Exámenes de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Indice de contenidos

Prefacio

Colección de exámenes de Análisis Matemático Real del grado en Ingeniería Matemática.

1 Examen del 14-11-2022

Ejercicio 1.1. Calcular los puntos de acumulación del conjunto $A = [0,1] \cup \{\frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$. ¿Es un conjunto cerrado? ¿Y abierto?

Solución

Veamos primero que todos los puntos del intervalo $[0,1]$ son puntos de acumulación. Sea $x \in [0,1]$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, por la densidad de los números reales, el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ contiene puntos de $[0,1]$, y por tanto x es un punto de acumulación de $[0,1]$.
Veamos ahora que el conjunto $B = \{\frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} = \{1 + \frac{1}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ solo tiene 1 como punto de acumulación. En primer lugar, 1 es punto de acumulación, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \quad \{1\}$ contiene puntos de A. Para verlo, basta aplicar la propiedad arquimediana, por la que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de manera que $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$, y por tanto $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \quad \{1\} \cap B \neq \emptyset$.
Si $x < 1$, tomando $\varepsilon = |x-1|$ el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ no contiene puntos de B. Del mismo modo, si $x > 2$, tomando $\varepsilon = |x-2|$ el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ tampoco contiene puntos de B. Finalmente, si $1 < x \leq 2$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1}$. Tomando $\varepsilon = \min(\{|x-\frac{1}{n}|, |x-\frac{1}{n-1}|\})$ también se tiene que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \{x\}$ no contiene puntos de B. Por tanto, 1 es el único punto de acumulación de B.
Así pues, $FrAc(A) = [0,1]$, y como $FrAc(A) \subseteq A$, A es cerrado ya que contienen a todos sus puntos de acumulación (ver teorema), y por tanto, no puede ser abierto ya que los únicos conjuntos cerrados y abiertos a la vez son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

Ejercicio 1.2. Dada la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$,

a. Calcular, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto de sus términos.
b. Demostrar que la sucesión converge a 0.

Solución

a. La sucesión es monótona decreciente, ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^n < 2^{n+1}$, y por tanto, $x_n = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}} = x_{n+1}$. Así pues, el primer término de la sucesión $x_1 = 1/2$ es su máximo, y por tanto el supremo.

   Veamos ahora que 0 es ínfimo por reducción al absurdo. En primer lugar, 0 es una cota inferior de la sucesión, pues todos sus términos son positivos. Supongamos ahora que existe otra cota inferior $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < c$. Ahora bien, como $n < 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < c$, por lo que el termino n de la sucesión es menor que c, lo que contradice que sea cota inferior. Así pues, 0 es el ínfimo. Sin embargo, la sucesión no tiene mínimo, pues $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. Como la sucesión es monótona decreciente y está acotada inferiormente, por el teorema de la convergencia de una sucesión monónota la sucesión converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

Ejercicio 1.3. La rentabilidad de un bono cada año, en porcentaje, viene dada por la sucesión recurrente $x_1 = 3$ y $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3}$. ¿Hacia dónde converge la rentabilidad del bono a medida que pasa el tiempo?

Solución

Veamos que primero que la sucesión es monótona decreciente. $x_1 = 3 > x_n = \sqrt{\frac{3}{2} + 3} = 2.12$. Supongamos ahora que $x_{n-1} > x_n$. Entonces

$$x_{n-1} > x_n \Rightarrow \frac{x_{n-1}}{2} > \frac{x_n}{2} \Rightarrow \frac{x_{n-1}}{2} + 3 > \frac{x_n}{2} + 3$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x_{n-1}}{2} + 3} > \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3} \Rightarrow x_n > x_{n+1}.$$

Por otro lado, es fácil ver que la sucesión está acotada inferiormente por 0 pues todos los términos son positivos. Así pues, por el teorema de la convergencia de una sucesión monónota, la sucesión converge a un número $x \in \mathbb{R}$. Para calcular el límite, aprovechando la recurrencia de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2} + 3} = \sqrt{\frac{x}{2} + 3}$$

Así pues, se cumple que $x = \sqrt{\frac{x}{2} + 3}$, y de ello se deduce

$$x = \sqrt{\frac{x}{2} + 3} \Rightarrow x^2 = \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow x^2 - 3 = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0,$$

y resolviendo la ecuación se tiene $x = -3/2$ y $x = 2$. Como todos los términos de la sucesión son positivos, es imposible que converja a $-3/2$, y por tanto la rentabilidad del bono converge al 2%.

