Exámenes de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Tabla de contenidos

Prefacio **3**

1 Examen de Análisis I (Noviembre 2022) **4**

2 Examen de Análisis I (Diciembre 2022) **10**
2.1 Primera parte 10
2.2 Segunda parte 15

3 Examen de Análisis II (Marzo 2023) **20**

Prefacio

Colección de exámenes de Análisis Matemático Real del grado en Ingeniería Matemática.

1 Examen de Análisis I (Noviembre 2022)

Ejercicio 1.1. Calcular los puntos de acumulación del conjunto $A = [0,1] \cup \{\frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$. ¿Es un conjunto cerrado? ¿Y abierto?

> **Tip**
>
> Veamos primero que todos los puntos del intervalo $[0,1]$ son puntos de acumulación. Sea $x \in [0,1]$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, por la densidad de los números reales, el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \ \{x\}$ contiene puntos de $[0,1]$, y por tanto x es un punto de acumulación de $[0,1]$.
> Veamos ahora que el conjunto $B = \left\{\frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\} = \left\{1 + \frac{1}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}$ solo tiene 1 como punto de acumulación. En primer lugar, 1 es punto de acumulación, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\ \ \{1\}$ contiene puntos de A. Para verlo, basta aplicar la propiedad arquimediana, por la que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de manera que $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$, y por tanto $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\ \ \{1\} \cap B \neq \emptyset$.
> Si $x < 1$, tomando $\varepsilon = |x-1|$ el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \ \{x\}$ no contiene puntos de B. Del mismo modo, si $x > 2$, tomando $\varepsilon = |x-2|$ el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \ \{x\}$ tampoco contiene puntos de B. Finalmente, si $1 < x \leq 2$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1}$. Tomando $\varepsilon = \min(\{|x-\frac{1}{n}|, |x-\frac{1}{n-1}|\})$ también se tiene que el entorno reducido $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\ \ \{x\}$ no contiene puntos de B. Por tanto, 1 es el único punto de acumulación de B.
> Así pues, $\mathrm{Ac}(A) = [0,1]$, y como $\mathrm{Ac}(A) \subseteq A$, A es cerrado ya que contienen a todos sus puntos de acumulación (ver teorema), y por tanto, no puede ser abierto ya que los únicos conjuntos cerrados y abiertos a la vez son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

Ejercicio 1.2. Dada la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$,

a. Calcular, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto de sus términos.
b. Demostrar que la sucesión converge a 0.

💡 Solución

a. La sucesión es monótona decreciente, ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^n < 2^{n+1}$, y por tanto, $x_n = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}} = x_{n+1}$. Así pues, el primer término de la sucesión $x_1 = 1/2$ es su máximo, y por tanto el supremo.

   Veamos ahora que 0 es ínfimo por reducción al absurdo. En primer lugar, 0 es una cota inferior de la sucesión, pues todos sus términos son positivos. Supongamos ahora que existe otra cota inferior $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < c$. Ahora bien, como $n < 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < c$, por lo que el termino n de la sucesión es menor que c, lo que contradice que sea cota inferior. Así pues, 0 es el ínfimo. Sin embargo, la sucesión no tiene mínimo, pues $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. Como la sucesión es monótona decreciente y está acotada inferiormente, por el teorema de la convergencia de una sucesión monónota la sucesión converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

Ejercicio 1.3. La rentabilidad de un bono cada año, en porcentaje, viene dada por la sucesión recurrente $x_1 = 3$ y $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3}$. ¿Hacia dónde converge la rentabilidad del bono a medida que pasa el tiempo?

