Exámenes de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Tabla de contenidos

Prefacio

Colección de exámenes de Análisis Matemático Real del grado en Ingeniería Matemática.

1 2022-11-14 Examen de Análisis I

Ejercicio 1.1. Calcular los puntos de acumulación del conjunto $A = [0,1] \cup \{\frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$. ¿Es un conjunto cerrado? ¿Y abierto?

Solución

Veamos primero que todos los puntos del intervalo $[0,1]$ son puntos de acumulación. Sea $x \in [0,1]$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, por la densidad de los números reales, el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ contiene puntos de $[0,1]$, y por tanto x es un punto de acumulación de $[0,1]$.
Veamos ahora que el conjunto $B = \{\frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} = \{1 + \frac{1}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ solo tiene 1 como punto de acumulación. En primer lugar, 1 es punto de acumulación, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \setminus \{1\}$ contiene puntos de A. Para verlo, basta aplicar la propiedad arquimediana, por la que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de manera que $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$, y por tanto $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \setminus \{1\} \cap B \neq \emptyset$.
Si $x < 1$, tomando $\varepsilon = |x-1|$ el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ no contiene puntos de B. Del mismo modo, si $x > 2$, tomando $\varepsilon = |x-2|$ el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ tampoco contiene puntos de B. Finalmente, si $1 < x \leq 2$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1}$. Tomando $\varepsilon = \min(\{|x - \frac{1}{n}|, |x - \frac{1}{n-1}|\})$ también se tiene que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ no contiene puntos de B. Por tanto, 1 es el único punto de acumulación de B.
Así pues, $\mathrm{Ac}(A) = [0,1]$, y como $\mathrm{Ac}(A) \subseteq A$, A es cerrado ya que contienen a todos sus puntos de acumulación (ver teorema), y por tanto, no puede ser abierto ya que los únicos conjuntos cerrados y abiertos a la vez son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

Ejercicio 1.2. Dada la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$,

a. Calcular, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto de sus términos.
b. Demostrar que la sucesión converge a 0.

Solución

a. La sucesión es monótona decreciente, ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^n < 2^{n+1}$, y por tanto, $x_n = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}} = x_{n+1}$. Así pues, el primer término de la sucesión $x_1 = 1/2$ es su máximo, y por tanto el supremo.

   Veamos ahora que 0 es ínfimo por reducción al absurdo. En primer lugar, 0 es una cota inferior de la sucesión, pues todos sus términos son positivos. Supongamos ahora que existe otra cota inferior $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < c$. Ahora bien, como $n < 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < c$, por lo que el termino n de la sucesión es menor que c, lo que contradice que sea cota inferior. Así pues, 0 es el ínfimo. Sin embargo, la sucesión no tiene mínimo, pues $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. Como la sucesión es monótona decreciente y está acotada inferiormente, por el teorema de la convergencia de una sucesión monónota la sucesión converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

Ejercicio 1.3. La rentabilidad de un bono cada año, en porcentaje, viene dada por la sucesión recurrente $x_1 = 3$ y $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3}$. ¿Hacia dónde converge la rentabilidad del bono a medida que pasa el tiempo?

Solución

Veamos que primero que la sucesión es monótona decreciente. $x_1 = 3 > x_n = \sqrt{\frac{3}{2} + 3} = 2.12$. Supongamos ahora que $x_{n-1} > x_n$. Entonces

$$\begin{aligned} x_{n-1} > x_n \Rightarrow \frac{x_{n-1}}{2} > \frac{x_n}{2} \Rightarrow \frac{x_{n-1}}{2} + 3 > \frac{x_n}{2} + 3 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{x_{n-1}}{2} + 3} > \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3} \Rightarrow x_n > x_{n+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil ver que la sucesión está acotada inferiormente por 0 pues todos los términos son positivos. Así pues, por el teorema de la convergencia de una sucesión monónota, la sucesión converge a un número $x \in \mathbb{R}$. Para calcular el límite, aprovechando la recurrencia de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2} + 3} = \sqrt{\frac{x}{2} + 3}$$

Así pues, se cumple que $x = \sqrt{\frac{x}{2} + 3}$, y de ello se deduce

$$x = \sqrt{\frac{x}{2} + 3} \Rightarrow x^2 = \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow x^2 - 3 = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0,$$

y resolviendo la ecuación se tiene $x = -3/2$ y $x = 2$. Como todos los términos de la sucesión son positivos, es imposible que converja a $-3/2$, y por tanto la rentabilidad del bono converge al 2%.

Ejercicio 1.4. Demostrar, usando la definición de límite, que $\lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{2} = 2$.

Solución

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$, tal que si $|x-1| < \delta = \frac{2}{3}\varepsilon$ se tiene

$$\left|\frac{3x+1}{2} - 2\right| = \left|\frac{3x+1-4}{2}\right| = \left|\frac{3x-3}{2}\right| = \left|\frac{3(x-1)}{2}\right| = \frac{3}{2}|x-1| < \frac{3}{2}\frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ejercicio 1.5. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, demostrar que las siguientes funciones son infinitésimos equivalentes en $x = 0$:

a. $\ln(1+x)$ y x.
b. $e^x - 1$ y x.

Solución

Para que dos funciones f y g sean infinitésimos equivalentes en $x = 0$ se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

a.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) \\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln(e) = 1.\end{aligned}$$

b. Haciendo uso del resultado anterior se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(x+1)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Ejercicio 1.6. Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) x^2$.

Solución

El dominio de la función es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - [-1, 0]$ de modo que solo puede haber asíntotas verticales a la izquierda de -1 o a la derecha de 0. Veamos primero, qué pasa con el límite por la izquierda en -1.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \ln\left(\frac{1}{-1}+1\right)(-1)^2 = \ln(0) = -\infty.$$

Por tanto, f tiene una asíntota vertical por la izquierda en $x = -1$.
Veamos ahora, qué pasa con el límite por la derecha en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)x^2 \\
&= \lim_{x\to 0^+} (\ln(x+1) - \ln(x))x^2 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1)x^2 - \lim_{x\to 0^+} \ln(x)x^2 \\
&= \ln(0+1)0^2 - \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^2} \\
&= 0 - \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(1/x^2)'} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \qquad \text{(L'Hôpital)} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f no tiene asíntota vertical en $x = 0$.
Para ver si hay asíntotas horizontales estudiamos los límites en el infinito.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)}{x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1))'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{-1}+1}(-1)x^{-2}}{-2x^{-3}} \qquad \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2(x^{-1}+1)} = \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, f no tiene asíntota horizontal en ∞. Veamos ahora qué ocurre en $-\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)}{x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1))'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x^{-1}+1}(-1)x^{-2}}{-2x^{-3}} \qquad \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2(x^{-1}+1)} = -\infty.
\end{aligned}$$

Luego, f tampoco tiene asíntota vertical en $-\infty$.
Finalmente, veamos si f tiene asíntotas oblicuas.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\right) \\
&= \ln(e) = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, f tiene asíntota vertical en ∞ con pendiente $b = 1$. Para obtener el término independiente de la asíntota, calculamos el siguiente límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 - x \\
&= \lim_{x\to\infty} (\ln(x^{-1}+1)x - 1)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)x - 1}{x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1)x - 1)'}{(x^{-1})'} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x^{-1}+1)x^2}x + \ln(x^{-1}+1)}{(-1)x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x+1)} + \ln(x^{-1}+1)}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{-1}{(1+x)} + \ln(x^{-1}+1)\right)'}{(-x^{-2})'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x^{-1}+1)x^2}}{2x^{-3}} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)x}}{2x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2x}}{2x^{-3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{2(x^3+2x^2+x)} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Así pues, f tiene una asíntota oblicua $y = x - \frac{1}{2}$ en ∞.
Del mismo modo se prueba que esta misma recta también es asíntota oblicua de f en $-\infty$.

2 2022-12-14 Examen de Análisis I

2.1 Primera parte

Ejercicio 2.1. La población de parásitos que infecta un árbol, en miles, evoluciona diariamente siguiendo la sucesión recursiva $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = 1 - (2 + x_n)^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite.

Solución

El término recurrente de la sucesión puede escribirse de la siguiente manera

$$x_{n+1} = 1 - (2 + x_n)^{-1} = \frac{1 + x_n}{2 + x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veamos primero que la sucesión está acotada inferiormente por 0 por inducción. $x_1 = 2 > 0$, y suponiendo $x_n > 0$ se tiene que $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2+x_n} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Veamos ahora que la sucesión es decreciente también por inducción. $x_1 = 2 < x_2 = 1 - (2 + 2)^{-1} = 3/4$. Supongamos ahora que $x_{n-1} > x_n$, entonces

$$\begin{aligned} x_{n-1} > x_n &\Leftrightarrow 2 + x_{n-1} > 2 + x_n \Leftrightarrow (2 + x_{n-1})^{-1} < (2 + x_n)^{-1} \\ &\Leftrightarrow 1 - (2 + x_{n-1})^{-1} > 1 - (2 + x_n)^{-1} \Leftrightarrow x_n > x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así pues, como la sucesión es monótona decreciente y está acotada inferiormente, según el teorema de la convergencia monótona, la sucesión converge.
Para calcular el límite aprovechamos la recurrencia,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + x_{n-1}}{2 + x_{n-1}} = \frac{1 + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}}{2 + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}} = \frac{1 + x}{2 + x},$$

y resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \frac{1 + x}{2 + x} \Leftrightarrow x(2 + x) = 1 + x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como hemos visto que la sucesión está acotada inferiormente por 0, podemos descartar la solución negativa, de manera que, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ejercicio 2.2. En el siglo III A.C usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia. La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

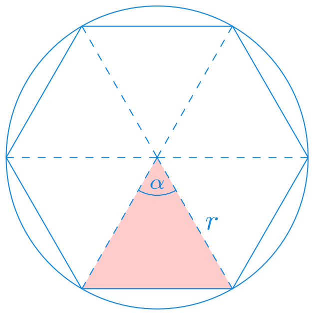


Figura 2.1: Descomposición de un hexágono en triángulos

a. Dar el término general de la sucesión $(a_n)_{n=3}^{\infty}$ que expresa el área del polígono en función del número de lados n.

b. Calcular el límite de la sucesión.

Solución

a. Consideremos cada uno de los triángulos en los que se puede descomponer un polígono regular de n lados.

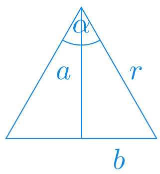


Figura 2.2: Dimensiones del triángulo

Puesto que para un polígono de n lados se obtienen n triángulos iguales, se tiene que el ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ de manera que $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{n}$.
Aplicando las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, se puede deducir que

$$\cos(\alpha/2) = \cos(\pi/n) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos(\pi/n)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \operatorname{sen}(\pi/n) = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}(\pi/n)$$

Por tanto, el área del triángulo es

$$\frac{a2b}{2} = ab = r^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/n),$$

y como hay n triángulos idénticos en el polígono regular de n lados, se tiene que el área del polígono es

$$a_n = nr^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/n)$$

b. Calculamos ahora el límite de la sucesión

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} nr^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/n) \\
&= r^2 \lim_{n\to\infty} \cos(\pi/n) \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}(\pi/n) \\
&= r^2 \cos(0) \lim_{n\to\infty} \pi \frac{n}{\pi} \operatorname{sen}(\pi/n) \\
&= \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \\
&= \pi r^2 \lim_{\pi/n\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = \pi r^2, \qquad (\operatorname{sen}(\pi/n) \approx \pi/n)
\end{aligned}$$

que efectivamente es el área del círculo de radio r.

Ejercicio 2.3. Sabiendo que $\operatorname{sen}(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en $x = 0$, demostrar que también lo son $\operatorname{tg}(x)$ y x.

Solución

Como $\operatorname{sen}(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en $x = 0$, se tiene que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.
Para demostrar que $\operatorname{tg}(x)$ y x también son infinitésimos equivalentes en $x = 0$ calculamos el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} 1 = \frac{1}{\cos(0)} = 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\operatorname{tg}(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en $x = 0$.

Ejercicio 2.4. Determinar el dominio y el tipo de asíntotas de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}.$$

Solución

Para que exista la raíz, el radicando debe ser positivo, es decir, $\frac{x^3}{4x-1} \geq 0$. Es fácil ver que $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ y $4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/4$ de manera que $\frac{x^3}{4x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ o $x \geq 1/4$.
Por otro lado, para que exista $\frac{x^3}{4x-1}$ el denominador no puede anularse, es decir $4x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1/4$. Por tanto, concluimos que el dominio de la función es $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{4}, \infty)$.
Estudiamos ahora los tipos de asíntotas que tiene la función.
Asíntotas verticales
Los únicos puntos donde pueden existir asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = 1/4$, así que calculamos los límites laterales en estos puntos.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{x^3}{4x-1}} = \sqrt{\frac{0^3}{4\cdot 0-1}} = 0,$$

y por tanto, f no tiene asíntota vertical en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 1/4^+} f(x) = \lim_{x\to 1/4^+} \sqrt{\frac{x^3}{4x-1}} = \sqrt{\frac{(1/4)^3}{4(1/4)-1}} = \infty,$$

y por tanto, f tiene una asíntota vertical en $x = 1/4$.
Asíntotas horizontales
Para ver si hay asíntotas horizontales estudiamos los límites en $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{4x-1}} = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{4x-1}{x}}} = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4-\frac{1}{x}}} = \infty.$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{x^3}{4x-1}} = \lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{4x-1}{x}}} = \lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{x^2}{4-\frac{1}{x}}} = \infty.$$

Por tanto, f no tiene asíntotas horizontales.
Asíntotas oblicuas
Para ver si hay asíntotas oblicuas estudiamos los límites de $f(x)/x$ en $\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x^3-x^2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x^3-x^2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

Por tanto, f tiene asíntotas oblicuas tanto en $-\infty$ como en ∞.

Ejercicio 2.5. Dado el conjunto $A=\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2-1}{x-2}\leq 0\}$, calcular, si existe, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo. ¿Es un conjunto cerrado o abierto?

Solución

A puede expresarse con la unión de intervalos, ya que $x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow x\leq -1$ o $x\geq 1$, y por otro lado, $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$, de manera que $\frac{x^2-1}{x-2}\leq 0\Leftrightarrow x\leq -1$ o $1\leq x<2$, es decir, $A=(-\infty,-1]\cup[1,2)$.
Es fácil ver que A está acotado superiormente y la menor de las cotas superiores es 2, por lo que el supremo es 2, pero como $2\notin A$, A no tiene máximo.
En cuanto al ínfimo, A no está acotado inferiormente, de manera que no tiene ínfimo, y por tanto, tampoco mínimo.
A no es abierto, ya que $-1\in A$, pero -1 no es un punto interior de A, ya que para cualquier $\varepsilon>0$ el intervalo $(-1-\varepsilon,-1+\varepsilon)$ contiene puntos de $\overline{A}$.
Por otro lado, A tampoco es cerrado ya que $\overline{A}=(-1,1)\cup[2,\infty)$ no es abierto, pues $2\in\overline{A}$ pero no es un punto interior suyo, ya que para cualquier $\varepsilon>0$ el intervalo $(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$ contiene puntos de A.

2.2 Segunda parte

Ejercicio 2.6. Dar una aproximación de $\ln(\sqrt{1/2})$ usando un polinomio de Taylor de cuarto grado.

Solución

Para realizar la aproximación que se pide calcularemos el polinomio de Taylor de cuarto grado de la función $f(x)=\ln(\sqrt{x})$ en el punto 1, ya que el valor de la función y sus sucesivas derivadas en este punto son sencillas. La fórmula del polinomio de Taylor es

$$P^4_{f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f''''(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Así pues, calculamos hasta la cuarta derivada en 1:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(\sqrt{x}) = \tfrac{1}{2}\ln(x) & \quad f(1) &= \tfrac{1}{2}\ln(1) = 0\\
f'(x) &= \tfrac{1}{2}x^{-1} & f'(1) &= \tfrac{1}{2}\\
f''(x) &= \tfrac{-1}{2}x^{2} & f''(1) &= \tfrac{-1}{2}\\
f'''(x) &= x^{-3} & f'''(1) &= 1\\
f''''(x) &= -3x^{-4} & f''''(1) &= -3
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la fórmula del polinomio de Taylor se tiene

$$\begin{aligned}
P^4_{f,1}(x) &= 0 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-1/2}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{-3}{24}(x-1)^4\\
&= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{8}(x-1)^4.
\end{aligned}$$

Para aproximar $\ln(\sqrt{1/2})$ calculamos el polinomio en $x = 1/2$.

$$P^4_{f,1}(1/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-1\right)^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-1\right)^4 = -0.34114583.$$

Ejercicio 2.7. La función $h(x) = \dfrac{x^2-2x+a}{x^3+bx^2-6x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Calcular el valor de a y b, y clasificar el resto de discontinuidades.

Solución

Para que la función $h(x) = \dfrac{x^2-2x+a}{x^3+bx^2-6x}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 2$, debe cumplirse que $\lim_{x\to 2} h(x) \neq h(2)$. Una manera de que esto se cumpla es que la función no esté definida en $x = 2$ pero sí exista el límite en ese punto. Para que la función no esté definida en $x = 2$ el denominador debe anularse, es decir,

$$2^3 + b2^2 - 6\cdot 2 = 0 \Rightarrow 8 + 4b - 12 = 0 \Rightarrow b = 1.$$

Por otro lado, el límite en $x = 2$ es

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+a}{x^3+x^2-6x} = \frac{a}{0},$$

de manera que, para que el límite exista, debe ser $a = 0$, y en tal caso,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^3+x^2-6x} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5},$$

y, por tanto, $h(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$ como se pide.
Como se trata de una función racional, será discontinua en los puntos que anulen el denominador, es decir $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$. Ya hemos visto que en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable y faltaría clasificar las otras dos discontinuidades.
En $x = -3$ se tiene

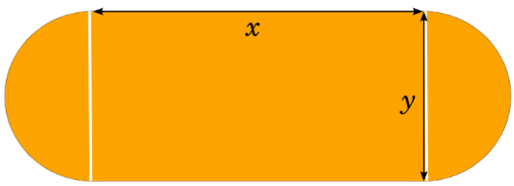
$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = \infty,$$

y, por tanto, h tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.
Finalmente en $x = 0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3},$$

por lo que h tiene otra discontinuidad evitable en $x = 0$.

Ejercicio 2.8. El envoltorio de unas píldoras está formado por un cilindro con dos semiesferas en sus extremos, tal y como se aprecia en la imagen.



Si el contenido de las píldoras debe ser de 0.15 ml, hallar las dimensiones de x e y para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

Solución

El volumen de una esfera de radio r es $v_e(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y el de un cilindro de radio r y altura h es $v_c(r,h) = \pi r^2 h$, de modo que que el volumen de la píldora es $v(r,h) = v_e(r) + v_c(r,h) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$. Como el volumen de la píldora debe ser

0.15 ml = 0.15 cm^3, imponiendo esta restricción, se tiene

$$v(r,h) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 0.15 \Leftrightarrow h = \frac{0.15 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}. \tag{2.1}$$

Por otro lado, la superficie de una esfera de radio r es $s_e(r) = 4\pi r^2$ y la superficie del envolvente de un cilindro de radio r y altura h es, en realidad, la superficie de un rectángulo de lados $2\pi r$ y h, es decir, $s_c(r,h) = 2\pi r h$, de manera que la superficie de la píldora es $s(r,h) = 4\pi r^2 + 2\pi r h$, pero sustituyendo el valor de h que hemos obtenido de imponer la restricción del volumen se tiene,

$$\begin{aligned} s(r) &= 4\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{0.15 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}\right) = 4\pi r^2 + \left(\frac{0.3 - \frac{8}{3}\pi r^3}{r}\right) \\ &= 4\pi r^2 + \frac{0.3}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2 + \frac{0.3}{r}, \end{aligned}$$

que es la función a optimizar.
Para calcular el mínimo de la función, calculamos primero los puntos críticos.

$$s'(r) = \frac{4}{3}\pi 2r - \frac{0.3}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\pi r = \frac{0.3}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{0.9}{8\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0.9}{8\pi}} \approx 0.3296\text{cm}.$$

Para ver si en este punto hay un mínimo aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$s''(r) = \frac{8}{3}\pi - \frac{0.3(-2)}{r^3} = \frac{8}{3}\pi + \frac{0.6}{r^3} > 0 \ \forall r > 0.$$

Por tanto, s tiene un mínimo local en $r = 0.3296$, y la altura del la píldora con la mínima superficie será, utilizando la Ecuación 2.1,

$$h = \frac{0.15 - \frac{4}{3}\pi 0.3296^3}{\pi 0.3296^2} \approx 0.$$

Así pues, las dimensiones óptimas serían $x = h = 0$ cm e $y = 2r = 0.6592$ cm, que en realidad es una esfera de diámetro 0.6592 cm.

Ejercicio 2.9. Demostrar que la función $f(x) = \ln\left(k\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)\right)$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0,1)$ para cualquier valor de k.

Solución

$x^2 - 2x + \frac{3}{2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, de manera que, para que exista la función f, debe ser también $k > 0$ y, por tanto, aplicando propiedades de logaritmos se tiene,

$f(x) = \ln\left(k\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)\right) = \ln(k) + \ln\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)$.
Por otro lado, como $x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ es un polinomio, es continuo en todo $\mathbb{R}$, y por tanto, $f(x)$ también es continua en todo $\mathbb{R}$, siempre que $k > 0$.
Demostraremos que f no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0, 1)$ por reducción al absurdo. Supongamos que existen $0 < a < b < 1$ tales que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces, aplicando el teorema de Rolle, debe existir algún valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Si calculamos los puntos críticos de f se tiene

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3/2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

pero como $1 \notin (a, b)$, llegamos a una contradicción ya que no existe ningún valor $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$. Así pues, f no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 2.10. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la curva implícita $e^{x^2y} - \ln(\sqrt{x - y}) = 0$ en el punto $x = 0$.

Solución

En primer lugar obtenemos los valores de y que cumplen la ecuación de la curva implícita para $x = 0$. Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$e^{0^2y} - \ln(\sqrt{0 - y}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(\sqrt{-y}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln(\sqrt{-y}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{-y} = e \Leftrightarrow y = -e^2.$$

Así pues, hay que calcular la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto $(0, -e^2)$.
Como la pendiente de la recta tangente es la tasa de variación instantánea, calculamos $y' = \frac{dy}{dx}$ implícitamente

$$\left(e^{x^2y} - \ln(\sqrt{x - y})\right)' = 0' \Leftrightarrow \left(e^{x^2y} - \frac{1}{2}\ln(x - y)\right)' = 0 \Leftrightarrow$$
$$e^{x^2y}(2xy + x^2y') - \frac{1}{2}\frac{1 - y'}{x - y} = 0.$$

Sustituyendo en $x = 0$ y $y = -e^2$, se tiene

$$e^{0^2(-e^2)}(2 \cdot 0(-e^2) + 0^2y') - \frac{1}{2}\frac{1 - y'}{0 - (-e^2)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-(1 - y')}{2e^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - y' = 0 \Leftrightarrow y' = 1.$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en $(0, -e^2)$ es

$$y = y_0 + \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) = (-e^2) + 1(x - 0) = x - e^2.$$

Y la ecuación de la recta normal a la curva en $(0, -e^2)$ es

$$y = y_0 - \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_0, y_0)}(x - x_0) = (-e^2) - 1(x - 0) = -x - e^2.$$

3 2023-03-11 Examen de Análisis II

Ejercicio 3.1. Estudiar la convergencia de las siguientes series

a. $\displaystyle\sum \frac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}$

b. $\displaystyle\sum \cos(n\pi)n^2e^{-n}$

Solución

a. Se trata de una serie de términos positivos en la que el término dominante en el numerador es $3n^2$ y el término dominante en el denominador es $n^{5/2}$, por lo que podemos utilizar el criterio del cociente para compararla con las serie $\sum \frac{3n^2}{n^{5/2}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}}{\frac{3n^2}{n^{5/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{3n^2}\frac{\sqrt{n^5+n}}{\sqrt{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{3n^2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5+n}}{\sqrt{n^5}} = 1$$

Por tanto, la serie $\sum \frac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}$ tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum \frac{3n^2}{n^{5/2}}$, y como $\sum \frac{3n^2}{n^{5/2}} = 3\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ es una serie p con $p<1$, diverge, por lo que la serie $\sum \frac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}$ también diverge.

b. Se trata de una serie alternada ya que $\sum \cos(n\pi)n^2e^{-n} = \sum(-1)^n n^2e^{-n}$ por lo que aplicando el criterio de la serie alternada, como n^2e^{-n} es monótona decreciente para $n\geq 2$ y

$$\lim_{n\to\infty} n^2e^{-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{e^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0, \qquad \text{(L'Hôpital)}$$

se concluye que la serie $\sum \cos(n\pi)n^2e^{-n}$ converge.

Ejercicio 3.2. Un pozo de petróleo produce 200 mil litros de petróleo el primer año de su explotación, pero cada año que pasa la producción decae un 12%. Calcular la cantidad de petróleo extraída tras n años de actividad. ¿Qué cantidad total de petróleo se extraerá del pozo hasta agotarlo?

