Problemas de Análisis Matemático





Indice de contenidos

Prefacio		3
1	Teoría de conjuntos	4
2	Números reales	14
3	Topología de los números reales	18
4	Sucesiones de números reales	25

Prefacio

Colección de problemas de Análisis Matemático aplicado.

1 Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1. Dado el conjunto universo de los números de un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los subconjuntos correspondientes a sacar par en el lanzamiento de un dado $A = \{2, 4, 6\}$ y sacar menos de 5 en el lanzamiento de un dado $B = \{1, 2, 3, 4\}$, calcular e interpretar los siguientes conjuntos:

- a. $A \cup B$
- b. $A \cap B$
- c. \overline{A} y \overline{B}
- d. A B y B A
- e. $A\triangle B$
- f. $\overline{(A \cup B)}$
- g. $(A \cap \overline{B})$
- h. $\underline{A \cup B}$
- i. $\overline{A} \cap B$

¿Qué conjuntos de números en el lanzamiento de un dado serían disjuntos con A? ¿Y con $A \cup B$?

Solución

- a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- b. $A \cap B = \{2, 4\}$
- c. $\overline{A} = \{1, 3, 5\} \text{ y } \overline{B} = \{5, 6\}$
- d. $A B = \{6\}$ y $B A = \{1, 3\}$
- e. $A\triangle B = \{1, 3, 6\}$
- $f. \ \overline{(A \cup B)} = \{5\}$
- g. $\overline{(A \cap B)} = \{1, 3, 5, 6\}$
- h. $A \cup \overline{B} = \{2, 4, 5, 6\}$
- i. $\overline{\overline{A} \cap B} = \{2, 4, 5, 6\}$

Serían disjuntos con A todos los conjuntos que solo tuviesen alguno de los números 1, 3 o 5, por ejemplo el conjunto $\{1,5\}$. El único conjunto disjunto con $A \cup B$, además del vacío es $\{5\}$.

Ejercicio 1.2. Expresar con operaciones entre los conjuntos A, B y C, los conjuntos que se corresponden con las regiones sombreadas en los siguientes diagramas.



Figura 1.1: a.

Figura 1.2: b.

Figura 1.3: b.

Solución

- a. $(B-A) \cup (A \cap B \cap C)$
- b. $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap C)} \cap \overline{(B \cap C)} \cup (A \cap B \cap C)$
- c. $(A \cup B \cup C) ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

Ejercicio 1.3. Demostrar gráficamente las leyes de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejercicio 1.4. Construir por extensión el conjunto potencia del conjunto de los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$. ¿Cuál es su cardinal?

Solución

$$\begin{split} \mathcal{P}(S) &= \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{AB\}, \\ \{\emptyset, A\}, \{\emptyset, B\}, \{\emptyset, AB\}, \{A, B\}, \{A, AB\}, \{B, AB\}, \{\emptyset, A, B\}, \\ \{\emptyset, A, AB\}, \{\emptyset, B, AB\}, \{A, B, AB\}, \\ \{\emptyset, A, B, AB\}\} \end{split}$$

Ejercicio 1.5. Construir el producto cartesiano del conjunto d los grupos sanguíneos $S = \{0, A, B, AB\}$ y el conjunto de los factores Rh $R = \{Rh+, Rh-\}$.

Solución

$$S \times R = \{(0, Rh+), (0, Rh-), (A, Rh+)), (A, Rh-), (B, Rh+), (B, Rh-), (AB, Rh+), (AB, Rh-)\}$$

Ejercicio 1.6. Demostrar que la relación $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x-y \text{ es par}\}$ es una relación de equivalencia.

Solución

Propiedad reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z} \ a - a = 0$ es par, de manera que aRa.

Propiedad simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si aRb entonces a - b es par, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que a-b=2k. Por tanto, b-a=2(-k) también es par y bRa. Propiedad transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, si aRb y bRc entonces a - b y b - c son pares, de manera que su suma a - b + b - c = a - c también es par, y aRc.

Ejercicio 1.7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son relaciones de equivalencia? ¿Cuáles don de orden?

- $\begin{aligned} &\text{a. } R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \\ &\text{b. } R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\} \\ &\text{c. } R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ &\text{d. } R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$

🅊 Solución

- a. R_1 es relación de equivalencia.
- b. R_2 es relación de orden.
- c. R_3 no es relación de equivalencia ni de orden porque no cumple las propiedades reflexiva y transitiva.
- d. ${\cal R}_4$ es no es relación de equivalencia ni de orden porque tampoco cumple las propiedades reflexiva y transitiva.