💡 Solución

Veamos que primero que la sucesión es monótona decreciente. $x_1 = 3 > x_n = \sqrt{\frac{3}{2} + 3} = 2.12$. Supongamos ahora que $x_{n-1} > x_n$. Entonces

$$\begin{aligned} x_{n-1} > x_n \Rightarrow \frac{x_{n-1}}{2} > \frac{x_n}{2} &\Rightarrow \frac{x_{n-1}}{2} + 3 > \frac{x_n}{2} + 3 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{x_{n-1}}{2} + 3} > \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3} \Rightarrow x_n > x_{n+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil ver que la sucesión está acotada inferiormente por 0 pues todos los términos son positivos. Así pues, por el teorema de la convergencia de una sucesión monónota, la sucesión converge a un número $x \in \mathbb{R}$. Para calcular el límite, aprovechando la recurrencia de la sucesión se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x_n}{2} + 3} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2} + 3} = \sqrt{\frac{x}{2} + 3}$$

Así pues, se cumple que $x = \sqrt{\frac{x}{2} + 3}$, y de ello se deduce

$$x = \sqrt{\frac{x}{2} + 3} \Rightarrow x^2 = \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow x^2 - 3 = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0,$$

y resolviendo la ecuación se tiene $x = -3/2$ y $x = 2$. Como todos los términos de la sucesión son positivos, es imposible que converja a $-3/2$, y por tanto la rentabilidad del bono converge al 2%.

Ejercicio 1.4. Demostrar, usando la definición de límite, que $\lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{2} = 2$.

Solución

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$, tal que si $|x-1| < \delta = \frac{2}{3}\varepsilon$ se tiene

$$\left|\frac{3x+1}{2} - 2\right| = \left|\frac{3x+1-4}{2}\right| = \left|\frac{3x-3}{2}\right| = \left|\frac{3(x-1)}{2}\right| = \frac{3}{2}|x-1| < \frac{3}{2}\frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ejercicio 1.5. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, demostrar que las siguientes funciones son infinitésimos equivalentes en $x = 0$:

a. $\ln(1+x)$ y x.
b. $e^x - 1$ y x.

Solución

Para que dos funciones f y g sean infinitésimos equivalentes en $x = 0$ se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

a.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) \\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln(e) = 1. \end{aligned}$$

b. Haciendo uso del resultado anterior se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(x+1)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Ejercicio 1.6. Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2$.

Solución

El dominio de la función es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - [-1, 0]$ de modo que solo puede haber asíntotas verticales a la izquierda de -1 o a la derecha de 0. Veamos primero, qué pasa con el límite por la izquierda en -1.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \ln\left(\frac{1}{-1}+1\right)(-1)^2 = \ln(0) = -\infty.$$

Por tanto, f tiene una asíntota vertical por la izquierda en $x = -1$.
Veamos ahora, qué pasa con el límite por la derecha en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)x^2 \\
&= \lim_{x\to 0^+} (\ln(x+1) - \ln(x))x^2 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1)x^2 - \lim_{x\to 0^+} \ln(x)x^2 \\
&= \ln(0+1)0^2 - \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^2} \\
&= 0 - \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(1/x^2)'} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = && \text{(L'Hôpital)} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f no tiene asíntota vertical en $x = 0$.
Para ver si hay asíntotas horizontales estudiamos los límites en el infinito.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)}{x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1))'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{-1}+1}(-1)x^{-2}}{-2x^{-3}} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2(x^{-1}+1)} = \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, f no tiene asíntota horizontal en ∞. Veamos ahora qué ocurre en $-\infty$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)}{x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1))'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^{-1}+1}(-1)x^{-2}}{-2x^{-3}} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2(x^{-1}+1)} = -\infty.
\end{aligned}
$$

Luego, f tampoco tiene asíntota vertical en $-\infty$.
Finalmente, veamos si f tiene asíntotas oblicuas.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\right) \\
&= \ln(e) = 1
\end{aligned}
$$