Solución

La producción anual evoluciona según la sucesión

$$\begin{aligned}
a_1 &= 200 \\
a_2 &= a_1(1-0.12) = 200 \cdot 0.88 \\
a_3 &= a_2 0.88 = 200 \cdot 0.88^2 \\
&\vdots \\
a_n &= 200 \cdot 0.88^{n-1}
\end{aligned}$$

por lo que la producción acumulada viene dada por la serie $\sum 200 \cdot 0.88^{n-1}$ que es una serie geométrica de razón 0.88. Así pues, la cantidad de petróleo extraída tras n años es

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} 200 \cdot 0.88^i = 200 \frac{1-0.88^n}{1-0.88},$$

y la cantidad total de petróleo que se extraerá del pozo hasta agotarlo viene dada por la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} 200 \cdot 0.88^n = \frac{200}{1-0.88} \approx 1666.6667 \text{ mil litros.}$$

Ejercicio 3.3. Determinar el dominio de convergencia puntual de la serie de potencias

$$\sum \frac{n(x-3)^n}{(n+1)4^n}$$

Solución

Para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias podemos usar el criterio de la raíz, que establece que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(n+1)4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \sqrt[n]{\frac{n}{(n+1)}} = \frac{1}{4},$$

se concluye que $R = \frac{1}{1/4} = 4$, de manera que la serie converge para $|x-3| < 4$, es decir, en el intervalo $(-1, 7)$.
Veamos ahora si la serie converge en los extremos del intervalo.
En $x = 7$ se tiene la serie $\sum \frac{n4^n}{(n+1)4^n} = \sum \frac{n}{n+1}$, que diverge al ser $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.
Y en $x = -1$ se tiene la serie $\sum \frac{n(-4)^n}{(n+1)4^n} = \sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$, que es una serie alternada, pero también diverge al ser $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente.
Por tanto, el dominio de convergencia puntual de la serie de potencias es $\mathcal{C} = (-1, 7)$.

Ejercicio 3.4. Calcular la serie de Taylor de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 1$. ¿Cuál es su dominio de convergencia puntual?

Solución

Calculamos las primeras derivadas para obtener la expresión de la derivada de orden n.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f(1) &= 1^{-1} = 1,\\
f'(x) &= (-1)x^{-2} & f'(1) &= (-1)1^{-2} = -1,\\
f''(x) &= 2x^{-3} & f''(1) &= 2 \cdot 1^{-3} = 2,\\
f'''(x) &= (-1)3!x^{-4} & f'''(1) &= (-1)3!1^{-4} = -3!,\\
\vdots\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}n!x^{-(n+1)} & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n+1}n!
\end{aligned}
$$

Así pues, sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se obtiene la serie

$$\sum \frac{f^n(1)}{n!}(x-1)^n = \sum \frac{(-1)^{n+1}n!}{n!}(x-1)^n = \sum (-1)^{n+1}(x-1)^n.$$

Su radio de convergencia puntual se obtiene fácilmente mediante el criterio de la razón

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+2}}\right| = 1,$$

por lo que la serie converge en $|x-1| < 1$, es decir, en el intervalo $(0, 2)$. Veamos ahora si converge en los extremos.
En $x = 0$ se tiene la serie $\sum (-1)^{n+1}(-1)^n = \sum (-1)^{2n+1} = \sum -1$ que diverge, mientras que en $x = 2$ se tiene la serie $\sum (-1)^{n+1}1^n = \sum (-1)^{n+1}$ que también diverge ya que no existe el límite $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$.
Así pues, se concluye que el dominio de convergencia puntual de la serie de Taylor es $\mathcal{C} = (0, 2)$.

Ejercicio 3.5. Calcular la integral superior de Riemann de la función $f(x) = 2x^3 + 3x$ en el intervalo $[0, 2]$.

Solución

Si dividimos el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos de igual amplitud, obtenemos la partición $P_n = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 2\}$ con $x_i = \frac{2i}{n}$ para $i = 1, \dots, n$.
Como la función $f(x) = 2x^3 + 3x$ es creciente en el intervalo $[0, 2]$ el máximo de f en cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) se alcanzará en el extremo superior, de manera que la suma superior de Riemann de f respecto de P_n es

$$
\begin{aligned}
S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 3\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{16i^3}{n^3} + \frac{6i}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{32}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{32}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{12}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{32}{n^4}\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} + 6\frac{n+1}{n} \\
&= 8\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{n^4} + 6\frac{n+1}{n}.
\end{aligned}
$$

Así pues, la integral superior de Riemann es

$$
\begin{aligned}
\overline{\int_0^2} f &= \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} 8\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{n^4} + 6\frac{n+1}{n} \\
&= 8\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{n^4} + 6\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 8 + 6 = 14.
\end{aligned}
$$

4 2023-06-01 Examen de Análisis II

4.1 Primera parte

Ejercicio 4.1. Calcular las siguientes sumas si existen

a. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$.

Solución

a. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ es una serie p con $p > 1$ por lo que la serie converge, pero para calcular su suma vamos a reescribir el término general como suma de fracciones simples.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

que es una serie telescópica, de manera que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ es una serie alternada, pero

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} && \text{(L'Hôpital)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = \infty, \end{aligned}$$

por lo que la serie diverge.

Ejercicio 4.2. Considérese el conjunto de Cantor que resulta de ir eliminando del intervalo $[0,10]$, de manera recursiva, el 80% central de los intervalos restantes. El procedimiento sería el siguiente:

- Etapa 1: Se elimina el intervalo $(1,9)$.
- Etapa 2: Se eliminan los intervalos $(0.1,0.9)$ y $(9.1,9.9)$.
- Etapa 3: Se eliminan los intervalos $(0.01,0.09)$, $(0.91,0.99)$, $(9.01,9.09)$ y $(9.91,9.99)$.
- ...

¿Cuál es la longitud total de los intervalos eliminados?

Solución

En la primera etapa se elimina el intervalo $(1,9)$, que tiene longitud 8. En la segunda etapa se eliminan 2 intervalos, $(0.1,0.9)$ y $(9.1,9.9)$, ambos con amplitud 0.8, y por tanto, la longitud de los intervalos eliminados es $2\cdot 0.8$. En la tercera etapa se eliminan 4 intervalos, $(0.01,0.09)$, $(0.91,0.99)$, $(9.01,9.09)$ y $(9.91,9.99)$, ambos con amplitud 0.08, y por tanto, la longitud de los intervalos eliminados es $4\cdot 0.08$. En general, en la etapa n se eliminan 2^{n-1} intervalos, todos con amplitud $\frac{8}{10^{n-1}}$, y por tanto, la longitud de los intervalos eliminados es $2^{n-1}\frac{8}{10^{n-1}}$. Así pues, la suma de las longitudes de los intervalos eliminados viene dada por la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{8}{10^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n}\frac{8}{10^{n}} = 8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{10}\right)^n,$$

que es una serie geométrica de razón $\frac{2}{10}<1$, por lo que que converge y su suma vale

$$8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{10}\right)^n = 8\frac{1}{1-\frac{2}{10}} = 8\frac{10}{8} = 10.$$

Ejercicio 4.3. La distribución de Borel de parámetro $\mu\geq 0$ es una distribución de probabilidad discreta con recorrido $\mathbb{N}$ y función de probabilidad ñ

$$f(n) = \frac{(\mu n)^{n-1}}{e^{\mu n} n!}\ \forall n\in\mathbb{N},$$

¿Para qué valores de μ la serie $\sum f(n)$ es absolutamente convergente?

Solución

Para estudiar la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu n)^{n-1}}{e^{\mu n} n!}$, aplicamos el criterio de la razón.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\mu(n+1))^n}{e^{\mu(n+1)}(n+1)!}}{\frac{(\mu n)^{n-1}}{e^{\mu n} n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu^n (n+1)^n e^{\mu n} n!}{\mu^{n-1} n^{n-1} e^{\mu(n+1)}(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n+1)(n+1)^{n-1} e^{\mu n} n!}{n^{n-1} e^{\mu} e^{\mu n}(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu}{e^{\mu}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \frac{\mu}{e^{\mu}} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{\mu}{e^{\mu}} e = \frac{\mu}{e^{\mu-1}}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\mu}{e^{\mu-1}} < 1 \Leftrightarrow \mu < e^{\mu-1}$, es cierto para cualquier $\mu \geq 0$ excepto para $\mu = 1$, la serie converge absolutamente $\forall \mu \geq 0$, $\mu \neq 1$. Para $\mu = 1$ el criterio de la razón no es concluyente.

Ejercicio 4.4. Calcular la integral inferior de Riemann de la parábola $f(x) = 3x^2 + 2x$ en el intervalo $[0, 10]$.

Solución

Si dividimos el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos de igual amplitud obtenemos la partición $P_n = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 10\}$ con $x_i = \frac{10i}{n}$ $\forall i = 1, \dots, n$. Como la función $f(x) = 3x^2 + 2x$ es creciente en el intervalo $[0, 10]$, el mínimo de f en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se alcanzará en el extremo inferior, de manera que la suma inferior de Riemann de f con respecto a P_n es

$$
\begin{aligned}
s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(3\left(\frac{10(i-1)}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{10(i-1)}{n}\right)\right) \frac{10}{n} \\
&= \frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{300}{n^2}(i-1)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{20}{n}(i-1)\right) \\
&= \frac{3000}{n^3} \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 + \frac{200}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\
&= \frac{3000}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2i + 1 + \frac{200}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\
&= \frac{3000}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) + \frac{200}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{3000}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right) + \frac{200}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&= \frac{3000}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - n^2 - n + n\right) + \frac{200}{n^2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - n\right) \\
&= 500\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) + 100\left(\frac{n^2 - n}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

Y la integral inferior de Riemann es

$$
\begin{aligned}
\underline{\int_0^{10}} f &= \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} 500\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) + 100\left(\frac{n^2 - n}{n^2}\right) \\
&= 500 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) + 100 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2 - n}{n^2}\right) \\
&= 500 \cdot 2 + 100 = 1100.
\end{aligned}
$$

4.2 Segunda parte

Ejercicio 4.5. La función $f(t) = 50\sqrt{t/2} + 100$ da los ingresos de una empresa en miles de euros t años después de su creación, mientras que la función $g(t) = \ln(t^2 + 1) + 100$ da los gastos. Calcular el beneficio acumulado de la empresa entre el quinto y el décimo año.

Solución

Para obtener el beneficio acumulado de la empresa ente el quinto y décimo año tenemos que calcular la integral definida de la función de los ingresos menos la de los gastos en el intervalo $[5,10]$, es decir,

$$\begin{aligned}\int_5^{10} f(t) - g(t)\,dt &= \int_5^{10} 50\sqrt{t/2} + 100 - \ln(t^2+1) - 100\,dt \\ &= \frac{50}{\sqrt{2}}\int_5^{10} t^{1/2}\,dt - \int_5^{10} \ln(t^2+1)\,dt.\end{aligned}$$

Vamos a calcular estas dos integrales por separado.

$$\int_5^{10} t^{1/2}\,dt = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^{10} = \frac{2}{3}(10^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 13.6283.$$

y

$$\begin{aligned}\int_5^{10} \ln(t^2+1)\,dt &= [t\ln(t^2+1)]_5^{10} - \int_5^{10} t\frac{2t}{t^2+1}\,dt \qquad \text{(Partes)} \\ &= [t\ln(t^2+1)]_5^{10} - 2\int_5^{10} 1 - \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= [t\ln(t^2+1)]_5^{10} - [2t]_5^{10} + [2\operatorname{arctg}(t)]_5^{10} \\ &= 10\ln(10^2+1) - 5\ln(5^2+1) - 2\cdot 10 + 2\cdot 5 + 2\operatorname{arctg}(10) - 2\operatorname{arctg}(5) \\ &\approx 20.0562.\end{aligned}$$

Así pues el beneficio acumulado es

$$\int_5^{10} f(t) - g(t)\,dt \approx \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot 13.6283 - 20.0562 = 461.7768 \text{ miles de €}.$$

Ejercicio 4.6. Calcular el área de región encerrada por la curva polar $r = 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$.

Solución

La función $r = 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$ tiene periodo π, pero para describir la curva completa es necesario que θ recorra la circunferencia entera, por lo que el intervalo de integración es $[0, 2\pi]$ y, por tanto, para calcular el área encerrada por esta curva polar tenemos que calcula la siguiente integral.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\, d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}(x)^2\, dx \qquad \text{(Cambio } x = 2\theta\text{)} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int_0^{4\pi} dx - \int_0^{4\pi} \cos(2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\left([x]_0^{4\pi} - \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right]_0^{4\pi} \right) \\
&= \frac{1}{8}4\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.7. Calcular el volumen del depósito generado al rotar alrededor del eje y la gráfica de la función $f(x) = (x-1)^2$ con $0 \leq x \leq 3$. Plantear la integral para obtener la cantidad de chapa necesaria para su construcción, sin llegar a calcularla.

Solución

Para calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje y la gráfica de la función $f(x) = (x-1)^2$ en el intervalo $[0,3]$ utilizaremos envoltorios cilíndricos, de manera que el volumen viene dado por la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^3 2\pi x f(x)\, dx &= 2\pi \int_0^3 x(x-1)^2\, dx = 2\pi \int_0^3 x(x^2-2x+1)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^3 x^3 - 2x^2 + x\, dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 \\
&= 2\pi \left(\frac{3^4}{4} - 2\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2}\right) = \frac{27\pi}{2}\text{unidades}^3.
\end{aligned}$$

Por otro lado, la chapa necesaria para su construcción viene dada por la superficie del sólido de revolución y para calcular el área de la superficie de un sólido de revolución cuando la gráfica de f se rota alrededor del eje x se utiliza la integral

$$\int_0^3 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

Sin embargo, como la gráfica de f se rota alrededor del eje y, el radio del los troncos de conos que resultan al tomar particiones del intervalo y aproximaciones de Riemman, en lugar de ser $y = f(x)$, es x, por lo que la integral que hay que calcular es

$$\int_0^3 2\pi x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi\int_0^3 x\sqrt{1+(2(x-1))^2}\,dx.$$

Ejercicio 4.8. La gran pirámide de Gizeh tiene una altura de 138 m y una base cuadrada de lado 230 m. Calcular de manera aproximada el trabajo realizado en su construcción. Supóngase que la densidad de las piedras usadas en su construcción es de 2500 kg/m^3 y que la aceleración de la gravedad es 9.81 m/s^2.

Solución

Supongamos que base de la pirámide está centrada en el origen de coordenadas del plano XZ. Entonces, la ecuación de la recta en la que queda inscrito el apotema de la pirámide es $y = 138 - \frac{138}{115}x$ de manera que $x = \frac{115}{138}(138-y) = 115 - \frac{5}{6}y$. Para calcular el trabajo realizado en la construcción de la pirámide, calcularemos el trabajo realizado para las secciones transversales de la pirámide con respecto al eje y, que serán cuadrados de lado $2x$, y por tanto tendrán área

$$A_i = \left(2\left(115 - \frac{5}{6}y\right)\right)^2 = \left(230 - \frac{5}{3}y\right)^2 = 52900 - \frac{2300}{3}y + \frac{25}{9}y^2 \text{ m}^2.$$

Si la altura de cada una de estas secciones transversales es Δy, su volumen es

$$V_i = A_i\Delta y = \left(52900 - \frac{2300}{3}y + \frac{25}{9}y^2\right)\Delta y \text{ m}^3.$$

A partir del volumen de casa sección transversal podemos calcular su masa multiplicando por la densidad de la piedra.

$$M_i = V_i\delta = 2500\left(52900 - \frac{2300}{3}y + \frac{25}{9}y^2\right)\Delta y \text{ kg}.$$

Así pues, la fuerza necesaria para mover la masa de cada una de estas secciones transversales es

$$F_i = M_i g = 9.81\cdot 2500\left(52900 - \frac{2300}{3}y + \frac{25}{9}y^2\right)\Delta y \text{ N},$$

Finalmente, como cada sección transversal debe elevarse una altura y, el trabajo realizado al mover la masa correspondiente a la sección transversal es

$$W_i = F_i y = 9.81\cdot 2500y\left(52900 - \frac{2300}{3}y + \frac{25}{9}y^2\right)\Delta y \text{ J}.$$

Así pues, el trabajo total será la suma de los trabajos realizados al desplazar las infinitas secciones transversales desde la base de la pirámide hasta su cima, es decir, en el intervalo $y \in [0, 138]$, que viene dado por la integral

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{138} 9.81 \cdot 2500y \left(52900 - \frac{2300}{3}y + \frac{25}{9}y^2\right)\, dy \\
&= 24525 \int_0^{138} 52900y - \frac{2300}{3}y^2 + \frac{25}{9}y^3\, dy \\
&= 24525 \left[52900\frac{y^2}{2} - \frac{2300}{3}\frac{y^3}{3} + \frac{25}{9}\frac{y^4}{4}\right]_0^{138} \\
&= 24525 \left(26450 \cdot 138^2 - \frac{2300}{9}138^3 + \frac{25}{36}138^4\right) \approx 2058930157500 \text{ J.}
\end{aligned}
$$

5 2023-11-15 Examen de Análisis I

Ejercicio 5.1. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l.$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

Solución

Por la definición de límite, como $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = l$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $2n \geq k_1$ entonces $|x_{2n} - l| < \varepsilon$.
Del mismo modo, como $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $2n + 1 \geq k_2$ entonces $|x_{2n+1} - l| < \varepsilon$.
Tomando ahora $k = \max\{k_1, k_2\}$, si $m \geq k$, entonces o m es par, o m es impar. Si m es par entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2n$ y como $m = 2n \geq k \geq k_1$, se tiene que $|x_m - l| = |x_{2n} - l| < \varepsilon$. Y si m es impar entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2n + 1$ y como $m = 2n + 1 \geq k \geq k_2$, se tiene que $|x_m - l| = |x_{2n+1} - l| < \varepsilon$.
Por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

Ejercicio 5.2. La cantidad de agua almacenada en un embalse en hectómetros cúbicos viene dada por la función

$$h(t) = \frac{10t + \cos(2t)}{4t + 2\operatorname{sen}(3t)}$$

Analizar si la cantidad de agua converge o no a largo plazo.

Solución

Como $-1 \leq \operatorname{sen}(3t) \leq 1$ y $-1 \leq \cos(2t) \leq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, en particular, para $t > 1$se tiene que

$$\begin{gathered} 0 < 10t - 1 \leq 10t + \cos(2t) \leq 10t + 1 \\ 0 < 4t - 2 \leq 4t + 2\operatorname{sen}(3t) \leq 4t + 2 \end{gathered}$$

y por tanto

$$\frac{10t-1}{4t+2} \leq \frac{10t+\cos(2t)}{4t+2\operatorname{sen}(3t)} \leq \frac{10t+1}{4t-2}.$$

Como además, aplicando álgebra de límites,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10t-1}{4t+2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{10t-1}{t}}{\frac{4t+2}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{10-\frac{1}{t}}{4+\frac{2}{t}} = \frac{10}{4},$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{10t+1}{4t-2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{10t+1}{t}}{\frac{4t-2}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{10+\frac{1}{t}}{4-\frac{2}{t}} = \frac{10}{4},$$

por el teorema de compresión de funciones, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10t+\cos(2t)}{4t+2\operatorname{sen}(3t)} = \frac{10}{4}.$$

Otra forma de verlo sería dividiendo numerador y denominador por t

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10t+\cos(2t)}{4t+2\operatorname{sen}(3t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{10t+\cos(2t)}{t}}{\frac{4t+2\operatorname{sen}(3t)}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{10+\frac{\cos(2t)}{t}}{4+\frac{2\operatorname{sen}(3t)}{t}}$$
$$= \frac{\lim_{t\to\infty} 10 + \lim_{t\to\infty} \frac{\cos(2t)}{t}}{\lim_{t\to\infty} 4 + \lim_{t\to\infty} \frac{2\operatorname{sen}(3t)}{t}}.$$

Ahora bien, como $-1 \leq \cos(2t) \leq 1$, se tiene que

$$\frac{-1}{t} \leq \frac{\cos(2t)}{t} \leq \frac{1}{t},$$

y como $\lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0$, por el teorema de compresión de funciones se tiene que $\lim_{t\to\infty} \frac{\cos(2t)}{t} = 0$.
Del mismo modo se puede probar que $\lim_{t\to\infty} \frac{2\operatorname{sen}(3t)}{t} = 0$, por lo que finalmente se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10t+\cos(2t)}{4t+2\operatorname{sen}(3t)} = \frac{10+0}{4+0} = 2.5.$$

Así pues, a largo plazo, la cantidad de agua en el embalse converge a 2.5 Hm^3.

Ejercicio 5.3. Dado el conjunto $A = \{\frac{\sin(n)}{n}, n \in \mathbb{N}\}$,

a. Calcular su ínfimo, mínimo, supremo y máximo si existen.
b. Calcular sus puntos de acumulación.
c. Estudiar si se trata de un conjunto abierto o cerrado.

Solución

a. Los elementos del conjunto están más cerca de 0 a medida que n crece, aunque irán alternado el signo, ya que $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por tanto el conjunto estará acotado tanto inferior como superiormente. Si calculamos de manera aproximada los primeros elementos del conjunto para $n = 1, \ldots, 10$, tenemos

n	$\frac{\text{sen}(n)}{n}$
1	0.8415
2	0.4546
3	0.0470
4	-0.1892
5	-0.1917
6	-0.04656
7	0.0938
$\vdots$	$\vdots$

A partir de aquí los valores se van acercando cada vez más a 0 ya que $\lim n \to \infty \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$. Por tanto, el máximo valor del A es el correspondiente a $n = 1$, es decir, $\text{sen}(1) \approx 0.8415$, y el mínimo corresponde a $n = 5$, es decir $\text{sen}(5)/5 \approx -0.1917$. Y como el mínimo y el máximo existen, coinciden con el ínfimo y el supremo, respectivamente.

b. Como los valores del conjunto están cada vez más cerca de 0, este será un punto de acumulación. Para demostrarlo basta con ver que $\lim n \to \infty \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$, ya que, como $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\text{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

y como $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, y por el teorema de compresión de sucesiones se tiene que $\lim n \to \infty \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$, y por tanto, se cumple que $\forall \varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{\text{sen}(n)}{n} - 0\right| < \varepsilon$, por lo que podemos encontrar puntos de A tan cerca de 0 como queramos y 0 es un punto de acumulación.

Veamos ahora que 0 es el único punto de acumulación de A, es decir, que cualquier otro punto $x \neq 0$ no es punto de acumulación. Supongamos que $x \neq 0$ es un punto de acumulación de A, entonces es posible construir una sucesión de puntos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \in A$ y $a_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$, que converge a x. Pero, por otro lado, como $\lim n \to \infty \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$, cualquier subsucesión de la sucesión $\left(\frac{\text{sen}(n)}{n}\right)$ converge a 0, y en particular la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, por lo que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, lo cual es contradictorio con que $x \neq 0$.

c. A no puede ser cerrado porque 0 es un punto de acumulación suyo pero $0 \notin A$ (ver teorema). Pero A tampoco es abierto porque sus puntos son aislados, es decir, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y $\forall \varepsilon > 0$ el intervalo $\left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{n} - \varepsilon, \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} - \varepsilon\right)$ siempre contiene puntos que no son de A.

Ejercicio 5.4. Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^n}{x^2 + bx}$,

a. ¿Cuánto debe valer a, b y n para que f tenga una asíntota vertical $x = 3$ y una asíntota horizontal $y = 2$?
b. ¿Cuánto debe valer a, b y n para que f tenga una asíntota oblicua $y = 3x - 1$?

Solución

a. Para que f tenga una asíntota vertical en $x = 3$ debe anularse el denominador, es decir, $3^2 + 3b = 0$, de donde se deduce que $b = -3$, ya que

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{ax^n}{x^2 - 3x} = \infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{ax^n}{x^2 - 3x} = -\infty$$

Y para que f tenga una asíntota horizontal $y = 2$, debe ser $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n}{x^2-3x} = 2$, y para ello es necesario que el grado del polinomio del numerador sea igual al grado del polinomio del denominador, es decir, $n = 2$. En tal caso,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2}{x^2 - 3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2}}{\frac{x^2-3x}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{1 - \frac{3}{x}} = a,$$

de modo que debe ser $a = 2$.

b. Para que f tenga una asíntota oblicua $y = 3x-1$, debe ser $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$. Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{ax^n}{x^2+bx}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n}{x^3 + bx^2},$$

y para que este límite exista, el grado del polinomio del numerador debe ser igual que el del denominador, es decir, $n = 3$, y en tal caso se tiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{ax^3}{x^2+bx}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^3}{x^3 + bx^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{ax^3}{x^3}}{\frac{x^3+bx^2}{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{1 + \frac{b}{x}} = a,$$

de manera que debe ser $a = 3$.

Por otro lado, también debe cumplirse que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 3x = -1$. Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3}{x^2+bx} - 3x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - 3x^3 - 3bx^2}{x^2+bx} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{-3bx^2}{x^2}}{\frac{x^2+bx}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3b}{1+\frac{b}{x}} = -3b,$$

de donde se deduce que $b = 1/3$.

Ejercicio 5.5. La sucesión de Fibonacci se define como

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Demostrar que la sucesión $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge al número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución

Sea $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, donde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de Fibonacci. Entonces

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = 1 + \frac{1}{x_n},$$

que converge al número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tal y como se vió en este ejercicio.

6 2023-11-14 Examen de Análisis III

Ejercicio 6.1. Una fábrica de componentes electrónicos produce dos tipos de chips. Los ingresos, en cientos de euros, obtenidos por la venta de x miles de unidades del primer tipo e y miles de unidades del segundo tipo vienen dados por la función $I(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}xy + 280x + 260y + 1000$, mientras que los gastos de producción, vienen dados por la función $C(x,y) = 100x + 120y + 6000$. ¿Qué cantidad de chips de cada tipo debe producir la fábrica para maximizar el beneficio?

