightarrow t^{n-1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial tx} x + t^{n-1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial ty} y &= nt^{n-1} f(x, y) \\
\Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial tx} x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial ty} y &= nf(x, y).
\end{aligned}$$

Como esto es cierto para cualquier t , en particular, tomando $t = 1$ se concluye

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y = nf(x, y).$$

La segunda ecuación se prueba de forma análoga.

Ejercicio 10.32. Demostrar que si $f(x, y)$ es una función de varias variables tal que x e y dependen, a su vez, de otras dos variables, s y t , es decir, $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}
\end{aligned}$$

Dado un campo escalar $f(x, y)$, donde (x, y) son las coordenadas cartesianas de un punto en el plano, usar el resultado anterior para calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$ y $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, donde r y θ son las coordenadas polares del punto.

Solución

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial t}$ suponemos s constante, de manera que las funciones $g(s, t)$ y $h(s, t)$ son funciones de una variable t . Aplicando la [regla de la cadena](#) para una función de dos variables, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Del mismo modo, para calcular $\frac{\partial f}{\partial s}$ suponemos t constante, de manera que las funciones $g(s, t)$ y $h(s, t)$ son funciones de una variable s , y aplicando de nuevo la regla de la cadena para una función de dos variables, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Supongamos ahora que $f(x, y)$ es un campo escalar donde x e y son las coordenadas cartesianas de un punto en el plano euclídeo. Como el cambio de coordenadas polares a cartesianas viene dado por las funciones

$$x = g(r, \theta) = r \cos(\theta) \quad y = h(r, \theta) = r \sin(\theta),$$

aplicando el resultado anterior se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\&= \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta), \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\&= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos(\theta).\end{aligned}$$

Ejercicio 10.33. La relación que modeliza el potencial eléctrico V de un punto del plano en función de su distancia, es $V = \log D$, donde $D = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Calcular el gradiente de V .
- Hallar la dirección de máxima variación del potencial eléctrico en el punto $(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
- Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de V en el punto anterior.
- Aplicar el ejercicio anterior para calcular el gradiente y el Hessiano en coordenadas polares.

- e. Si nos movemos a lo largo de la curva $y = x + 1$, cuál será el máximo potencial alcanzado?

 Solución

a. $\nabla V(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right).$

b. $\nabla V(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \sqrt{3}/6(1, 1).$

c.

$$\nabla^2 V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} \\ \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{x^2-y^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 V(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

y $|\nabla^2 V(\sqrt{3}, \sqrt{3})| = -1/36.$

- d. Tomando las funciones de cambio a coordenadas polares $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, por el ejercicio anterior se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} \cos(\theta) + \frac{y}{x^2+y^2} \sin(\theta) \\ &= \frac{r \cos(\theta)^2}{r^2} + \frac{r \sin(\theta)^2}{r^2} = \frac{1}{r} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{\partial V}{\partial x} (-r \sin(\theta)) + \frac{\partial V}{\partial y} r \cos(\theta) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} (-r \sin(\theta)) + \frac{y}{x^2+y^2} r \cos(\theta) \\ &= \frac{-r \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} + \frac{r \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} = 0 \end{aligned}$$

Podríamos haber llegado a este mismo resultado haciendo el cambio a coordenadas polares directamente en la función del potencial ya que $V(r, \theta) = \ln(r)$. A partir de aquí, obtener la matriz hessiana resulta más sencillo.

$$\nabla^2 V(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e. Sustituyendo $y = x + 1$ en la función del potencial se tiene que

$$V(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + (x+1)^2}) = \ln(\sqrt{2x^2 + 2x + 1}),$$

que en realidad es una función de una variable. Si calculamos su derivada se tiene

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \frac{4x + 2}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

por lo que el único punto crítico está en $x = -1/2$. Estudiando el signo de la derivada a la izquierda y la derecha de este punto se observa fácilmente que se trata de un máximo relativo, por lo que el potencial máximo vale $V(-1/2) = -\frac{\log 2}{2}$.

Ejercicio 10.34. Una barra de metal de un metro de largo se calienta de manera irregular y de forma tal que a x metros de su extremo izquierdo y en el instante t minutos, su temperatura en grados centígrados esta dada por $H(x, t) = 100e^{-0.1t} \sin(\pi xt)$ con $0 \leq x \leq 1$.

- Calcular $\frac{\partial H}{\partial x}(0.2, 1)$ y $\frac{\partial H}{\partial x}(0.8, 1)$. ¿Cuál es la interpretación práctica (en términos de temperatura) de estas derivadas parciales? Explicar por qué cada una tiene el signo que tiene.
- Calcular la matriz hessiana de H .

Solución

- La derivada parcial de H con respecto a x es

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, t) = 100e^{-0.1t} \cos(\pi xt)\pi t$$

y en los puntos que nos piden vale

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}(0.2, 1) &= 100e^{-0.1} \cos(0.2\pi)\pi = 229.9736 \\ \frac{\partial H}{\partial x}(0.8, 1) &= 100e^{-0.1} \cos(0.8\pi)\pi = -229.9736\end{aligned}$$

La derivada parcial $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t_0)$ indica la variación instantánea que experimenta la temperatura con respecto a la variación de la distancia al extremo izquierdo en el punto. El signo de la derivada parcial indica si la variación de la temperatura es creciente (aumenta la temperatura) o decreciente (disminuye). Así en el punto $(0.2, 1)$ la temperatura aumentará a razón de 229.9736 grados centígrados por cada metro que nos alejemos del extremo izquierdo de la barra de metal, mientras que en el $(0.8, 1)$ la temperatura disminuirá a razón de 229.9736 grados centígrados por cada metro que nos alejemos del extremo izquierdo de la barra de metal.

- b. Para calcular la matriz Hessiana necesitamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) &= 100 \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{-0.1t} \sin(\pi x t) + e^{-0.1t} \frac{\partial}{\partial x} \sin(\pi x t) \right) = \\
 &= 100 (-0.1e^{-0.1t} \sin(\pi x t) + e^{-0.1t} \cos(\pi x t) \pi x) = \\
 &= 100e^{-0.1t} (-0.1 \sin(\pi x t) + \pi x \cos(\pi x t)), \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} (100e^{-0.1t} \pi t \cos(\pi x t)) = 100e^{-0.1t} \pi t (-\sin(\pi x t) \pi t) = \\
 &= -100e^{-0.1t} \pi^2 t^2 \sin(\pi x t), \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (100e^{-0.1t} \pi t \cos(\pi x t)) = \\
 &= 100 \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-0.1t} \pi t \cos(\pi x t) + e^{-0.1t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\pi t) \cos(\pi x t) + \pi t \frac{\partial}{\partial t} \cos(\pi x t) \right) \right) = \\
 &= 100 (-0.1e^{-0.1t} \pi t \cos(\pi x t) + e^{-0.1t} (\pi \cos(\pi x t) - \pi t \sin(\pi x t) \pi x)) = \\
 &= 100e^{-0.1t} (-0.1\pi t \cos(\pi x t) + \pi \cos(\pi x t) - \pi^2 x t \sin(\pi x t)) = \\
 &= 100e^{-0.1t} ((-\pi t + \pi) \cos(\pi x t) - \pi^2 x t \sin(\pi x t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}(x, t) \quad (\text{igualdad de las derivadas cruzadas por el teorema de Schwartz}) \\
\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (100e^{-0.1t} (-0.1 \sin(\pi xt) + \pi x \cos(\pi xt))) = \\
&= 100 \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-0.1t} (-0.1 \sin(\pi xt) + \pi x \cos(\pi xt)) + \right. \\
&\quad \left. + e^{0.1t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (-0.1 \sin(\pi xt)) + \frac{\partial}{\partial t} (\pi x \cos(\pi xt)) \right) \right) = \\
&= 100 (-0.1e^{-0.1t} (-0.1 \sin(\pi xt) + \pi x \cos(\pi xt)) + \\
&\quad + e^{0.1t} (-0.1 \cos(\pi xt) \pi x - \pi x \cos(\pi xt) \pi x)) = \\
&= 100e^{-0.1t} (0.01 \sin(\pi xt) - 0.1 \pi x \cos(\pi xt) - 0.1 \pi x \cos(\pi xt) - \pi^2 x^2 \cos(\pi xt)) = \\
&= 100e^{-0.1t} (0.01 \sin(\pi xt) - (0.2 + \pi^2 x^2) \cos(\pi xt)).
\end{aligned}$$

Así pues, la matriz Hessiana es

$$\begin{pmatrix} -100e^{-0.1t} \pi^2 t^2 \sin(\pi xt) & 100e^{-0.1t} ((-0.1\pi t + \pi) \cos(\pi xt) - \pi^2 xt \sin(\pi xt)) \\ 100e^{-0.1t} ((-0.1\pi t + \pi) \cos(\pi xt) - \pi^2 xt \sin(\pi xt)) & 100e^{-0.1t} (0.01 \sin(\pi xt) - (0.2 + \pi^2 x^2) \cos(\pi xt)) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10.35. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

se conoce como ecuación de Laplace y se aplica a multitud de fenómenos relacionados con la conducción de calor, el flujo de fluidos o el potencial eléctrico.