Por tanto, f tiene asíntota vertical en ∞ con pendiente $b = 1$. Para obtener el término independiente de la asíntota, calculamos el siguiente límite.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x^2 - x \\
&= \lim_{x\to\infty} (\ln(x^{-1}+1)x - 1)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1}+1)x-1}{x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^{-1}+1)x-1)'}{(x^{-1})'} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x^{-1}+1)x^2}x + \ln(x^{-1}+1)}{(-1)x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x+1)} + \ln(x^{-1}+1)}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{-1}{(1+x)} + \ln(x^{-1}+1)\right)'}{(-x^{-2})'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x^{-1}+1)x^2}}{2x^{-3}} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)x}}{2x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2x}}{2x^{-3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{2(x^3+2x^2+x)} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

Así pues, f tiene una asíntota oblicua $y = x - \frac{1}{2}$ en ∞.
Del mismo modo se prueba que esta misma recta también es asíntota oblicua de f en $-\infty$.

2 Examen de Análisis I (Diciembre 2022)

2.1 Primera parte

Ejercicio 2.1. La población de parásitos que infecta un árbol, en miles, evoluciona diariamente siguiendo la sucesión recursiva $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = 1 - (2 + x_n)^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite.

Solución

El término recurrente de la sucesión puede escribirse de la siguiente manera

$$x_{n+1} = 1 - (2 + x_n)^{-1} = \frac{1 + x_n}{2 + x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veamos primero que la sucesión está acotada inferiormente por 0 por inducción. $x_1 = 2 > 0$, y suponiendo $x_n > 0$ se tiene que $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2+x_n} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Veamos ahora que la sucesión es decreciente también por inducción. $x_1 = 2 < x_2 = 1 - (2 + 2)^{-1} = 3/4$. Supongamos ahora que $x_{n-1} > x_n$, entonces

$$\begin{aligned} x_{n-1} > x_n \Leftrightarrow 2 + x_{n-1} > 2 + x_n \Leftrightarrow (2 + x_{n-1})^{-1} < (2 + x_n)^{-1} \\ \Leftrightarrow 1 - (2 + x_{n-1})^{-1} > 1 - (2 + x_n)^{-1} \Leftrightarrow x_n > x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así pues, como la sucesión es monótona decreciente y está acotada inferiormente, según el teorema de la convergencia monótona, la sucesión converge.
Para calcular el límite aprovechamos la recurrencia,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + x_{n-1}}{2 + x_{n-1}} = \frac{1 + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}}{2 + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}} = \frac{1 + x}{2 + x},$$

y resolviendo la ecuación se tiene

$$x = \frac{1 + x}{2 + x} \Leftrightarrow x(2 + x) = 1 + x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como hemos visto que la sucesión está acotada inferiormente por 0, podemos descartar la solución negativa, de manera que, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ejercicio 2.2. En el siglo III A.C usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia. La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

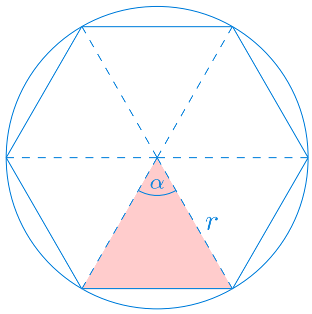


Figura 2.1: Descomposición de un hexágono en triángulos

a. Dar el término general de la sucesión $(a_n)_{n=3}^{\infty}$ que expresa el área del polígono en función del número de lados n.

b. Calcular el límite de la sucesión.

Solución

a. Consideremos cada uno de los triángulos en los que se puede descomponer un polígono regular de n lados.

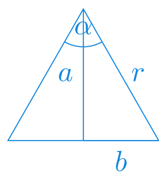


Figura 2.2: Dimensiones del triángulo

Puesto que para un polígono de n lados se obtienen n triángulos iguales, se tiene que el ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ de manera que $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{n}$.
Aplicando las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, se puede deducir que

$$\cos(\alpha/2) = \cos(\pi/n) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos(\pi/n)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \operatorname{sen}(\pi/n) = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}(\pi/n)$$