Solución

Si $I(x,y)$ es la función que da los ingresos y $C(x,y)$ la que da los costes, la función que da los beneficios es

$$\begin{aligned} B(x,y) &= -x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}xy + 280x + 260y + 1000 - (100x + 120y + 6000) \\ &= -x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}xy + 180x + 140y - 5000. \end{aligned}$$

Para calcular el máximo de esta función primero hay que obtener los puntos críticos, es decir, los puntos que anulan las derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= -2x - \frac{1}{4}y + 180 = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= -y - \frac{1}{4}x + 140 = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que la única solución es el punto $\left(\frac{2320}{31}, \frac{3760}{31}\right)$.
A continuación, calculamos el hessiano.

$$|\nabla^2 B(x,y)| = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = \frac{31}{16},$$

que es positivo en cualquier punto, y en particular en el punto crítico $\left(\frac{2320}{31}, \frac{3760}{31}\right)$, por lo en este punto hay un extremo relativo, y como $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -2 < 0$, se trata de un máximo relativo. En este punto, el beneficio es

$$B\left(\frac{2320}{31},\frac{3760}{31}\right)=-\left(\frac{2320}{31}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3760}{31}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{2320}{31}\frac{3760}{31}$$
$$+180\left(\frac{2320}{31}\right)+140\left(\frac{3760}{31}\right)-5000\approx 10225.81\cdot 10^2€$$

Para ver que es el máximo absoluto, basta con ver que en los límites de la región del dominio de la función, en este caso $\{(x,y),x\geq 0,y\geq 0\}$, no hay ningún punto donde la función tome un valor mayor. En particular, para $x=0$ la función de beneficio es

$$f(y)=-\frac{1}{2}y^2+140y-5000,$$

cuyos puntos críticos son

$$f'(y)=-y+140=0\Leftrightarrow y=140.$$

que es un máximo relativo al ser $f''(y)=-1<0$, pero $f(140)=4800<10225.81$. Del mismo modo se comprueba que para $y=0$ tampoco hay valores de x donde la función tome un valor mayor que en el máximo relativo.

Ejercicio 6.2. La presión (en Pascales) en la posición (x,y,z) de un espacio es $p(x,y,z)=x^2+y^2-z^3$, y la posición de un objeto en cada instante $t>0$ (en segundos) en ese mismo espacio está dada por la función vectorial

$$\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=1 \\ z=1/t \end{cases}$$

a. Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(1,1,1)$.

b. Calcular la ecuación del plano normal a la trayectoria en el punto $(1,1,1)$.

c. ¿Es la dirección de esta trayectoria al pasar por el punto $(1,1,1)$ aquella en la que que el crecimiento de la presión es máximo?

d. ¿Cuál es la tasa de variación de la presión que soporta el objeto con respecto al tiempo en ese mismo instante?

Solución

a. Sea $g(t)=\left(\sqrt{t},1,\frac{1}{t}\right)$. Resulta sencillo ver que la trayectoria de g pasa por el punto $(1,1,1)$ cuanto $t=1$. Por tanto, se trata de calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de g para $t=1$. La recta tangente la trayectoria de g tiene la dirección que la derivada de la función vectorial, que vale $g'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 0, -\frac{1}{t^2}\right)$, y en particular, en $t = 1$ vale $g'(1) = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$, por lo que la ecuación vectorial de la recta tangente resulta ser

$$g(1) + tg'(1) = (1,1,1) + t\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) = \left(1 + \frac{t}{2}, 1, 1 - t\right).$$

b. El plano normal es perpendicular al vector de la derivada, por lo que el producto escalar de cualquier vector del plano normal y la derivada se anulará, es decir,

$$((x,y,z) - g(1))g'(1) = 0 \Leftrightarrow ((x,y,z) - (1,1,1))\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} - (z-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - z + \frac{1}{2} = 0.$$

c. Ya hemos visto que la dirección de la recta tangente a la trayectoria de g es la del vector $\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$. Por otro lado, la dirección de máximo crecimiento de la f es la dirección del vector gradiente, que vale $\nabla p(x,y,z) = (2x, 2y, -3z^2)$, y en particular en el punto $(1,1,1,)$ vale $\nabla f(1,1,1) = (2,2,-3)$. Para que la dirección de la recta tangente a la trayectoria de g sea la misma que la dirección de máximo crecimiento de p, ambos vectores deberían ser proporcionales, pero no lo son, por lo que ambas direcciones son distintas.

d. La tasa de variación de la presión con respecto al tiempo es la derivada de $p \circ g$, que, aplicando la regla de la cadena, vale

$$\frac{dp}{dt} = \nabla(1,1,1)g'(1) = (2,2,-3)\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) = 4 \text{ Pa/s}.$$

Ejercicio 6.3. El consumo de combustible de una avioneta (en l/m) depende de la altura a la que vuela h (en km) y su velocidad v (en cientos de km/h) según la función $c(h,v) = \frac{v^2}{\ln(\sqrt{h}+2)}$.

a. En el momento en que el avión tiene una altitud de 2 km y una velocidad de 250 km/h, ¿cómo cambiará el consumo si empezamos a cambiar la velocidad y la altura de manera velocidad disminuya la mitad de lo que aumenta la altura?

b. En ese mismo instante, ¿cómo debería cambiar la altitud y la velocidad para que el consumo se reduzca lo más rápidamente posible?

c. Si en ese instante, el avión empieza a acelerar a razón de 5 km/h por minuto y su altura empieza a disminuir a razón de 100 m por minuto. ¿Cuál será la tasa de variación del consumo de combustible con respecto al tiempo?

Solución

a. Para que la velocidad disminuya a razón de la mitad de lo que aumenta la altura, debemos cambiar la altura y la velocidad en la dirección del vector $(1, -1/2)$. La tasa de variación del consumo la da la derivada direccional de c en esta dirección, y para ello primero hay que calcular el vector gradiente. Las derivadas parciales de c son

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial h} &= \frac{-2v^2}{\ln(h+2)^2}\frac{1}{h+2} = \frac{-2v^2}{\ln(h+2)^2(h+2)},\\ \frac{\partial c}{\partial v} &= \frac{4v}{\ln(h+2)},\end{aligned}$$

por lo que el vector gradiente en el punto $(2, 2.5)$ vale

$$\nabla(2, 2.5) = \left(\frac{-2\cdot 2.5^2}{\ln(2+2)^2(2+2)}, \frac{4\cdot 2.5}{\ln(2+2)}\right) = \left(\frac{-3.125}{\ln(4)^2}, \frac{10}{\ln(4)}\right).$$

Así pues, la derivada direccional de c en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, -1/2)$ es

$$c'_{\mathbf{u}} = \nabla c(2, 2.5)\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \left(\frac{-3.125}{\ln(4)^2}, \frac{10}{\ln(4)}\right)\frac{(1, -1/2)}{\sqrt{1^2 + (-1/2)^2}} \approx -4.6804.$$

b. Para que el consumo se reduzca lo más rápidamente posible, deberíamos cambiar la altitud y la velocidad en la dirección opuesta al gradiente, es decir, en la dirección del vector $-\nabla c(2, 2.5) = \left(\frac{3.125}{\ln(4)^2}, \frac{-10}{\ln(4)}\right)$.

c. La tasa de variación del consumo con respecto al tiempo es

$$\frac{dc}{dt} = \nabla c(2, 2.5)\left(\frac{dh}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{3.125}{\ln(4)^2}, \frac{-10}{\ln(4)}\right)(-0.1, 0.05) \approx 0.5233 \text{ l/min}^2.$$

Ejercicio 6.4. Un cable de longitud l tiene una sección circular de radio r y se enrolla sobre un cilindro de radio R. ¿Cuál es la longitud más corta que debe tener el cilindro para poder enrollar todo el cable sin que se solape?

Calcular la longitud para un cilindro de radio 10 cm y un cable de 10 m con una sección circular de radio 2 cm. ¿Cuántas vueltas completas daría el cable alrededor del cilindro?

Solución

La trayectoria que describe el cable al enrollarlo sobre el cilindro es una espiral. Como el radio de la espiral es el radio del cilindro sobre el que se enrolla R y la distancia vertical que recorre la espiral en cada vuelta es el diámetro del cable $2r$, se tiene que la espiral está definida por la vectorial $f(t) = (R\cos(t), R\operatorname{sen}(\mathrm{t}), \frac{r}{\pi}t)$. La distancia recorrida por esta espiral viene dada por la integral

$$\begin{aligned}
s(t) = \int_0^t |f'(x)|\,dx &= \int_0^t \left|\left(-R\operatorname{sen}(x), R\cos(x), \frac{r}{\pi}\right)\right|\,dx \\
&= \int_0^t \sqrt{(-R\operatorname{sen}(x))^2, (R\cos(x))^2, \left(\frac{r}{\pi}\right)^2} \\
&= \int_0^t \sqrt{R^2(\operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^2) + \frac{r^2}{\pi^2}}\,dx \\
&= \int_0^t \sqrt{R^2 + \frac{r^2}{\pi^2}}\,dx = \left[\frac{\sqrt{R^2\pi^2 + r^2}}{\pi}x\right]_0^t \\
&= \frac{\sqrt{R^2\pi^2 + r^2}}{\pi}t
\end{aligned}$$

Como la longitud del cable es l debe cumplirse que

$$\frac{\sqrt{R^2\pi^2 + r^2}}{\pi}t = l \Leftrightarrow t = \frac{\pi l}{\sqrt{R^2\pi^2 + r^2}}.$$

La altura del cilindro es la tercera componente de la función vectorial $\frac{r}{\pi}t$, de manera, que para el valor de t anterior se tiene que la mínima altura del cilindro debe ser

$$h = \frac{r}{\pi}\frac{\pi l}{\sqrt{R^2\pi^2 + r^2}} = \frac{rl}{\sqrt{R^2\pi^2 + r^2}}$$

En el caso de un cilindro de radio $R = 10$ cm y un cable de 10 m y sección circular de radio 2 cm, sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$h = \frac{2 \cdot 1000}{\sqrt{10^2\pi^2 + 2^2}} \approx 63.5334 \text{ cm}.$$

Finalmente, el número de vueltas que dará el cable alrededor del cilindro es

$$\frac{h}{2r} = \frac{63.5334}{4} \approx 15.8833,$$

es decir, 15 vueltas enteras.

7 2023-12-22 Examen de Análisis III

Ejercicio 7.1. La función de producción de una empresa de circuitos para teléfonos móviles está dada por $f(k,l) = 50k^{3/4}l^{1/4}$, donde k son las unidades de capital invertidas y l son las horas de mano de obra. Si el coste cada unidad de capital es 200€ y el de cada hora trabajada 50€, calcular la máxima producción si el coste total no puede exceder los 40000€.

Solución

La función de coste es $c(k,l) = 200k + 50l$ y debe cumplirse que $c(k,l) \leq 40000$, por lo que se trata de un problema de optimización con restricciones. Si aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange, debe cumplirse

$$\begin{aligned}\nabla f(k,l) &= \lambda \nabla c(k,l)\\ c(k,l) &= 40000\end{aligned}$$

Si calculamos los gradientes de f y c se tiene

$$\begin{aligned}\nabla f(k,l) &= \left(50\frac{3}{4}k^{-1/4}l^{1/4}, 50k^{3/4}\frac{1}{4}l^{-3/4}\right)\\ \nabla c(k,l) &= (200, 50)\end{aligned}$$

Por tanto, se debe cumplir

$$\begin{aligned}\left(50\frac{3}{4}k^{-1/4}l^{1/4}, 50k^{3/4}\frac{1}{4}l^{-3/4}\right) &= \lambda(200,50)\\ \Leftrightarrow \frac{50\cdot 3l^{1/4}}{200\cdot 4k^{1/4}} &= \frac{50k^{3/4}}{50\cdot 4l^{3/4}}\\ \Leftrightarrow \frac{3l^{1/4}}{16k^{1/4}} &= \frac{k^{3/4}}{4l^{3/4}}\\ \Leftrightarrow l &= \frac{4}{3}k.\end{aligned}$$

Imponiendo ahora la restricción, se tiene

$$c\left(k, \frac{4}{3}k\right) = 200k + 50\frac{4}{3}k = \frac{800}{3}k = 40000 \Leftrightarrow k = 150,$$

y sustituyendo en la expresión anterior de l se tiene $l = \frac{4}{3}150 = 200$.

Por tanto, la máxima producción se obtendrá para 200 unidades de capital y 150 horas de trabajo.

Ejercicio 7.2. Calcular los polinomios de Taylor de segundo grado de la función $f(x,y) = \cos(x)\operatorname{sen}(y)$ en los puntos $(0,\pi/2)$, $(\pi/2,0)$ y $(\pi,\pi/2)$, Justificar, en función del término cuadrático del polinomio si la función tiene un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de inflexión en cada uno de estos puntos.

Solución

La fórmula del polinomio de Taylor de segundo grado de la función f en el punto (a,b) es

$$\begin{aligned} P^2_{f,(a,b)}(x,y) &= f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right), \end{aligned}$$

por lo que necesitamos calcular hasta las derivadas parciales de segundo orden.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(x)\operatorname{sen}(y) \\ f'_x(x,y) &= -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \\ f'_y(x,y) &= \cos(x)\cos(y) \\ f''_{xx} &= -\cos(x)\operatorname{sen}(y) \\ f''_{xy} &= -\operatorname{sen}(x)\cos(y) \\ f''_{yx} &= -\operatorname{sen}(x)\cos(y) \\ f''_{yy} &= -\cos(x)\operatorname{sen}(y) \end{aligned}$$

A continuación calculamos el valor de estas derivadas en los puntos que nos dan

Función	$(0,\pi/2)$	$(\pi/2,0)$	$(\pi,\pi/2)$
$f(a,b)$	1	0	-1
$f'_x(a,b)$	0	0	0
$f'_y(a,b)$	0	0	0
$f''_{xx}(a,b)$	-1	0	1
$f''_{xy}(a,b)$	0	-1	0
$f''_{xx}(a,b)$	-1	0	1

Así pues, sustituyendo la fórmula del polinomio de Taylor se tiene

$$
\begin{aligned}
P^2_{f,(0,\pi/2)}(x,y) &= 1 + \frac{1}{2}(-x^2 - (y-\pi/2)^2) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + (y-\pi/2)^2)\\
P^2_{f,(\pi/2,0)}(x,y) &= -(x-\pi/2)y\\
P^2_{f,(\pi,\pi/2)}(x,y) &= -1 + \frac{1}{2}((x-\pi) + (y-\pi/2)^2).
\end{aligned}
$$

Como se puede observar, el término de grado 1 de todos los polinomios se anula, ya que todos los puntos son puntos críticos de f. Como el primer término del polinomio es el valor de la función en el punto $f(a,b)$, podemos estudiar si se trata de extremos o puntos de silla observando el signo del término de grado dos del polinomio.
En el caso del punto $(0,\pi/2)$, el término cuadrático es $-\frac{1}{2}(x^2+(y-\pi/2)^2)$ que resulta ser negativo para cualquier valor de x e y, por lo que en cualquier punto de un entorno de este punto el valor de la función será menor que $f(0,\pi/2)$, y en consecuencia, en $(0,\pi/2)$ hay un máximo relativo.
En el caso del punto $(\pi/2,0)$, el término cuadrático es $-(x-\pi/2)y$ que puede ser positivo o negativo dependiendo de los valores de x e y, por lo que habrá puntos en el entorno de $(\pi/2,0)$ donde la función tome valores mayores que $f(0,\pi/2)$, y puntos donde tome valores menores, y en consecuencia, en $(0,\pi/2)$ hay un punto de silla.
Finalmente, en el caso del punto $(\pi,\pi/2)$, el término cuadrático es $\frac{1}{2}((x-\pi)+(y-\pi/2)^2)$ que resulta ser positivo para cualquier valor de x e y, por lo que en cualquier punto de un entorno de este punto el valor de la función será mayor que $f(\pi,\pi/2)$, y en consecuencia, en $(\pi,\pi/2)$ hay un mínimo relativo.

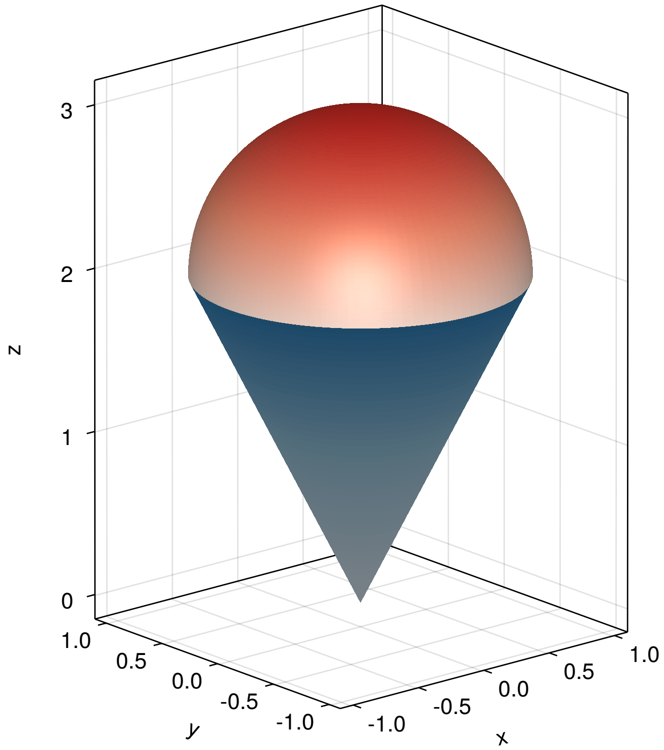
Ejercicio 7.3. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx\,dy$.

Solución

Se trata de una integral racional pero resulta más sencilla si se invierte el orden de integración de las variables.

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{1}{x^3+1}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x^3+1}[y]_0^{x^2}\,dx\\
&= \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}[\ln|x^3+1|]_0^2 = \frac{1}{3}\ln(9).
\end{aligned}
$$

Ejercicio 7.4. Calcular el volumen de un helado formado por un cono de barquillo con ecuación $4x^2+4y^2-z^2=0$ sobre el que se coloca semiesfera de ecuación $x^2+y^2+(z-2)^2=1$ como se muestra en la figura. ¿Qué cantidad de barquillo se necesita para construir el cono del helado?



Solución

Despejando z de ambas ecuaciones, se tiene que la función que define el cono es $f(x,y)=\sqrt{4x^2+4y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$ y la que define la semiesfera superior es $g(x,y)=2+\sqrt{1-x^2-y^2}$, de manera que el volumen del helado será el volumen comprendido entre las superficies de g y f.
Para determinar la región de integración, resolvemos la ecuación que resulta de igualar las dos funciones.

$$f(x,y)=g(x,y)\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=2+\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

Haciendo el cambio $u^2=x^2+y^2$ se tiene

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{u^2} = 2 + \sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow 2u - 2 = \sqrt{1-u^2} \\
\Leftrightarrow 4(u-1)^2 = 1 - u^2 \\
\Leftrightarrow 4u^2 - 8u + 4 = 1 - u^2 \\
\Leftrightarrow 5u^2 - 8u + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow u = 3/5 \text{ o } u = 1.
\end{aligned}
$$

Deshaciendo el cambio de variable, se tiene que la primera solución es $x^2+y^2 = 3/5$ y la segunda $x^2 + y^2 = 1$. Se observa que ambas soluciones definen una región circular centrada en el origen con radios $\sqrt{3/5}$ y 1, respectivamente, ya que la esfera corta al cono en dos planos distintos, pero tomaremos la última solución que es la que se corresponde con la figura. Por tanto, la región de integración es $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.
Por las características de las funciones y de la región de integración, resulta más sencillo hacer la integral en coordenadas polares, donde la región de integración es $R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$.

$$
\begin{aligned}
\int_R g(x,y) - f(x,y)\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (g(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)) - f(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)))r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + \sqrt{1-(r\cos(\theta))^2 - (r\operatorname{sen}(\theta))^2} - 2\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\operatorname{sen}(\theta))^2})r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + \sqrt{1-r^2} - 2r)r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r + r\sqrt{1-r^2} - 2r^2\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{2r^3}{3}\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\, d\theta = \frac{2}{3}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para averiguar la cantidad de barquillo que se necesita para construir el cono del helado, hay que calcular el area de la superficie del cono, que viene dada por la integral

$$
\int_R \sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1}\, dA,
$$

donde R es la misma región de integración de antes.
Así que necesitamos calcular las derivadas parciales de f.

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
f'_y(x,y) &= \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, hay que calcular la siguiente integral.

$$
\begin{aligned}
\int_R \sqrt{f'_x(x,y)^2+f'_y(x,y)^2+1}\,dA, &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}\,dy\,dx\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{4x^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{x^2+y^2}+1}\,dy\,dx\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{5}\,dy\,dx\\
&= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} \sqrt{5}r\,dr\,d\theta \qquad (1)\\
&= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{5}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta\\
&= \int_{0}^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{2}\,d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}[\theta]_0^{2\pi} = \sqrt{5}\pi.
\end{aligned}
$$

(1) Cambio a coordenadas polares.

8 2024-01-11 Examen de Análisis I

Ejercicio 8.1. Dar ejemplos de conjuntos que cumplan lo siguiente y demostrarlo.

a. Un conjunto que tenga exactamente dos puntos de acumulación.
b. Un conjunto que no sea abierto ni cerrado.

Solución

a. Existen muchos conjuntos que cumplen lo que se pide, así que daremos uno sencillo. Si consideramos el conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, podemos ver fácilmente que 0 es un punto de acumulación de A, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana es posible encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, y por tanto, el número $\frac{1}{n}$ pertenece a A y también al entorno reducido $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$.

   Veamos ahora que A no tiene más puntos de acumulación. Si $x < 0$ tomando $\varepsilon = |x|$, el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\setminus\{x\}$ solo contendría puntos negativos por lo que no contendría ningún punto de A. Del mismo modo, $x > 1$ tomando $\varepsilon = |x-1|$, el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ solo contendría puntos mayores que 1 por lo que no contendría ningún punto de A, ya que el máximo de A es 1. Finalmente, si $0 < x \leq 1$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$. Tomando $\varepsilon = \min(\{|x - \frac{1}{n+1}|, |x - \frac{1}{n}|\})$, también se cumple que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}$ no contiene puntos de A.

   Del mismo modo, si consideramos el conjunto $B = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, usando el mismo razonamiento se puede probar que su único punto de acumulación es 1.

   Así pues, el conjunto $A \cup B$ solo tiene puntos de acumulación, 0 y 1.

b. El caso más sencillo de un conjunto que no es ni abierto ni cerrado es un intervalo semiabierto, por ejemplo $[0, 1)$. Este conjunto no es abierto porque el punto 0 no es un punto interior suyo, y tampoco es cerrado porque su complementario $\overline{[0, 1]} = (-\infty, 0) \cup [1, \infty]$ tampoco es abierto, ya que que el punto 1 no es un punto interior suyo.

Ejercicio 8.2. El precio normalizado medio anual del metro cuadrado urbanizable en una ciudad sigue la sucesión

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Estudiar si el precio converge a largo plazo y en tal caso calcular el valor límite.

Solución

Si calculamos los primeros términos de la sucesión

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{2+3} \approx 2.2361, \quad a_3 \approx \sqrt{2 \cdot 2.2361 + 3} \approx 2.7335, \quad a_4 \approx \sqrt{2 \cdot 2.7335 + 3} \approx 2.9098, \ldots,$$

se intuye que que la sucesión es monótona creciente, pero vamos a probarlo por inducción. En primer lugar, $a_1 < a_2$. Supongamos ahora que $a_{n-1} < a_n$, entonces

$$a_{n-1} < a_n \Leftrightarrow 2a_{n-1} < 2a_n \Leftrightarrow 2a_{n-1}+3 < 2a_n+3 \Leftrightarrow \sqrt{2a_{n-1}+3} < \sqrt{2a_n+3} \Leftrightarrow a_n < a_{n+1},$$

y por tanto la sucesión es monótona creciente.
Veamos ahora, de nuevo por inducción, que está acotada superiormente por 3. En primer lugar, $a_1 < 3$. Supongamos ahora que $a_n < 3$, entonces

$$a_n < 3 \Leftrightarrow 2a_n < 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 2a_n + 3 < 2 \cdot 3 + 3 \Leftrightarrow \sqrt{2a_n + 3} < \sqrt{2 \cdot 3 + 3} \Leftrightarrow a_{n+1} < 3,$$

por lo que la sucesión está acotada superiormente.
Aplicando el teorema de la convergencia de sucesiones monótonas se puede concluir que la sucesión tiene límite a. Para calcular el valor de a aprovecharemos la definición recurrente.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n + 3} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n + 3} = \sqrt{2a+3},$$

y resolviendo la ecuación se tiene

$$a = \sqrt{2a+3} \Leftrightarrow a^2 = 2a + 3 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ o } a = 3.$$

Como la solución $a = -1$ no puede ser al ser $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de términos positivos, se concluye que $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, y por tanto el precio medio normalizado del metro cuadrado urbanizable converge a 3.

Ejercicio 8.3. Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \ln(\sqrt{x^4 e^x})$. ¿Hacia dónde se aproxima pendiente de la recta tangente a f cuando x tiende a infinito?