- a. Comprobar que la función $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ satisface la ecuación de Laplace.
- b. ¿Existe algún punto en el que el crecimiento de la función sea nulo?
- c. Si fijamos $z = 1$, calcular $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$.

💡 Solución

- a. Para comprobar que $u(x, y, z)$ satisface la ecuación de Laplace calculamos las tres derivadas parciales segundas que intervienen en la ecuación. Comenzando con las derivadas parciales con respecto a la variable x , obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x = -x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right) \\
&= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -y (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= -z (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\
&= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0.
\end{aligned}$$

- b. Una condición necesaria para que el crecimiento de una función de varias variables en un punto sea nulo es que el gradiente en dicho punto se anule, y el gradiente se anula si se anulan sus tres componentes:

$$\vec{\nabla}u = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (0, 0, 0)$$

Por lo tanto, tenemos un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0$$

$$-y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0$$

$$-z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0$$

Y teniendo en cuenta que el término $(x^2 + y^2 + z^2)$, por tratarse de una suma de cuadrados, únicamente puede ser 0 si $x = y = z = 0$; y a igual

conclusión llegamos si suponemos que es distinto de 0, ya que entonces la primera ecuación implica que necesariamente $x = 0$, la segunda implica que $y = 0$, y la tercera implica que $z = 0$. Por lo tanto, concluimos que el único punto en el que el crecimiento puede ser nulo es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, pero dicho punto no pertenece al dominio de definición de la función (tendríamos un cero como denominador de una fracción), por lo que no hay ningún punto en el que la función presente un crecimiento nulo.

- c. Suponiendo $z = 1$, la función resultante presenta únicamente dos variables:

$$u(x, y, 1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = (x^2 + y^2 + 1)^{-1/2}$$

La derivada propuesta es:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right)$$

Operando como ya hicimos en los cálculos previos de las derivadas segundas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -y (x^2 + y^2 + 1)^{-3/2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -(x^2 + y^2 + 1)^{-3/2} + 3y^2 (x^2 + y^2 + 1)^{-5/2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 3x (x^2 + y^2 + 1)^{-5/2} - 15y^2 x (x^2 + y^2 + 1)^{-7/2} \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \\ &= 3 (x^2 + y^2 + 1)^{-5/2} - 15 (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + 1)^{-7/2} \\ &= +105x^2 y (x^2 + y^2 + 1)^{-9/2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.36. Hallar los extremos relativos y los puntos de silla de la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$ con $a \neq 0$.

💡 Solución

No tiene máximos relativos.
 Mínimos relativos en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.
 Punto de silla en $(0, 0)$.

Ejercicio 10.37. Determinar los extremos relativos y los puntos de silla del campo escalar $h(x, y) = xy + \frac{xy^2}{2} - 2x^2$.

 Solución

Máximo relativo en $(-1/8, -1)$.

No tiene mínimos relativos.

Puntos de silla en $(0, 0)$ y $(0, -2)$.

Ejercicio 10.38. El rendimiento de una cosecha, R , depende de las concentraciones de nitrógeno, n , y fósforo, p , presentes en el suelo según la función $R(n, p) = npe^{-(n+p)}$. ¿Cuáles deben ser las concentraciones de nitrógeno y fósforo para que el rendimiento de la cosecha sea máximo?

 Solución

Se trata de un problema de optimización, así que, primero calculamos los puntos donde se anula el gradiente

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial n} &= e^{-(n+p)}p(1-n) = 0 \Leftrightarrow n = 1 \text{ o } p = 0. \\ \frac{\partial R}{\partial p} &= e^{-(n+p)}n(1-p) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \text{ o } p = 1.\end{aligned}$$

Así pues, existen dos puntos críticos, que son $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Para ver en cuál de ellos hay un máximo relativo, calculamos el hessiano en cada uno de ellos. La matriz hessiana vale

$$\nabla^2 R(n, p) = \begin{pmatrix} e^{-(n+p)}p(n-2) & e^{-(n+p)}(np-n-p+1) \\ e^{-(n+p)}(np-n-p+1) & e^{-(n+p)}n(p-2) \end{pmatrix}$$

El hessiano en el punto $(0, 0)$ vale

$$|\nabla^2 R(0, 0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

por lo que en el punto $(0, 0)$ hay un punto de silla.

El hessiano en el punto $(1, 1)$ vale

$$|\nabla^2 R(1, 1)| = \begin{vmatrix} -e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4} > 0,$$

por lo que en el punto $(1, 1)$ hay un extremo relativo, y como $\frac{\partial^2 R}{\partial n^2} = -e^{-2} < 0$ se trata de un máximo relativo. Por tanto, el rendimiento de la cosecha será máximo para $n = p = 1$.

Ejercicio 10.39. Una empresa fabrica ordenadores portátiles y de sobremesa. El precio de los ordenadores portátiles es de 1200€ y el de los de sobremesa 800€. Si el coste de producir x ordenadores portátiles e y ordenadores de sobremesa semanales viene dado por la función $C(x, y) = 2x^2 + y^2 + 10000 \ln(xy)$ en euros, ¿qué cantidad de ordenadores de cada tipo deberá producir semanalmente para maximizar el beneficio?

Solución

Los ingresos obtenidos por la venta de x ordenadores portátiles es $1200x$ y por la venta de y ordenadores de sobremesa es $800y$, de modo que la función de beneficio es

$$B(x, y) = 1200x + 800y - 2x^2 - y^2 - 10000 \ln(xy).$$

Para obtener el máximo de esta función primero calculamos los puntos críticos.

$$\nabla B(x, y) = \left(1200 - 4x - \frac{10000}{x}, 800 - 2y - \frac{10000}{y} \right) = (0, 0).$$

Resolviendo la primera ecuación se tiene $x = 8.58$ o $x = 291.42$, y resolviendo la segunda $y = 12.92$ o $y = 387.08$, por lo que hay 4 puntos críticos $(8.58, 12.92)$, $(8.58, 387.08)$, $(291.42, 12.92)$ y $(291.42, 387.08)$.

A continuación calculamos el hessiano en cada uno de ellos.

$$|\nabla^2 B(x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{-4x^2+10000}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{-2y^2+10000}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{(-4x^2 + 10000)(-2y^2 + 10000)}{x^2 y^2}$$

En el punto $(8.58, 12.92)$ se tiene $|\nabla^2 B(8.58, 12.92)| = 7634.37 > 0$ y $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}(8.58, 12.92) = 131.8393 > 0$, por lo que en se trata de un mínimo relativo.

En el punto $(8.58, 387.08)$ se tiene $|\nabla^2 B(8.58, 387.08)| = -254.88 < 0$, por lo que se trata de un punto de silla.

En el punto $(291.42, 12.92)$ se tiene $|\nabla^2 B(291.42, 12.92)| = -224.81 < 0$, por lo que se trata de otro punto de silla.