Por tanto, el área del triángulo es

$$\frac{a2b}{2} = ab = r^2\cos(\pi/n)\operatorname{sen}(\pi/n),$$

y como hay n triángulos idénticos en el polígono regular de n lados, se tiene que el área del polígono es

$$a_n = nr^2\cos(\pi/n)\operatorname{sen}(\pi/n)$$

b. Calculamos ahora el límite de la sucesión

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} nr^2\cos(\pi/n)\operatorname{sen}(\pi/n) \\
&= r^2 \lim_{n\to\infty}\cos(\pi/n) \lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}(\pi/n) \\
&= r^2\cos(0) \lim_{n\to\infty} \pi\frac{n}{\pi}\operatorname{sen}(\pi/n) \\
&= \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \\
&= \pi r^2 \lim_{\pi/n\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = \pi r^2, \qquad (\operatorname{sen}(\pi/n) \approx \pi/n)
\end{aligned}$$

que efectivamente es el área del círculo de radio r.

Ejercicio 2.3. Sabiendo que $\operatorname{sen}(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en $x = 0$, demostrar que también lo son $\operatorname{tg}(x)$ y x.

Solución

Como $\operatorname{sen}(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en $x = 0$, se tiene que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.
Para demostrar que $\operatorname{tg}(x)$ y x también son infinitésimos equivalentes en $x = 0$ calculamos el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}1=\frac{1}{\cos(0)}=1.$$

Por tanto, $\operatorname{tg}(x)$ y x son infinitésimos equivalentes en $x=0$.

Ejercicio 2.4. Determinar el dominio y el tipo de asíntotas de la función

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}.$$

Solución

Para que exista la raíz, el radicando debe ser positivo, es decir, $\frac{x^3}{4x-1}\geq 0$. Es fácil ver que $x^3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$ y $4x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1/4$ de manera que $\frac{x^3}{4x-1}\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$ o $x\geq 1/4$.
Por otro lado, para que exista $\frac{x^3}{4x-1}$ el denominador no puede anularse, es decir $4x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1/4$. Por tanto, concluimos que el dominio de la función es $\operatorname{Dom}(f)=(-\infty,0]\cup(\frac{1}{4},\infty)$.
Estudiamos ahora los tipos de asíntotas que tiene la función.
Asíntotas verticales
Los únicos puntos donde pueden existir asíntotas verticales son $x=0$ y $x=1/4$, así que calculamos los límites laterales en estos puntos.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}=\sqrt{\frac{0^3}{4\cdot 0-1}}=0,$$

y por tanto, f no tiene asíntota vertical en $x=0$.

$$\lim_{x\to 1/4^+}f(x)=\lim_{x\to 1/4^+}\sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}=\sqrt{\frac{(1/4)^3}{4(1/4)-1}}=\infty,$$

y por tanto, f tiene una asíntota vertical en $x=1/4$.
Asíntotas horizontales
Para ver si hay asíntotas horizontales estudiamos los límites en $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{4x-1}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{4x-1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4-\frac{1}{x}}} = \infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{4x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{4x-1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4-\frac{1}{x}}} = \infty.$$

Por tanto, f no tiene asíntotas horizontales.
Asíntotas oblicuas
Para ver si hay asíntotas oblicuas estudiamos los límites de $f(x)/x$ en $\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{4x^3-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{4x-1}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{4x^3-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, f tiene asíntotas oblicuas tanto en $-\infty$ como en ∞.

Ejercicio 2.5. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x-2} \leq 0\}$, calcular, si existe, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo. ¿Es un conjunto cerrado o abierto?

Solución

A puede expresarse con la unión de intervalos, ya que $x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ o $x \geq 1$, y por otro lado, $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, de manera que $\frac{x^2-1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ o $1 \leq x < 2$, es decir, $A = (-\infty, -1] \cup [1, 2)$.
Es fácil ver que A está acotado superiormente y la menor de las cotas superiores es 2, por lo que el supremo es 2, pero como $2 \notin A$, A no tiene máximo.
En cuanto al ínfimo, A no está acotado inferiormente, de manera que no tiene ínfimo, y por tanto, tampoco mínimo.
A no es abierto, ya que $-1 \in A$, pero -1 no es un punto interior de A, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$ el intervalo $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ contiene puntos de $\overline{A}$.
Por otro lado, A tampoco es cerrado ya que $\overline{A} = (-1, 1) \cup [2, \infty)$ no es abierto, pues $2 \in \overline{A}$ pero no es un punto interior suyo, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$ el intervalo $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ contiene puntos de A.