Solución

Asíntotas verticaes
Para determinar las asíntotas verticales primero debemos estudiar el dominio de la función. Como el dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, $f(x)$ está definida en los valores de x tales que $\sqrt{x^4e^x} > 0$, y esto ocurre para cualquier $x \neq 0$, por tanto, el único punto donde puede haber asíntota vertical es en $x = 0$. Estudiamos los límites laterales de la función en este punto.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln(\sqrt{x^4e^x}) = -\infty.$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(\sqrt{x^4e^x}) = -\infty.$$

Como ambos límites no existen, no hay asíntota vertical en $x = 0$.
Asíntotas horizontales
Para determinar las asíntotas horizontales, tenemos que calcular los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln(\sqrt{x^4e^x}) \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2}\ln(x^4e^x) = -\infty \qquad (1)$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \ln(\sqrt{x^4e^x}) = \infty$$

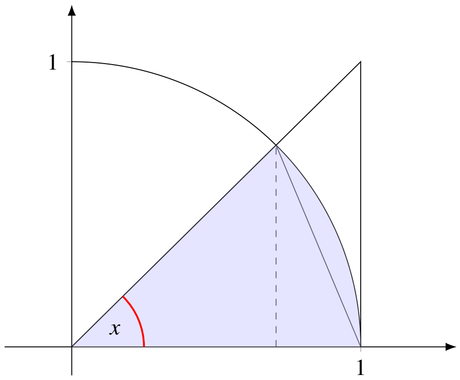
(1) x^4e^x es indeterminado cuando $x \to -\infty$, pero como la función exponencial crece más rápidamente que cualquier función potencial, se tiene que \$$\lim_{x\to -\infty} x^4e^x = 0$.
Y como ambos límites tampoco no existen, no hay asíntotas horizontales.
Asíntotas oblicuas
Finalmente para ver si hay asíntotas oblicuas, tenemos que estudiar los siguientes límites en el infinito.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(\sqrt{x^4e^x})}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^4e^x)}{2x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^4)+x}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^4)}{2x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad (1) \\
\lim_{x\to \infty} f(x) - \frac{1}{2}x &= \lim_{x\to \infty} \ln(\sqrt{x^4e^x}) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{2}\ln(x^4e^x) - \frac{x}{2} \\
&= \lim_{x\to \infty} \frac{1}{2}(\ln(x^4)+x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{2}\ln(x^4) = \infty
\end{aligned}$$

(1) $\frac{\ln(x^4)}{2x}$ es indeterminado cuando $x \to \infty$, pero como la función logarítmica creces siempre más despacio que cualquier función lineal, al final se tiene $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^4)}{2x} = 0$.

Como el último límite no existe, tampoco hay asíntota oblicua en ∞ y si calculamos los límites en $-\infty$ se obtiene lo mismo, por lo que no hay asíntotas oblicuas.
A pesar de no haber asíntotas oblicuas, como $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$, la pendiente de la recta tangente a f cuanto $x \to \infty$ tiende a $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 8.4. Sabiendo que el area del arco de la circunferencia unidad está comprendido entre las areas de los triángulos que se muestran en la siguiente figura cuando el ángulo x está en el primer cuadrante, demostrar que $\operatorname{sen}(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en 0.



Solución

Como se puede apreciar en la figura, el área del sector de la circunferencia unidad correspondiente a un ángulo x del primer cuadrante estará siempre contenido entre las áreas del triángulo pequeño y del grande.
Como el área del círculo unidad es pi, es fácil ver que el área de este sector de círculo de ángulo x es $x/2$.
Por otro lado, para calcular el área del triángulo pequeño, se observa que la base es 1, y la altura es el cateto opuesto del triángulo rectángulo inscrito en el círculo correspondiente al ángulo x. Usando las razones trigonométricas de los triángulos rectángulos sabemos que $\operatorname{sen}(x)$ es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa que vale 1, por lo que se concluye que la altura del triángulo pequeño es $\operatorname{sen}(x)$, y su área es $\operatorname{sen}(x)/2$.
Finalmente, para calcular el área del triángulo grande, volvemos a utilizar las razones trigonométricas de los triángulos rectángulos. Sabemos que $\operatorname{tg}(x)$ es el cociente entre el cateto opuesto y el catego contiguo, pero como el cateto contiguo vale 1, se tiene que la altura del triángulo es $\operatorname{tg}(x)$, por lo que su área es $\operatorname{tg}(x)/2$
Así pues, se tienen las siguientes inecuaciones,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) \leq x \leq \operatorname{tg}(x)$$

Si ahora dividimos por $\operatorname{sen}(x)$ en todos los lados de las inecuaciones, al ser $\operatorname{sen}(x) > 0$ para culquier ángulo x del primer cuadrante se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \leq \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \leq \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Aplicando ahora el teorema de la compresión de funciones, como

$$\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1,$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1,$$

y esto prueba que, x y $\operatorname{sen}(x)$ son infinitésimos equivalentes en 0.

Ejercicio 8.5. Un depósito para la recogida de agua de lluvia tiene forma de cono invertido con radio $r = 5$ m y altura $h = 5$ m. El depósito contiene agua hasta una altura de 2 m en el momento en que empieza a llover de manera que en el depósito entran 0.5 m^3/h, ¿cuál será la tasa de variación que experimentará el nivel de agua en el depósito en ese instante? Suponiendo que la intensidad de la lluvia no cambia, dar una aproximación lineal del tiempo necesario para que se llene el depósito.

Solución

El volumen de un cono de radio r y altura h viene dado por la función de dos variables $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, pero en el caso de este cono en particular, como el radio es igual a la altura, podemos expresar el volumen en función de la altura como $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^3$.
Cuando empieza a llover, el volumen de agua en el depósito empieza a cambiar a razón de 0.5 m^3/h, y por tanto, se tiene que $\frac{dV}{dt} = 0.5\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$. Para calcular la tasa de variación instantánea de la altura con respecto al tiempo, es decir $\frac{dh}{dt}$, podemos utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada el volumen con respecto al tiempo, es decir,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt},$$

de donde se deduce que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dV/dt}{dV/dh} = \frac{dV/dt}{\frac{1}{3}\pi 3h^2} = \frac{dV/dt}{\pi h^2}.$$

que en el instante en que comienza a llover, como $h = 2$ m, vale

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi 2^2} \approx 0.0398 \text{ m/h}.$$

Para dar una aproximación lineal del tiempo que tardará en llenarse el depósito, podemos utilizar el diferencial del tiempo, se que según lo anterior será

$$\frac{dh}{dt} = 0.0398 \Leftrightarrow \frac{dt}{}\frac{dh}{= 0.0398}.$$

Como el depósito ya tiene agua hasta una altura de 2 m, para que acabe de llenarse faltarían 3 m, de manera que sustituyendo $dh = 3$ en la ecuación anterior se tiene

$$\frac{dt}{\approx}\frac{3}{0.0398} \approx 75.3982 \text{ horas}.$$

Ejercicio 8.6. Calcular el polinomio de Maclaurin de tercer grado de la función $f(x) = 2\sqrt[3]{1+x}$ y utilizarlo para aproximar $\sqrt[3]{9}$ dando una cota del error cometido.

Solución

La fórmula del polinomio de Maclaurin de orden 3 para la función f es

$$P_{3,f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3,$$

de modo que tenemos que calcular hasta la tercera derivada de f en el 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\sqrt[3]{1+x} = 2(1+x)^{1/3}, & f(0) &= 2(1+0)^{1/3} = 2,\\
f'(x) &= 2\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} = \frac{2}{3}(1+x)^{-2/3}, & f'(0) &= \frac{2}{3}(1+0)^{-2/3} = \frac{2}{3},\\
f''(x) &= \frac{2}{3}\frac{-2}{3}(1+x)^{-5/3} = \frac{-4}{9}(1+x)^{-5/3}, & f''(0) &= \frac{-4}{9}(1+0)^{-5/3} = \frac{-4}{9},\\
f'''(x) &= \frac{-4}{9}\frac{-5}{3}(1+x)^{-8/3} = \frac{20}{27}(1+x)^{-8/3}, & f'''(0) &= \frac{20}{27}(1+0)^{-8/3} = \frac{20}{27},
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del polinomio obtenemos el polinomio que nos piden

$$P(3,f,0)(x) = 2 + \frac{2}{3}x + \frac{-4/9}{2}x^2 + \frac{20/27}{6}x^3 = 2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{10}{81}x^3.$$

Para dar una aproximación del valor de $\sqrt[3]{9}$, primero averiguamos en qué punto la función toma este valor.

$$f(x) = 2\sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow (2\sqrt[3]{1+x})^3 = (\sqrt[3]{9})^3 \Leftrightarrow 2^3(1+x) = 9 \Leftrightarrow 8+8x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Calculando el polinomio anterior en este punto tenemos

$$\sqrt[3]{9} \approx P(3,f,0)(0.125) = 2 + \frac{2}{3}0.125 - \frac{2}{9}0.125^2 + \frac{10}{81}0.125^3 = 2.080102258.$$

El error cometido en la aproximación anterior nos lo da el resto de Taylor, que en la forma Lagrange es

$$R_{3,f,0}(x) = \frac{f^{iv}(t)}{4!}x^4 = \frac{\frac{160}{81}(1+t)^{-11/3}}{24}x^4 = \frac{20}{243}\frac{1}{(1+t)^{11/3}}x^4 \quad t \in (0,x),$$

En el punto $x = 0.125$ donde hemos calculado la aproximación, vale

$$R_{3,f,0}(0.125) = \frac{20}{243}\frac{1}{(1+t)^{11/3}}0.125^4 = 2.00938 \cdot 10^{-5}\frac{1}{(1+t)^{11/3}} \quad t \in (0\,,\,0.125).$$

Para acotar el resto, basta con calcular el máximo de esta función en el intervalo $(0\,,\,0.125)$. Puesto que la función $1/(1+t)^{11/3}$ es decreciente en dicho intervalo, el máximo se alcanza en el extremo inferior del intervalo, es decir, $t = 0$. Así pues, tenemos la siguiente cota

$$|R_{3,f,0}(0.125)| = \left|2.00938 \cdot 10^{-5}\frac{1}{(1+t)^{11/3}}\right| \leq \left|2.00938 \cdot 10^{-5}\frac{1}{(1+0)^{11/3}}\right| = 2.00938 \cdot 10^{-5}.$$

Ejercicio 8.7. En Economía una función de utilidad expresa la satisfacción que un consumidor obtiene por la compra de un conjunto de bienes o servicios. La función $U(x,y) = \sqrt[3]{\frac{x^2y}{2}}$, expresa la utilidad de la compra de x litros de vino e y litros de cerveza para un bar. Si el precio del litro de vino es 4€ y el del litro de cerveza 2€, ¿cuántos litros de vino y cerveza debe comprar el bar para conseguir la máxima utilidad si dispone de un presupuesto de 1000€?

Solución

La función de utilidad es una función de dos variables, pero tenemos a restricción de que la empresa solo puede gastarse 1000€, por lo que debe cumplirse la ecuación $4x + 2y = 1000$. Despejando una de las variables en esta ecuación y sustituyendo en la fórmula de la función de utilidad, esta se convierte en una función de una sola variable. Por ejemplo, si despejamos el número de litros de cerveza tenemos $y = \frac{1000-4x}{2} = 500 - 2x$, y sustituyendo en la función de utilidad nos queda la función

$$U(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2(500-2x)}{2}} = \sqrt[3]{250x^2 - x^3}.$$

Como se trata de calcular el valor de x que maximiza la función de utilidad, primero tenemos que obtener los puntos críticos y para ello necesitamos la derivada, que vale

$$U'(x) = \frac{500x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(250x^2 - x^3)^2}},$$

y igualando a cero y resolviendo la ecuación se tiene

$$U'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{500x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(250x^2 - x^3)^2}} = 0 \Leftrightarrow 500x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \frac{500}{3} \approx 166.6667.$$

El valor $x = 0$ anula la función de utilidad así que no puede ser máximo, y para ver si la función tiene un máximo relativo en $x = \frac{500}{3}$, al ser la función de utilidad continua en el dominio del problema, podemos estudiar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Por ejemplo,

$$U'(166) \approx 0.0063 > 0$$
$$U'(167) \approx -0.0032 < 0$$

Como el signo de la derivada a la izquierda del punto crítico es positivo, y a la derecha negativo, la función crece a la izquierda y decrece a la derecha del punto crítico, por lo que en $x = \frac{500}{3}$ tenemos un máximo relativo. Como además no hay otro punto crítico a su derecha y la función es continua podemos concluir que es también máximo absoluto. Por tanto, el número de litros de vino que tienen que comprar la empresa es $\frac{500}{3}$ y el de litros de cerveza se obtiene sustituyendo en la restricción, es decir $y = 500 - 2\frac{500}{3} = \frac{500}{3}$. Por tanto, debe comprar el mismo número de litros de vino y cerveza.

Ejercicio 8.8. Dar un ejemplo de una función que tenga una discontinuidad evitable en $x = -2$, una discontinuidad esencial en $x = 0$ y una discontinuidad de salto en $x = 1$ y demostrar que la función tiene esas discontinuidades.

Solución

Hay muchas funciones que cumplen lo que se pide, así que daremos una función a trozos bastante sencilla.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+2} & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{x} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Veamos que f presenta las discontinuidades que se piden.
En $x = -2$, se tiene que $f(x)$ no está definida ya que se anula el denominador, pero el límite existe ya que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2} 1 = 1,$$

por lo que la función tiene una discontinuidad evitable en $x = -2$.
En $x = 0$ no se puede calcular el límite por la izquierda ya que la función $\sqrt{x}$ no está definida en los negativos, por lo que presenta una discontinuidad esencial o de segunda especie.
Finalmente en $x = 1$ los límites laterales valen

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1, \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} 0 = 0, \end{aligned}$$

y como lo límites son distintos la función presenta una discontinuidad de salto finito.

9 2024-04-16 Examen de Análisis II

Ejercicio 9.1. Calcular mediante sumas de Riemann la integral inferior de Riemann de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$.

Solución

Veamos primero si la función es creciente o decreciente en el intervalo $[1, 2]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$

Como $f'(1) = -3 < 0$ la función es decreciente en el intervalo $[1, 2]$, y por tanto, $f(x)$ alcanzará el valor mínimo en el extremo derecho de cualquier subintervalo de una partición de $[1, 2]$.
Si consideramos una partición del intervalo $[1, 2]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$, entonces los extremos de los subintervalos serán $P_n([0, 1]) = \{x_i = 1 + \frac{i}{n} : i = 0, \dots, n\}$.
Calculamos ahora la suma inferior de Riemann para esta partición.

$$
\begin{aligned}
s(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^3 - 3\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(1+3\frac{i}{n}+3\frac{i^2}{n^2}+\frac{i^3}{n^3}\right) - 3\left(1+2\frac{i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(1+3\frac{i}{n}+3\frac{i^2}{n^2}+\frac{i^3}{n^3}-3-6\frac{i}{n}-3\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(-2-3\frac{i}{n}+\frac{i^3}{n^3}\right)\frac{1}{n}\\
&= -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1 - \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i + \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3\\
&= -\frac{2}{n}n - \frac{3}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\\
&= -2 - \frac{3}{2}\frac{n+1}{n} + \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la integral inferior de Riemann de $f(x)$ en el intervalo $[1,2]$ es

$$
\begin{aligned}
\underline{\int_1^2} f(x) &= \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}\left(-2-\frac{3}{2}\frac{n+1}{n}+\frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)\\
&= -2-\frac{3}{2}+\frac{1}{4} = -\frac{13}{4}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 9.2. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar al rededor de la recta $y=1$ la región limitada por las curvas $y=\frac{x+1}{2}$ y $x=(y-2)^2$.

Solución

Primero obtenemos los puntos de intersección de las curvas. $y=\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x=2y-1$, de manera que igualando con la otra curva obtenemos

$$2y-1=(y-2)^2 \Leftrightarrow y^2-6y+5=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ o } y=5.$$

A continuación dibujamos las gráficas de las curvas y la recta $y=1$ para visualizar la región.

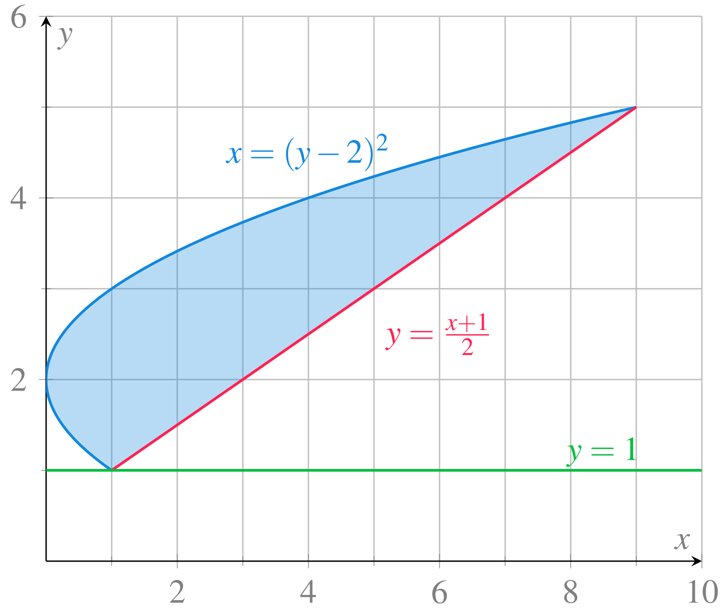


Figura 9.1: Región encerrada por las curvas $y = \frac{x+1}{2}$ y $x = (y-2)^2$.

Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene a rotar esta región alrededor de la recta $y = 1$ podríamos utilizar el método de los discos cilíndricos, pero en ese caso tendríamos que descomponer la región en dos partes, de $[0, 1]$, donde integraríamos la región entre las dos ramas de la parábola, y de $[1, 9]$, donde integraríamos la región entre la parábola y la recta. Resulta más rápido utilizar el método de los envoltorios cilíndricos integrando con respecto a y en el intervalo $[1, 5]$. Como la rotación es alrededor de la recta $x = 1$, el radio de la base de los envoltorios cilíndricos será la distancia del valor de y a esta recta, es decir, $y - 1$, y por tanto la integral que nos da el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned}\int_1^5 2\pi(y-1)((2y-1)-(y-2)^2)\,dy &= 2\pi\int_1^5 (y-1)(2y-1-y^2+4y-4)\,dy\\ &= 2\pi\int_1^5 (y-1)(-y^2+6y-5)\,dy\\ &= 2\pi\int_1^5 (-y^3+7y^2-11y+5)\,dy\\ &= 2\pi\left[-\frac{y^4}{4}+\frac{7y^3}{3}-\frac{11y^2}{2}+5y\right]_1^5\\ &= 2\pi\left(-\frac{625}{4}+\frac{875}{3}-\frac{275}{2}+25+\frac{1}{4}-\frac{7}{3}+\frac{11}{2}-5\right)\\ &= \frac{128\pi}{3}.\end{aligned}$$

Ejercicio 9.3. Calcular mediante una integral definida la longitud del arco de circunferencia del círculo $x^2+y^2=25$ desde el punto $(-3,4)$ hasta el punto $(4,3)$.

Solución

El arco de circunferencia con el que hay que trabajar está en la semicircunferencia positiva, que viene dada por la función $f(x)=\sqrt{25-x^2}$. Así pues, la longitud de la curva de f en el intervalo $[-3,4]$ viene dada por la integral

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{4} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &= \int_{-3}^{4} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{-3}^{4} \sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-3}^{4} \sqrt{\frac{25}{25-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-3}^{4} \sqrt{\frac{1}{1-(x/25)^2}}\,dx \\
&= \int_{-3/5}^{4/5} \frac{5}{\sqrt{1-y^2}}\,dy & \text{(Cambio } y = \tfrac{x}{5}) \\
&= [5\,\mathrm{arcsen(y)}]_{-3/5}^{4/5} \\
&= 5\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{-3}{5}\right)\right) \\
&\approx 7.854.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 9.4. Calcular el area comprendida entre los círculos $r = \cos(\theta)$ y $r = 2\operatorname{sen}(\theta)$.

Solución

En primer lugar dibujamos los círculos para visualizar la región.

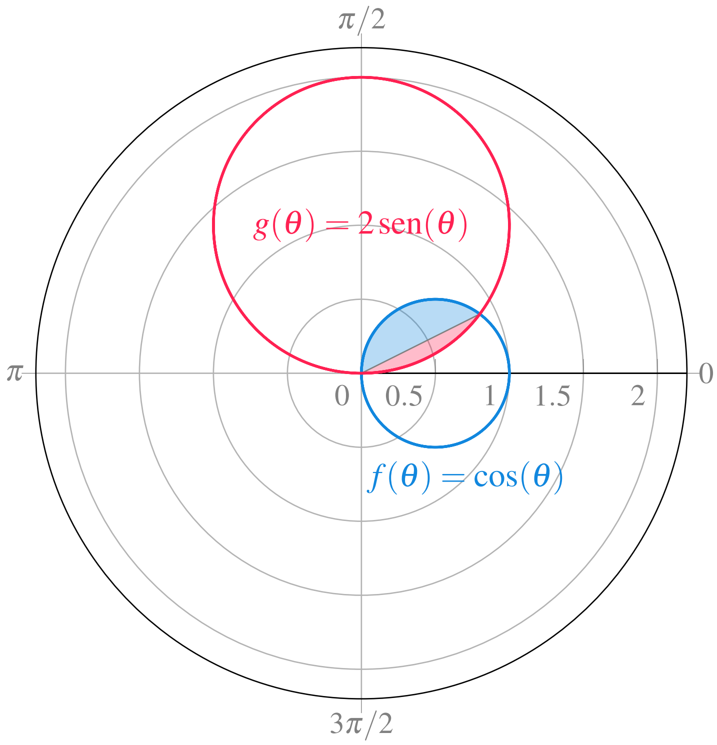


Figura 9.2: Círculos $r = \cos(\theta)$ y $r = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$.

En la gráfica se observa que uno de los puntos de corte de los dos círculos es el origen, que se alcanza para $\theta = \pi/2$ en el caso de f y para $\theta = 0$ en el caso de g. El otro punto de corte está en el primer cuadrante, y para determinar su ángulo basta resolver la ecuación

$$\cos(\theta) = 2\,\mathrm{sen}(\theta) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{tg}(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \mathrm{arctg}(1/2) = 0.4636.$$

El área de la región que nos piden es la suma de las áreas de las regiones sombreadas en azul y rojo. El área de la región en azul, que corresponde a la función $f(\theta)$ se puede obtener mediante la integral

$$
\begin{aligned}
\int_{0.4636}^{\pi/2} \frac{1}{2}(\cos(\theta))^2\, d\theta &= \frac{1}{2}\int_{0.4636}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_{0.4636}^{\pi/2} 1+\cos(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{0.4636}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(\pi) - 0.4636 - \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0.4636)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} - 0.4636 - \frac{1}{2}\sin(0.9272)\right] \\
&\approx 0.1768.
\end{aligned}
$$

Y el área de la región en rojo, que corresponde a la función $g(\theta)$, se obtiene mediante la integral

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{0.4636} \frac{1}{2}(2\,\mathrm{sen}(\theta))^2\, d\theta &= \int_{0}^{0.4636} 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{0}^{0.4636} 1-\cos(2\theta)\, d\theta \\
&= \left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{0}^{0.4636} \\
&= 0.4636 - \frac{1}{2}\sin(0.9272) \\
&\approx 0.0636.
\end{aligned}
$$

Por tanto, el area total es $0.1768 + 0.0636 = 0.2404$.

10 2024-05-30 Examen de Análisis II

Ejercicio 10.1. Calcular la integral superior de Riemann de la función $f(x) = 2x^2 - 12x$ en el intervalo $[2, 4]$.