En el punto $(291.42, 387.08)$ se tiene $|\nabla^2 B(291.42, 387.08)| = 7.51 > 0$ y $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}(291.42, 387.08) = -3.88 < 0$, por lo que en se trata de un máximo relativo.

Así pues, para maximizar el beneficio deben fabricarse semanalmente 291.42 ordenadores portátiles y 387 ordenadores de sobremesa.

Ejercicio 10.40. En el ajuste de regresión de una recta $y = a + bx$, se suele utilizar la técnica de mínimos cuadrados que consisten en buscar los valores de a y b que hacen mínima la función

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2,$$

donde el sumatorio abarca a todos los pares de la muestra (x_i, y_i) para $i = 1, \dots, n$, siendo n el tamaño de la muestra.

Demostrar que esta función alcanza el mínimo en el punto

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{y} \quad b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

Ejercicio 10.41. Una empresa que fabrica cajas de cartón quiere construir una caja rectangular sin tapa con un volumen de 25 litros. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para emplear la menor cantidad de cartón posible?

💡 Solución

El volumen de una caja de base rectangular se obtiene multiplicando sus dimensiones $V(x, y, z) = xyz$, donde x e y son las dimensiones del rectángulo de la base y z la altura.

Por otro lado, el área de su superficie es $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$. Así pues, en el punto donde se maximice esta función debe cumplirse, por el método de los [multiplicadores de Lagrange](#), las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= 25000 \text{ cm}^3 \\ \nabla S(x, y, z) &= k \nabla V(x, y, z) \end{aligned}$$

Si calculamos los gradientes de V y S se tiene

$$\begin{aligned} \nabla S(x, y, z) &= (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y) \\ \nabla V(x, y, z) &= (yz, xz, xy), \end{aligned}$$

de manera que se deben cumplir las ecuaciones

$$y + 2z = ky + kz + 2z = kxz + 2x + 2y = kxy$$

Para resolver el sistema, multiplicamos la primera ecuación por x , la segunda por y y la tercera por z , para que las tres ecuaciones tengan el mismo lado derecho, de donde se deduce que

$$xy + 2xz = xy + 2yz = 2xz + 2yz.$$

De la primera ecuación se deduce fácilmente que $x = y$, y sustituyendo en la segunda, se tiene que $x^2 = 2xz$, que tiene solución $x = 0$ o $z = x/2$. Como la primera opción daría un volumen nulo, no puede ser, así que solo tendría sentido la segunda. Finalmente como el volumen debe ser 25000 cm^3 , sustituyendo las soluciones en la fórmula del volumen se tiene

$$V(x, y, z) = 25000 \Leftrightarrow x \cdot \frac{x}{2} = 25000 \Leftrightarrow x^3 = 50000 \Leftrightarrow x \approx 36.8403,$$

por lo que las dimensiones de la caja son $x = y = 36.8403$ cm y $z = 36.8403/2 = 18.4201$ cm.

Ejercicio 10.42. Un cometa sigue la órbita dada por la función $3x^2 + y^2 = 9$, donde el origen de coordenadas es la posición del sol. Si una nave espacial se mantiene fija en la posición $(4, 2)$, ¿en qué punto de su trayectoria el cometa estará más cerca de la nave?

💡 Solución

La distancia del cualquier punto (x, y) de la trayectoria del cometa a la posición de la nave $(4, 2)$ es $f(x, y) = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}$, y si llamamos $g(x, y) = 3x + y^2$, por el método de los multiplicadores de Lagrange, se tienen que cumplir las ecuaciones

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 9 \\ \nabla f(x, y) &= k \nabla g(x, y) \end{aligned}$$

Calculando los gradientes de f y g ,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{(x - 4)}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}}, \frac{(y - 2)}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}} \right) \\ \nabla g(x, y) &= (3, 2y), \end{aligned}$$

se tienen que cumplir las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{(x - 4)}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}} &= k3 \\ \frac{(y - 2)}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}} &= k2y, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{(x - 4)}{3\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}} &= \frac{(y - 2)}{2y\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(x - 4)}{3} &= \frac{(y - 2)}{2y} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{11}{2} - \frac{3}{y}. \end{aligned}$$

Como además tiene que cumplirse la ecuación de la trayectoria del cometa, se tiene que

$$g\left(\frac{11}{2} - \frac{3}{y}, y\right) = 9 \Leftrightarrow \frac{33}{2} - \frac{9}{y} + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^3 + 15y - 18 = 0 \Leftrightarrow y \approx 1.047,$$

y, por tanto, $x \approx \frac{11}{2} - \frac{3}{1.047} = 2.6347$.

Ejercicio 10.43. La función de producción de un determinado producto es $f(k, l) = kl^3$ donde k son las unidades de capital y l las unidades de mano de obra. Si el coste por unidad de capital es 7€ y el coste por unidad de mano de obra es 6€, determinar la cantidad de capital y mano de obra que minimiza el coste si deben producirse 290 unidades del producto.

💡 Solución

La función de coste, para k unidades de capital y l unidades de mano de obra es $c(k, l) = 7k + 6l$, así que se trata de minimizar esta función con la restricción $f(k, l) = 290$. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, debe cumplirse

$$\begin{aligned} f(k, l) &= 290 \\ \nabla c(k, l) &= \lambda \nabla f(k, l) \end{aligned}$$

Si calculamos los gradientes de f y g se tiene

$$\begin{aligned} \nabla f(k, l) &= (l^3, 3kl^2) \\ \nabla c(k, l) &= (7, 6), \end{aligned}$$

de manera que deben cumplirse las ecuaciones

$$\begin{aligned} l^3 &= 7\lambda \\ 3kl^2 &= 6\lambda, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\frac{l^3}{7} = \frac{3kl^2}{6} \Leftrightarrow k = \frac{2l}{7}.$$

Finalmente, sustituyendo en la restricción se tiene

$$f\left(\frac{2l}{7}, l\right) = 290 \Leftrightarrow \frac{2l}{7}l^3 = 290 \Leftrightarrow l^4 = 1015 \Leftrightarrow l = \sqrt[4]{1015} \approx 5.6444,$$

$$\text{y } k \approx \frac{2 \cdot 5.6444}{7} = 1.6127.$$

Ejercicio 10.44. Calcular los polinomios de Maclaurin de segundo grado para las siguientes funciones.

- a. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$.
- b. $g(x, y) = e^{x+y}$.
- c. $h(x, y) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$.

 Solución

- a. $p_{f,(0,0)}^2(x, y) = x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}$.
- b. $p_{g,(0,0)}^2(x, y) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$.
- c. $p_{h,(0,0)}^2(x, y) = xy$.

Ejercicio 10.45. Un modelo ecológico explica el número de individuos de una población mediante la función

$$f(x, t) = \frac{e^t}{x},$$

donde t es el tiempo y x el número de predadores en la región.

Calcular el número aproximado de individuos en la población para $t = 0.1$ y $x = 0.9$ utilizando el polinomio de Taylor de segundo grado de la función en el punto $(1, 0)$.

 Solución

La fórmula del polinomio de Taylor de grado 2 para la función $f(x, t)$ en el punto $(1, 0)$ es

$$P_{f,(1,0)}^2(x, t) = f(1, 0) + \nabla f(1, 0)(x - 1, y) + \frac{1}{2}(x - 1, y)\nabla^2 f(1, 0)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

Calculando las primeras derivadas parciales obtenemos fácilmente el gradiente

$$\nabla f(x, t) = \left(-\frac{e^t}{x^2}, \frac{e^t}{x} \right),$$

que en el punto $(1, 0)$ vale

$$\nabla f(1, 0) = (-e^0, e^0) = (-1, 1).$$

Calculando las segundas derivadas parciales obtenemos la matriz hessiana

$$\nabla^2 f(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{2e^t}{x^3} & -\frac{e^t}{x^2} \\ -\frac{e^t}{x^2} & \frac{e^t}{x} \end{pmatrix}$$

que en el punto $(1, 0)$ vale

$$\nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2e^0 & -e^0 \\ -e^0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la fórmula del polinomio de Taylor de segundo grado se tiene

$$\begin{aligned} P_{f,(1,0)}^2(x, t) &= 1 - (x - 1) + t + (x - 1)^2 - (x - 1)t + \frac{1}{2}t^2 \\ &= x^2 - 3x + 2t - xt + \frac{1}{2}t^2 + 3. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo $x = 0.9$ y $t = 0.1$ se tiene que el número aproximado de individuos para estos valores es

$$P_{f,(1,0)}^2(0.9, 0.1) = 0.9^2 - 3 \cdot 0.9 + 2 \cdot 0.1 - 0.9 \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1^2 + 3 = 1.2245.$$

11 Integrales de funciones de varias variables

Ejercicio 11.1. Calcular la suma inferior y superior de Riemann de la función $f(x, y) = 12 - x^2 - 2y$ en el intervalo $I = [0, 2] \times [0, 2]$ tomando 4 subintervalos de igual tamaño.