2.2 Segunda parte

Ejercicio 2.6. Dar una aproximación de $\ln(\sqrt{1/2})$ usando un polinomio de Taylor de cuarto grado.

Solución

Para realizar la aproximación que se pide calcularemos el polinomio de Taylor de cuarto grado de la función $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ en el punto 1, ya que el valor de la función y sus sucesivas derivadas en este punto son sencillas. La fórmula del polinomio de Taylor es

$$P^4_{f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f''''(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Así pues, calculamos hasta la cuarta derivada en 1:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \ln(\sqrt{x}) = \tfrac{1}{2}\ln(x) && f(1) = \tfrac{1}{2}\ln(1) = 0\\
&f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-1} && f'(1) = \tfrac{1}{2}\\
&f''(x) = \tfrac{-1}{2}x^{2} && f''(1) = \tfrac{-1}{2}\\
&f'''(x) = x^{-3} && f'''(1) = 1\\
&f''''(x) = -3x^{-4} && f''''(1) = -3
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la fórmula del polinomio de Taylor se tiene

$$\begin{aligned}
P^4_{f,1}(x) &= 0 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-1/2}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{-3}{24}(x-1)^4\\
&= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{8}(x-1)^4.
\end{aligned}$$

Para aproximar $\ln(\sqrt{1/2})$ calculamos el polinomio en $x = 1/2$.

$$P^4_{f,1}(1/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-1\right)^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-1\right)^4 = -0.34114583.$$

Ejercicio 2.7. La función $h(x) = \dfrac{x^2-2x+a}{x^3+bx^2-6x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Calcular el valor de a y b, y clasificar el resto de discontinuidades.

Solución

Para que la función $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + a}{x^3 + bx^2 - 6x}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 2$, debe cumplirse que $\lim_{x\to 2} h(x) \neq h(2)$. Una manera de que esto se cumpla es que la función no esté definida en $x = 2$ pero sí exista el límite en ese punto. Para que la función no esté definida en $x = 2$ el denominador debe anularse, es decir,

$$2^3 + b2^2 - 6 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 8 + 4b - 12 = 0 \Rightarrow b = 1.$$

Por otro lado, el límite en $x = 2$ es

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x + a}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{a}{0},$$

de manera que, para que el límite exista, debe ser $a = 0$, y en tal caso,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 6x} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5},$$

y, por tanto, $h(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$ como se pide.
Como se trata de una función racional, será discontinua en los puntos que anulen el denominador, es decir $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$. Ya hemos visto que en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable y faltaría clasificar las otras dos discontinuidades.
En $x = -3$ se tiene

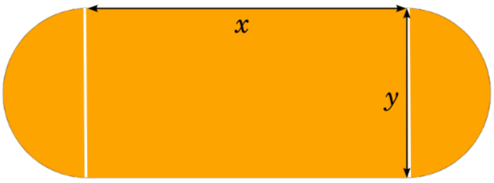
$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = \infty,$$

y, por tanto, h tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.
Finalmente en $x = 0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3},$$

por lo que h tiene otra discontinuidad evitable en $x = 0$.

Ejercicio 2.8. El envoltorio de unas píldoras está formado por un cilindro con dos semiesferas en sus extremos, tal y como se aprecia en la imagen.



