Problemas de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca

1/6/2022

Indice de contenidos

| Prefacio | | 3 |
|----------|---------------------------------|----|
| 1 | Teoría de conjuntos | 4 |
| 2 | Números reales | 14 |
| 3 | Topología de los números reales | 15 |

Prefacio

Colección de problemas de Análisis Matemático aplicado.

1 Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1. Dado el conjunto universo de los números de un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los subconjuntos correspondientes a sacar par en el lanzamiento de un dado $A = \{2, 4, 6\}$ y sacar menos de 5 en el lanzamiento de un dado $B = \{1, 2, 3, 4\}$, calcular e interpretar los siguientes conjuntos:

- a. $A \cup B$
- b. $A \cap B$
- c. \overline{A} y \overline{B}
- d. A B y B A
- e. $A\triangle B$
- f. $\overline{(A \cup B)}$
- g. $\overline{(A \cap B)}$
- h. $A \cup \overline{B}$
- i. $\overline{A} \cap B$

¿Qué conjuntos de números en el lanzamiento de un dado serían disjuntos con A? ¿Y con $A \cup B?$

Solución

- a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- b. $A \cap B = \{2, 4\}$
- c. $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ y $\overline{B} = \{5, 6\}$
- d. $A B = \{6\}$ y $B A = \{1, 3\}$
- e. $A \triangle B = \{1, 3, 6\}$
- f. $(A \cup B) = \{5\}$
- g. $(A \cap B) = \{1, 3, 5, 6\}$
- h. $A \cup \overline{B} = \{2, 4, 5, 6\}$
- i. $\overline{\overline{A} \cap B} = \{2, 4, 5, 6\}$

Serían disjuntos con A todos los conjuntos que solo tuviesen alguno de los números 1, 3 o 5, por ejemplo el conjunto $\{1,5\}$. El único conjunto disjunto con $A \cup B$, además del vacío es $\{5\}$.

Ejercicio 1.2. Expresar con operaciones entre los conjuntos A, B y C, los conjuntos que se corresponden con las regiones sombreadas en los siguientes diagramas.

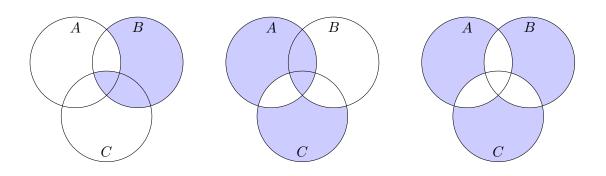


Figura 1.1: a.

Figura 1.2: b.

Figura 1.3: b.



- a. $(B-A) \cup (A \cap B \cap C)$
- b. $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap C)} \cap \overline{(B \cap C)} \cup (A \cap B \cap C)$
- c. $(A \cup B \cup C) ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

Ejercicio 1.3. Demostrar gráficamente las leyes de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejercicio 1.4. Construir por extensión el conjunto potencia del conjunto de los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$. ¿Cuál es su cardinal?



 $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{AB\}, \quad \{\emptyset, A\}, \{\emptyset, B\}, \{\emptyset, AB\}, \{A, B\}, \{A, AB\}, \{B, AB\}, \{\emptyset, A, B\}, \{\emptyset, A, AB\}, \{\emptyset, B\}, \{\emptyset$

Ejercicio 1.5. Construir el producto cartesiano del conjunto d los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$ y el conjunto de los factores Rh $R = \{Rh+, Rh-\}$.

$$S \times R = \{(0, \mathrm{Rh}+), (0, \mathrm{Rh}-), (A, \mathrm{Rh}+)), (A, \mathrm{Rh}-), \quad (B, \mathrm{Rh}+), (B, \mathrm{Rh}-), (AB, \mathrm{Rh}+), (AB, \mathrm{Rh}-)\}$$

Ejercicio 1.6. Demostrar que la relación $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x-y \text{ es par}\}$ es una relación de equivalencia.

Solución

Propiedad reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z} \ a-a=0$ es par, de manera que aRa.

Propiedad simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si aRb entonces a - b es par, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que a-b=2k. Por tanto, b-a=2(-k) también es par y bRa. Propiedad transitiva: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$, si aRb y bRc entonces a-b y b-c son pares, de manera que su suma a-b+b-c=a-c también es par, y aRc.

Ejercicio 1.7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son relaciones de equivalencia? ¿Cuáles don de orden?