Solución

Para dividir el intervalo $I = [0, 2] \times [0, 2]$ en 4 subintervalos de igual tamaño basta tomar la partición $P = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ que define los subintervalos $I_1 = [0, 1] \times [0, 1]$, $I_2 = [0, 1] \times [1, 2]$, $I_3 = [1, 2] \times [0, 1]$ y $I_4 = [1, 2] \times [1, 2]$.

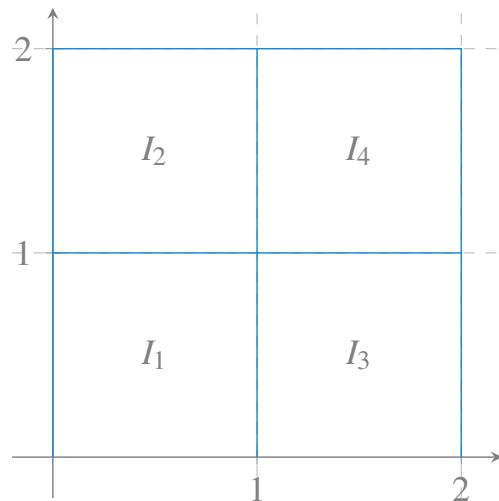


Figura 11.1: Partición del intervalo $[0, 2] \times [0, 2]$ en 4 subintervalos de igual tamaño.

Como se observa todos los subintervalos tienen área 1. Además, como f es decreciente tanto en x como en y en el intervalo I , alcanzará el mínimo en el extremo superior derecho de cada uno de estos subintervalos, y el máximo en el extremo inferior izquierdo. Así pues, la suma inferior de Riemann de esta partición es

$$s(f, P) = f(1, 1) + f(1, 2) + f(2, 1) + f(2, 2) = 9 + 7 + 6 + 4 = 26,$$

y la suma superior de Riemann es

$$S(f, P) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(1, 0) + f(1, 1) = 12 + 11 + 10 + 9 = 42.$$

Ejercicio 11.2. Calcular la integral inferior y superior de Riemann de la función $f(x, y) = 12 - x^2 - 2y$ en el intervalo $I = [0, 2] \times [0, 2]$. ¿Es f integrable Riemann en el intervalo I ? ¿Cuánto vale la integral?

💡 Solución

Consideremos la partición $P_n = \{\frac{2i}{n} : i = 1, \dots, n\}$ que divide el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos iguales, y la partición $P = P_n \times P_n$ del intervalo $I = [0, 2] \times [0, 2]$ en n^2 subintervalos de igual tamaño.

La suma inferior de Riemann de f es

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Como los subintervalos de P_n tienen todos amplitud $2/n$, se tiene que $(x_i - x_{i-1}) = (y_j - y_{j-1}) = 2/n$, de modo que todos los subintervalos tienen área $(2/n)^2$. Y como la función es decreciente tanto en x como en y en el intervalo I , el mínimo de la función en el intervalo $[x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$ se alcanzará en el extremo superior derecho, es decir, en el punto (x_i, y_j) , por lo que la suma inferior de Riemann puede es

$$\begin{aligned}
s(f, P) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \frac{4}{n^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (12 - x_i^2 - 2y_j) \frac{4}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(12 - \left(\frac{2i}{n} \right)^2 - 2 \frac{2j}{n} \right) \frac{4}{n^2} \\
&= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 12 - \frac{4i^2}{n^2} - \frac{4j}{n} \\
&= \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 3 - \frac{i^2}{n^2} - \frac{j}{n} \\
&= \frac{16}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 3 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i^2}{n^2} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \right) \\
&= \frac{16}{n^2} \left(3n^2 - \sum_{i=1}^n n \frac{i^2}{n^2} - \sum_{j=1}^n n \frac{j}{n} \right) \\
&= \frac{16}{n^2} \left(3n^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{j=1}^n j \right) \\
&= \frac{16}{n^2} \left(3n^2 - \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= 48 - 16 \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} - 16 \frac{n(n+1)}{2n^2} \\
&= 48 - \frac{16}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - 8 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{104}{3} - \frac{16}{n} - \frac{16}{6n^2},
\end{aligned}$$

y la integral inferior de Riemann es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{104}{3} - \frac{16}{n} - \frac{16}{6n^2} = \frac{104}{3}.$$

Del mismo modo, tomando f en los extremos inferiores de cada subintervalo, es decir, en el punto (x_{i-1}, y_{j-1}) , se puede calcular la suma superior de Riemann y la integral superior de Riemann vale lo mismo, por lo que la función es integrable Riemann en el intervalo $I = [0, 2] \times [0, 2]$, y la integral vale

$$\int_I 12 - x^2 - 2y \, dA = \frac{104}{3}.$$

Ejercicio 11.3. Calcular las siguientes integrales dobles

- a. $\int_I x \cos(xy) \, dA$, con $I = [0, \pi/2] \times [0, 1]$.

b. $\int_I \frac{x^2y}{y^2+1} dA$, con $I = [-1, 1] \times [0, 2]$.

c. $\int_I \frac{\ln(y)}{xy} dA$, con $I = [1, e] \times [1, e]$.

d. $\int_I \frac{xy}{x^2+y^2} dA$, con $I = [0, 1] \times [0, 1]$.

💡 Solución

a.

$$\begin{aligned}\int_I x \cos(xy) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 x \cos(xy) dy dx = \int_0^{\pi/2} [\sin(xy)]_0^1 dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1.\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\int_I \frac{x^2y}{y^2+1} dA &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{x^2y}{y^2+1} dx dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3y}{3(y^2+1)} \right]_{-1}^1, dy \\ &= \int_0^2 \frac{2y}{3y^2+3}, dy = \left[\frac{\ln(y^2+1)}{3} \right]_0^2 = \frac{\ln(5)}{3}.\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\int_I \frac{\ln(y)}{xy} dA &= \int_1^e \int_1^e \frac{\ln(y)}{xy} dx dy = \int_1^e \left[\frac{\ln(x) \ln(y)}{y} \right]_1^e, dy \\ &= \int_0^e \frac{\ln(y)}{y}, dy = \left[\frac{1}{2} \ln(y)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\int_I \frac{xy}{x^2+y^2} dA &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy = \int_1^1 \left[\frac{1}{2} y \ln(x^2+y^2) \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (-y \ln(y^2) + y \ln(y^2+1)) dy \\ &= \left[\frac{1}{4} (-y^2 \ln(y^2) + y^2 + y^2 \ln(y^2+1) - y^2 + \ln(y^2+1)) \right]_0^1 \\ &= \frac{\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 11.4. Calcular el volumen de la región encerrada por la función $f(x, y) = x^3y$ en el intervalo $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Solución

A la hora de calcular el volumen hay que tener en cuenta que la función $f(x, y) = x^3y$ es positiva para los puntos (x, y) del primer y tercer cuadrantes, y negativa en el segundo y cuarto cuadrantes. Así pues, descompondremos el intervalo de integración en los cuatro subintervalos $[-1, 0] \times [-1, 0]$, $[-1, 0] \times [0, 1]$, $[0, 1] \times [-1, 0]$ y $[0, 1] \times [0, 1]$. Las integrales dobles en estos subintervalos valen

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 x^3 dx \int_{-1}^0 y dy = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{-1}{4} \frac{-1}{2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \int_0^1 -f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 -x^3 dx \int_0^1 y dy = \left[\frac{-x^4}{4} \right]_{-1}^0 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{-1}^0 -f(x, y) dx dy &= \int_0^1 x^3 dx \int_{-1}^0 y dy = \left[\frac{-x^4}{4} \right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{-1}{4} \frac{-1}{2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 x^3 dx \int_0^1 y dy = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Por tanto, el volumen total será la suma de los volúmenes correspondientes a los subintervalos, es decir $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 11.5. Calcular las siguientes integrales dobles sobre las regiones irregulares dadas.