Si el contenido de las píldoras debe ser de 0.15 ml, hallar las dimensiones de x e y para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

Solución

El volumen de una esfera de radio r es $v_e(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y el de un cilindro de radio r y altura h es $v_c(r,h) = \pi r^2 h$, de modo que que el volumen de la píldora es $v(r,h) = v_e(r) + v_c(r,h) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$. Como el volumen de la píldora debe ser 0.15 ml $=$ 0.15 cm^3, imponiendo esta restricción, se tiene

$$v(r,h) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 0.15 \Leftrightarrow h = \frac{0.15 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}. \tag{2.1}$$

Por otro lado, la superficie de una esfera de radio r es $s_e(r) = 4\pi r^2$ y la superficie del envolvente de un cilindro de radio r y altura h es, en realidad, la superficie de un rectángulo de lados $2\pi r$ y h, es decir, $s_c(r,h) = 2\pi r h$, de manera que la superficie de la píldora es $s(r,h) = 4\pi r^2 + 2\pi r h$, pero sustituyendo el valor de h que hemos obtenido de imponer la restricción del volumen se tiene,

$$\begin{aligned} s(r) &= 4\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{0.15 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}\right) = 4\pi r^2 + \left(\frac{0.3 - \frac{8}{3}\pi r^3}{r}\right) \\ &= 4\pi r^2 + \frac{0.3}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2 + \frac{0.3}{r}, \end{aligned}$$

que es la función a optimizar.
Para calcular el mínimo de la función, calculamos primero los puntos críticos.

$$s'(r) = \frac{4}{3}\pi 2r - \frac{0.3}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\pi r = \frac{0.3}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{0.9}{8\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0.9}{8\pi}} \approx 0.3296\text{cm}.$$

Para ver si en este punto hay un mínimo aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$s''(r) = \frac{8}{3}\pi - \frac{0.3(-2)}{r^3} = \frac{8}{3}\pi + \frac{0.6}{r^3} > 0\ \forall r > 0.$$

Por tanto, s tiene un mínimo local en $r = 0.3296$, y la altura del la píldora con la mínima superficie será, utilizando la Ecuación 2.1,

$$h = \frac{0.15 - \frac{4}{3}\pi 0.3296^3}{\pi 0.3296^2} \approx 0.$$

Así pues, las dimensiones óptimas serían $x = h = 0$ cm e $y = 2r = 0.6592$ cm, que en realidad es una esfera de diámetro 0.6592 cm.

Ejercicio 2.9. Demostrar que la función $f(x) = \ln\left(k\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)\right)$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0, 1)$ para cualquier valor de k.

Solución

$x^2 - 2x + \frac{3}{2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, de manera que, para que exista la función f, debe ser también $k > 0$ y, por tanto, aplicando propiedades de logaritmos se tiene, $f(x) = \ln\left(k\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)\right) = \ln(k) + \ln\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)$.
Por otro lado, como $x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ es un polinomio, es continuo en todo $\mathbb{R}$, y por tanto, $f(x)$ también es continua en todo $\mathbb{R}$, siempre que $k > 0$.
Demostraremos que f no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0, 1)$ por reducción al absurdo. Supongamos que existen $0 < a < b < 1$ tales que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces, aplicando el teorema de Rolle, debe existir algún valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Si calculamos los puntos críticos de f se tiene

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3/2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

pero como $1 \notin (a, b)$, llegamos a una contradicción ya que no existe ningún valor $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$. Así pues, f no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 2.10. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la curva implícita $e^{x^2 y} - \ln(\sqrt{x - y}) = 0$ en el punto $x = 0$.