Ejercicio 1.8. Para cada uno de los conjuntos siguientes, calcular si existe el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo.

- a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- b. $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}\$
- c. $C = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \le 1\}$

Solución

- a. $\sup(A) = 5$, $\inf(A) = 1$, $\max(A) = 5$, $\min(A) = 1$.
- b. $\inf(B)=2$ y $\min(B)=2$. No existe el supremo ni el máximo porque B no está acotado superiormente.
- c. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = 0$ y $\max(C) = 1$. No existe el mínimo.

Ejercicio 1.9. Dar ejemplos de funciones $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplan lo siguiente:

- a. f es inyectiva pero no sobreyectiva.
- b. f es sobreyectiva pero no inyectiva.
- c. f no es inyectiva ni sobrevectiva.
- d. f es biyectiva y distinta de la función identidad.

Solución

- b. $f(x) = x^3 x$. c. $f(x) = x^2$
- d. f(x) = 2x + 1

Ejercicio 1.10. Dadas las siguientes funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , estudiar cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas:

- a. $f(x) = x^2$
- b. $g(x) = x^3$
- c. $h(x) = x^3 x^2 2x$
- d. i(x) = |x|

- a. $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
- b. $g(x) = x^3$ es biyectiva.
- c. $h(x) = x^3 x^2 2x$ es sobreyectiva pero no inyectiva.
- d. i(x) = |x| no es ni invectiva ni sobrevectiva.

Ejercicio 1.11. Demostrar que la composición de dos funciones inyectivas es también inyectiva.

Solución

Sean f y g dos funciones inyectivas tales que $FrIm(f) \subseteq FrDom(g)$. Veamos que $g \circ f$ es inyectiva. Supongamos ahora que existen $a, b \in FrDom(f)$ tales que $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, es decir, g(f(a)) = g(f(b)). Como g es inyectiva, se tiene que f(a) = f(b), y como f es inyectiva se tiene que $g \circ f$ es inyectiva.

Ejercicio 1.12. Dados dos conjuntos finitos A y B, demostrar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ y que $|A \times B| = |A||B|$.

Solución

a. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ con (A - B), $A \cup B$ y B - A disjuntos dos a dos, de manera que $|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$. Por otro lado, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, y $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, de modo que

$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A| + |A \cap B| - |A \cap B|$$
$$= |A - B| + |B - A| + |A \cap B|,$$

que coincide con el resultado anterior.

b. Supongamos que $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ y $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$, de manera que |A|=n y |B|=m. Para cada elemento $a_i\in A$ se pueden formar m pares $(a_i,b_1),\ldots(a_i,b_m)$. Como A tiene n elementos, en total se pueden formar $n\cdot m$ pares, así que $|A\times B|=n\cdot m=|A||B|$.

Ejercicio 1.13. Dada una función $f: A \to B$, demostrar que si f es inyectiva, entonces $|A| \le |B|$, y si f es sobreyectiva, entonces $|A| \ge |B|$. ¿Cómo es |A| en comparación con |B| cuando f es biyectiva?

Solución

Sea $f:A\to B$ inyectiva. Entonces para cualesquiera $a_1,a_2\in A$ con $a_1\neq a_2$ se tiene que $f(a_1)\neq f(a_2)$, por lo que $|A|\leq |B|$.

Sea $f:A\to B$ sobreyectiva. Entonces para todo $b\in B$ existe $a\in A$ tal que f(a)=b. Además dos elementos de B no pueden tener la misma preimagen porque entonces f no sería una función, por lo que $|A|\geq |B|$.

De lo anterior se deduce que si f es biyectiva, entonces |A| = |B|.

Ejercicio 1.14. Dados dos conjuntos finitos A y B con |A| = n y |B| = m. ¿Cuántas funciones distintas se pueden construir de A a B. ¿Y cuántas funciones inyectivas suponiendo que $n \le m$?

Solución

Se pueden construir m^n funciones distintas, y $\frac{m!}{(m-n)!}$ funciones inyectivas.

Ejercicio 1.15. Tomando el conjunto de los números naturales \mathbb{N} como conjunto universo, dar un ejemplo de un subconjunto infinito cuyo complemento también sea infinito.

Solución

 $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}\$ es infinito y $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\}\$ también es infinito.