- $\int_R \frac{y}{x} dA$, con $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$
- $\int_R xy^2 dA$, con $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, -1 \leq y \leq 1\}$.
- $\int_R \operatorname{sen} y^2 dA$, con $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, x \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$.

d. $\int_R e^{-x^2} dA$, con $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Solución

a.

$$\begin{aligned}\int_R \frac{y}{x} dA &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{y}{x} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2x} \right]_0^{x^2} \\ &= \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 = 2.\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\int_R xy^2 dA &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-y^2) y^2 dy = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\int_R \sin(y^2) dA &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2) dy dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^y \sin(y^2) dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} [x \sin(y^2)]_0^y dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y \sin(y^2) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos(y^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1.\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\int_R e^{-x^2} dA &= \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 [ye^{-x^2}]_0^x dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = \frac{e-1}{2e}.\end{aligned}$$

Ejercicio 11.6. Calcular las siguientes integrales triples sobre las regiones irregulares dadas.

- a. $\int_R e^{x+y+z} dV$, con $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$.
- b. $\int_R xyz dV$, con $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$.
- c. $\int R 3x^2ye^{x^3y} dy dx dz$ con $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

 Solución

- a. Para la región dada es más sencillo integrar primero respecto a z , luego respecto a x y finalmente respecto a y .

$$\begin{aligned}
 \int_R e^{x+y+z} dV &= \int_0^1 \int_0^y \int_0^x e^{x+y+z} dz dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^y [e^{x+y+z}]_0^x dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^y e^{2x+y} - e^{x+y} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{e^{2x+y}}{2} - e^{x+y} \right]_0^y dy \\
 &= \int_0^1 \frac{e^{3y}}{2} - e^{2y} - \frac{e^y}{2} + e^y dy \\
 &= \int_0^1 \frac{e^{3y}}{2} - e^{2y} + \frac{e^y}{2} dy \\
 &= \left[\frac{e^{3y}}{6} - \frac{e^{2y}}{2} + \frac{e^y}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{e^3}{6} - \frac{e^2}{2} + \frac{e}{2} - \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

- a. Para la región dada es más sencillo integrar primero respecto a z , luego respecto a y y finalmente respecto a x

$$\begin{aligned}
\int_R xyz \, dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x-y} xyz \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x xy \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x xy \frac{(1-x-y)^2}{2} \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{2} xy(1-2x-2y+2xy+x^2+y^2) \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{2} (xy - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2 + x^3y + xy^3) \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{xy^2}{2} - x^2y^2 - \frac{2xy^3}{3} + \frac{2x^2y^3}{3} + \frac{x^3y^2}{2} + \frac{xy^4}{4} \right) \right]_0^x \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{2} - x^4 - \frac{2x^4}{3} + \frac{2x^5}{3} + \frac{x^5}{2} + \frac{x^5}{4} \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^3}{4} - \frac{5x^4}{6} + \frac{17x^5}{24} \, dx \\
&= \left[\frac{x^4}{16} - \frac{5x^5}{30} + \frac{17x^6}{144} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{16} - \frac{5}{30} + \frac{17}{144} = \frac{1}{72}.
\end{aligned}$$

- a. En este caso conviene integrar primero con respecto a x , luego con respecto a y y finalmente con respecto a z .

$$\begin{aligned}
\int_R 3x^2ye^{x^3y} dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3x^2ye^{x^3y} dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^u e^u du dy dz \quad (\text{Cambio } u = x^3y) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [e^u]_0^y dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (e^y - 1) dy dz \\
&= \int_0^1 [e^y - y]_0^1 dz \\
&= \int_0^1 (e - 2) dz \\
&= [(e - 2)z]_0^1 \\
&= e - 2.
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.7. Calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada con lado a centrada en el origen de coordenadas y altura h , usando una integral doble. ¿Cuál es la altura media de la pirámide?

💡 Solución

Por simetría, podemos reducir el problema a calcular el volumen que queda por debajo de cada una de las caras de la pirámide.

Si nos fijamos en la cara que cae el semiplano con x positiva, tenemos que la ecuación del plano que contiene esa cara es $f(x, y) = h(1 - \frac{2x}{a})$, por lo que para obtener el volumen por debajo de esta cara hay que integrar esta función en el intervalo $I = [0, a/2] \times [-x, x]$.

$$\begin{aligned}
\int_I f(x, y) dA &= \int_0^{a/2} \int_{-x}^x h\left(1 - \frac{2x}{a}\right) dy dx = \int_0^{a/2} \left[h\left(1 - \frac{2x}{a}\right)y\right]_{-x}^x dx \\
&= \int_0^{a/2} h\left(1 - \frac{2x}{a}\right) 2x dx = \int_0^{a/2} h\left(2x - \frac{4x^2}{a}\right) dx \\
&= h \left[x^2 - \frac{4x^3}{3a}\right]_0^{a/2} = h\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6}\right) = \frac{ha^2}{12}.
\end{aligned}$$

Así pues, el volumen total de la pirámide será 4 veces esta cantidad, ya que la pirámide tiene 4 caras, es decir, $4 \frac{ha^2}{12} = \frac{1}{3}a^2h$, que coincide con la fórmula habitual

para calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada.

Ejercicio 11.8. Una piscina con forma elíptica de ecuación $x^2 + 2y^2 = 16$ tiene una profundidad de 1 m en el extremo izquierdo y de 2 m en el extremo derecho, y su profundidad crece de izquierda a derecha de forma constante. Calcular la cantidad de agua que hay en la piscina.

💡 Solución

La ecuación $x^2 + 2y^2 = 16$ define una elipse centrada en el origen de coordenadas y cuyos extremos en el eje x están en $x = -4$ y $x = 4$, por lo que la región que define la elipse en el plano xy es

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 4, -\sqrt{\frac{16-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{16-x^2}{2}} \right\},$$

o bien

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{8} \leq y \leq \sqrt{8}, -\sqrt{16-2y^2} \leq x \leq \sqrt{16-2y^2}\}.$$

Supongamos que el plano xy es el nivel del agua. Entonces el fondo de la piscina estará contenido en el plano paralelo al eje y que contenga los puntos $(-4, -1)$, $(4, -2)$, que tiene ecuación $f(x, y) = -1 - \frac{1}{8}(x+4) = -\frac{3}{2} - \frac{x}{8}$. Por tanto se trata de calcular el volumen encerrado entre este plano y el plano xy en la región R , que viene dado por la integral doble

$$\begin{aligned} \int_R -f(x, y) dA &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \int_{-\sqrt{16-2y^2}}^{\sqrt{16-2y^2}} \frac{3}{2} + \frac{x}{8} dx dy \\ &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left[\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{16} \right]_{-\sqrt{16-2y^2}}^{\sqrt{16-2y^2}} dy \\ &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{3}{2}(\sqrt{16-2y^2} + \sqrt{16-2y^2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16}((\sqrt{16-2y^2})^2 - (-\sqrt{16-2y^2})^2) \right) dy \\ &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} 3\sqrt{16-2y^2} dy = 3 \int_{\pi}^0 \frac{-16}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\theta)^2 d\theta \tag{1} \\ &= \frac{-48}{\sqrt{2}} \int_{\pi}^0 \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{-24}{\sqrt{2}} \left[\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right]_{\pi}^0 \\ &= \frac{-24}{\sqrt{2}} \left(0 - \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot 0)}{2} - \pi + \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{2} \right) = 12\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

(1) Cambio de variable $\sqrt{2}y = 4 \cos(\theta)$.
 Así pues, la piscina tiene $12\sqrt{2}\pi \approx 53.3146$ m³ de agua.