Solución

En primer lugar obtenemos los valores de y que cumplen la ecuación de la curva implícita para $x = 0$. Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\begin{gathered} e^{0^2 y} - \ln(\sqrt{0 - y}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(\sqrt{-y}) = 0 \Leftrightarrow \\ \ln(\sqrt{-y}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{-y} = e \Leftrightarrow y = -e^2. \end{gathered}$$

Así pues, hay que calcular la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto

$(0, -e^2)$.
Como la pendiente de la recta tangente es la tasa de variación instantánea, calculamos $y' = \frac{dy}{dx}$ implícitamente

$$\left(e^{x^2 y} - \ln(\sqrt{x-y})\right)' = 0' \Leftrightarrow \left(e^{x^2 y} - \frac{1}{2}\ln(x-y)\right)' = 0 \Leftrightarrow$$
$$e^{x^2 y}(2xy + x^2 y') - \frac{1}{2}\frac{1-y'}{x-y} = 0.$$

Sustituyendo en $x = 0$ y $y = -e^2$, se tiene

$$e^{0^2(-e^2)}(2\cdot 0(-e^2) + 0^2 y') - \frac{1}{2}\frac{1-y'}{0-(-e^2)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-(1-y')}{2e^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - y' = 0 \Leftrightarrow y' = 1.$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en $(0, -e^2)$ es

$$y = y_0 + \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) = (-e^2) + 1(x-0) = x - e^2.$$

Y la ecuación de la recta normal a la curva en $(0, -e^2)$ es

$$y = y_0 - \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_0, y_0)}(x - x_0) = (-e^2) - 1(x-0) = -x - e^2.$$

3 Examen de Análisis II (Marzo 2023)

Ejercicio 3.1. Estudiar la convergencia de las siguientes series

a. $\sum \dfrac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}$

b. $\sum \cos(n\pi)n^2e^{-n}$

Tip

a. Se trata de una serie de términos positivos en la que el término dominante en el numerador es $3n^2$ y el término dominante en el denominador es $n^{5/2}$, por lo que podemos utilizar el criterio del cociente para compararla con las serie $\sum \frac{3n^2}{n^{5/2}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}}{\frac{3n^2}{n^{5/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{3n^2}\frac{\sqrt{n^5+n}}{\sqrt{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{3n^2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5+n}}{\sqrt{n^5}} = 1$$

Por tanto, la serie $\sum \frac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}$ tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum \frac{3n^2}{n^{5/2}}$, y como $\sum \frac{3n^2}{n^{5/2}} = 3\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ es una serie p con $p < 1$, diverge, por lo que la serie $\sum \frac{3n^2+2n}{\sqrt{n^5+n}}$ también diverge.

b. Se trata de una serie alternada ya que $\sum \cos(n\pi)n^2e^{-n} = \sum(-1)nn^2e^{-n}$ por lo que aplicando el criterio de la serie alternada, como n^2e^{-n} es monótona decreciente para $n \geq 2$ y

$$\lim_{n\to\infty} n^2e^{-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0, \qquad \text{(L'Hôpital)}$$

se concluye que la serie $\sum \cos(n\pi)n^2e^{-n}$ converge.

Ejercicio 3.2. Un pozo de petróleo produce 200 mil litros de petróleo el primer año de su explotación, pero cada año que pasa la producción decae un 12%. Calcular la cantidad de petróleo extraída tras n años de actividad. ¿Qué cantidad total de petróleo se extraerá del pozo hasta agotarlo?

Solución

La producción anual evoluciona según la sucesión

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 200 \\
a_2 &= a_1(1-0.12) = 200 \cdot 0.88 \\
a_3 &= a_2 0.88 = 200 \cdot 0.88^2 \\
&\vdots \\
a_n &= 200 \cdot 0.88^{n-1}
\end{aligned}
$$

por lo que la producción acumulada viene dada por la serie $\sum 200 \cdot 0.88^{n-1}$ que es una serie geométrica de razón 0.88. Así pues, la cantidad de petróleo extraída tras n años es

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} 200 \cdot 0.88^i = 200 \frac{1-0.88^n}{1-0.88},$$

y la cantidad total de petróleo que se extraerá del pozo hasta agotarlo viene dada por la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} 200 \cdot 0.88^n = \frac{200}{1-0.88} \approx 1666.6667 \text{ mil litros.}$$