Ejercicio 1.16. Demostrar que todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.

Solución

Sean A un conjunto infinito. Como A no es vacío, existe un elemento $a_1 \in A$. Considérese ahora el conjunto $A_1 = A$ $\{a_1\}$. Es evidente que A_1 sigue siendo infinito y podemos elegir otro elemento $a_2 \in A_1$ de manera que el conjunto $A_2 = A_1 - \{a_2\}$

sigue siendo infinito. Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos que el conjunto $\{a_1,a_2,...\}$ es un subconjunto de A que es numerable.

Ejercicio 1.17. Demostrar que un conjunto es infinito si y solo si es equipotente a un subconjunto propio.

Solución

Sea A un conjunto. Si A es finito, entonces cualquier subconjunto $B \subset A$ cumple que |B| < |A| por lo que no se puede establecer una biyección entre A y B. Si A es infinito, por el ejercicio anterior se tiene que existe un subconjunto numerable $B = \{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq A$. Si tomamos la aplicación $f: B \to B \ \{a_1\}$ dada por $f(a_i) = a_{i+1}$, entonces f es biyectiva, y su extensión $\hat{f}: A \to A \ \{a_1\}$ dada por

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin B \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es también biyectiva, por lo que A es equipotente a A $\{a_1\}$ que es un subconjunto propio suyo.

Ejercicio 1.18. Demostrar que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable. ¿Y el producto cartesiano de n conjuntos numerables?

Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables. Entonces existe una aplicación inyectiva $f:A\to\mathbb{N}$ y otra $g:B\to\mathbb{N}$. Si se toma ahora la función $h:A\times B\to\mathbb{N}$ definida como

$$f(a,b) = 2^{f(a)}3^{g(b)} \, \forall a \in A, b \in B,$$

se tiene que f es inyectiva y por tanto $A \times B$ es numerable.

Por inducción, es fácil probar que el producto cartesiano de n conjuntos numerables es también numerable.

Ejercicio 1.19. Demostrar que el conjunto de los números racionales es numerable.

Si se considera la aplicación $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ que a cada número racional r le hace corresponder el par $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ donde $\frac{p}{q}$ es la fracción irreducible de r con denominador positivo, se tiene que f es inyectiva. Como el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable, existe otra aplicación inyectiva de $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, con lo que $g\circ f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ es inyectiva y \mathbb{Q} es numerable.

Ejercicio 1.20. Demostrar que la unión de dos conjuntos numerables es numerable.

Solución

Sean A y B dos conjuntos numerables disjuntos. Entonces existen dos biyecciones $f:A\to\mathbb{N}$ y $g:B\to\mathbb{N}$. A partir de estas biyecciones se puede definir otra $h:A\cup B\to\mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1 & \text{si } x \in A \\ 2g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Así pues, $A \cup B$ es numerable.

Si A y B no son disjuntos, entonces $A \cup B = A \cup (B \ A)$. Si $B \ A = \{b_1, \dots, b_n\}$ es finito, se puede tomar la biyección $g = \{(b_1, 1), \dots, (b_n, n)\}$ y, a partir de ella, construir la biyección $h: A \cup B \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + n & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \ A \end{cases}$$

Mientras que si B A es infinito, se puede razonar como al principio pues A y B A son disjuntos.

Ejercicio 1.21. Demostrar que el conjunto de los números irracionales no es numerable.

Solución

Ya hemos visto en el ejercicio Ejercicio 1.19 que $\mathbb Q$ es numerable, de manera que si $\mathbb R$ $\mathbb Q$ fuese numerable, entonces por el Ejercicio 1.20 $\mathbb Q \cup \mathbb R$ $\mathbb Q = \mathbb R$ sería numerable, lo cual no es cierto.

Ejercicio 1.22. Demostrar la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable.

Solución

Sea A un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por ser A numerable existe una biyección $f: \mathbb{N} \to A$, de manera que podemos enumerar los elementos de A de tal forma que $A_i = f(i)$. Del mismo modo, como cada conjunto A_i es numerable se puede establecer una enumeración de sus elementos $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, ...\}$. Así pues, podemos representar los elementos de $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ en una tabla como la siguiente

Siguiendo el orden de las flechas es posible enumerar todos los elementos de este conjunto, por lo que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

Ejercicio 1.23. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros $P=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n:n\in\mathbb{N},a_i\in\mathbb{Z}\}$ es numerable. ¿Y el de los polinomios con coeficientes racionales?