Ejercicio 11.9. Calcular el volumen encerrado por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 1 - x$.

Solución

Sea $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ y $g(x, y) = 1 - x$. Veamos primero en qué región se cortan las dos superficies.

$$1 - x^2 - y^2 = 1 - x \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{-x^2 + x},$$

por lo que la región sobre la que se cortan las dos gráficas es $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{-x^2 + x} \leq y \leq \sqrt{-x^2 + x}\}$, que es la circunferencia de radio 1/2 centrada en el punto (0.5, 0).

En este caso resulta más sencillo, trabajar en coordenadas polares. Si resolvemos la ecuación anterior en coordenadas polares, se tiene

$$\begin{aligned} 1 - (r \cos(\theta))^2 - (r \sin(\theta))^2 &= 1 - r \cos(\theta) \Leftrightarrow 1 - r^2 = 1 - r \cos(\theta) \\ &\Leftrightarrow r^2 = r \cos(\theta) \Leftrightarrow r = 0 \text{ o } r = \cos(\theta), \end{aligned}$$

por lo que la región de integración en coordenadas polares es $R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \cos(\theta)\}$, y la integral que da el volumen comprendido entre las dos superficies es

$$\begin{aligned}
\int_R f(x, y) - g(x, y) \, dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} (1 - r^2 - (1 - r \cos(\theta)))r \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} -r^3 + r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{r^4}{4} + \frac{r^3}{3} \cos(\theta) \right]_0^{\cos(\theta)} \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos(\theta)^4}{4} + \frac{\cos(\theta)^3}{3} \cos(\theta) \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{12} \cos(\theta)^4 \, d\theta \\
&= \frac{1}{12} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{48} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + 2\cos(2\theta) + \cos(2\theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{48} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{48} \left[\theta + \sin(2\theta) + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(4\theta)}{8} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{48} \left(\frac{\pi}{2} + \sin(2\pi/2) + \frac{\pi/2}{2} + \frac{\sin(4\pi/2)}{8} \right. \\
&\quad \left. - \frac{-\pi}{2} - \sin(-2\pi/2) - \frac{-\pi/2}{2} - \frac{\sin(-4\pi/2)}{8} \right) \\
&= \frac{\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.10. Un escudo contiene una flor dada por la función $r(\theta) = \cos(2\theta)$. Calcular la cantidad de tela necesaria (en metros) para construir la flor del escudo.

💡 Solución

La región de integración es $R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \cos(2\theta)\}$, y como queremos calcular el área de esta región, basta con integrar la función $f(r, \theta) = 1$ sobre la región de integración en coordenadas polares, es decir,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\cos(2\theta)} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\cos(2\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4} \left(2\pi + \frac{\sin(8\pi)}{4} - 0 - \frac{\sin(0)}{4} \right) = \pi/2.
\end{aligned}$$

Así pues, se necesitarán $\pi/2 \approx 1.5708$ m² de tela.

Ejercicio 11.11. Calcular el volumen de la región encerrada por los cilindros $x^2+y^2=1$ y $y^2+z^2=1$.

💡 Solución

La región de integración viene dada por $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, y^2+z^2 \leq 1\}$. Despejando x de la primera ecuación, se tiene que $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$, y despejando z en la segunda ecuación, tenemos que $-\sqrt{1-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$, por lo que el volumen encerrado por los dos cilindros viene dado por la integral triple

$$\begin{aligned}
\int_R 1 dV &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dz dx dy \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} [z]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2\sqrt{1-y^2} dx dy \\
&= \int_{-1}^1 [2x\sqrt{1-y^2}]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int_{-1}^1 4(1-y^2) dy = 4 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
&= 4 \left(1 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.12. El potencial gravitacional V en el origen de una esfera homogénea de densidad 1 g/cm³ y radio R centrada en el origen, viene dado por la integral

$$V = -G \int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV,$$

donde G es la constante de gravitación universal y $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Calcular el potencial gravitacional en el origen.

Solución

Para calcular la integral es más sencillo usar coordenadas esféricas. En estas coordenadas, la región de integración viene dada por $R = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, \pi] : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$, y la integral que da el potencial gravitacional es

$$\begin{aligned} V &= -G \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= -G \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= -G \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \sin(\phi) \right]_0^R d\phi d\theta \\ &= -G \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2}{2} \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= -G \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^2}{2} \cos(\phi) \right]_0^\pi d\theta \\ &= -G \int_0^{2\pi} R^2 d\theta = -G[R^2 \theta]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi G R^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.13. Calcular el área de las superficies de las siguientes funciones en las regiones indicadas.

- a. $f(x, y) = xy$, en $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- b. $g(x, y) = \ln(\sec(x))$, en $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \tan(x)\}$.

Solución

- a. Calculamos primero las derivadas parciales de f .

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= y, \\ f'_y(x, y) &= x. \end{aligned}$$

Por tanto, la integral que da la superficie es

$$\int_R \sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y^2 + x^2 + 1} dy dx.$$

Esta integral resulta más sencilla si hacemos el cambio a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \int_R \sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 + 1} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(r^2 + 1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (1^2 + 1)^{3/2} - (0^2 + 1)^{3/2} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\sqrt{8} - 1) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{8} - 1}{3} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{8} - 1}{3} 2\pi. \end{aligned}$$

b. Calculamos primero las derivadas parciales de f .

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{1}{\sec(x)} \sec(x) \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x), \\ f'_y(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la integral que da la superficie es

$$\begin{aligned} \int_R \sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} dA &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\operatorname{tg}(x)} \sqrt{\operatorname{tg}(x)^2 + 1} dy dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg}(x)^2 + 1} [y]_0^{\operatorname{tg}(x)} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg}(x)^2 + 1} \operatorname{tg}(x) dx \\ &= \int_1^2 \frac{u^{-1/2}}{2} du \\ &= [\sqrt{u}]_1^2 = \sqrt{2} - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

(1) Cambio $u = \operatorname{tg}(x)^2 + 1$.

Ejercicio 11.14. Una tolva tiene forma cónica dada por la función $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ con altura 4 m. Calcular el volumen de la tolva y la cantidad de chapa necesaria para construirla.

Solución

Para obtener el volumen de la tolva necesitamos calcular el volumen comprendido entre el plano $z = 4$ a nivel de la altura de la tolva y la superficie cónica de f en la región en la región de intersección del plano con superficie cónica, es decir, $2\sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$, que se trata del círculo centrado en el origen con radio 2. Por tanto, la región de integración es $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$.

Por la forma de f y de la región de integración, en este caso, resulta más sencillo trabajar en coordenadas polares, ya que la región de integración se convierte en $R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\}$, por lo que el volumen que buscamos es puede obtener mediante la integral

$$\begin{aligned} \int_R 4 - f(x, y) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r - 2r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{2r^3}{3} \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8 - \frac{16}{3} d\theta = \frac{8}{3}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{16}{3}\pi \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Para obtener su superficie necesitamos calcular la integral $\int_R \sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} dA$, por lo que primero debemos calcular las derivadas parciales de f , que son

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ f'_y(x, y) &= \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

por lo que la función a integrar es

$$\sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} = \sqrt{\frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{5}.$$

Al igual que antes, resulta más sencillo trabajar en coordenadas polares, por lo que la superficie de la tolva viene dada por la integral

$$\begin{aligned}\int_R \sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{5}r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{5} d\theta = [2\sqrt{5}\theta]_0^{2\pi} = 4\sqrt{5}\pi \text{ m}^2.\end{aligned}$$

Ejercicio 11.15. El perfil de la sección transversal del ala de un avión viene dada por las curvas $y = \frac{(-1+x^2)}{10}$ e $y = \frac{1-x^2}{10}$ en metros. Calcular el área de la superficie de un ala de 10 m de longitud.