Solución

Estudiamos primero el crecimiento de la función en el intervalo $[2, 4]$.

$$f'(x) = 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Como $f'(2) = -4 < 0$ la función es decreciente en el intervalo $[2, 3]$, y como $f'(4) = 4 > 0$ la función es creciente en el intervalo $[3, 4]$.
Así pues, para calcular la suma de Riemann descompondremos el intervalo en dos subintervalos: $[2, 3]$ y $[3, 4]$.
Para calcular la suma de Riemann superior de f en el intervalo $[2, 3]$, tomamos una partición del intervalo $[2, 3]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n}$, de manera que los extremos de los subintervalos serán $P_n([2, 3]) = \{x_i = 2 + \frac{i}{n} : i = 0, \dots, n\}$.
Como f es decreciente en este intervalo, el valor máximo de f en cada subintervalo se alcanza en el extremo izquierdo del subintervalo. Así pues, la suma superior de Riemann para esta partición es

$$
\begin{aligned}
s(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(2+\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(2+\frac{i-1}{n}\right)^2 - 12\left(2+\frac{i-1}{n}\right)\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(4+\frac{4i-4}{n}+\frac{i^2-2i+1}{n^2}\right) - 12\left(2+\frac{i-1}{n}\right)\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(8+\frac{8i-8}{n}+\frac{2i^2-4i+2}{n^2} - 24 - 12\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(-16+\frac{8i}{n}-\frac{8}{n}+\frac{2i^2}{n^2}-\frac{4i}{n^2}+\frac{2}{n^2}-\frac{12i}{n}+\frac{12}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(-16+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n^2}+\frac{4i}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}\\
&= \left(\left(-16+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}1 - \left(\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}i + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\frac{1}{n}\\
&= \left(\left(-16+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)n - \left(\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\frac{1}{n}\\
&= -16+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}-2-\frac{2}{n}-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}\\
&= -\frac{52}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la integral superior de Riemann de $f(x)$ en el intervalo $[2,3]$ es

$$\overline{\int_2^3} f(x) = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{52}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2} = -\frac{52}{3}.$$

Del mismo modo, para calcular la suma de Riemann superior de f en el intervalo $[3,4]$, tomamos una partición del intervalo $[3,4]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n}$, de manera que los extremos de los subintervalos serán $Q_n([3,4]) = \{x_i = 3+\frac{i}{n} : i = 0,\ldots,n\}$.
Como f es creciente en este intervalo, el valor máximo de f en cada subintervalo se alcanza en el extremo derecho del subintervalo. Así pues, la suma superior de Riemann para esta partición es

$$
\begin{aligned}
s(f,Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(3+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(3+\frac{i}{n}\right)^2 - 12\left(3+\frac{i}{n}\right)\right)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(9+\frac{6i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right) - 12\left(3+\frac{i}{n}\right)\right)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(18+\frac{12i}{n}+\frac{2i^2}{n^2}-36-12\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(-18+\frac{2i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} \\
&= \left(-18\sum_{i=1}^{n}1+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\frac{1}{n} \\
&= \left(-18n+\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\frac{1}{n} \\
&= -18+\frac{2}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2} \\
&= \frac{-52}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la integral superior de Riemann de $f(x)$ en el intervalo $[3,4]$ es

$$\overline{\int_3^4} f(x) = \lim_{n\to\infty} s(f,Q_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-52}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2} = -\frac{52}{3}.$$

Finalmente, la integral superior de Riemann de $f(x)$ en el intervalo $[2,4]$ es

$$\overline{\int_2^4} f(x) = \overline{\int_2^3} f(x) + \overline{\int_3^4} f(x) = -\frac{52}{3} - \frac{52}{3} = -\frac{104}{3}.$$

Ejercicio 10.2. Se dispone de un cable de 50 m de longitud que se sostiene en sus extremos por dos postes. ¿A qué distancia deben colocarse los postes para que la altura del cable sobre el suelo sea de 10 m en su punto más bajo?

Nota: La ecuación de la curva que describe el cable, suponiendo que la curva esté centrada en el eje y, es una catenaria de ecuación $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, donde a es la altura de la catenaria en el punto más bajo.

Solución

Como la altura de la catenaria en el punto más bajo es 10 m, la función que describe esta catenaria es $f(x) = 10\cosh\left(\frac{x}{10}\right)$, y la longitud de la curva descrita por la función $f(x)$ en el intervalo $[-d, d]$ viene dada por la integral

$$\begin{aligned}
\int_{-d}^{d} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx &= \int_{-d}^{d} \sqrt{1 + \operatorname{senh}\left(\frac{x}{10}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-d}^{d} \sqrt{\cosh\left(\frac{x}{10}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-d}^{d} \cosh\left(\frac{x}{10}\right)\, dx \\
&= 10\left[\operatorname{senh}\left(\frac{x}{10}\right)\right]_{-d}^{d} \\
&= 10\left(\operatorname{senh}\left(\frac{d}{10}\right) - \operatorname{senh}\left(-\frac{d}{10}\right)\right) \\
&= 10 \cdot 2\operatorname{senh}\left(\frac{d}{10}\right) \\
&= 20\operatorname{senh}\left(\frac{d}{10}\right).
\end{aligned}$$

Como la longitud del cable es 50 m, tenemos que

$$\begin{gathered}
50 = 20\operatorname{senh}\left(\frac{d}{10}\right) \Leftrightarrow \operatorname{senh}\left(\frac{d}{10}\right) = \frac{50}{20} = \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow d = 10\operatorname{arcsenh}(2.5) = 10\ln\left(2.5 + \sqrt{2.5^2 + 1}\right) \approx 16.4723.
\end{gathered}$$

Así pues, los postes deben colocarse a una distancia de $2 \cdot 16.4723 = 32.9446$ m.

Ejercicio 10.3. Calcular el volumen de un depósito con forma de sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la función $y = \operatorname{sen}(x/2)^2$ en el intervalo $[0, \pi]$ en dm^3.

Si empezamos a introducir agua en el depósito a un ritmo dado por la función $e(t) = e^{1-t}$ l/m y al mismo tiempo sale agua a un ritmo dado por la función $s(t) = te^{1-t}$. Calcular el volumen de agua en el depósito en cada instante t desde el instante en que comienza a entrar agua en el depósito. ¿Se llenará el depósito en algún momento? ¿Qué cantidad de agua habrá en el depósito a largo plazo?

Solución

Para calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la función $f(x) = \operatorname{sen}(x/2)^2$ en el intervalo $[0, \pi]$ alrededor del eje y, utilizaremos el método de los envoltorios cilíndricos, de manera que hay que calcular la siguiente integral

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi 2\pi x f(x)\,dx &= 2\pi \int_0^\pi x \operatorname{sen}(x/2)^2\,dx \\
&= 2\pi \int_0^\pi x \left(\frac{1-\cos(x)}{2}\right) dx \\
&= \pi \int_0^\pi x - x\cos(x)\,dx \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right]_0^\pi \\
&= \pi \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\operatorname{sen}(\pi) - \cos(\pi) - 0 + 0\operatorname{sen}(0) + \cos(0)\right) \\
&= \frac{\pi^3}{2} + 2\pi.
\end{aligned}
$$

Este es el volumen que queda por fuera del depósito en el intervalo $[0, \pi]$, de manera que el volumen del depósito es el volumen de un cilindro de radio π y altura $f(\pi) = 1$ menos el volumen calculado anteriormente, ya que f es creciente en el intervalo $[0, \pi]$. Así pues, el volumen del depósito es

$$\pi\pi^2 - \left(\frac{\pi^3}{2} + 2\pi\right) = \pi^3 - \frac{\pi^3}{2} - 2\pi = \frac{\pi^3}{2} - 2\pi \approx 9.22\mathrm{dm}^3.$$

Por otro lado, la tasa de variación instantánea del volumen de agua en el depósito en el instante t es la cantidad de agua que entra menos la que sale, es decir, $e(t) - s(t)$, de manera que el volumen de agua en el depósito en el instante t viene dado por la integral

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^t e(x) - s(x)\,dx = \int_0^t e^{1-x} - xe^{1-x}\,dx = \int_0^t (1-x)e^{1-x}\,dx \\
&= \left[xe^{1-x}\right]_0^t = te^{1-t} - 0 = te^{1-t}.
\end{aligned}
$$

Para saber si el depósito se llenará en algún instante, calculamos el máximo de F en el intervalo $[0, \infty)$. Como $F'(t) = (1-t)e^{1-t}$, el único punto crítico está en $t = 1$, y además se trata de un máximo ya que el signo de F' es positivo a la izquierda de 1 y negativo a la derecha. Pero como $F(1) = 1e^{1-1} = 1 < \frac{\pi^3}{2} - 2\pi$, el depósito no se llenará en ningún instante.

Por último, para saber cuánta agua habrá en el depósito a largo plazo, calculamos el límite de F cuando t tiende a infinito

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} te^{1-t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t-1}} && \text{(L'Hôpital)}\\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{t-1}} = 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 10.4. El centroide de la región plana encerrada entre la gráfica de una función $f(x)$ y el eje x en un intervalo $[a,b]$ tiene coordenadas

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx},$$
$$\bar{y} = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Aplicar el mismo razonamiento usado en la deducción de estas fórmulas para deducir las fórmulas del centroide de la región plana encerrada entre las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, siendo $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Solución

Para calcular el centroide de la región plana encerrada entre las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, siendo $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, tomamos una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
Si llamamos $\bar{x}_i$ al centro del subintervalo i-ésimo, $[x_{i-1}, x_i]$ y consideramos el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)$, el centroide de este rectángulo de igual densidad es $(\bar{x}_i, \frac{f(\bar{x}_i)+g(\bar{x}_i)}{2})$. Así pues, el momento con respecto al eje y de este rectángulo es

$$\bar{x}_i M_i = \bar{x}_i \delta(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x,$$

lo que da lugar a la suma de Riemann

$$\delta \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i (f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x,$$

y al tomar particiones cada vez más refinadas, obtenemos la integral

$$\delta \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx,$$

de manera que al dividir por la masa de la región plana encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, que es $\delta \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$, obtenemos la coordenada x del centroide de la región

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}.$$

Por otro lado, el momento con respecto al eje x del rectángulo correspondiente al subintervalo i-ésimo es

$$\frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} M_i = \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \delta(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x = \delta \frac{f(\bar{x}_i)^2 - g(\bar{x}_i)^2}{2} \Delta x,$$

lo que da lugar a la suma de Riemann

$$\delta \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\bar{x}_i)^2 - g(\bar{x}_i)^2}{2} \Delta x,$$

y al tomar particiones cada vez más refinadas, obtenemos la integral

$$\delta \int_a^b \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{2}\, dx,$$

de manera que al dividir por la masa de la región, obtenemos la coordenada y del centroide de la región

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b f(x)^2 - g(x)^2\, dx}{2 \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}.$$

Ejercicio 10.5. Estudiar la convergencia de las siguientes series y, en caso de que converjan, dar una cota del error cometido al aproximar su suma mediante la suma parcial de orden 100.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$.
b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(n+1)}{n^2 + n - 1}}$.

Solución

a. $\frac{e^{1/n}}{n^2} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que se trata de una serie de términos positivos.

Utilizando el criterio de la integral con $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$, tenemos que

$$\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = [-e^{1/x}]_1^\infty = -\lim_{x\to\infty} e^{1/x} + e = e - 1,$$

y como la integral es finita, la serie converge.

Otra forma de demostrar la convergencia de esta serie es utilizando el criterio del cociente, comparando con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$, de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{1/n}}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1.$$

Como el límite es finito y positivo, ambas series tienen el mismo comportamiento, y como $\sum \frac{1}{n^2}$ sabemos que converge, la serie $\sum \frac{e^{1/n}}{n^2}$ también converge.

Para dar una cota del error cometido al aproximar la suma de la serie mediante la suma parcial de orden 100, podemos usar la proposición de la acotación del residuo de la serie, de manera que una cota del error viene dada por la integral

$$\int_{100}^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = [-e^{1/x}]_{100}^\infty = -\lim_{x\to\infty} e^{1/x} + e^{1/100} = e^{1/100} - 1 \approx 0.01005.$$

b. $\sqrt{\frac{(n+1)}{n^2+n-1}} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que también se trata de una serie de términos positivos.

Utilizando el criterio del cociente, comparando con la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{(n+1)}{n^2+n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2+n-1}} = 1.$$

Como el límite es finito y positivo, ambas series tienen el mismo comportamiento, y como $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ sabemos que diverge, al ser una serie p con $p < 1$, la serie $\sum \sqrt{\frac{(n+1)}{n^2+n-1}}$ también diverge.

Ejercicio 10.6. Dos personas lanzan una moneda de manera alternada y gana el primero que obtenga una cara. Expresar con una serie la probabilidad de que gane cada una de ellas. Demostrar que la suma de esas dos series es 1.

Solución

Sea $f(n)$ la probabilidad de sacar la primera cara en el lanzamiento n. Entonces, $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ya que para que esto ocurra los $n-1$ lanzamientos anteriores deben ser cruces, con probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y el lanzamiento n debe ser cara, con probabilidad $\frac{1}{2}$.
El jugador 1 gana si la cara sale en la tirada impar, y por tanto, la probabilidad de que gane viene dada por la suma de la serie

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n},\end{aligned}$$

que es una serie geométrica de razón $1/4$, y por tanto converge, y su suma es

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Por otro lado, el jugador 2 gana si la cara sale en la tirada par, y por tanto, la probabilidad de que gane viene dada por la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} - 1,$$

que de nuevo es una serie geométrica de razón $1/4$, y por tanto converge, y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Como se ve, la suma de las dos probabilidades es $\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$, algo que debe cumplir todo espacio probabilístico.

Ejercicio 10.7. (2.5 puntos) Calcular la serie de Taylor de la función $f(x) = \ln(x-1)$ en $a = 2$ y determinar su dominio de convergencia puntual.

Solución

Sabemos que la serie de MacLaurin de la función $\ln(1+x)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Como $f(x) = \ln(x-1) = \ln(1+x-2)$, haciendo un cambio de variable en el polinomio anterior, se tiene que el polinomio de Taylor de $f(x)$ en $a=2$ es

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n},$$

que es una serie de potencias centrada en 2.
Calculamos ahora su radio de convergencia por el criterio de la razón

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1,$$

de manera que la serie converge para $|x-2|<1$, es decir, $x\in(1,3)$.
Finalmente, estudiamos la convergencia en los extremos del intervalo anterior. En $x=1$ resulta la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

que diverge al ser la serie armónica.
Y en $x=3$ resulta la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

que es la serie armónica alternada y ya sabemos que converge.
Así pues, el dominio de convergencia puntual de la serie es $\mathcal{C}=(1,3]$.

11 2024-11-05 Examen de Análisis III

Ejercicio 11.1. Una moto se mueve siguiendo la trayectoria dada por la función vectorial $\mathbf{f}(t) = 2t^3\mathbf{i} + (3t - t^3)\mathbf{j}$.

a. ¿Con qué rapidez se mueve en el instante $t = 1$?

b. Calcular la curvatura de la trayectoria en el instante $t = 1$.

c. Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = 1$.

Solución

a. La rapidez de la moto en el instante $t = 1$ se obtiene calculando el módulo del vector derivada de $\mathbf{f}(t)$ en $t = 1$.

$$\mathbf{f}'(t) = (6t^2, 3 - t^2)$$

y

$$|\mathbf{f}'(1)| = |(6, 0)| = 6$$

b. La curvatura de la trayectoria en el instante $t = 1$ se obtiene mediante la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|^3}.$$

Calculamos la derivada segunda de $\mathbf{f}(t)$.

$$\mathbf{f}''(t) = (12t, -6t) \quad \text{y} \quad \mathbf{f}''(1) = (12, -6)$$

y

$$\kappa(1) = \frac{|\mathbf{f}'(1) \times \mathbf{f}''(1)|}{|\mathbf{f}'(1)|^3} = \frac{|(6,0) \times (12,-6)|}{|6,0|^3} = \frac{|(0,0,-36)|}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}.$$

c. La aceleración de la moto la da el vector de la segunda derivada de $\mathbf{f}(t)$, que ya hemos calculado en el apartado anterior y vale $\mathbf{f}''(1) = (12, -6)$.

Como el vector tangente $\mathbf{f}'(1) = (6, 0)$ tiene la dirección del eje x, la componente tangencial de la aceleración es la primera componente de $\mathbf{f}''(1)$, es decir, 12, y la componente normal es la segunda componente de $\mathbf{f}''(1)$, es decir, -6.

Podemos llegar al mismo resultado aplicando las fórmulas de las componentes tangencial y normal del vector aceleración.

$$
\begin{aligned}
a_T(1) &= |v(1)|' = \frac{\mathbf{f}'(1) \cdot \mathbf{f}''(1)}{|\mathbf{f}'(1)|} = \frac{(6,0) \cdot (12,-6)}{6} = \frac{72}{6} = 12,\\
a_N(1) &= \frac{|\mathbf{f}'(1) \times \mathbf{f}''(1)|}{|\mathbf{f}'(1)|} = \frac{|(6,0) \times (12,-6)|}{6} = \frac{|(0,0,-36)|}{6} = \frac{36}{6} = 6.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11.2. Una compañía produce productos de dos tipos X e Y. La demanda de estos productos viene dada por las funciones

$$
\begin{aligned}
d_x(x,y) &= 120 - 2x + y\\
d_y(x,y) &= 100 + \frac{x}{2} - y
\end{aligned}
$$

donde d_x y d_y son las unidades demandadas de productos X e Y respectivamente, y x e y sus precios. El coste de producción de d_x unidades de x y d_y unidades de y viene dado por la función $c(d_x, d_y) = 20d_x + 30d_y + \frac{1}{2}d_x d_y$.

a. Calcular las derivadas parciales de las funciones de demanda e interpretarlas.

b. Calcular las derivadas parciales de la función de beneficio con respecto a los precios de los productos e interpretarlas.

c. ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución

a. Las derivadas parciales de las funciones de demanda son

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial d_x}{\partial x} &= -2, & \frac{\partial d_x}{\partial y} &= 1,\\
\frac{\partial d_y}{\partial x} &= \frac{1}{2}, & \frac{\partial d_y}{\partial y} &= -1.
\end{aligned}
$$

Como $\frac{\partial d_x}{\partial x} = -2$ por cada unidad que aumente el precio de X manteniendo el precio de Y constante, la demanda de X baja en dos unidades. La interpretación de las otras derivadas parciales es análoga.

b. El beneficio de la compañía es la diferencia entre los ingresos y los costes, es decir,

$$
\begin{aligned}
b(x,y) &= xd_x(x,y) + yd_y(x,y) - c(d_x(x,y), d_y(x,y)) \\
&= x(120-2x+y) + y\left(100+\frac{x}{2}-y\right) - 20(120-2x+y) \\
&- 30\left(100+\frac{x}{2}-y\right) - \frac{1}{2}(120-2x+y)\left(100+\frac{x}{2}-y\right) \\
&= 120x - 2x^2 + xy + 100y + \frac{xy}{2} - y^2 - 2400 + 40x - 20y \\
&- 3000 - 15x + 30y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{5}{4}xy + 70x + 10y - 6000 \\
&= \frac{-3}{2}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}y^2 + 215x + 120y - 11400.
\end{aligned}
$$

Y sus derivadas parciales son

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial x} &= -3x + \frac{1}{4}y + 215, \\
\frac{\partial b}{\partial y} &= \frac{1}{4}x - y + 120.
\end{aligned}
$$

La derivada parcial $\frac{\partial b}{\partial x}$ nos dice que si el precio de X aumenta, manteniendo constante el precio de Y, el beneficio experimenta una variación inversamente proporcional al precio de X y directamente proporcional al precio de Y, mientras que la derivada parcial $\frac{\partial b}{\partial y}$ nos dice que si el precio de Y aumenta, manteniendo constante el precio de X, el beneficio experimenta una variación inversamente proporcional al precio de Y y directamente proporcional al precio de X.

c. Para maximizar el beneficio, calculamos primero los puntos críticos de la función $b(x,y)$, es decir, los puntos donde las derivadas parciales se anulan. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
-3x + \frac{1}{4}y + 215 &= 0, \\
\frac{1}{4}x - y + 120 &= 0,
\end{aligned}
$$

se obtiene $x = 83.4043$ e $y = 140.8511$. Para comprobar que este punto es un máximo relativo, calculamos el determinante de la matriz hessiana de $b(x, y)$.

$$\nabla^2 b(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 b}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$|\nabla^2 b(83.4043, 140.8511)| = \begin{vmatrix} -3 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = 3 - \frac{1}{16} = \frac{47}{16} > 0.$$

Como además $\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = -3 < 0$, el punto $(83.4043, 140.8511)$ es un máximo relativo de la función $b(x, y)$ y el beneficio máximo es $b(83.4043, 140.8511) = 6107.0213$.

Ejercicio 11.3. La superficie de una función $f(x, y)$ contiene las trayectorias dadas por las funciones vectoriales $\mathbf{f}(t) = (e^{-t}, 2t + 2, 3 - 2t + t^2)$ y $\mathbf{g}(t) = \left(\sqrt(t), \frac{t^2+3}{2}, 4t^4 - t\right)$.

a. Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de $\mathbf{g}$ en el punto $(1, 2, 3)$.

b. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie de f en el punto $(1, 2, 3)$.

c. En ese mismo punto, ¿cuál es la tasa de variación instantánea de f con respecto a x si y se mantiene constante? ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de f con respecto a y si x se mantiene constante?

d. Usar el polinomio de Taylor de primer grado de f en el punto $(1, 2)$ para aproximar el valor de $f(0.9, 2.1)$.

Solución

a. $\mathbf{g}(t)$ pasa por el punto $(1, 2, 3)$ cuando $t = 1$. La recta tangente a la trayectoria de $\mathbf{g}$ en ese punto es la recta que pasa por $(1, 2, 3)$ y tiene la misma dirección que $\mathbf{g}'(1)$.

$$\mathbf{g}'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, t, 16t^3 - 1\right)$$

y

$$\mathbf{g}'(1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 15\right).$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$T(t) = (1,2,3) + t\mathbf{g}'(1) = (1,2,3) + t\left(\frac{1}{2}, 1, 15\right) = \left(1 + \frac{t}{2}, 2 + t, 3 + 15t\right).$$

b. Como $\mathbf{f}(t)$ también pasa por el punto $(1,2,3)$ cuando $t = 0$, $\mathbf{f}'(0)$ también será tangente a la superficie de f en el punto $(1,2,3)$. Por tanto, el plano tangente a f en $(1,2,3)$ contendrá tanto a $\mathbf{f}'(0)$ como a $\mathbf{g}'(1)$.

$$\mathbf{f}'(t) = (-e^{-t}, 2, -2 + 2t)$$

y

$$\mathbf{f}'(0) = (-1, 2, -2).$$

Así pues, el producto vectorial de $\mathbf{f}'(0)$ y $\mathbf{g}'(1)$ nos da un vector normal al plano tangente.

$$\mathbf{f}'(0) \times \mathbf{g}'(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 15 \end{vmatrix} = (30+2)\mathbf{i} + (-1+15)\mathbf{j} + (-1-1)\mathbf{k} = (32, 14 - 2).$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} &(x-1, y-2, z-3) \cdot (32, 14, -2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &32(x-1) + 14(y-2) - 2(z-3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &32(x-1) + 12(y-2) + 30(z-3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &z = 16x + 7y - 27. \end{aligned}$$

c. La tasa de variación instantánea de f con respecto a x si y se mantiene constante en el punto $(1,2,3)$ es $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)$, que es el valor que multiplica a x en la ecuación del plano tangente, y vale 16.

Del mismo modo, la tasa de variación instantánea de f con respecto a y si x se mantiene constante en el punto $(1,2,3)$ es $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)$, que es el valor que multiplica a y en la ecuación del plano tangente, y vale 7.

d. El polinomio de Taylor de primer grado de f en el punto $(1,2)$ coincide con la ecuación del plano tangente a la superficie de f en ese punto. Por tanto, la aproximación de $f(0.9, 2.1)$ es

$$f(0.9, 2.1) \approx 16(0.9) + 7(2.1) - 27 = 14.4 + 14.7 - 27 = 2.1.$$

12 2024-11-11 Examen de Análisis I

Ejercicio 12.1. Calcular las asíntotas de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x$.

Solución

Asíntotas verticales
Buscamos las asíntotas verticales en los puntos donde la función no está definida. La función está definida en todo $\mathbb{R}$, excepto en $x = 1$ y $x = -1$, ya que en estos puntos se anula el denominador del exponente.
Estudiamos primero el límite en $x = -1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x &= \lim_{x\to -1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} + \lim_{x\to -1^-} 3x \\
&= e^{\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1}} + 3(-1) \\
&= e^{-\infty} - 3 = -3. \\
\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x &= \lim_{x\to -1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} + \lim_{x\to -1^+} 3x \\
&= e^{\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1}} + 3(-1) \\
&= e^{\infty} - 3 = \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = -1$ por la derecha.
Estudiamos ahora el límite en $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x &= \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} + \lim_{x\to 1^-} 3x \\
&= e^{\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1}} + 3(1) \\
&= e^{-\infty} + 3 = 3. \\
\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x &= \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} + \lim_{x\to 1^+} 3x \\
&= e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1}} + 3(1) \\
&= e^{\infty} + 3 = \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$ por la derecha.
Asíntotas horizontales
Estudiamos los límites en el infinito.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x &= \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}} + \lim_{x\to-\infty} 3x \\
&= e^{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1}} + 3 \lim_{x\to-\infty} x \\
&= e^0 - 3\infty = -\infty. \\
\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}} + \lim_{x\to\infty} 3x \\
&= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1}} + 3 \lim_{x\to\infty} x \\
&= e^0 + 3\infty = \infty.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas

Para determiar la pendiente de la asíntota estudiamos los límites en el infinito de $f(x)/x$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{x}{x^2-1}}}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} \\
&= \frac{\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\lim_{x\to-\infty} x} + 3 \\
&= \frac{1}{-\infty} + 3 = 3.
\end{aligned}
$$

Así pues, la función tiene una asíntota oblicua en $-\infty$ con pendiente 3.

Para determinar el término independiente de la asíntota oblicua, calculamos el límite de $f(x) - 3x$ en el infinito.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}} + 3x - 3x &= \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}} \\
&= e^{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1}} \\
&= e^0 = 1.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $-\infty$ con ecuación $y = 3x + 1$.

Del mismo modo se puede demostrar que la misma recta $y = 3x+1$ es una asíntota oblicua en $+\infty$.

Ejercicio 12.2. Una inversión financiera ofrece una rentabilidad anual dada por la sucesión

$$\begin{cases} a_1 = 2\%, \\ a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n+4}\% \end{cases}$$

¿Hacia qué valor tiende la rentabilidad a largo plazo?