Solución

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n el conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes enteros $P_n=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n:a_i\in\mathbb{Z}\}.$ Para cada polinomio $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n:a_i\in\mathbb{Z}\}$ $a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in P_n$ podemos establecer una biyección entre sus coeficientes y la tupla $p_n=(a_0,a_1,\dots,a_n),$ con $a_i\in\mathbb{Z}.$ Por tanto, existe una biyección entre P_n y $\mathbb{Z}^n,$ y como \mathbb{Z}^n es numerable, el P_n también lo es.

Finalmente, $P=\cup_{i=1}^{\infty}P_n$ que es la unión numerable de conjuntos numerables, que, como ya se vió en el Ejercicio 1.22, es numerable.

Ejercicio 1.24. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son numerables?

- a. $A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$
- b. $B = \{x \in \mathbb{Q} : -10 < x < 10\}$
- c. $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$

$$\begin{aligned} &\text{d. }D = \{(x,y): x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}\}\\ &\text{e. }E = \{1/n: n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.25. ¿Es el conjunto de todas las secuencias infinitas de ADN numerable?

2 Números reales

Ejercicio 2.1. Para los siguientes subconjuntos de números reales, determinar si están acotados por arriba o por abajo, y en tal caso dar el supremo o el ínfimo.

- a. $A = \{-1, 0, 1\}$ b. B = [0, 1)
- c. $C = (0, \infty)$
- d. $D = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e. $E = \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$
- f. $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 3x + 2 = 0\}$
- g. $G = \{x \in \mathbb{R} : x^3 x < 0\}$

Solución

- a. A está acotado por arriba y por abajo. $\sup(A) = 1$ y $\inf(A) = -1$.
- b. B está acotado por arriba y por abajo. $\sup(B)=1$ y $\inf(B)=0$.
- c. C está acotado por abajo, pero no por arriba. $\inf(C) = 0$.
- d. D está acotado por arriba y por abajo. $\sup(D) = 2$ y $\inf(D) = 1$.
- e. E no está acotado por arriba ni por abajo.
- f. F está acotado por arriba y por abajo. $\sup(F) = 2$ y $\inf(F) = 1$.
- g. G está acotado por arriba pero no por abajo. $\sup(G) = 1$.

Ejercicio 2.2. Calcular el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos. ¿Tienen máximo y mínimo?

- a. $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 2 < 7\}$ b. $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < 4x^2 3 \le 5\}$

- a. $A=(-3,-2)\cup(2,3)$, que como está acotado tiene supremo $\sup(A)=3$ e ínfimo $\inf(A)=-3$. Sin embargo, $3\notin A$ y $-3\notin A$, por lo que no tiene ni máximo ni mínimo.
- b. $B = [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$, que como está acotado tiene supremo $\sup(B) = \sqrt{2}$ e ínfimo $\inf(B) = -\sqrt{2}$. Como además, $-\sqrt{2} \in B$ y $\sqrt{2} \in B$, se tiene que $\max(B) = \sqrt{2}$ y $\min(B) = -\sqrt{2}$.

Ejercicio 2.3. Dadas dos funciones f y g ambas con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que si sus imágenes están acotadas y $f(a) \leq g(a) \ \forall a \in A$, entonces $\sup(FrIm(f)) \leq \sup(FrIm(g))$.

Solución

Como las imágenes de f y g están acotadas, y suponiendo que no fuesen vacías, por el axioma del supremo, se tiene que existe $c,d\in\mathbb{R}$ tales que $c=\sup(FrIm(f))$ y $d=\sup(FrIm(g))$. Como d es el supremo de la imagen de g, se tiene que es una cota superior de la imagen de f, ya que, para cualquier $a\in A$, se tiene $f(a)\leq g(a)\leq d$. Por consiguiente, tiene que ser $c\leq d$, ya que de lo contrario c no sería el supremo por ser d una cota superior de la imagen de f menor que c.

Ejercicio 2.4. Demostrar que si $c \in \mathbb{R}$ es una cota superior de un conjunto A, entonces -c es una cota inferior del conjunto de los opuestos $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, y si c es una cota inferior de A entonces -c es una cota superior de A'.

Solución

Sea $c \in \mathbb{R}$ una cota superior del conjunto A. Entonces, $a \leq c \ \forall a \in A$. De ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$a < c \Rightarrow (-1)a \ge (-1)c \Rightarrow -a \ge -c$$

lo que demuestra que -c es una cota inferior de A'.