💡 Solución

Para ver dónde se cortan las dos curvas resolvemos la ecuación que resulta de igualarlas.

$$\frac{(-1+x^2)}{10} = \frac{1-x^2}{10} \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ o } x = 1.$$

Así pues, la región de integración es $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 10\}$. Por simetría, la superficie de la parte superior del ala tiene el mismo área que la superficie de la parte inferior, por lo que basta con calcular el área de la superficie de la parte superior, que se corresponde con la función $f(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 - 1)$, y su área se obtiene con la integral

$$\begin{aligned}
\int_R \sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1} dA &= \int_{-1}^1 \int_0^1 0 \sqrt{\left(\frac{2x}{10}\right)^2 + 1} dy dx \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^1 0 \sqrt{\frac{x^2 + 25}{25}} dy dx \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{x^2 + 25}{25}} [y]_0^1 dx \\
&= \int_{-1}^1 10 \sqrt{\frac{x^2 + 25}{25}} dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 25} dx \\
&= 2 \int_{\arctg(-1/5)}^{\arctg(1/5)} \sqrt{(5 \operatorname{tg}(\theta))^2 + 25} \sec(\theta)^2 d\theta \quad (1) \\
&= 10 \int_{\arctg(-1/5)}^{\arctg(1/5)} 5 \sqrt{\operatorname{tg}(\theta)^2 + 1} \sec(\theta)^2 d\theta \\
&= 50 \int_{\arctg(-1/5)}^{\arctg(1/5)} \sec(\theta)^3 d\theta \quad (2) \\
&= 50 \left[\frac{1}{2} \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) + \frac{1}{2} \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| \right]_{\arctg(-1/5)}^{\arctg(1/5)} d\theta \\
&= 20.1325 \text{ m}^2.
\end{aligned}$$

- (1) Sustitución trigonométrica $x = 5 \operatorname{tg}(\theta)$.
(2) $\int \sec(\theta)^3 d\theta = \frac{1}{2} \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) + \frac{1}{2} \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)|$ por partes.
Por tanto, el área de la superficie del ala es 40.265 m^2 .

Ejercicio 11.16. Un cable en el plano sigue la trayectoria dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 2]$. Si en cada punto (x, y) la densidad del cable viene dada por la función $\rho(x, y) = y/x \text{ kg/m}$, ¿cuál es la masa total del cable?

Solución

La derivada de la función vectorial es $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$, por lo que $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$, y la masa total viene dada por la integral de la función de densidad sobre la curva parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, que es

$$\begin{aligned}
\int_C f(\mathbf{r}(t)) ds &= \int_0^2 \rho(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\
&= \int_0^2 t \sqrt{1 + 4t^2} dt. \\
&= \frac{1}{8} \int_1^{17} u^{1/2} du \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^{17} \\
&= \frac{1}{12} (17^{3/2} - 1) \approx 5.76 \text{ kg}.
\end{aligned} \tag{1}$$

(1) Cambio $u = 1 + 4t^2$

Ejercicio 11.17. Un oleoducto recorre la trayectoria dada por la función vectorial $\mathbf{f}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, \pi]$. Si el coste de construir el oleoducto en cada punto es proporcional a la altura sobre el nivel del mar, ¿cuál será el coste total de construir el oleoducto?

💡 Solución

La trayectoria es $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, \pi]$ y derivada $\mathbf{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, de módulo $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$. El coste viene dado por la función $C(x, y, z) = Kz$, donde $k > 0$ la constante de proporcionalidad, así que el coste total del oleoducto viene dado por la integral de la función de coste sobre la curva parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, que vale

$$\begin{aligned}
\int_C f(\mathbf{r}(t)) ds &= \int_0^\pi \rho(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\
&= \int_0^\pi kt\sqrt{2} dt = \sqrt{2}k \int_0^\pi t dt \\
&= \sqrt{2}k \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = k \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.18. Calcular la integral sobre la curva que se obtiene a proyectar la intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $x + z = 2$ sobre el plano xy .

Solución

Para obtener la ecuación de la curva de intersección de las dos superficies resolvemos el sistema con sus dos ecuaciones. Como $z = x^2 + y^2$, sustituyendo en la segunda ecuación tenemos $x + x^2 + y^2 = 2$. Completando el cuadrado de la suma en x tenemos

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

que es la ecuación de un círculo de radio $3/2$ centrado en el punto $(-1/2, 0)$. Por tanto, una parametrización de esta curva es $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2} \cos(t) - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \sin(t)\right)$ $t \in [0, 2\pi]$, de manera que $\mathbf{r}'(t) = \left(-\frac{3}{2} \sin(t), \frac{3}{2} \cos(t)\right)$ y

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} \sin(t)\right)^2 + \left(\frac{3}{2} \cos(t)\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Así pues, la integral sobre la curva es

$$\begin{aligned} \int_C x^2 + y^2 dS &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} \cos(t) - \frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2} \sin(t)\right)^2 |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{4} \cos(t)^2 - \frac{3}{2} \cos(t) + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \sin(t)^2\right) \frac{3}{2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} \cos(t) + \frac{1}{4}\right) \frac{3}{2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{30}{8} - \frac{9}{4} \cos(t) dt \\ &= \frac{30}{8} [t]_0^{2\pi} - \frac{9}{4} [\sin(t)]_0^{2\pi} = \frac{60\pi}{8}. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.19. La superficie de la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$ se conoce como *helicode*. Calcular el material necesario para construir un sinfín metálico helicoidal de 1 m de radio y 5 m de altura.

Solución

Para calcular el área de la superficie helicoidal, necesitamos calcular la integral doble del módulo del producto vectorial de las derivadas parciales de la función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$.

Calculamos primero las derivadas parciales de $\mathbf{r}(u, v)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u(u, v) &= (\cos(v), \sin(v), 0), \\ \mathbf{r}'_v(u, v) &= (-u \sin(v), u \cos(v), 1).\end{aligned}$$

Calculamos ahora el producto vectorial.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u \sin(v) & u \cos(v) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \sin(v)\mathbf{i} - \cos(v)\mathbf{j} + (u \cos(v)^2 + u \sin(v)^2)\mathbf{k} \\ &= (\sin(v), -\cos(v), u).\end{aligned}$$

Finalmente calculamos la integral del módulo del producto vectorial sobre la región de integración dada.

$$\begin{aligned}\int_0^5 \int_0^1 |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv &= \int_0^5 \int_0^1 \sqrt{\sin(v)^2 + (-\cos(v))^2 + u^2} du dv \\ &= \int_0^5 \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du dv \\ &= \int_0^5 \int_0^{\arctg(1)} \sqrt{1+\tg(\theta)^2} \sec(\theta)^2 d\theta dv \quad (1) \\ &= \int_0^5 \int_0^{\arctg(1)} \sqrt{\sec(\theta)^2} \sec(\theta)^2 d\theta dv \quad (2) \\ &= \int_0^5 \int_0^{\arctg(1)} \sec(\theta)^3 d\theta dv \\ &= \int_0^5 \left[\frac{1}{2} \sec(\theta) \tg(\theta) + \frac{1}{2} \ln |\sec(\theta) + \tg(\theta)| \right]_0^{\arctg(1)} dv \\ &= \int_0^5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \right) dv \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)) [v]_0^5 \\ &= \frac{5}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)) \approx 5.739 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

(1) Cambio trigonométrico $u = \tg(\theta)$. (2) [Integral de la secante cúbica](#).

Ejercicio 11.20. Un panel solar tiene forma de plano dado por la función $z = 1 + x$ con $x \in [0, 2]$ e $y \in [0, 3]$. Si la intensidad de la radiación solar en cada punto del panel

viene dada por la función $I(x, y) = 100 + 20z$ W/m², calcular la cantidad de energía que recibe el panel en una hora.