- a. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

- $\begin{array}{l} \text{b. } R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\} \\ \text{c. } R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ \text{d. } R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{array}$

Solución

- a. R_1 es relación de equivalencia.
- b. R_2 es relación de orden.
- c. R_3 no es relación de equivalencia ni de orden porque no cumple las propiedades reflexiva y transitiva.
- d. R_4 es no es relación de equivalencia ni de orden porque tampoco cumple las propiedades reflexiva y transitiva.

Ejercicio 1.8. Para cada uno de los conjuntos siguientes, calcular si existe el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo.

- a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- b. $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$
- c. $C = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \le 1\}$

- a. $\sup(A) = 5$, $\inf(A) = 1$, $\max(A) = 5$, $\min(A) = 1$.
- b. $\inf(B) = 2$ y $\min(B) = 2$. No existe el supremo ni el máximo porque B no está acotado superiormente.
- c. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = 0$ y $\max(C) = 1$. No existe el mínimo.

Ejercicio 1.9. Dar ejemplos de funciones $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplan lo siguiente:

- a. f es inyectiva pero no sobreyectiva.
- b. f es sobreyectiva pero no inyectiva.
- c. f no es inyectiva ni sobrevectiva.
- d. f es biyectiva y distinta de la función identidad.

Solución

- a. f(x) = 2x
- b. $f(x) = x^3 x$.
- c. $f(x) = x^2$
- d. f(x) = 2x + 1

Ejercicio 1.10. Dadas las siguientes funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , estudiar cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas:

- a. $f(x) = x^2$
- b. $g(x) = x^3$
- c. $h(x) = x^3 x^2 2x$
- d. i(x) = |x|

Solución

- a. $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
- b. $g(x)=x^3$ es biyectiva. c. $h(x)=x^3-x^2-2x$ es sobreyectiva pero no inyectiva.

d. i(x) = |x| no es ni invectiva ni sobrevectiva.

Ejercicio 1.11. Demostrar que la composición de dos funciones inyectivas es también inyectiva.

Solución

Sean f y g dos funciones inyectivas tales que $\mathrm{Im}(f)\subseteq\mathrm{Dom}(g)$. Veamos que $g\circ f$ es inyectiva. Supongamos ahora que existen $a, b \in Dom(f)$ tales que $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, es decir, g(f(a)) = g(f(b)). Como g es inyectiva, se tiene que f(a) = f(b), y como f es inyectiva se tiene que a = b, con lo que $g \circ f$ es inyectiva.

Ejercicio 1.12. Dados dos conjuntos finitos A y B, demostrar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ y que $|A \times B| = |A||B|$.

🕊 Solución

a. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ con (A - B), $A \cup B$ y B - A disjuntos dos a dos, de manera que $|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$. Por otro lado, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, y $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, de modo que

 $|A| + |B| - |A \cap B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A| + |A \cap B| - |A \cap B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$ que coincide con el resultado anterior.

b. Supongamos que $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ y $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$, de manera que |A|=n y |B|=m. Para cada elemento $a_i\in A$ se pueden formar m pares $(a_i,b_1),\ldots(a_i,b_m)$. Como A tiene n elementos, en total se pueden formar $n \cdot m$ pares, así que $|A \times B| =$ $n \cdot m = |A||B|$.

Ejercicio 1.13. Dada una función $f:A\to B$, demostrar que si f es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$, y si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$. ¿Cómo es |A| en comparación con |B|cuando f es biyectiva?

Sea $f:A\to B$ inyectiva. Entonces para cualesquiera $a_1,a_2\in A$ con $a_1\neq a_2$ se tiene que $f(a_1)\neq f(a_2)$, por lo que $|A|\leq |B|$.

Sea $f:A\to B$ sobreyectiva. Entonces para todo $b\in B$ existe $a\in A$ tal que f(a)=b. Además dos elementos de B no pueden tener la misma preimagen porque entonces f no sería una función, por lo que $|A|\geq |B|$.

De lo anterior se deduce que si f es biyectiva, entonces |A| = |B|.

Ejercicio 1.14. Dados dos conjuntos finitos A y B con |A| = n y |B| = m. ¿Cuántas funciones distintas se pueden construir de A a B. ¿Y cuántas funciones inyectivas suponiendo que $n \le m$?



Se pueden construir m^n funciones distintas, y $\frac{m!}{(m-n)!}$ funciones inyectivas.