Solución

Calculamos los primeros términos de la sucesión para darnos una idea de su comportamiento.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2, \\
a_2 &= \frac{8 \cdot 2}{2+4} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \approx 2.67, \\
a_3 &= \frac{8 \cdot 8/3}{8/3+4} = \frac{64/3}{20/3} = \frac{64}{20} = \frac{16}{5} = 3.2, \\
a_4 &= \frac{8 \cdot 16/5}{16/5+4} = \frac{128/5}{36/5} = \frac{128}{36} = \frac{32}{9} \approx 3.56, \\
a_5 &= \frac{8 \cdot 32/9}{32/9+4} = \frac{256/9}{68/9} = \frac{256}{68} = \frac{64}{17} \approx 3.76, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Parece que la sucesión tiende a 4, así que probaremos por inducción que 4 es una cota superior de la sucesión.
Caso base: $a_1 = 2 < 4$. **Hipótesis de inducción:** Supongamos que $a_n < 4$. **Paso inductivo:** Probaremos que $a_{n+1} < 4$, o lo que es equivalente, $\frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{a_n+4}{8a_n} = \frac{a_n}{8a_n} + \frac{4}{8a_n} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2a_n} \\
&> \frac{1}{8} + \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $a_n < 4\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Probaremos ahora que la sucesión es creciente. Para ello, calculamos la diferencia entre dos términos consecutivos.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{8a_n}{a_n+4} - a_n = \frac{8a_n - a_n(a_n+4)}{a_n+4} = \frac{a_n(4-a_n)}{a_n+4} > 0$$

ya que $0 < a_n < 4\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Como la sucesión es creciente y acotada superiormente, según el teorema de convergencia de sucesiones monótonas, la sucesión converge. Tomando límites en la ecuación de recurrencia, obtenemos

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8a_n}{a_n+4} = \frac{8\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} a_n + 4} = \frac{8a}{a+4}$$

Resolviendo la ecuación anterior se tiene

$$a = \frac{8a}{a+4} \Leftrightarrow a(a+4) = 8a \Leftrightarrow a^2+4a = 8a \Leftrightarrow a^2-4a = 0$$
$$\Leftrightarrow a(a-4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad a = 4.$$

Como $a_1 = 2 > 0$, se tiene que $a = 4$, y por tanto, la rentabilidad a largo plazo tiende al 4%.

Ejercicio 12.3. Demostrar sin usar la regla de L'Hôpital que $1-\cos(x)$ y $\frac{x^2}{2}$ son infinitésimos equivalentes en $x = 0$.

Solución

Usando la fórmula del coseno del ángulo doble, tenemos que

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 1-\cos(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Como $\sin(x) \approx x$ para $x \approx 0$, se tiene que $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \approx \frac{x}{2}$ para $x \approx 0$, y por tanto, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

y por tanto $1-\cos(x)$ y $\frac{x^2}{2}$ son infinitésimos equivalentes en $x = 0$.

Ejercicio 12.4. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2x^3 - 3x^2 + x > 0\}$, calcular su supremo, su ínfimo, su máximo y su mínimo. ¿Es un conjunto abierto o cerrado? Dar sus puntos de acumulación que no pertenecen al conjunto y demostrarlo.

Solución

Primero vamos a expresar el conjunto A mediante la unión de intervalos. Para ello, factorizamos el polinomio $2x^3 - 3x^2 + x$ y se tiene

$$2x^3 - 3x^2 + x = x(2x^2 - 3x + 1) = x(2x-1)(x-1).$$

Para que $2x^3 - 3x^2 + x > 0$, necesitamos que $x > 0$ y que $(2x-1)(x-1) > 0$, o que $x < 0$ y $(2x-1)(x-1) < 0$. Por su parte, $(2x-1)(x-1) > 0$ si $x > 1$ o $x < 1/2$.

Así pues, el conjunto A se puede expresar como

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x < 1/2\} = \mathbb{Q} \cap ((0, 1/2) \cup (1, \infty)).$$

Resulta fácil ver que A no tiene supremo ya que no está acotado superiormente, y por tanto tampoco tiene máximo. Por otro lado, su ínfimo es 0 ya que es la mayor de las cotas inferiores, pero como $0 \notin A$, no tiene mínimo.
El conjunto A no es abierto ya que sus puntos no son interiores. Si tomamos cualquier valor $x \in A$, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que el entorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene valores irracionales debido a la densidad de los números irracionales en los reales. Por tanto, A no es abierto. Del mismo modo, su contrario tampoco es abierto ya que si tomamos por ejemplo un valor $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x > 1$, para cualquier ε el $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contiene valores racionales por la densidad de los racionales en los reales. Por tanto, $\mathbb{R} \setminus A$ no es abierto y A no es cerrado.
Finalmente, veamos que puntos de acumulación de A que no pertenecen a A. En primer lugar, 0 es un punto de acumulación de A ya que cualquier entorno reducido de 0 contiene valores racionales positivos. Del mismo modo, $1/2$ es otro punto de acumulación ya que cualquier entorno reducido de $1/2$ contiene valores racionales menores de $1/2$. Y 1 es también otro punto de acumulación ya que cualquier entorno reducido de 1 contiene valores racionales mayores de 1. Por tanto, 0, $1/2$ y 1 son puntos de acumulación de A que no pertenecen a A. Pero además, cualquier número irracional $x \in (0, 1/2) \cup (1, \infty)$ es un punto de acumulación de A que no pertenece a A, ya que, una vez más, por la densidad de los racionales en los reales, cualquier entorno de x contiene valores racionales en $(0, 1/2) \cup (1, \infty)$, es decir en A. Por tanto, los puntos de acumulación de A que no pertenecen a A son 0, $1/2$, 1 y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap ((0, 1/2) \cup (1, \infty))$.

Ejercicio 12.5. Demostrar usando la definición de límite que $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

Solución

Dado un $\varepsilon > 0$, veamos si existe un $\delta > 0$ tal que $|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1-x}{2(x+1)}\right| = \frac{|x-1|}{2|x+1|}.$$

Necesitamos que

$$\frac{|x-1|}{2|x+1|} < \varepsilon.$$

Para acotar inferiormente $|x+1|$, supongamos que $|x-1| < 1$, de modo que $0 < x < 2$. Entonces $1 < x+1 < 3$, y por tanto, $|x+1| > 1$. Así pues, si $|x-1| < 1$, tenemos que

$$\frac{|x-1|}{2|x+1|} < \frac{|x-1|}{2}.$$

Necesitamos, por tanto, que

$$\frac{|x-1|}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < 2\varepsilon.$$

De manera que tomando $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$, se tiene que

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1-x}{2(x+1)}\right| < \left|\frac{1-x}{2}\right| < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

13 2024-12-20 Examen de Análisis III

Ejercicio 13.1. La temperatura de una placa de inducción térmica en cada punto (x, y) de su superficie viene dada por la función $T(x, y) = ye^{-x^2-2y^2}$.

a. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de la temperatura en el punto $(0, 0)$ si empezamos a movernos en la dirección en la que x decrece un tercio de lo que aumenta y?

b. ¿En qué puntos la temperatura será máxima y mínima? ¿Cuál será la temperatura en esos puntos?

c. Usar el polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $(1, 0)$ para aproximar la temperatura en el punto $(0.9, 0.1)$.

Solución

a. La tasa de variación instantánea la da la derivada direccional de T en $(0, 0)$ siguiendo la dirección del vector $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

Calculamos primero el gradiente de la función.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= ye^{-x^2-2y^2}\frac{\partial(-x^2-2y^2)}{\partial x} = ye^{-x^2-2y^2}(-2x)\\
\frac{\partial T}{\partial y} &= e^{-x^2-2y^2} + y\frac{\partial\left(e^{-x^2-2y^2}\right)}{\partial y} = e^{-x^2-2y^2} + ye^{-x^2-2y^2}\frac{\partial(-x^2-2y^2)}{\partial y}\\
&= e^{-x^2-2y^2} + ye^{-x^2-2y^2}(-4y) = e^{-x^2-2y^2}(1-4y^2)
\end{aligned}$$

Así pues, el gradiente es

$$\nabla T(x, y) = \left(e^{-x^2-2y^2}(-2xy), e^{-x^2-2y^2}(1-4y^2)\right),$$

y en el punto $(0, 0)$ vale

$$\nabla T(0, 0) = \left(e^{-0^2-20^2}(-2\cdot 0), e^{-0^2-20^2}(1-4\cdot 0^2)\right) = (0, 1).$$

Por tanto, la derivada direccional es

$$
\begin{aligned}
T_{\mathbf{v}}(0,0) &= \nabla T(0,0)\frac{(-\frac{1}{3},1)}{|(-\frac{1}{3},1)|} = (0,1)\frac{(-\frac{1}{3},1)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1^2}} \\
&= (0,1)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}.
\end{aligned}
$$

b. Para encontrar los puntos críticos de la función, igualamos el gradiente al vector nulo y resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \Rightarrow -2xye^{-x^2-2y^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 0, \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \Rightarrow (1-4y^2)e^{-x^2-2y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, los puntos críticos son $(0,1/2)$ y $(0,-1/2)$.

Para determinar si son máximos o mínimos, calculamos el determinante de la matriz hessiana en cada punto crítico.

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 T(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-2xye^{-x^2-2y^2}) & \frac{\partial}{\partial x}(1-4y^2)e^{-x^2-2y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}(-2xye^{-x^2-2y^2}) & \frac{\partial}{\partial y}(1-4y^2)e^{-x^2-2y^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4x^2ye^{-x^2-2y^2} - 2ye^{-x^2-2y^2} & 8xy^2e^{-x^2-2y^2} - 2xe^{-x^2-2y^2} \\ 8xy^2e^{-x^2-2y^2} - 2xe^{-x^2-2y^2} & 16y^3e^{-x^2-2y^2} - 12ye^{-x^2-2y^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La matriz hessiana en el punto $(0,1/2)$ es

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 T(0,1/2) &= \begin{pmatrix} 4\cdot 0^2\frac{1}{2}e^{-0^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2\frac{1}{2}e^{-0^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} & 8\cdot 0\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-0^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2\cdot 0e^{-0^2-2*\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ 8\cdot 0\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-0^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2\cdot 0e^{-0^2-2*\left(\frac{1}{2}\right)^2} & 16\left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{-0^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 12\frac{1}{2}e^{-0^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -e^{-1/2} & 0 \\ 0 & -4e^{-1/2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

y su determinante vale $H(0,1/2) = -e^{-1/2}(-4e^{-1/2}) = 4e^{-1}$, que es positivo, por lo que en el punto $(0,1/2)$ hay un extremo relativo, y como $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(0,1/2) = -e^{-1/2} < 0$, es un máximo relativo. La temperatura en este punto vale $T(0,1/2) = 1/2e^{-0^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1/2e^{-1/2} \approx 0.3033$.

En el punto $(0,-1/2)$ la matriz hessiana es

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 T(0,-1/2) &= \begin{pmatrix} 4\cdot 0^2\frac{-1}{2}e^{-0^2-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}-2\frac{-1}{2}e^{-0^2-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2} & 8\cdot 0\left(\frac{-1}{2}\right)^2 e^{-0^2-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}-2\cdot 0e^{-0^2-2*\left(\frac{-1}{2}\right)} \\ 8\cdot 0\left(\frac{-1}{2}\right)^2 e^{-0^2-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}-2\cdot 0e^{-0^2-2*\left(\frac{-1}{2}\right)^2} & 16\left(\frac{-1}{2}\right)^3 e^{-0^2-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}-12\frac{-1}{2}e^{-0^2-2\left(\frac{-1}{2}\right)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-1/2} & 0 \\ 0 & 4e^{-1/2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

y su determinante vale $H(0,-1/2) = e^{-1/2}4e^{-1/2} = 4e^{-1}$, que es positivo, por lo que en el punto $(0,-1/2)$ también hay un extremo relativo, y como $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(0,1/2) = e^{-1/2} > 0$, es un mínimo relativo. La temperatura en este punto vale $T(0,-1/2) = -1/2e^{-0^2-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = -1/2e^{-1/2} \approx -0.3033$.

c. La fórmula del polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $(1,0)$ es

$$P_T^2(x,y) = T(1,0) + \nabla T(1,0)(x-1,y) + \frac{1}{2}\left((x-1,y)\nabla^2 T(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Calculamos el gradiente en el punto $(1,0)$

$$\nabla T(1,0) = \left(e^{-1^2-2\cdot 0^2}(-2\cdot 1\cdot 0), e^{-1^2-2\cdot 0^2}(1-4\cdot 0^2)\right) = (0, e^{-1}),$$

y la matriz hessiana en el punto $(1,0)$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 T(1,0) &= \begin{pmatrix} 4\cdot 1^2\cdot 0e^{-1^2-2\cdot 0^2}-2\cdot 0e^{-1^2-2\cdot 0^2} & 8\cdot 1\cdot 0^2 e^{-1^2-2\cdot 0^2}-2\cdot 1e^{-1^2-2\cdot 0^2} \\ 8\cdot 1\cdot 0^2 e^{-1^2-2\cdot 0^2}-2\cdot 1e^{-1^2-2\cdot 0^2} & 16\cdot 0^3 e^{-1^2-2\cdot 0^2}-12\cdot 0e^{-1^2-2\cdot 0^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2e^{-1} \\ -2e^{-1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la fórmula del polinomio de Taylor de segundo grado, obtenemos

$$
\begin{aligned}
P_T^2(x,y) &= 0 + (0,e^{-1})(x-1,y) + \frac{1}{2}\left((x-1,y)\begin{pmatrix} 0 & -2e^{-1} \\ -2e^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= e^{-1}y - 2e^{-1}(x-1)y.
\end{aligned}
$$

Y la aproximación de la temperatura en el punto $(0.9, 0.1)$ es

$$T(0.9,0.1) \approx P_T^2(0.9,0.1) = e^{-1}0.1 - 2e^{-1}(0.9-1)0.1 = 0.1e^{-1} + 0.02e^{-1} \approx 0.0441455$$

Ejercicio 13.2. Un coche circula por un circuito elíptico cuya trayectoria viene dada por la función vectorial $f(t) = (400\cos(10t), 100\,\mathrm{sen}(10t))$, donde t está dado en minutos y las coordenadas de f en metros.

a. Calcular la rapidez del vehículo en el instante $t = \pi$.

b. Calcular la curvatura de la trayectoria en ese instante.

c. Calcular la componente tangencial del vector aceleración en ese instante.

d. Calcular la componente normal del vector aceleración en ese instante.

e. Suponiendo que los neumáticos no proporcionan ningún agarre (por ejemplo porque hay hielo en la carretera), ¿cuál es el mínimo ángulo que debería tener el peralte de la curva en este instante para que el coche no se salga del circuito? Tómese una aceleración debida a la gravedad de 9.8 m/s^2.

Solución

a. La rapidez del vehículo en el instante $t = \pi$ es módulo del vector velocidad en ese instante, así que calculamos primero el vector velocidad.

$$\mathbf{f}'(t) = (-4000\sin(10t), 1000\cos(10t))$$

y en el instante $t = \pi$ vale

$$\mathbf{f}'(\pi) = (-4000\sin(10\pi), 1000\cos(10\pi)) = (0, 1000).$$

por lo que la rapidez es $|\mathbf{f}'(\pi)| = \sqrt{0^2 + 1000^2} = 1000$ m/min.

b. La curvatura de la trayectoria en el instante t viene dada por la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|^3}.$$

Calculamos primero el vector aceleración.

$$\mathbf{f}''(t) = (-40000\cos(10t), -10000\sin(10t))$$

que en el instante $t = \pi$ vale

$$\mathbf{f}''(\pi) = (-40000\cos(10\pi), -10000\sin(10\pi)) = (-40000, 0).$$

Por tanto, la curvatura en el instante $t = \pi$ es

$$\kappa(\pi) = \frac{|(0, 1000, 0) \times (-40000, 0, 0)|}{|(0, 1000)|^3} = \frac{|(0, 0, 4 \cdot 10^7)|}{10^9} = \frac{4 \cdot 10^7}{1000^9} = 0.04.$$

c. La componente tangencial del vector aceleración en el instante $t = \pi$ es

$$a_T(\pi) = \frac{\mathbf{f}'(\pi) \cdot \mathbf{f}''(\pi)}{|\mathbf{f}'(\pi)|} = \frac{(0, 1000) \cdot (-40000, 0)}{1000} = \frac{-40000 \cdot 0 + 1000 \cdot 0}{1000} = 0.$$

d. La componente normal del vector aceleración en el instante $t = \pi$ es

$$a_N(\pi) = \frac{|\mathbf{f}'(\pi) \times \mathbf{f}''(\pi)|}{|\mathbf{f}'(\pi)|} = \frac{|(0, 0, 4 \cdot 10^7)|}{10^3} = \frac{4 \cdot 10^7}{10^3} = 40000.$$

e. La fuerza centrípeta que debe ejercer el peralte de la curva para que el coche no se salga del circuito es la misma pero opuesta a la fuerza centrífuga del movimiento del coche. Como la fuerza centrífuga es la componente normal del vector aceleración que hemos calculado antes, se tiene que la fuerza centrípeta es $F_c = 40000m$ kg$\cdot$ m/min^2 $= 40000/3600$ kg$\cdot$m/s^2, donde m es la masa del coche. Por otro lado, la fuerza F que ejerce la carretera sobre el coche se descompone en la componente gravitatoria $F_g = mg$, que compensa la fuerza de la gravedad, y la componente normal a la componente gravitatoria, que es la fuerza centrípeta F_c. Si θ es el ángulo del peralte de la carretera, se cumple que $F_g = F\cos(\theta)$ y $F_c = F\sin(\theta)$. Así que la fuerza centrípeta es $F_c = F\sin(\theta) = 40000m$, y la fuerza gravitatoria es $F_g = F\cos(\theta) = mg$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que el peralte de la curva en este instante para que el coche no se salga del circuito es

$$\theta = \arctan\left(\frac{F_c}{F_g}\right) = \arctan\left(\frac{40000/3600m}{mg}\right) = \arctan\left(\frac{11.11}{9.8}\right) \approx 48.6°.$$

Ejercicio 13.3. La ecuación $(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2 = 4R^2(x^2+y^2)$ define la superficie de un toroide de radio mayor R y radio menor r.

a. Para un toro de radio mayor 4 y radio menor 2, probar que la ecuación anterior define implícitamente a z como una función de x y y en un entorno del punto $(4, 0, 2)$.

b. Calcular el gradiente de z como función implícita de x y y en el punto $(4, 0)$ e interpretarlo.

Solución

a. La ecuación del toro es

$$(x^2+y^2+z^2+4^2-2^2)^2 = 4\cdot 4^2(x^2+y^2) \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2+12)^2-64(x^2+y^2) = 0.$$

Par demostrar que la ecuación anterior define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(4,0,2)$ debemos comprobar que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita.

Sea $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+12)^2 - 64(x^2+y^2)$. Entonces $F(4,0,2) = (4^2+0^2+2^2+12)^2 - 64(4^2+0^2) = 0$, de modo que el punto $(4,0,2)$ pertenece a la superficie del toro.

En segundo lugar, F es diferenciable en un entorno de $(4,0,2)$, puesto que es una función polinómica y las derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2(x^2+y^2+z^2+12)2x - 64\cdot 2x = 4x(x^2+y^2+z^2-20),\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2(x^2+y^2+z^2+12)2y - 64\cdot 2y = 4y(x^2+y^2+z^2-20),\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 2(x^2+y^2+z^2+12)2z = 4z(x^2+y^2+z^2+12).
\end{aligned}$$

Como todas las derivadas parciales son funciones polinómicas, son continuas en todo $\mathbb{R}^3$, y en particular en el punto $(4,0,2)$.

Finalmente, $\frac{\partial F}{\partial z}(4,0,2) = 4\cdot 2(4^2+0^2+2^2+12) = 4\cdot 2\cdot 32 = 256 \neq 0$, por lo que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita y la ecuación define implícitamente a z como función de x e y en un entorno del punto $(4,0,2)$.

b. Para calcular el gradiente de z como función implícita de x e y en el punto $(4,0)$, tenemos que calcular las derivadas parciales de z con respecto a x e y. Para ello, primero calculamos las derivadas parciales de F en el punto $(4,0,2)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(4,0,2) &= 4\cdot 4(4^2+0^2+2^2-20) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(4,0,2) &= 4\cdot 0(4^2+0^2+2^2-20) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial z}(4,0,2) &= 4\cdot 2(4^2+0^2+2^2+12) = 256.
\end{aligned}$$

Por tanto, las derivadas parciales de z con respecto a x e y en el punto $(4,0)$ valen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{0}{256} = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{0}{256} = 0.$$

Es decir, el punto $(4, 0)$, es un punto críttico de z y por tanto en este punto la función ni crece ni decrece en cualquier dirección.

Ejercicio 13.4. Una ventana como la de la figura de más abajo está formada por un rectángulo de base l y altura h y un semicírculo de diámetro l. Si el área de la ventana es fija, qué relación debe haber entre l y h para que el perímetro de la ventana sea mínimo. Calcular las dimensiones óptimas para un área de 1 m^2. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange.

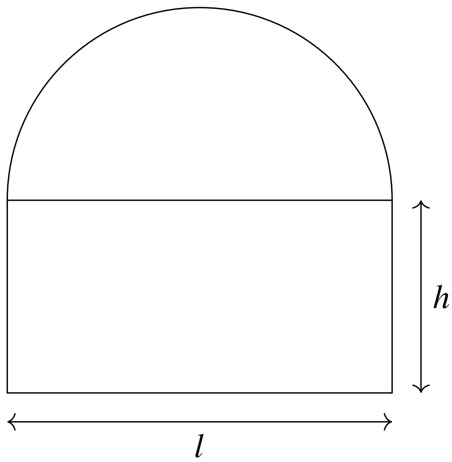


Figura 13.1: Ventana

Solución

El área de la ventana es la suma de las áreas del rectángulo y le semicírculo, así que la función que da el área de la ventana es

$$A(l, h) = lh + \frac{\pi}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = lh + \frac{\pi}{8}l^2.$$

Por otro lado, el perímetro de la ventana es la suma de los tres lados del rectángulo y el perímetro del semicírculo, así que la función que da el perímetro de la ventana es

$$P(l,h) = l + 2h + \frac{\pi}{2}l.$$

Para minimizar el perímetro de la ventana podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. Así que debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla A(l,h) &= \lambda \nabla P(l,h) \\ A(l,h) &= k \end{cases}$$

El gradiente de la función del área es

$$\nabla A(l,h) = \left(h + \frac{\pi}{4}l, l\right)$$

y el gradiente de la función del perímetro es

$$\nabla P(l,h) = \left(1 + \frac{\pi}{2}, 2\right).$$

Así que el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{cases} h + \frac{\pi}{4}l &= \lambda\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ l &= 2\lambda \\ lh + \frac{\pi}{8}l^2 &= k \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $l = 2\lambda$, sustituyendo en la primera ecuación obtenemos que

$$h + \frac{\pi}{4}2\lambda = \lambda\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

de donde se deduce que que $h = \lambda$, y por tanto la relación entre l y h es $l = 2h$. Finalmente, sustituyendo en la tercera ecuación, para un área de 1 m^2, se tiene

$$2hh + \frac{\pi}{8}(2h)^2 = 1 \Rightarrow h^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{\pi}{2}}} \approx 0.5292 \text{ m},$$

y $l = 2h \approx 2 \cdot 0.5292 = 1.0584$ m.

Ejercicio 13.5. Calcular el centro de masas de una placa metálica semicircular de radio a en los siguientes casos:

a. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia al origen.
b. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia al eje x.

Solución

a. La distancia al origen de un punto (x, y) es $\sqrt{x^2+y^2}$, así que la densidad en cada punto es $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, donde k es una constante de proporcionalidad.

La región de integración es el semicírculo de radio a, que en coordenadas rectangulares es

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq a^2, y \geq 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}\right\}.$$

y en coordenadas polares es

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Puesto que la región de integración es más simple en coordenadas polares, calculamos el centro de masas en estas coordenadas. Además la función de densidad se simplifica en coordenadas polares, puesto que $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Así que la densidad en cada punto es $\delta(r, \theta) = kr$. La masa de la placa es

$$\begin{aligned}
M &= \int_R \delta(r, \theta)\, dA = \int_0^a \int_0^\pi krr\, d\theta dr \\
&= \int_0^a \int_0^\pi kr^2\, d\theta dr = k\int_0^a r^2[\theta]_0^\pi\, dr \\
&= k\pi \int_0^a r^2\, dr = k\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \\
&= \frac{k\pi a^3}{3}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, los momentos respecto al eje x y al eje y son

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int_R y\delta(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^\pi r\,\mathrm{sen}(\theta)kr^2\,d\theta dr \\
&= k\int_0^a r^3 \int_0^\pi \mathrm{sen}(\theta)\,d\theta dr = k\int_0^a r^3[-\cos(\theta)]_0^\pi\,dr \\
&= k\int_0^a r^3[-(-1-1)]\,dr = 2k\int_0^a r^3\,dr \\
&= 2k\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{ka^4}{2}. \\
M_y &= \int_R x\delta(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^\pi r\cos(\theta)kr^2\,d\theta dr \\
&= k\int_0^a r^3 \int_0^\pi \cos(\theta)\,d\theta dr = k\int_0^a r^3[\mathrm{sen}(\theta)]_0^\pi\,dr \\
&= k\int_0^a r^3[\mathrm{sen}(\pi)-\mathrm{sen}(0)]\,dr = k\int_0^a r^3[0-0]\,dr = 0.
\end{aligned}
$$

Así pues, el centroide tiene coordenadas

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_y}{M} = \frac{0}{k\pi a^3/3} = 0, \\
\bar{y} &= \frac{M_x}{M} = \frac{ka^4/2}{k\pi a^3/3} = \frac{3a}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

b. La distancia al eje x de un punto (x,y) es $|y|$, así que, en la región de integración, que cae en el semiplano $y>0$, la densidad en cada punto es $\delta(x,y)=ky$, donde k es una constante de proporcionalidad.