Solución

Podemos parametrizar el plano mediante la función vectorial $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 + x)$ con $x \in [0, 2]$ e $y \in [0, 3]$. Calculamos las derivadas parciales de $\mathbf{r}(x, y)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_x(x, y) &= (1, 0, 1), \\ \mathbf{r}'_y(x, y) &= (0, 1, 0).\end{aligned}$$

Calculamos ahora el producto vectorial.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_x(x, y) \times \mathbf{r}'_y(x, y) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\mathbf{i} + \mathbf{k} = (-1, 0, 1).\end{aligned}$$

Finalmente, la potencia (energía por unidad de tiempo) es la integral de la intensidad de la radiación solar sobre la superficie del panel, que viene dada por la integral

$$\begin{aligned}\int \int_S I(x, y) dS &= \int_0^2 \int_0^3 I(x, y) |\mathbf{r}'_x(x, y) \times \mathbf{r}'_y(x, y)| dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^3 (100 + 20(1+x)) \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^3 (120 + 20x) \sqrt{2} dy dx \\ &= \int_0^2 (120 + 20x) \sqrt{2} [y]_0^3 dx \\ &= \int_0^2 3(120 + 20x) \sqrt{2} dx \\ &= 3\sqrt{2} [120x + 10x^2]_0^2 \\ &= 3\sqrt{2}(240 + 40) = 840\sqrt{2} \text{ W} \approx 1.19 \text{ kW}.\end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de energía que recibe el panel en una hora es 1.19 kWh.

Ejercicio 11.21. El techo de una sala tiene forma de semicilindro dado por la función $z = \sqrt{9 - x^2}$ con $y \in [0, 10]$. Calcular la cantidad de pintura necesaria para pintar el

techo si el espesor de la capa de pintura en cada punto de la superficie viene dada por la función $d(x, y, z) = \frac{1}{10000}(y + z)$ m.

💡 Solución

Una parametrización del techo en coordenadas cartesianas es $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{9 - x^2})$ con $x \in [-3, 3]$ e $y \in [0, 10]$. Calculamos las derivadas parciales de $\mathbf{r}(x, y)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_x(x, y) &= (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}), \\ \mathbf{r}'_y(x, y) &= (0, 1, 0).\end{aligned}$$

Calculamos ahora el producto vectorial.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_x(x, y) \times \mathbf{r}'_y(x, y) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\mathbf{i} - \mathbf{k} = \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}, 0, 1\right).\end{aligned}$$

Finalmente, la cantidad de pintura necesaria es la integral de la función de espesor sobre la superficie del techo, que viene dada por la integral

$$\begin{aligned}
\int \int_S d(x, y) dS &= \int_{-3}^3 \int_0^{10} d(x, y, z) |\mathbf{r}'_x(x, y) \times \mathbf{r}'_y(x, y)| dy dx \\
&= \int_{-3}^3 \int_0^{10} \frac{1}{10000} (y + \sqrt{9 - x^2}) \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2} dy dx \\
&= \frac{1}{10000} \int_{-3}^3 \int_0^{10} (y + \sqrt{9 - x^2}) \sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2} + 1} dy dx \\
&= \frac{1}{10000} \int_{-3}^3 \int_0^{10} (y + \sqrt{9 - x^2}) \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dy dx \\
&= \frac{3}{10000} \int_{-3}^3 \int_0^{10} \frac{y}{\sqrt{9 - x^2}} + 1 dy dx \\
&= \frac{3}{10000} \int_{-3}^3 \left[\frac{y^2}{2\sqrt{9 - x^2}} + y \right]_0^{10} dx \\
&= \frac{3}{10000} \int_{-3}^3 \frac{100}{2\sqrt{9 - x^2}} + 10 dx \\
&= \frac{3}{10000} \left[50 \int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx + \int_{-3}^3 10 dx \right] \\
&= \frac{3}{10000} [50[\arcsen(x/3)]_{-3}^3 + 10[x]_{-3}^3] \\
&= \frac{3}{10000} \left[50 \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + 10(3 - (-3)) \right] \\
&= \frac{3}{10000} [50\pi + 60] \\
&\approx 0.06512 \text{ m}^3.
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.22. Calcular el valor medio de la función $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en la región del primer cuadrante delimitada por las funciones $y = x$ e $y = x^2$.

Solución

Como las funciones $y = x$ e $y = x^2$ se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$, la región de integración es $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$. El valor medio de la función en esta región es el valor de la integral doble de f sobre la región, dividida por el área de la región.

Calculamos primero la integral doble de f sobre R .

$$\begin{aligned}\int_R f(x, y) dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \sqrt{xy} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{(xy)^{3/2}}{\frac{3}{2}x} \right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{2(x^2)^{3/2}}{3x} - \frac{2(x^3)^{3/2}}{3x} = \left[\frac{2(x^2)^{3/2}}{9} - \frac{4(x^3)^{3/2}}{27} \right]_0^1 = \frac{2}{27}.\end{aligned}$$

Y ahora calculamos el área de la región R .

$$\int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Por lo tanto, el valor medio de f en la región R es $\frac{2/27}{1/6} = \frac{12}{27}$.

Ejercicio 11.23. Una lámina de chapa metálica tiene la forma de un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$. Si la densidad de la chapa en cada punto viene dada por la función $d(x, y) = e^{x+y}$ gr/cm², calcular la masa de la chapa y su centro de masas.

💡 Solución

El triángulo está delimitado por las rectas $y = 0$, $y = x$ e $y = 2 - x$, por lo que la región de integración puede expresarse como $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y\}$. Para obtener la masa de la placa basta con integrar la función de densidad en esta región.

$$\begin{aligned}m &= \int_R d(x, y) dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} e^{x+y} dx dy = \int_0^1 [e^{x+y}]_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 e^2 - e^{2y} dy = \left[e^2 y - \frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 = e^2 - \frac{e^2}{2} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2} \text{ gr.}\end{aligned}$$

Para calcular el centro de masas de la placa, primero tenemos que calcular los momentos de masas con respecto a x e y .

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_R yd(x,y) dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} ye^{x+y} dx dy = \int_0^1 [ye^{x+y}]_y^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 y(e^2 - e^{2y}) dy = \int_0^1 ye^2 - ye^{2y} dy = e^2 \left[e^2 \frac{y^2}{2} - \frac{(2y-1)e^{2y}}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4} \text{ cm.gr.} \\
M_y &= \int_R xd(x,y) dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} xe^{x+y} dx dy = \int_0^1 [(x-1)e^{x+y}]_y^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 (1-y)e^2 - (y-1)e^{2y} dy = \left[\left(y - \frac{y^2}{2} \right) e^2 - \frac{(2y-3)e^{2y}}{4} \right]_0^1 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right) e^2 + \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3e^2 - 3}{4} \text{ cm.gr.}
\end{aligned}$$

Así pues, el centro de masas de la placa tiene las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{3e^2 - 3}{4}}{\frac{e^2 + 1}{2}} = \frac{3e^2 - 3}{2(e^2 + 1)} \approx 1.1424 \text{ cm} \\
\bar{y} &= \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{e^2 - 1}{4}}{\frac{e^2 + 1}{2}} = \frac{e^2 - 1}{2(e^2 + 1)} \approx 0.3808 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.24. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria bidimensional es

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)/2} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- ¿Qué valor debe tener k para que f sea una función de densidad?
- Calcular la media de la variable bidimensional.

💡 Solución

- Para que f sea una función de densidad de probabilidad el volumen total encerrado entre la superficie de f y el plano $z = 0$ debe ser 1. Este volumen viene dado por la integral doble impropia

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy &= \int_0^\infty \int_0^\infty k e^{-(x+y)/2} dx dy = \int_0^\infty [-2k e^{-(x+y)/2}]_0^\infty dy \\ &= \int_0^\infty 2k e^{-y/2} dy = [-4k e^{-y/2}]_0^\infty = 4k,\end{aligned}$$

por lo que para que f sea función de densidad, debe ser $k = 1/4$.

- b. Las componentes x de la media muestral de la variable viene dada por la integral dobles impropias

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int_0^\infty \int_0^\infty x f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{4} x e^{-(x+y)/2} dx dy = \frac{1}{4} \int_0^\infty [(-2x - 4)e^{-(x+y)/2}]_0^\infty dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty 4e^{-y/2} dy = [-2e^{-y/2}]_0^\infty = 2.\end{aligned}$$

Y por simetría, la componente y vale lo mismo por lo que la media muestral es $(2, 2)$.