Ejercicio 1.4. Demostrar, usando la definición de límite, que $\lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{2} = 2$.

Solución

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$, tal que si $|x-1| < \delta = \frac{2}{3}\varepsilon$ se tiene

$$\left|\frac{3x+1}{2} - 2\right| = \left|\frac{3x+1-4}{2}\right| = \left|\frac{3x-3}{2}\right| = \left|\frac{3(x-1)}{2}\right| = \frac{3}{2}|x-1| < \frac{3}{2}\frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ejercicio 1.5. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, demostrar que las siguientes funciones son infinitésimos equivalentes en $x = 0$:

a. $\ln(1+x)$ y x.
b. $e^x - 1$ y x.

Solución

Para que dos funciones f y g sean infinitésimos equivalentes en $x = 0$ se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

a.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) \\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln(e) = 1.\end{aligned}$$

b. Haciendo uso del resultado anterior se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(x+1)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Ejercicio 1.6. Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2$.

Solución

El dominio de la función es $FrDom(f) = \mathbb{R} - [-1, 0]$ de modo que solo puede haber asíntotas verticales a la izquierda de -1 o a la derecha de 0. Veamos primero, qué pasa con el límite por la izquierda en -1.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \ln\left(\frac{1}{-1}+1\right)(-1)^2 = \ln(0) = -\infty.$$

Por tanto, f tiene una asíntota vertical por la izquierda en $x = -1$.
Veamos ahora, qué pasa con el límite por la derecha en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)x^2\\
&= \lim_{x\to 0^+} (\ln(x+1) - \ln(x))x^2\\
&= \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1)x^2 - \lim_{x\to 0^+} \ln(x)x^2\\
&= \ln(0+1)0^2 - \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^2}\\
&= 0 - \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(1/x^2)'} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = &&\text{(L'Hôpital)}\\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f no tiene asíntota vertical en $x = 0$.
Para ver si hay asíntotas horizontales estudiamos los límites en el infinito.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)}{x^{-2}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1))'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{-1}+1}(-1)x^{-2}}{-2x^{-3}} &&\text{(L'Hôpital)}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2(x^{-1}+1)} = \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, f no tiene asíntota horizontal en ∞. Veamos ahora qué ocurre en $-\infty$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)}{x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1))'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^{-1}+1}(-1)x^{-2}}{-2x^{-3}} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2(x^{-1}+1)} = -\infty.
\end{aligned}
$$

Luego, f tampoco tiene asíntota vertical en $-\infty$.
Finalmente, veamos si f tiene asíntotas oblicuas.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\right) \\
&= \ln(e) = 1
\end{aligned}
$$

Por tanto, f tiene asíntota vertical en ∞ con pendiente $b=1$. Para obtener el término independiente de la asíntota, calculamos el siguiente límite.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 - x \\
&= \lim_{x\to\infty} (\ln(x^{-1}+1)x-1)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)x-1}{x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1)x-1)'}{(x^{-1})'} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x^{-1}+1)x^2}x + \ln(x^{-1}+1)}{(-1)x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x+1)} + \ln(x^{-1}+1)}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{-1}{(1+x)} + \ln(x^{-1}+1)\right)'}{(-x^{-2})'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x^{-1}+1)x^2}}{2x^{-3}} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)x}}{2x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2x}}{2x^{-3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{2(x^3+2x^2+x)} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

Así pues, f tiene una asíntota oblicua $y = x - \frac{1}{2}$ en ∞.
Del mismo modo se prueba que esta misma recta también es asíntota oblicua de f en $-\infty$.