Al igual que antes trabajaremos en coordenadas polares ya que los cálculos son más simples. En coordenadas polares la función de densidad es $\delta(r,\theta) = kr\,\mathrm{sen}(\theta)$. La masa de la placa es

$$
\begin{aligned}
M &= \int_R \delta(r,\theta)\,dA = \int_0^a \int_0^\pi kr\,\mathrm{sen}(\theta)r\,d\theta dr \\
&= k\int_0^a \int_0^\pi r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta dr = k\int_0^a r^2 \int_0^\pi \mathrm{sen}(\theta)\,d\theta dr \\
&= k\int_0^a r^2[-\cos(\theta)]_0^\pi\,dr = k\int_0^a r^2[-(-1-1)]\,dr \\
&= 2k\int_0^a r^2\,dr = 2k\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{2ka^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Y los momentos respecto al eje x y al eje y son

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int_R y\delta(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^\pi r\operatorname{sen}(\theta) kr\operatorname{sen}(\theta) r\,d\theta dr \\
&= k\int_0^a r^3 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta dr = k\int_0^a r^3 \int_0^\pi \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta dr \\
&= k\int_0^a r^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^\pi dr = k\int_0^a r^3\left(\frac{\pi}{2}-0\right) dr \\
&= \frac{k\pi}{2}\int_0^a r^3\,dr = \frac{k\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{k\pi a^4}{8}. \\
M_y &= \int_R x\delta(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^\pi r\cos(\theta) kr\operatorname{sen}(\theta) r\,d\theta dr \\
&= k\int_0^a r^3 \int_0^\pi \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\,d\theta dr = k\int_0^a r^3 \left[\frac{\operatorname{sen}(\theta)^2}{2}\right]_0^\pi dr \\
&= k\int_0^a r^3 \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi)^2}{2} - \frac{\operatorname{sen}(0)^2}{2}\right) dr = k\int_0^a r^3(0-0)\,dr = 0.
\end{aligned}
$$

Así pues, el centroide tiene coordenadas

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_x}{M} = \frac{k\pi a^4/8}{2ka^3/3} = \frac{3\pi a}{16} \\
\bar{y} &= \frac{M_y}{M} = \frac{0}{2ka^3/3} = 0.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 13.6. Calcular el volumen comprendido entre la gráfica de la función $f(x,y) = \frac{x}{y}$ y el plano $z=0$ en la región limitada por las curvas de la figura.

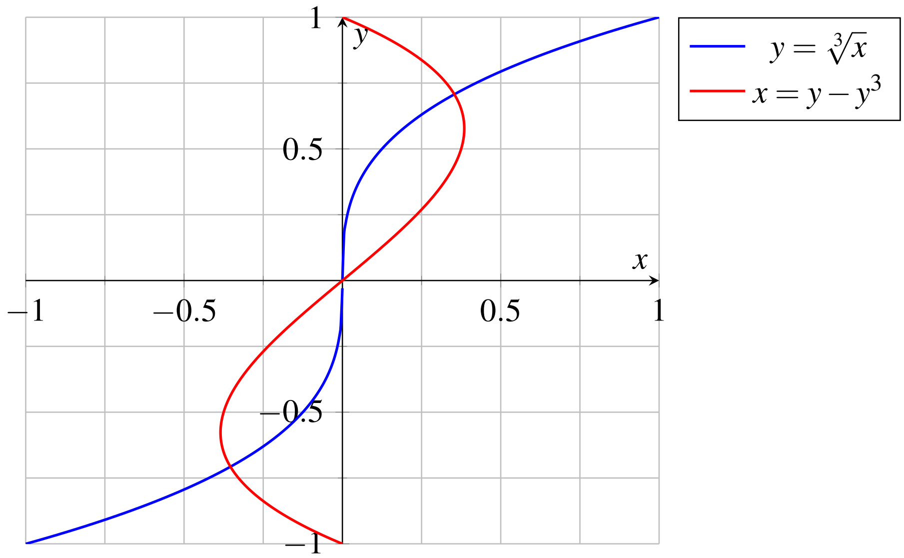


Figura 13.2: Región de integración

Solución

En primer lugar determinamos los puntos de corte de las dos gráficas para expresar la región de integración. Para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y &= \sqrt[3]{x} \\ x &= y - y^3 \end{cases}$$

Despejando x en la primera ecuación obtenemos que $x = y^3$, y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $y^3 = y - y^3$, de donde se deduce que $y(1-2y^2) = 0$, y por tanto tenemos tres soluciones $y = 0$, $y = 1/\sqrt{2} = 2^{-1/2}$ y $y = -1/\sqrt{2} = -2^{-1/2}$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos que $x = 0$, $x = 2^{-3/2}$ y $x = -2^{-3/2}$ respectivamente. Por lo tanto, los puntos de corte son $(0,0)$, $(2^{-3/2}, 2^{-1/2})$ y $(-2^{-3/2}, -2^{-1/2})$.

Si integramos primero con respecto a y y luego con respecto a x, la región de integración resulta más compleja porque los límites de x no serían los puntos de corte de las dos gráficas, sino los extremos de la función $x = y - y^3$, pero además habría que descomponer la región de integración en cuatro partes. Por lo tanto, es más conveniente integrar primero con respecto a x y luego con respecto a y. En este caso, la región de integración puede descomponerse en las dos subregiones siguientes

$$R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - y^3 \leq x \leq y^3, -2^{-1/2} \leq y \leq 0\right\}$$
$$R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 \leq x \leq y - y^3, 0 \leq y \leq 2^{-1/2}\right\}$$

Como la función $f(x,y)=\frac{x}{y}$ es simétrica en el primer y tercer cuadrantes, para calcular el volumen encerrado entre la superficie y el plano $z=0$ en la región de integración, podemos calcular el volumen en la región R_2 y multiplicarlo por 2. Así que el volumen es

$$
\begin{aligned}
\int_R f(x,y)dA &= 2\int_0^{2^{-1/2}}\int_{y^3}^{y-y^3}\frac{x}{y}\,dxdy = 2\int_0^{2^{-1/2}}\left[\frac{x^2}{2y}\right]_{y^3}^{y-y^3}dy\\
&= 2\int_0^{2^{-1/2}}\left[\frac{(y-y^3)^2}{2y}-\frac{y^6}{2y}\right]dy = 2\int_0^{2^{-1/2}}\left[\frac{y^2-2y^4+y^6}{2y}-\frac{y^5}{2}\right]dy\\
&= 2\int_0^{2^{-1/2}}\left[\frac{y-2y^3+y^5}{2}-\frac{y^5}{2}\right]dy = 2\int_0^{2^{-1/2}}\left[\frac{y-2y^3}{2}\right]dy\\
&= 2\left[\frac{y^2}{4}-\frac{y^4}{4}\right]_0^{2^{-1/2}} = 2\left(\frac{1}{4\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 2^2}\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right) = 2\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

14 2025-01-14 Examen de Análisis I

Ejercicio 14.1. Dada la colección de conjuntos $A_n = \left[1 - \frac{2}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$ con $n \in \mathbb{N}$, calcular para cada uno de los conjuntos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$:

a. Supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
b. Puntos interiores, puntos exteriores y puntos frontera.
c. Determinar si son abiertos o cerrados.

Justificar la respuesta de cada apartado.

Solución

Veamos primero cuáles son los primeros conjuntos de la colección.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left[1 - \frac{2}{1}, 2 + \frac{1}{1}\right) = [-1, 3)\\
A_2 &= \left[1 - \frac{2}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right) = [0, 2.5)\\
A_3 &= \left[1 - \frac{2}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = [0.3333, 2.3333)\\
A_4 &= \left[1 - \frac{2}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right) = [0.5, 2.25)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Como se puede ver, se trata de una colección de intervalos encajados. Por tanto, la unión de todos los conjuntos es el primer conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = [-1, 3)$ que contiene a todos los demás. Para determinar la intersección de todos los conjuntos, tenemos que calcular hacia dónde tienden los extremos de los intervalos. El extremo inferior $1 - \frac{2}{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$, y el extremo superior $2 + \frac{1}{n} \to 2$ cuando $n \to \infty$, por lo que la intersección de todos los conjuntos es $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = [1, 2]$.

a. El supremo de la unión es 3, ya que es la menor de las cotas inferiores,pero como 3 no pertenece al conjunto unión, no existe máximo. El ínfimo es -1, ya que es la mayor de las cotas inferiores, y como -1 pertenece al conjunto unión es el mínimo.

   El supremo de la intersección es 2, ya que es la menor de las cotas superiores, y como 2 pertenece al conjunto intersección, es el máximo. El ínfimo es 1, ya que es la mayor de las cotas inferiores, y como 1 pertenece al conjunto intersección es el mínimo.

b. El conjunto de los puntos interiores de la unión es $(-1,3)$, ya que $\forall x \in (1,3)$ $\exists \varepsilon = \min\{x+1, 3-x\}$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (-1,3)$. El conjunto de los puntos exteriores es $(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$ ya que $\forall x \in (-\infty,-1)$ $\exists \varepsilon - 1 - x$ tal que $(x- ,x+) (-∞, -1), y $\forall x \in (3,\infty)$ $\exists \varepsilon = x-3$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (3,\infty)$. Y el conjunto de los puntos frontera es $\{-1,3\}$, ya que son los dos únicos puntos que no son puntos interiores ni exteriores.

En cuanto a la intersección, el conjunto de puntos interiores es $(1,2)$, ya que $\forall x \in (1,2)$ $\exists \varepsilon = \min\{x-1, 2-x\}$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (1,2)$. El conjunto de puntos exteriores es $(-\infty,1) \cup (2,\infty)$ ya que $\forall x \in (-\infty,1)$ $\exists \varepsilon = 1-x$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (-\infty,1)$, y $\forall x \in (2,\infty)$ $\exists \varepsilon = x-2$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (2,\infty)$. Y el conjunto de los puntos frontera es $\{1,2\}$, ya que son los dos únicos puntos que no son puntos interiores ni exteriores.

c. El conjunto unión no es abierto ni cerrado, ya que es un intervalo semiabierto. Y el conjunto intersección es cerrado ya que es un intervalo cerrado.

Ejercicio 14.2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones usando la definición de derivada.

a. $f(x) = e^x$.
b. $g(x) = \ln(x)$.

Solución

a. La derivada de $f(x) = e^x$ es

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = e^x,
\end{aligned}
$$

ya que $e^h - 1$ y h son infinitésimos equivalentes cuando $h \to 0$.

b. La derivada de $g(x) = \ln(x)$ es

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x}}{\frac{h}{x}} \\
&= \frac{1}{x},
\end{aligned}
$$

ya que $\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$ y $\frac{h}{x}$ son infinitésimos equivalentes cuando $h \to 0$.

Ejercicio 14.3. Calcular el límite de las siguientes sucesiones.

a. $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n=1}^{\infty}$

b. $\left(\frac{(n+1)!}{n^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

a. Estudiamos primero el límite de $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n=1}^{\infty}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} + \frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

b. Estudiamos ahora el límite de $\left(\frac{(n+1)!}{n^n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Aplicando el criterio del cociente se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{n^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)!n^n}{(n+1)!(n+1)(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\right)^n \\
&= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Y como $\frac{1}{e} < 1$, según el criterio del cociente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = 0.$$

Ejercicio 14.4. Dar un ejemplo de una función no polinómica que tenga una asíntota vertical $x = 2$, una asíntota horizontal $y = 1$ y una asíntota oblicua $y = 2x - 1$, y demostrarlo.

Solución

Asíntota vertical $x = 2$
La forma más sencilla de obtener una asíntota vertical en $x = 2$ es con una función racional tal que el denominador se anule en 2, como por ejemplo $\frac{p(x)}{x-2}$, siempre y cuando $p(2) \neq 0$. En tal caso, se tiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{p(x)}{x-2} = \pm\infty.$$

y la función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.
Asíntota horizontal $y = 1$
Para obtener una asíntota horizontal en $y = 1$ el límite de la función en $-\infty$ o en ∞ debe ser 1. Lo más sencillo es tomar una función racional tal que el grado del

numerador sea igual al grado del denominador y con los coeficientes de los términos de mayor grado iguales. Podemos aprovechar la función anterior tomando $p(x) = x$, de manera que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-2} = 1,$$

y la función tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.
Asíntota oblicua $y = 2x - 1$
Para obtener una asíntota oblicua en $y = 2x - 1$ la función debe ser de la forma $f(x) = 2x - 1 + g(x)$, donde $g(x)$ es una función que tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$. Por ejemplo, tomando $g(x) = \frac{1}{x}$, se tiene la función

$$2x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x + 1}{x}.$$

Para demostrar que esta función tiene asíntota oblicua en $y = 2x - 1$ calculamos primero el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2-x+1}{x}}{x} = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = 2,$$

de manera que existe una asíntota oblicua con pendiente 2, y el término independiente de la asíntota nos lo da el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x} - 2x = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x + 1 - 2x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x + 1}{x} = -1.$$

Y por tanto la función tienen una asíntota oblicua en $y = 2x - 1$.
Así pues, una función que cumple con las tres condiciones es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \neq 3, \\ \frac{2x^2-x+1}{x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Ejercicio 14.5. La concentración de un fármaco en sangre, C en mg/dl, y el tiempo, t en s, están relacionados mediante la expresión $e^{tC} - t^2C^3 - \ln(C) = 0$.

a. ¿Cómo varía la concentración del fármaco en sangre con el tiempo en el instante $t = 0$?

b. Calcular la ecuación de la recta normal a la curva definida por la ecuación anterior en ese mismo instante.

Solución

a. En primer lugar necesitamos saber la concentración del fármaco en el instante $t = 0$. Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$e^{0\cdot C} - 0^2C^3 - \ln(C) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(C) = 0 \Leftrightarrow \ln(C) = 1 \Leftrightarrow C = e,$$

y por tanto, la concentración del fármaco en sangre en el instante $t = 0$ es e mg/dl.

Para ver cómo varía la concentración del fármaco con el tiempo en ese instante, necesitamos calcular la derivada en el instante. Derivando implícitamente la ecuación respecto de t se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{tC} - t^2C^3 - \ln(C)\right) &= \frac{d}{dt}0 = 0\\
\Leftrightarrow \frac{de^{tC}}{dt} - \frac{d(t^2C^3)}{dt} - \frac{d\ln(C)}{dt} &= 0\\
\Leftrightarrow e^{tC}\frac{d(tC)}{dt} - \left(\frac{dt^2}{dt}C^3 + t^2\frac{dC^3}{dt}\right) - \frac{1}{C}\frac{dC}{dt} &= 0\\
\Leftrightarrow e^{tC}\left(C + t\frac{dC}{dt}\right) - 2tC^3 - t^2 3C^2\frac{dC}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dC}{dt} &= 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $t = 0$ y $C = e$ se tiene

$$\begin{aligned}
e^{0\cdot e}\left(e + 0\frac{dC}{dt}\right) - 2\cdot 0\cdot e^3 - 0^2 3e^2\frac{dC}{dt} - \frac{1}{e}\frac{dC}{dt} &= 0\\
\Leftrightarrow e - \frac{1}{e}\frac{dC}{dt} &= 0\\
\Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= e^2
\end{aligned}$$

b. La ecuación de la recta normal a la curva en el punto $(0, e)$ es

$$C = e - \frac{1}{dC/dt(0,e)(x-0)} \Leftrightarrow C = e - \frac{x}{e^2}.$$

Ejercicio 14.6. Un globo que está lleno de un gas perfecto tiene un volumen de 5 litros, una presión de 1 atmósfera y una temperatura de 300 K.

a. Si en ese instante se empieza a calentar el gas a razón de 5 K/min, ¿cómo cambiará la presión suponiendo que el volumen se mantiene constante?

b. Si en ese instante se empieza a comprimir el globo de manera que el volumen decrece a razón de 10 cl/min, ¿que variación experimentará la presión si se mantiene la temperatura constante? Dar una aproximación lineal del instante en el que el globo explotará, suponiendo que la presión máxima que puede soportar es de 1.1 atmósferas.

Nota: La ecuación de los gases perfectos es $PV = cT$, donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura absoluta y c una constante.

Solución

En primer lugar vamos a calcular la constante c de la ecuación de los gases perfectos. Para ello, sustituimos los valores iniciales en la ecuación.

$$1 \cdot 5 = c \cdot 300 \Leftrightarrow c = \frac{1 \cdot 5}{300} = \frac{1}{60}\text{atm}\cdot\text{L/K}.$$

a. Para ver cómo cambia la presión con la temperatura expresamos la presión en función de la temperatura

$$P = \frac{cT}{V} = \frac{1}{60}\frac{T}{5} = \frac{T}{300},$$

y como la temperatura varía con el tiempo de manera que $\frac{dT}{dt} = 5$ K/min, aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dT}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{300} \cdot 5 = \frac{1}{60} \text{ atm/min}.$$

b. Para ver cómo cambia la presión con el volumen, expresamos la presión en función del volumen,

$$P = \frac{cT}{V} = \frac{300}{60V} = \frac{5}{V},$$

y como ahora el volumen varía con el tiempo de manera que $\frac{dV}{dt} = -0.1$ L/min, aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dV}\frac{dV}{dt} = -\frac{5}{V^2}(-0.1) = \frac{5}{5^2}0.1 = 0.02 \text{ atm/min}.$$

Para ver cuándo explotará el globo, necesitamos encontrar el instante en el que la presión es de 1.1 atmósferas. Como la presión inicial es de 1 atmósfera, la variación de la presión necesaria para que explote el globo es de 0.1 atmósferas. Utilizando la aproximación que nos da el diferencial $dP = 0.02dt$, para una variación de 0.1 atmósferas se tiene

$$0.1 = 0.02dt \Leftrightarrow dt = \frac{0.1}{0.02} = 5\text{min}.$$

Ejercicio 14.7. Demostrar la fórmula del binomio

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

con $n \in \mathbb{N}$ usando polinomios de Taylor.

Solución

Considerando la función $f(x) = (1+x)^n$, su polinomio de Maclaurin es de orden n es

$$P^n_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Calculamos las derivadas de $f(x)$ en $x=0$ hasta orden n:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = (1+x)^n & f(0) = 1 \\
f'(x) = n(1+x)^{n-1} & f'(0) = n \\
f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} & f''(0) = n(n-1) \\
f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} & f'''(0) = n(n-1)(n-2) \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = n! & f^{(n)}(0) = n!
\end{array}$$

Sustituyendo en el polinomio de Maclaurin se tiene

$$\begin{aligned}
P^n_{f,0}(x) &= 1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + \frac{n!}{n!}x^n \\
&= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.
\end{aligned}$$

La fórmula de Taylor de grado n en $a=0$ permite expresar la función f como la suma del polinomio de Taylor anterior más el resto de Taylor de orden n, es decir

$$f(x) = P^n_{f,0}(x) + R^n_{f,0}(x).$$

Expresando el resto en la forma de Lagrange se tiene

$$R^n_{f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ con } c \in (0,x).$$

Teniendo en cuenta que la derivada n-ésima de f es constante e igual a $n!$, se tiene que la derivada $n+1$ se anula en cualquier punto, y por tanto el resto de Taylor es nulo. Así pues, según la fórmula de Taylor de grado n en $a=0$, $f(x)$ coincide con $P^n_{f,0}(x)$ para cualquier x, y el polinomio de Taylor coincide con la fórmula del binomio.

Ejercicio 14.8. Se dice que una función f es *Lipschitziana* en un intervalo $[a, b]$ si existe una constante $L > 0$, llamada constante de Lipschitz, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para cualesquiera $x, y \in [a, b]$.

a. Demostrar que si f tiene derivada continua en $[a, b]$, entonces f es Lipschitziana en $[a, b]$ y la menor constante de Lipschitz es $L = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

b. Usando el resultado anterior, demostrar que $f(x) = (x^2 - 4)^2$ es Lipschitziana en $[-2, 2]$, y calcular la menor constante de Lipschitz.

Solución

a. Sean $[x, y] \subseteq [a, b]$. Como f es derivable en $[a, b]$, en particular lo es en $[x, y]$, y aplicando el teorema del valor medio, existe $c \in [x, y]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Por tanto,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq \max_{z\in[a,b]} |f'(z)||y - x|,$$

y por tanto f es Lipschitziana en $[a, b]$ con constante $L = \max_{z\in[a,b]} |f'(z)|$, siempre y cuando f' tenga máximo en $[a, b]$, pero como f' es continua en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass, f' alcanza su máximo en $[a, b]$.

b. Para demostrar que $f(x) = (x^2 - 4)^2$ es Lipschitziana en $[-2, 2]$ calculamos la derivada

$$f'(x) = 2(x^2 - 4)(2x) = 4x^3 - 16x.$$

Como f' es una función polinómica, es continua en $[-2, 2]$, y por el teorema de Weierstrass, f' alcanza su máximo en $[-2, 2]$. Para calcular el máximo de f' en $[-2, 2]$ obtenemos primero los puntos críticos de f',

$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

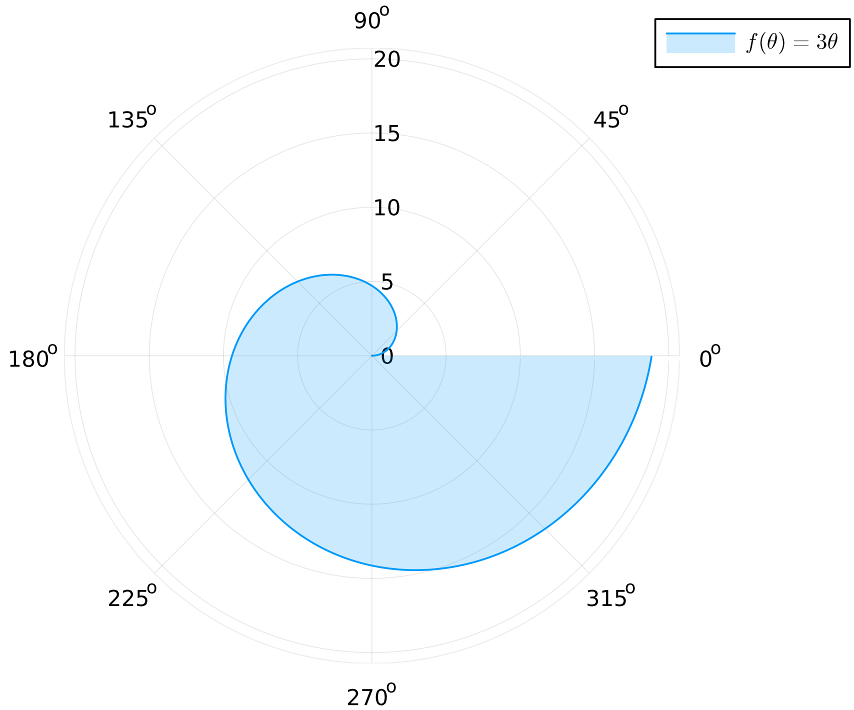
Por tanto, el máximo de f', en valor absoluto, se debe alcanzar en alguno de estos puntos críticos o en los extremos del intervalo. Calculamos los valores de f' en estos puntos y en los extremos,

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= 4(-2)^3 - 16(-2) = 0,\\
f'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 4\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 16\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{64}{3\sqrt{3}},\\
f'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 16\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{64}{3\sqrt{3}},\\
f'(2) &= 4(2)^3 - 16(2) = 0.
\end{aligned}
$$

Así pues, $\max_{x\in[-2,2]} |f'(x)| = \frac{64}{3\sqrt{3}}$, y por tanto f es Lipschitziana en $[-2,2]$ con constante $L = \frac{64}{3\sqrt{3}}$.

15 2025-04-10 Examen de Análisis II

Ejercicio 15.1. La función $f(\theta) = 3\theta$ describe una espiral en coordenadas polares como la de la siguiente figura.



Calcular el area que barre la espiral en el intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$ usando sumas superiores de Riemann.

Solución

Tomemos la partición del intervalo $[0, 2\pi]$ en n subintervalos de igual amplitud, $P_n = \{\theta_i = \frac{2\pi}{n} i : i = 0, 1, \dots, n\}$. La amplitud de cada subintervalo es $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n}$. Aproximaremos el área barrida por la espiral mediante las areas de sectores circulares correspondientes a los ángulos definidos en la partición. Como queremos usar sumas superiores de Riemann, para calcular las áreas de estos sectores circulares utilizaremos el máximo de los radios, que se alcanza en el extremo superior del intervalo al ser $f(\theta) = 3\theta$ creciente, tal y como se aprecia en la siguiente figura.