Ejercicio 3.3. Determinar el dominio de convergencia puntual de la serie de potencias

$$\sum \frac{n(x-3)^n}{(n+1)4^n}$$

Solución

Para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias podemos usar el criterio de la raíz, que establece que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(n+1)4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \sqrt[n]{\frac{n}{(n+1)}} = \frac{1}{4},$$

se concluye que $R = \frac{1}{1/4} = 4$, de manera que la serie converge para $|x-3| < 4$, es decir, en el intervalo $(-1,7)$.
Veamos ahora si la serie converge en los extremos del intervalo.
En $x = 7$ se tiene la serie $\sum \frac{n4^n}{(n+1)4^n} = \sum \frac{n}{n+1}$, que diverge al ser $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.
Y en $x = -1$ se tiene la serie $\sum \frac{n(-4)^n}{(n+1)4^n} = \sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$, que es una serie alternada, pero también diverge al ser $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente.
Por tanto, el dominio de convergencia puntual de la serie de potencias es $\mathcal{C} = (-1,7)$.

Ejercicio 3.4. Calcular la serie de Taylor de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 1$. ¿Cuál es su dominio de convergencia puntual?

Solución

Calculamos las primeras derivadas para obtener la expresión de la derivada de orden n.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f(1) &= 1^{-1} = 1, \\ f'(x) &= (-1)x^{-2} & f'(1) &= (-1)1^{-2} = -1, \\ f''(x) &= 2x^{-3} & f''(1) &= 2 \cdot 1^{-3} = 2, \\ f'''(x) &= (-1)3!x^{-4} & f'''(1) &= (-1)3!1^{-4} = -3!, \\ \vdots\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}n!x^{-(n+1)} & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n+1}n! \end{aligned}$$

Así pues, sustituyendo en la fórmula de la serie de Taylor se obtiene la serie

$$\sum \frac{f^n(1)}{n!}(x-1)^n = \sum \frac{(-1)^{n+1}n!}{n!}(x-1)^n = \sum (-1)^{n+1}(x-1)^n.$$

Su radio de convergencia puntual se obtiene fácilmente mediante el criterio de la razón

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+2}} \right| = 1,$$

por lo que la serie converge en $|x-1| < 1$, es decir, en el intervalo $(0,2)$. Veamos ahora si converge en los extremos.
En $x = 0$ se tiene la serie $\sum(-1)^{n+1}(-1)^n = \sum(-1)^{2n+1} = \sum -1$ que diverge, mientras que en $x = 2$ se tiene la serie $\sum(-1)^{n+1}1^n = \sum(-1)^{n+1}$ que también diverge ya que no existe el límite $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$.
Así pues, se concluye que el dominio de convergencia puntual de la serie de Taylor es $\mathcal{C} = (0,2)$.

Ejercicio 3.5. Calcular la integral superior de Riemann de la función $f(x) = 2x^3 + 3x$ en el intervalo $[0,2]$.

Solución

Si dividimos el intervalo $[0,2]$ en n subintervalos de igual amplitud, obtenemos la partición $P_n = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 2\}$ con $x_i = \frac{2i}{n}$ para $i = 1, \dots, n$.
Como la función $f(x) = 2x^3 + 3x$ es creciente en el intervalo $[0,2]$ el máximo de f en cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) se alcanzará en el extremo superior, de manera que la suma superior de Riemann de f respecto de P_n es

$$\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(2\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 3\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{16i^3}{n^3} + \frac{6i}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{32}{n^4}\sum_{i=1}^n i^3 + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^n i \\
&= \frac{32}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{12}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{32}{n^4}\frac{n^4+2n^3+n^2}{4} + 6\frac{n+1}{n} \\
&= 8\frac{n^4+2n^3+n^2}{n^4} + 6\frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Así pues, la integral superior de Riemann es

$$\begin{aligned}
\overline{\int_0^2} f &= \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} 8\frac{n^4+2n^3+n^2}{n^4} + 6\frac{n+1}{n} \\
&= 8\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3+n^2}{n^4} + 6\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 8 + 6 = 14.
\end{aligned}$$