Del mismo modo, si c una cota inferior del conjunto A. Entonces, $c \le a \ \forall a \in A$, y de ello se deduce que para cualquier $a \in A$,

$$c < a \Rightarrow (-1)c \ge (-1)a \Rightarrow -c \ge -a$$

de manera que -c es cota superior de A'.

Ejercicio 2.5. Demostrar que todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene un ínfimo.

Solución

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A. Si tomamos ahora el conjunto $A' = \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que -c es una cota superior de A'. Así pues, A' es un conjunto no vacío y acotado superiormente, y por el axioma del supremo, existe $-s \in \mathbb{R}$ tal que $-s = \sup(A')$.

Veamos ahora que s es el ínfimo de A. Como -s es el supremo de A', es una cota superior de A', y por el ejercicio Ejercicio 2.4, se cumple que -(-s) = s es cota inferior de A. Supongamos ahora que existe otra cota inferior x de A tal que x > s. Entonces, aplicando una vez más el Ejercicio 2.4, se tiene que -x es cota superior de A', pero $x > s \Rightarrow (-1)x < (-1)s \Rightarrow -x < -s$, lo que contradice que -s sea el supremo de A', ya que -x sería una cota superior menor que -s. Luego s es el ínfimo de A.

Ejercicio 2.6. Demostrar que $|a| - |b| \le |a - b| \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Solución

Veamos todas las posibilidades que pueden darse:

- Si a = 0, entonces $|a| |b| = -|b| \le |-b| = |a b|$.
- Si b = 0, entonces |a| |b| = |a| = |a b|.
- Si $a \ge b > 0$, entonces |a| |b| = a b = |a b|.
- Si $b \ge a > 0$, entonces $|a| |b| = a b \le 0 \le |a b|$.
- Si a > 0 > b, entonces |a| |b| = a (-b) = a + b < a b = |a b|.
- Si b > 0 > a, entonces |a| |b| = -a b < -a + b = -(a b) = |a b|.
- Si $a \le b < 0$, entonces |a| |b| = -a (-b) = -a + b = -(a b) = |a b|.
- Si $b \le a < 0$, entonces $|a| |b| = -a (-b) = -a + b \le 0 \le |a b|$.

Ejercicio 2.7. Usando la propiedad arquimediana de los números reales, demostrar que para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$ con a > 0 existe un número natural n tal que $n-1 \le a < n$.

Como a>0 se tiene que $\frac{1}{a}>0$, y por la propiedad arquimediana se cumple que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que a< n.

Considérese ahora el conjunto $A=\{m\in\mathbb{N}:a< m\}$. Como a< n se tiene que $n\in A$ y por tanto A no está vacío. Aplicando ahora el principio de buena ordenación de los números naturales, como $A\subset\mathbb{N}$, existe un primer elemento $n_0\in A$, tal que $n_0-1\notin A$, de manera que $n_0-1\le a$ y con ello se tiene que $\$n_0-1\le a< n$.

Ejercicio 2.8. Se dice que un conjunto A es denso en \mathbb{R} si cada intervalo (a,b) de \mathbb{R} contiene algún elemento de A. Demostrar que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} .

Solución

La prueba es la misma que la de la propiedad arquimediana. Basta con tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b-a$. Si ahora se toma el primer múltiplo de 1/n tal que $a < \frac{m}{n}$, también se cumplirá que $\frac{m}{n} < b$, ya que de lo contrario $\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n}$ lo que lleva a la contradicción de que $\frac{1}{n} > b-a$.

3 Topología de los números reales

Ejercicio 3.1. Dada la sucesión de intervalos anidados $I_n = [0, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Demostrar también que si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados entonces la intersección es vacía.

Solución

En primer lugar, es fácil ver que $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ya que $0 \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que 0 es el único elemento de la intersección. Para cualquier x>0, aplicando la propiedad arquimediana se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$, de manera que $x \notin [0, \frac{1}{n}] = I_n$, por lo que $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Por tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Si se consideran intervalos abiertos en lugar de cerrados, entonces 0 tampoco pertenecería a la intersección y $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Ejercicio 3.2. ¿Cuál es el interior del conjunto $A = \{a\}$?

Solución

a no es un punto interior de A, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \nsubseteq A$. Por tanto, $FrInt(A) = \emptyset$.