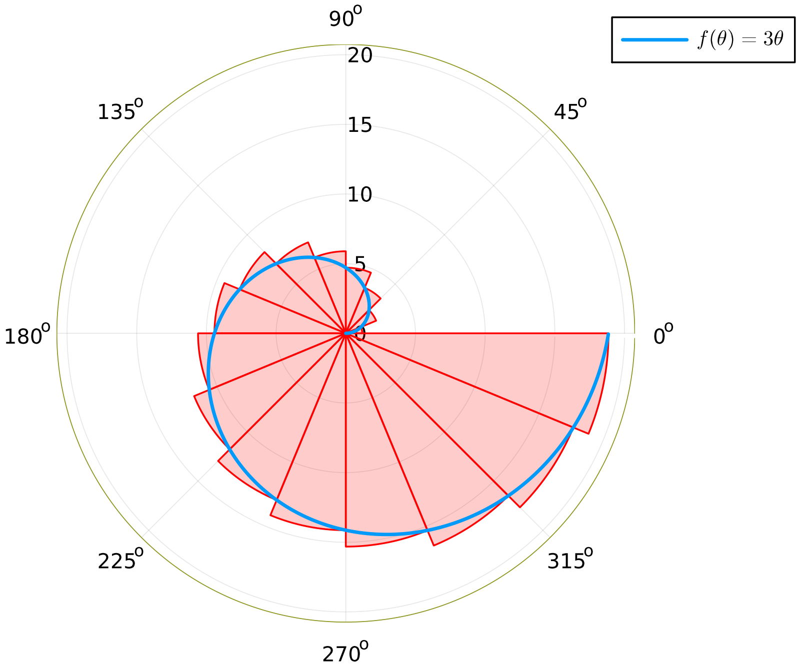


Figura 15.1: Descomposición del área barrida por la espiral en sectores circulares

De este modo, el área del sector circular correspondiente al intervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ es

$$A_i = \frac{1}{2}f(\theta_i)^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(3\theta_i)^2\Delta\theta = \frac{9}{2}\left(\frac{2\pi}{n}i\right)^2\frac{2\pi}{n} = \frac{36\pi^3}{n^3}i^2$$

Por lo tanto, la suma superior de Riemann es

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}\frac{f(\theta_i)^2}{2}\Delta\theta = \sum_{i=1}^{n}\frac{36\pi^3}{n^3}i^2 \\ &= \frac{36\pi^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 = \frac{36\pi^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 6\pi^3\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos el valor del área barrida por la espiral en el intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 6\pi^3\frac{2n^2+3n+1}{n^2} = 6\pi^3\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} = 6\pi^3 \cdot 2 = 12\pi^3.$$

Ejercicio 15.2. El trazado de una carretera sigue aproximadamente la curva de ecuación $y = \frac{x^{3/2}}{6}$, donde x e y están dados en km. Calcular la distancia recorrida por un vehículo que sigue esta carretera desde $x = 0$ hasta $x = 10$.

Solución

Para calcular la distancia recorrida por un vehículo que sigue la carretera, debemos calcular la longitud de arco de la curva de la función $f(x) = \frac{x^{3/2}}{6}$ en el intervalo $[0, 10]$, que viene dada por la siguiente fórmula

$$
\begin{aligned}
\int_0^{10} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx &= \int_0^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\frac{x^{1/2}}{6}\right)^2}\,dx = \int_0^{10} \sqrt{1 + \frac{x}{16}} \\
&= \int_0^{10} \frac{\sqrt{16+x}}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(16+x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{10} \\
&= \frac{1}{6}\left((16+10)^{3/2} - 16^{3/2}\right) \approx 11.4291\text{km}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 15.3. Calcular el volumen del solido de revolución generado al rotar la elipse de ecuación

$$(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

alrededor del eje x. Calcular también el volumen del sólido generado al rotarla alrededor del eje y.

Solución

Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la espiral alrededor del eje x primero expresamos y en función de x

$$(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - (x-2)^2 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{1-(x-2)^2}$$

De la ecuación de la elipse resulta sencillo ver que se trata de una elipse centrada en el punto $(2, 0)$ y sustituyendo $y = 0$ en la ecuación obtenemos los puntos de corte con el eje x que serán los límites de integración.

$$(x-2)^2 + \frac{0^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = 3.$$

Usando el método de los discos cilíndricos, el volumen del sólido de revolución es

$$\int_1^3 \pi f(x)^2\,dx = \int_1^3 \pi\left(2\sqrt{1-(x-2)^2}\right)^2\,dx = 4\pi\int_1^3 1-(x-2)^2\,dx$$
$$= 4\pi\left[x-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = 4\pi\left(3-\frac{1}{3}-1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi$$

Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la espiral alrededor del eje y primero expresamos x en función de y

$$(x-2)^2+\frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1-\frac{y^2}{4} \Leftrightarrow x = 2\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}.$$

Así pues, la elipse queda delimitada por las curvas $f(y) = 2+\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}$ y $g(y) = 2-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}$. Los límites de integración son los valores de y que se corresponden con $x=2$ que es donde está centrada la elipse, es decir,

$$2 = 2\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{4}} \Leftrightarrow 0 = \pm\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}. \Leftrightarrow 1-\frac{y^2}{4} = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Usando el método de las arandelas cilíndricos, el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 \pi(f(y)^2-g(y)^2)\,dy &= \pi\int_{-2}^2 \left(2+\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right)^2\,dy \\
&= \pi\int_{-2}^2 \left(4+4\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}+1-\frac{y^2}{4}-4+4\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}-1+\frac{y^2}{4}\right)dy \\
&= \pi\int_{-2}^2 8\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\,dy = 8\pi\int_{-2}^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy \qquad (1) \\
&= \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8\sqrt{1-\operatorname{sen}(\theta)^2}\,2\cos(\theta)\,d\theta = 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)^2\,d\theta \\
&= 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = 16\pi\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 16\pi\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\sin(\pi)}{4}-\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{4}\right)\right] \\
&= 16\pi\left[\frac{\pi}{4}+0-\left(-\frac{\pi}{4}+0\right)\right] = 8\pi^2.
\end{aligned}$$

(1) Cambio $y = 2\operatorname{sen}(\theta)$, $dy = 2\cos(\theta)d\theta$.

Ejercicio 15.4. Un tanque para regar un campo parte del origen y se desplaza en linea recta con una velocidad dada por la función $v(t) = \sqrt{t+1}$. Suponiendo que el tanque contiene 1000 litros de agua al inicio, y que al regar gasta 10 litros por segundo, plantear la integral necesaria para calcular el trabajo realizado en el desplazamiento del tanque desde el origen hasta que el tanque se queda vacío suponiendo que no hay rozamiento.

Solución

A partir de la función de velocidad $v(t) = \sqrt{t+1}$ podemos obtener la función de posición, integrándola

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(x)\,dx = \int_0^t \sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^t = \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} - \frac{2}{3}.$$

Y también podemos obtener la aceleración derivando la función de velocidad

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}.$$

Por otro lado, como cada segundo el tanque pierde 10 litros, el volumen de agua que queda en el tanque en el instante t es $V(t) = 1000-10t$ litros y como la densidad del agua es 1000 kg/m^3, la masa del agua que queda en el tanque es $m(t) = 1000-10t$ kg. Por lo tanto, la fuerza que hay que ejercer sobre el tanque para desplazarlo es

$$F(t) = m(t)a(t) = (1000-10t)\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$$

Para calcular el tiempo que tarda el tanque en vaciarse basta resolver la ecuación $V(t) = 1000 - 10t = 0$, de donde se deduce que que $t = 1000/10 = 100$ s y en ese tiempo habrá recorrido una distancia $s(100) = \frac{2}{3}(100+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \approx 676.0245$ m. Así pues, en cada instante t la distancia que le queda por recorrer al tanque es

$$d(t) = 676.0245 - s(t) = 676.0245 - \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} + \frac{2}{3} = 676.6916 - \frac{2}{3}(t+1)^{3/2}$$

Así que, finalmente, el trabajo necesario para desplazar el tanque hasta que quede vacío viene dado por la integral

$$\int_0^{676.0245} \frac{1000-10t}{2\sqrt{t}}(676.6916 - \frac{2}{3}(t+1)^{3/2})\,dt.$$

16 2025-05-28 Examen de Análisis II

Ejercicio 16.1. Una magnitud s depende del tiempo t según la ecuación diferencial $ds = 2t\,dt$. Sabiendo que $s(0) = 1$, calcular las integrales superiores e inferiores de Riemann de ambos lados de la ecuación y utilizarlas para calcular $s(t)$.

Solución

Calcularemos primero las sumas inferior y superior de Riemann del lado derecho de la ecuación diferencial. Para ello, consideraremos la función $f(t) = 2t$ en el intervalo $[0, t]$. Si dividimos el intervalo $[0, t]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta t = \frac{t}{n}$, obtenemos la partición $P_n = \{t_i = i\frac{t}{n} : i = 0, \dots, n\}$. Como $f(t)$ es una función creciente, la suma inferior de Riemann vale

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t &= \sum_{i=1}^{n} 2t_{i-1}\frac{t}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2(i-1)\frac{t^2}{n^2} = \frac{2t^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\\ &= \frac{2t^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)t^2}{n}.\end{aligned}$$

Y la suma superior de Riemann se calcula de manera similar, pero utilizando el valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t &= \sum_{i=1}^{n} 2t_i\frac{t}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2i\frac{t^2}{n^2} = \frac{2t^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \frac{2t^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)t^2}{n}.\end{aligned}$$

Así pues, la integral inferior de Riemann es

$$\underline{\int_0^t} 2x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)t^2}{n} = t^2,$$

y la integral superior de Riemann es

$$\overline{\int_0^t} 2x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)t^2}{n} = t^2.$$

Por tanto, ambas integrales coinciden y podemos concluir que

$$\int_0^t 2x\,dx = t^2.$$

Ahora calcularemos las sumas inferior y superior del lado izquierdo de la ecuación diferencial. Para ello, consideraremos la función $g(s) = 1$ en el intervalo $[1, s(t)]$. Si dividimos el intervalo $[1, s(t)]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta s = \frac{s(t)-1}{n}$, obtenemos la partición $Q_n = \{s_i = 1 + i\frac{s(t)-1}{n} : i = 0, \dots, n\}$. Como $g(s)$ es una función constante, la suma inferior de Riemann vale

$$\sum_{i=1}^{n} g(s_{i-1})\Delta s = \sum_{i=1}^{n} \frac{s(t)-1}{n} = \frac{n(s(t)-1)}{n} = s(t) - 1.$$

Y la suma superior de Riemann se calcula de manera similar

$$\sum_{i=1}^{n} g(s_i)\Delta s = \sum_{i=1}^{n} \frac{s(t)-1}{n} = \frac{n(s(t)-1)}{n} = s(t) - 1.$$

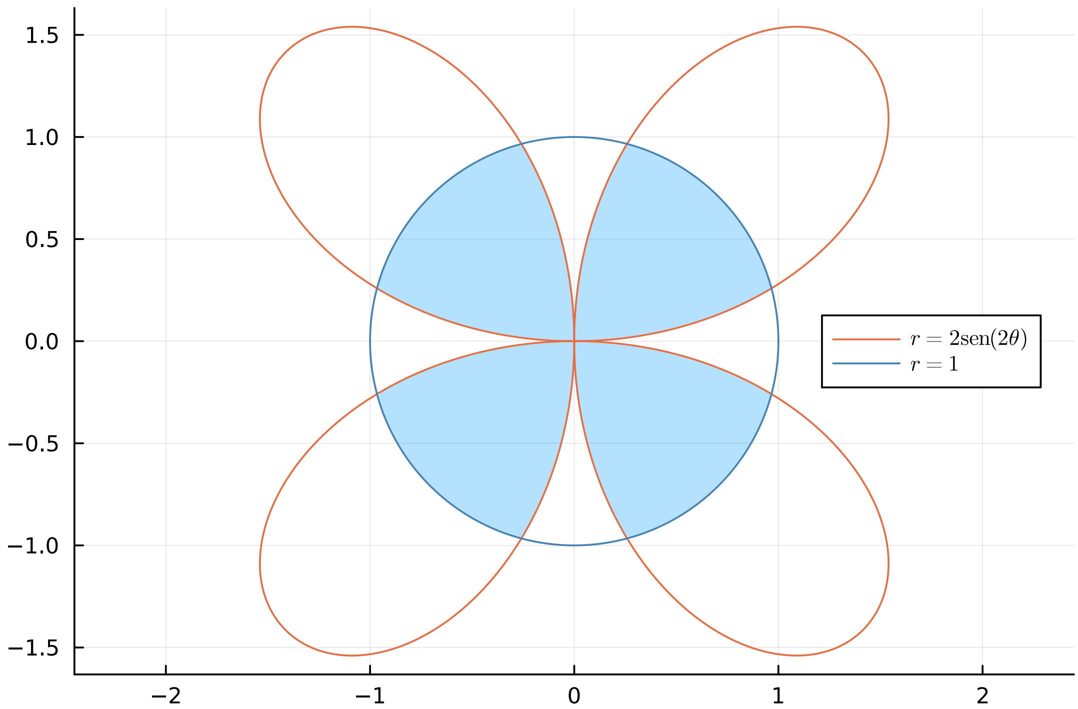
Como el valor de ambas sumas es el mismo y no depende de n, podemos concluir que

$$\int_1^{s(t)} dx = s(t) - 1.$$

Finalmente, igualando las dos integrales, obtenemos

$$s(t) - 1 = t^2 \implies s(t) = t^2 + 1.$$

Ejercicio 16.2. Calcular el área de la intersección del círculo de radio 1 centrado en el origen y la rosa de 4 pétalos de ecuación $r = 2\operatorname{sen}(2\theta)$.



Solución

Por simetría, basta calcular el volumen de la parte del depósito en el primer cuadrante y multiplicar por 4.
Calculamos primero los puntos de intersección del pétalo del primer cuadrante con el círculo. Para ello, igualamos las ecuaciones de ambos conjuntos:

$$2\operatorname{sen}(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} \text{ y } \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \text{ y } \frac{5\pi}{12}.$$

Así pues, trabajando en coordenadas polares, y descomponiendo intervalo de integración del ángulo θ $[0, \pi/2]$ en tres subintervalos $[0, \pi/12]$, $[\pi/12, 5\pi/12]$ y $[5\pi/12, \pi/2]$, el área de la intersección del círculo y el pétalo del primer cuadrante viene dada por la suma de las siguientes integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{2\operatorname{sen}(2\theta)^2}{2}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1^2}{2}\,d\theta + \int_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\operatorname{sen}(2\theta)^2}{2}\,d\theta.$$

Calculamos cada una de estas integrales por separado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{(2\,\mathrm{sen}(2\theta))^2}{2}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{sen}(2\theta)^2\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= \left[\theta - \frac{\mathrm{sen}(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{12})}{4} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1^2}{2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \left(\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$\int_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\,\mathrm{sen}(2\theta))^2}{2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}(4\theta)}{4}\right]_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{sen}(4\frac{\pi}{2})}{4}\right) - \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\mathrm{sen}(4\frac{5\pi}{12})}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

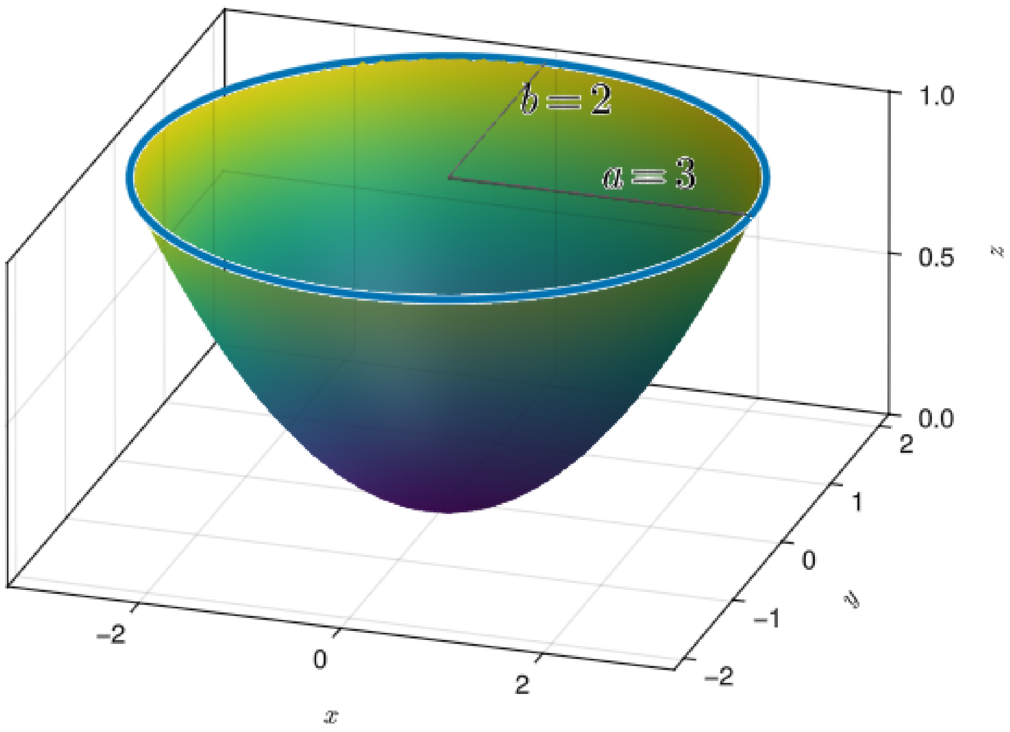
Por tanto, el área de la intersección del círculo y el pétalo del primer cuadrante es

$$\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4},$$

y el área total de la intersección del círculo y la rosa de 4 pétalos es

$$4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Ejercicio 16.3. Calcular el volumen de un depósito limitado por el paraboloide elíptico de ecuación $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ y el plano $z = 1$ en m^3.



Solución

Aunque no se trata de un sólido de revolución, las secciones transversales del depósito con respecto al eje z son regiones regulares con forma elíptica de ecuación

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=z \Leftrightarrow \frac{y^2}{4}=z-\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{z-\frac{x^2}{9}},$$

de manera que acumulando el área de estas elipses a lo largo del eje z en el intervalo $[0,1]$ podemos obtener el volumen del depósito.
Igualando $y=0$ en esta ecuación, podemos obtener los puntos donde estas elipses cortan al eje x.

$$2\sqrt{z-\frac{x^2}{9}}=0 \Leftrightarrow z-\frac{x^2}{9}=0 \Leftrightarrow z=\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow x=\pm 3\sqrt{z}.$$

Así pues, el área de cada sección elíptica viene dada por la integral

$$
\begin{aligned}
A(z) &= 2\int_{-3\sqrt{z}}^{3\sqrt{z}} 2\sqrt{z-\frac{x^2}{9}}\,dx = 4\int_{-3\sqrt{z}}^{3\sqrt{z}} \sqrt{z-\frac{x^2}{9}}\,dx \\
&= 12\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{z - z\operatorname{sen}(u)^2} 3\sqrt{z}\cos(u)\,du \qquad \text{(Cambio } x = 3\sqrt{z}\operatorname{sen}(u)) \\
&= 12\sqrt{z}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{z}\sqrt{1-\operatorname{sen}(u)^2}\cos(u)\,du \\
&= 12z\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2\,du = 12z\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,du \\
&= 6z\left[u+\frac{\operatorname{sen}(2u)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 6z\left(\frac{\pi}{2}+0-(-\frac{\pi}{2}+0)\right) = 6\pi z.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para calcular el volumen del depósito, integramos el área de las secciones elípticas a lo largo del eje z en el intervalo $[0,1]$.

$$
\int_0^1 A(z)\,dz = \int_0^1 6\pi z\,dz = 6\pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 6\pi\cdot\frac{1}{2} = 3\pi\mathrm{m}^3.
$$

Ejercicio 16.4. Estudiar la convergencia de las siguientes series y calcular una cota del error cometido al aproximarlas mediante una suma parcial de orden 10.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$.
b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(n+1)}{n^2+n-1}}$.

Solución

a. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$ es de términos positivos, por lo que, utilizando el criterio de la integral, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= \int_1^\infty \ln(x)\cdot x^{-2}\,dx \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^\infty + \int_1^\infty x^{-2}, dx \qquad \text{(Integración por partes)} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1)}{1} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty \\
&= 0 + \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} + \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}
$$

Y como la integral existe y es finita, la serie converge.

Al aproximar su suma mediante la suma parcial de orden 10, podemos acotar el error cometido mediante la integral

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=11}^\infty \frac{\ln(n)}{n^2}\right| \leq \int_{10}^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{\ln(x)+1}{x}\right]_{10}^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln(x)+1}{x} + \frac{\ln(10)+1}{10} \\
&\approx 0.3303.
\end{aligned}
$$

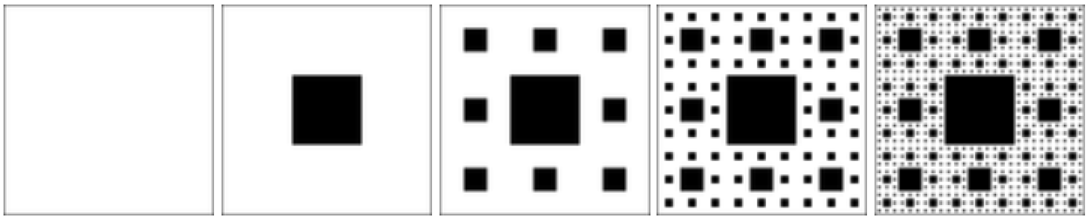
b. La serie $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{(n+1)}{n^2+n-1}}$ también es de términos positivos, y se cumple que

$$
\sqrt{\frac{n+1}{n^2+n-1}} \geq \sqrt{\frac{n+1}{n^2+n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \ \forall n \geq 1.
$$

Como la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge al ser una serie p con $p<1$, por el criterio de comparación podemos concluir que la serie $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{(n+1)}{n^2+n-1}}$ también diverge.

Ejercicio 16.5. La alfombra de Sierpiński es un conjunto fractal que es una generalización en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Se puede construir de la siguiente manera:

1. Comenzamos con un cuadrado de lado 1.
2. Dividimos el cuadrado en 9 cuadrados más pequeños de lado 1/3 del lado original.
3. Eliminamos el cuadrado central.
4. Repetimos el proceso en cada uno de los cuadrados restantes.



Paso 1 Paso 2 Paso 3 Paso 4 Paso 5

Calcular el área de la alfombra de Sierpiński.

Solución

Para calcular el área de la alfombra de Sierpiński, observamos que en cada iteración del proceso, el área del cuadrado original se reduce $1/9$ de su tamaño anterior, ya que eliminamos el cuadrado central. Así pues, en cada iteración se tiene

Iteración	Área cuadrado	Num cuadrados	Area quitada
1	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9^2}$	8	$\frac{8}{9^2}$
3	$\frac{1}{9^3}$	8^2	$\frac{8^2}{9^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{9^n}$	8^{n-1}	$\frac{8^{n-1}}{9^n}$

Por tanto, la suma de las areas quitadas viene dada por la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{9^n} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{n},$$

que se trata de una serie geométrica de razón $r = \frac{8}{9} < 1$, por lo que converge a

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{9}\cdot 9 = 1.$$

Por tanto, el área total quitada es 1, y como el área del cuadrado original era 1, el área de la alfombra de Sierpiński es nula y se trata de un conjunto de medida nula.

Ejercicio 16.6. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Dado que esta función no tiene integral elemental, calcular la serie que resulta de integrar su serie de Maclaurin y determinar su dominio de convergencia puntual.

Utilizar los 5 primeros términos de esta serie para calcular de manera aproximada la probabilidad de que la variable tome un valor entre 0 y 1. Dar una cota del error cometido.

Solución

Sabemos que la serie de Maclaurin de la función exponencial e^x es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

de modo que la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}.$$

Esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que la serie de Maclaurin de la función exponencial converge para todo $x \in \mathbb{R}$, de manera que podemos calcular la integral de f integrando la serie término a término.

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int x^{2n}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)} + C.
\end{aligned}$$

Para estudiar su dominio de convergencia puntual calculamos el radio de convergencia mediante el criterio de la razón.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!(2(n+1)+1)}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}{2^n n!(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(2n+3)}{(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+10n+6}{2n+1} = \infty.
\end{aligned}$$

De manera que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

La probabilidad de que la variable tome un valor entre 0 y 1 es

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$

La suma parcial de orden 5 de esta serie es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{4}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456}\right) \approx 0.3415.$$

Al tratarse de una serie alternada, como la sucesión $\left(\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}\right)_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y tiende a cero, podemos acotar el error cometido al aproximar la suma de la serie mediante la suma parcial de orden 5 utilizando el teorema del resto de la serie alternada, es decir, mediante el siguiente término de la sucesión,

$$\left|\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}\right| \leq \left|\frac{(-1)^5}{2^5 5!(2\cdot 5+1)}\right| = \frac{1}{32\cdot 120\cdot 11} = \frac{1}{42240} \approx 2.4\cdot 10^{-5}.$$

Ejercicio 16.7. La función de densidad de probabilidad de la distribución normal estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Demostrar que esta distribución tiene media cero y desviación típica uno.

Solución

Para calcular la media de una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(x)$, tenemos que cualcular la integral

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} \qquad \text{(Cambio } u = -x^2/2\text{)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0-0) = 0.\end{aligned}$$

Y para calcular la varianza, tenemos que calcular la integral

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx && \text{(Como } \mu = 0\text{)}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) && \text{(Integración por partes (1))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{e^{x^2/2}} - \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{x^2/2}} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + 0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \\
&(1) u = x, dv = xe^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}
$$

Esta integral no puede ser calculada directamente, pero sabemos que vale 1 al ser la integral de la función de densidad de probabilidad de la distribución normal estándar. Por tanto, podemos concluir que $\sigma^2 = 1$, y por tanto, la desviación típica es $\sigma = 1$.