Ejercicio 1.15. Tomando el conjunto de los números naturales $\mathbb N$ como conjunto universo, dar un ejemplo de un subconjunto infinito cuyo complemento también sea infinito.

Solución

 $A=\{x\in\mathbb{N}:x\text{ es par}\}$ es infinito y $\overline{A}=\{x\in\mathbb{N}:x\text{ es impar}\}$ también es infinito.

Ejercicio 1.16. Demostrar que todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.

Solución

Sean A un conjunto infinito. Como A no es vacío, existe un elemento $a_1 \in A$. Considérese ahora el conjunto $A_1 = A \quad \{a_1\}$. Es evidente que A_1 sigue siendo infinito y podemos elegir otro elemento $a_2 \in A_1$ de manera que el conjunto $A_2 = A_1 - \{a_2\}$ sigue siendo infinito. Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos que el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es un subconjunto de A que es numerable.

Ejercicio 1.17. Demostrar que un conjunto es infinito si y solo si es equipotente a un subconjunto propio.

Solución

Sea A un conjunto. Si A es finito, entonces cualquier subconjunto $B\subset A$ cumple que |B|<|A| por lo que no se puede establecer una biyección entre A y B.

Si A es infinito, por el ejercicio anterior se tiene que existe un subconjunto numerable $B = \{a_1, a_2, ...\} \subseteq A$. Si tomamos la aplicación $f: B \to B \ \{a_1\}$ dada por $f(a_i) = a_{i+1}$, entonces f es biyectiva, y su extensión $\hat{f}: A \to A \ \{a_1\}$ dada por

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin B \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es también biyectiva, por lo que A es equipotente a A $\{a_1\}$ que es un subconjunto propio suyo.

Ejercicio 1.18. Demostrar que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable. X el producto cartesiano de n conjuntos numerables?

Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables. Entonces existe una aplicación inyectiva $f:A\to\mathbb{N}$ y otra $g:B\to\mathbb{N}$. Si se toma ahora la función $h:A\times B\to\mathbb{N}$ definida como

$$f(a,b)=2^{f(a)}3^{g(b)}\,\forall a\in A,b\in B,$$

se tiene que f es inyectiva y por tanto $A \times B$ es numerable.

Por inducción, es fácil probar que el producto cartesiano de n conjuntos numerables es también numerable.

Ejercicio 1.19. Demostrar que el conjunto de los números racionales es numerable.

Solución

Si se considera la aplicación $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ que a cada número racional r le hace corresponder el par $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ donde $\frac{p}{q}$ es la fracción irreducible de r con denominador positivo, se tiene que f es inyectiva. Como el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable, existe otra aplicación inyectiva de $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, con lo que $g\circ f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ es

invectiva y \mathbb{Q} es numerable.

Ejercicio 1.20. Demostrar que la unión de dos conjuntos numerables es numerable.

Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables disjuntos. Entonces existen dos biyecciones $f:A\to \mathbb{N}$ y $g:B\to \mathbb{N}$. A partir de estas biyecciones se puede definir otra $h:A\cup B\to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1 & \text{si } x \in A \\ 2g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Así pues, $A \cup B$ es numerable.

Si A y B no son disjuntos, entonces $A \cup B = A \cup (B \ A)$. Si $B \ A = \{b_1, \dots, b_n\}$ es finito, se puede tomar la biyección $g = \{(b_1, 1), \dots, (b_n, n)\}$ y, a partir de ella, construir la biyección $h: A \cup B \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + n & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \ A \end{cases}$$

Mientras que si B A es infinito, se puede razonar como al principio pues A y B A son disjuntos.

Ejercicio 1.21. Demostrar que el conjunto de los números irracionales no es numerable.

Solución

Ya hemos visto en el ejercicio Ejercicio 1.19 que $\mathbb Q$ es numerable, de manera que si $\mathbb R$ $\mathbb Q$ fuese numerable, entonces por el Ejercicio 1.20 $\mathbb Q \cup \mathbb R$ $\mathbb Q = \mathbb R$ sería numerable, lo cual no es cierto.

Ejercicio 1.22. Demostrar la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable.