En general, cualquier conjunto con un solo punto no tiene puntos interiores.

Ejercicio 3.3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que a < b < c y sea $A = \{a\} \cup (b, c)$. Calcular FrInt(A), FrExt(A) y FrFr(A).

Solución

Como el interior de un conjunto con un solo punto es vacío y el interior de un intervalo abierto es el propio intervalo abierto (ver proposición), se tiene que FrInt(A) = (a, b). Por otro lado, $\overline{A} = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (c, \infty)$, que al ser la unión de

intervalos abiertos se tiene que $FrExt(A) = FrInt(\overline{A}) = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (c, \infty)$. Finalmente, $FrFr(A) = \{a, b, c\}$, ya que cualquier entorno de estos puntos contiene puntos de A y de \overline{A} .

Ejercicio 3.4. Demostrar que todos los puntos de \mathbb{Z} son puntos frontera.

Solución

Sea $x \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ siempre contiene números enteros (por ejemplo el propio x), y números no enteros, por los que x es un punto frontera.

Ejercicio 3.5. Demostrar que el conjunto de los números racionales no tiene puntos interiores. ¿Y el conjunto de los números irracionales?



Solución

Sea $x \in \mathbb{Q}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, por la densidad de los números racionales, el entorno $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ siempre contiene números racionales, y por la densidad de los números irracionales también contiene números irracionales, de manera que todos los puntos de \mathbb{Q} son frontera y no tiene puntos interiores.

Por el mismo motivo, R Q tampoco tiene puntos interiores y todos sus puntos son puntos frontera.

Ejercicio 3.6. Demostrar que si x es un punto interior de A y $A \subseteq B$, entonces x también es un punto interior de B.



Solución

Sea x un punto interior de A. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno (x - 1) $\varepsilon, x + \varepsilon \subseteq A \subseteq B$, de manera que x también es un punto interior de B.

Ejercicio 3.7. Demostrar que si x es un punto interior de dos conjuntos A y B, entonces también es un punto interior de su unión y su intersección.

Sea x un punto interior de A y B. Entonces, existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq A \subseteq A \cup B$, de manera que x es también un punto interior de $A \cup B$.

Por otro lado, como x es también un punto interior de B, existe otro $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq B$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq B$, por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$, y x es también un punto interior de $A \cap B$.

Ejercicio 3.8. Demostrar que para cualesquiera dos conjuntos de números reales A y B, se cumple que $FrInt(A \cap B) = FrInt(A) \cap FrInt(B)$.

Demostrar también que el anterior resultado no es cierto para la unión, es decir, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no se cumple siempre que $FrInt(A \cup B) = FrInt(A) \cup FrInt(B)$.

Solución

En el Ejercicio 3.7 hemos visto que si x es un punto interior de A y B, entonces también lo es de su intersección. Veamos ahora el otro sentido de la implicación. Supongamos que x es un punto interior de $A \cap B$. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$. Pero como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, se tiene que x es también un punto interior de A y de B.

Para ver que este resultado no es cierto para la unión, basta con tomar A = (-1,0) y B = [0,1). Entonces $A \cup B = (-1,1)$, y al ser un intervalo abierto, $FrInt(A \cup B) = (-1,1)$. Sin embargo, FrInt(A) = (-1,0) y FrInt(B) = (0,1), por lo que $FrInt(A) \cup FrInt(B) = (-1,1)$ $\{0\} \neq (-1,1) = FrInt(A \cup B)$.

Ejercicio 3.9. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, probar que los conjuntos FrInt(A), FrExt(A) y FrFr(A) forman una partición de \mathbb{R} .

Solución

Veamos primero, que FrInt(A), FrExt(A) y FrFr(A) son disjuntos dos a dos.

- Si $x \in FrInt(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$. De aquí se deduce que $a \in A$, y por tanto $x \notin \overline{A}$ por lo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \nsubseteq \overline{A}$ $\forall \varepsilon > 0$ y x no es un punto exterior de A. Por otro lado, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$, por lo que este entorno de x no contiene puntos de \overline{A} y $x \notin FrFr(A)$.
- Si $x \in FrExt(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$.

De aquí se deduce que $x \notin A$, y por tanto x no es un punto interior de A. Por otro lado, como $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$, existe un entorno de x que no contiene puntos de A y $x \notin FrFr(A)$.

• Si $x \in FrFr(A)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contiene puntos de A y de \overline{A} , de manera que, no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ o $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$, así que, x no es un punto interior ni exterior de A.

Veamos ahora que $FrInt(A) \cup FrExt(A) \cup FrFr(A) = \mathbb{R}$, o dicho de otro modo, cualquier $x \in \mathbb{R}$ debe pertenecer a alguno de estos conjuntos.

- Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$, entonces x es un punto interior de A.
- En caso contrario, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \overline{A}$, entonces x es un punto exterior de A.
- Finalmente, si para cualquier $\varepsilon > 0$ $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \nsubseteq A$ y $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \nsubseteq \overline{A}$, se tiene que $(x \varepsilon, x + \varepsilon)$ contiene tanto puntos de A como de \overline{A} , por lo que x es un punto frontera de A.

Ejercicio 3.10. Calcular los puntos de adherencia y de acumulación del conjunto $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$

Solución

Como $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},\ 1$ es un punto de acumulación de A, ya que para cualquier $\varepsilon>0,\ (1-\varepsilon,1+\varepsilon)\ \{1\}$ contiene puntos de A. Para verlo, basta aplicar la propiedad arquimediana, de manera que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}<\varepsilon$, de manera que $1+\frac{1}{n}<1+\varepsilon$, y por tanto $1-\varepsilon,1+\varepsilon$ $1+\varepsilon$.

Para calcular los puntos de adherencia de A basta tener en cuenta que $A\subseteq FrAdh(A)$, y que $FrAc(A)\subseteq FrAdh(A)$, por lo que 1 también es un punto de adherencia de A. Veamos ahora que cualquier otro punto, no es punto de adherencia de A. Si x<1, tomando $\varepsilon=|x-1|$ el entorno $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ no contiene puntos de A. Del mismo modo, si x>2, tomando $\varepsilon=|x-2|$ el entorno $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ tampoco contiene puntos de A. Finalmente, si $1< x\leq 2$, por la propiedad arquimediana, existe $n\in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1}\leq x<\frac{1}{n}$. Tomando $\varepsilon=\min(\{|x-\frac{1}{n+1}|,|x-\frac{1}{n}|\})$ también se tiene que el entorno $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ no contiene puntos de A. Por tanto, $FrAdh(A)=A\cup\{1\}$.

Para calcular los puntos de acumulación de A, ya sabemos que 1 es un punto de acumulación y faltaría por ver si algún otro punto de A es un punto de acumulación de A, ya que el resto de puntos no pertenecen a la adherencia y por tanto no pueden ser puntos de acumulación al ser $FrAc(A) \subseteq FrAdh(A)$. Ahora bien, si $x \in A$,

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 1 + \frac{1}{n}$, de manera que tomando $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ se tiene que el entorno reducido $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ $\{x\}$ no contiene puntos de A, por lo que x no es punto de acumulación de A. Así pues, $FrAc(A) = \{1\}$.

Ejercicio 3.11. Calcular los puntos de adherencia y de acumulación de $\mathbb Z$ y también de $\mathbb Q$.

Solución

 $FrAdh(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ y } FrAc(\mathbb{Z}) = \emptyset.$ $FrAdh(\mathbb{Q}) = FrAc(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$

Ejercicio 3.12. Dar un ejemplo de dos conjuntos no abiertos pero cuya intersección es abierta.

Solución

Si se toma A=[0,2) y B=(1,3], tanto A como B no son abiertos, pero $A\cap B=(1,2)$ que es un conjunto abierto.

Ejercicio 3.13. Estudiar si el conjunto de los números racionales $\mathbb Q$ es abierto o cerrado.

Solución

 $\mathbb Q$ no es abierto ya que como se vio en el Ejercicio 3.5 $FrInt(\mathbb Q)=\emptyset$. En el mismo ejercicio se vio también que $FrInt(\overline{\mathbb Q})=FrInt(\mathbb R \ \mathbb Q)=\emptyset$, por lo que $\mathbb Q$ tampoco es cerrado.