Sea A un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por ser A numerable existe una biyección $f:\mathbb{N}\to A$, de manera que podemos enumerar los elementos de A de tal forma que $A_i=f(i)$. Del mismo modo, como cada conjunto A_i es numerable se puede establecer una enumeración de sus elementos $A_i=\{a_{i1},a_{i2},\ldots\}$. Así pues, podemos representar los elementos de $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ en una tabla como la siguiente

Siguiendo el orden de las flechas es posible enumerar todos los elementos de este conjunto, por lo que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

Ejercicio 1.23. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros $P = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}\}$ es numerable. ¿Y el de los polinomios con coeficientes racionales?

Solución

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n el conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes enteros $P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{Z}\}$. Para cada polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in P_n$ podemos establecer una biyección entre sus coeficientes y la tupla $p_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, con $a_i \in \mathbb{Z}$. Por tanto, existe una biyección entre P_n y \mathbb{Z}^n , y como \mathbb{Z}^n es numerable, el P_n también lo es.

Finalmente, $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_n$ que es la unión numerable de conjuntos numerables, que, como ya se vió en el Ejercicio 1.22, es numerable.

Ejercicio 1.24. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son numerables?

- a. $A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$
- b. $B = \{x \in \mathbb{Q} : -10 < x < 10\}$
- c. $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$
- $d. D = \{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}\}\$
- e. $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

Ejercicio 1.25. ¿Es el conjunto de todas las secuencias infinitas de ADN numerable?

2 Números reales

Ejercicio 2.1. Usando la propiedad arquimediana de los números reales, demostrar que para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$ con a > 0 existe un número natural n tal que $n - 1 \le a < n$.

Solución

Como a>0 se tiene que $\frac{1}{a}>0$, y por la propiedad arquimediana se cumple que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que x< n.

Considérese ahora el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : x < m\}$. Como x < n se tiene que $x \in A$ y por tanto A no está vacío. Aplicando ahora el principio de buena ordenación de los números naturales, como $A \subset \mathbb{N}$, existe un primer elemento $n_0 \in A$, tal que $n_0 - 1 \notin A$, de manera que $n_0 - 1 \le a$ y con ello se tiene que $n_0 - 1 \le a < n$.

Ejercicio 2.2. Se dice que un conjunto A es denso en \mathbb{R} si cada intervalo (a,b) de \mathbb{R} contiene algún elemento de A. Demostrar que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} .

Solución

La prueba es la misma que la de la propiedad arquimediana. Basta con tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Si ahora se toma el primer múltiplo de 1/n tal que $a < \frac{m}{n}$, también se cumplirá que $\frac{m}{n} < b$, ya que de lo contrario $\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n}$ lo que lleva a la contradicción de que $\frac{1}{n} > b - a$.

Ejercicio 2.3. Dado un número real con $a \in \mathbb{R}$, demostrar que existe un número real x tal que x > 0 y $x^2 = a$.

3 Topología de los números reales

Ejercicio 3.1. Dada la sucesión de intervalos anidados $I_n = [0, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} = \{0\}$. Demostrar también que si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados entonces la intersección es vacía.

Ejercicio 3.2. Calcular el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos. ¿Tienen máximo y mínimo?

a.
$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 - 2 < 3\}$$

b. $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < 4x^2 - 3 \le 5\}$

Ejercicio 3.3. ¿Cuál es el interior del conjunto $A = \{a\}$?

Ejercicio 3.4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que a < b < c y sea $A = \{a\} \cup (b, c)$. Calcular Int(A), Ext(A) y Fr(A).

Ejercicio 3.5. Demostrar que el conjunto de los números racionales no tiene puntos interiores. ¿Y el conjunto de los números irracionales?

Ejercicio 3.6. Demostrar que si x es un punto interior de A y $A \subseteq B$, entonces x también es un punto interior de B.

Ejercicio 3.7. Demostrar que si x es un punto interior de dos conjuntos A y B, entonces también es un punto interior de su unión y su intersección.

Ejercicio 3.8. Demostrar que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$.

Demostrar también que el anterior resultado no es cierto para la unión, es decir, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no se cumple siempre que $\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B)$.

Ejercicio 3.9. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, probar que los conjuntos $\operatorname{Int}(A)$, $\operatorname{Ext}(A)$ y $\operatorname{Fr}(A)$ forman una partición de \mathbb{R} .

Ejercicio 3.10. Dar un ejemplo de dos conjuntos no abiertos pero cuya intersección es abierta.

Ejercicio 3.11. Probar las siguientes propiedades:

- a. La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- b. La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- c. La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.
- d. La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.