Ejercicio 3.14. Probar las siguientes propiedades:

- a. La unión de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- b. La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- c. La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.
- d. La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

- a. Sea A_n $n \in \mathbb{N}$ una colección arbitraria de conjuntos abiertos y sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, y como A_n es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el entorno $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, por lo que x es un punto interior de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
- b. Vamos a probarlo por inducción. Sean A_1 y A_2 dos conjuntos abiertos. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x \in A_1 \cap A_2$. Entonces, como $x \in A_1$ existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que el entorno $(x \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq A_1$, y como $x \in A_2$ existe un $\varepsilon_2 > 0$ tal que el entorno $(x \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq A_2$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_1$ y $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_2$, por lo que $(x \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A_1 \cap A_2$, y $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto.
 - Sea ahora una colección A_1,\dots,A_m,A_{m+1} una colección de conjuntos abiertos y supongamos que $A=\cap_{n=1}^m A_n$ es un conjunto abierto. Si $A\cap A_{m+1}=\emptyset$ ya estaría probado. En caso contrario, sea $x\in A\cap A_{m+1}$. Entonces, como $x\in A$ existe un $\varepsilon_1>0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_1,x+\varepsilon_1)\subseteq A$, y como $x\in A_{m+1}$ existe un $\varepsilon_2>0$ tal que el entorno $(x-\varepsilon_2,x+\varepsilon_2)\subseteq A_{m+1}$. Tomando $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, se tiene que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$ y $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A_{m+1}$, por lo que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A\cap A_{m+1}$, y $\cap_{n=1}^{m+1}A_n$ es un conjunto abierto.
- c. Sea $A_n, n \in \mathbb{N}$, una colección arbitraria de conjuntos cerrados. Entonces, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Como A_n es cerrado, $\overline{A_n}$ es abierto $\forall n \in \mathbb{N}$, y por el apartado (a), se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n}$ es abierto y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es cerrado.
- d. Sea ahora una colección A_1,\ldots,A_n una colección de conjuntos cerrados. De nuevo, aplicando la ley de Morgan, se tiene que $\overline{\cup_{n=1}^\infty A_n} = \cap_{n=1}^\infty \overline{A_n}$. Como A_i es cerrado, $\overline{A_i}$ es abierto $\forall i=1,\ldots,n,$ y por el apartado (b), se tiene que $\cap_{n=1}^\infty \overline{A_n}$ es un conjunto abierto, por lo que $\overline{\cup_{n=1}^\infty A_n}$ es abierto y $\cup_{n=1}^\infty A_n$ es cerrado.

Ejercicio 3.15. Demostrar que la adherencia de cualquier conjunto es siempre cerrada.

Solución

 y por consiguiente $\overline{FrAdh(A)}$ es abierto y FrAdh(A) es cerrado.

Ejercicio 3.16. Demostrar que cualquier conjunto es cerrado si y solo si coincide con su adherencia.

Solución

Sea A un conjunto cerrado. Ya sabemos que $A\subseteq FrAdh(A)$. Supongamos ahora que existe un punto $x\in FrAdh(A)$ A. Entonces, como x es un punto de adherencia de A, para cualquier $\varepsilon>0$, $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$, pero como $x\notin A$, también se cumple que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ $\{x\}\cap A\neq\emptyset$, por lo que x es un punto de acumulación de A, pero eso contradice que A sea un conjunto cerrado, pues no contiene a todos sus puntos de acumulación (ver teorema). Así pues, FrAdh(A)=A. Para probar el otro sentido de la implicación, supongamos que FrAdh(A)=A. Entonces, para cualquier $x\in\overline{A}$ existe un $\varepsilon>0$ tal que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\emptyset$, por lo que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq\overline{A}$ y \overline{A} es abierto, de manera que A es cerrado.

4 Sucesiones de números reales

Ejercicio 4.1. Demostrar que la sucesion $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

Ejercicio 4.2. Demostrar, aplicando la definición de límite de una sucesión, que las siguientes sucesiones convergen a los valores dados.

- $\begin{array}{l} \text{a. } \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n^2} = 0 \\ \text{b. } \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 1}{3n^2 + n 2} = \frac{1}{3} \\ \text{c. } \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2 n} = 3 \end{array}$

Ejercicio 4.3. Demostrar que si una sucesión de números reales converge a x, entonces la sucesión de sus valores absolutos converge a |x|. ¿Es cierto lo contrario?

Ejercicio 4.4. Demostrar que si una sucesión de números reales positivos converge a x, entonces la sucesión de sus raíces cuadradas positivas converge a \sqrt{x} .

Ejercicio 4.5. Demostrar que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales acotada e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión que converge a 0, entonces la sucesión $(x_ny_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge a 0.

Ejercicio 4.6. Demostrar las siguientes sucesiones convergen a 0 usando el teorema de compresión de sucesiones.

- a. $\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ b. $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ c. $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$