Pácticas de Análisis Matemático con Julia





Indice de contenidos

Ρı	efacio	3
	Lice	ncia
1	Intro	oducción 5
	1.1	El REPL de Julia
	1.2	El gestor de paquetes de Julia
	1.3	Operadores aritméticos
	1.4	Operadores de comparación
	1.5	Operadores booleanos
	1.6	Funciones de redondeo
	1.7	Funciones de división
	1.8	Funciones para el signo y el valor absoluto
	1.9	Raíces, exponenciales y logaritmos
	1.10	Funciones trigonométricas
		Funciones trigonométricas inversas
		Precedencia de operadores
		Definición de variables
2	Suce	esiones de números reales 16
	2.1	Ejercicios Resueltos
	2.2	Ejercicios propuestos
3	Fund	ciones elementales 30
	3.1	Ejercicios Resueltos
	3.2	Ejercicios propuestos

Prefacio

¡Bienvenido a Prácticas de Análisis Matemático con Julia!

Este libro presenta una recopilación de prácticas de Análisis Matemático en una y varias variables reales con el lenguaje de programación Julia, con problemas aplicados a las Ciencias y las Ingenierías.

No es un libro para aprender a programar con Julia, ya que solo enseña el uso del lenguaje y de algunos de sus paquetes para resolver problemas de Cálculo tanto numérico como simbólico. Para quienes estén interesados en aprender a programar en este Julia, os recomiendo leer este manual de Julia.

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento – No comercial – Compartir bajo la misma licencia 3.0 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/.

Con esta licencia eres libre de:

- Copiar, distribuir y mostrar este trabajo.
- Realizar modificaciones de este trabajo.

Bajo las siguientes condiciones:

- Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

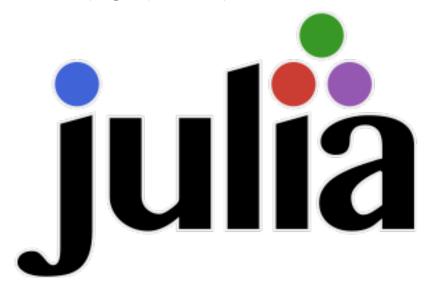
Estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Julia es un lenguaje de programación especialmente orientado al cálculo numérico y el análisis de datos. Julia permite además realizar cálculos simbólicos y dispone de una gran biblioteca de paquetes con aplicaciones en muy diversas áreas de las Matemáticas como Cálculo, Álgebra, Geometría, Matemática Discreta o Estadística.



La ventaja de Julia frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, MATLAB o Sage radica en su potencia de cálculo y su velocidad (equiparable al lenguaje C), lo que lo hace ideal para manejar grandes volúmenes de datos o realizar tareas que requieran largos y complejos cálculos. Además, es software libre por lo que resulta ideal para introducirlo en el aula como soporte computacional para los modelos matemáticos sin coste alguno.

En el siguiente enlace se explica el procedimiento de instalación de Julia.

Existen también varios entornos de desarrollo online que permiten ejecutar código en Julia sin necesidad de instalarlo en nuestro ordenador, como por ejemplo Replit, Cocalc o Codeanywhere.

El objetivo de esta práctica es introducir al alumno en la utilización de este lenguaje, enseñándole a realizar las operaciones básicas más habituales en Cálculo.

1.1 El REPL de Julia

Para arrancar el REPL^(REPL es el acrónimo de Read, Evaluate, Print and Loop, que describe el funcionamiento del compilador de Julia) de julia basta con abrir una terminal y teclear julia.

1.2 El gestor de paquetes de Julia

Julia viene con varios paquetes básicos preinstalados, como por ejemplo el paquete LinearAlgebra que define funciones básicas del Álgebra Lineal, pero en estas prácticas utilizaremos otros muchos paquetes que añaden más funcionalidades que no vienen instalados por defecto y tendremos que instalarlos aparte. Julia tiene un potente gestor de paquetes que facilita la búsqueda, instalación, actualización y eliminación de paquetes

Por defecto el gestor de paquetes utiliza el repositorio de paquetes oficial pero se pueden instalar paquetes de otros repositorios.

Para entrar en el modo de gestión de paquetes hay que teclear $\$]. Esto produce un cambio en el prompt del REPL de Julia.

Los comandos más habituales son:

- add p: Instala el paquete p en el entorno activo de Julia.
- update: Actualiza los paquetes del entorno activo de Julia.
- status: Muestra los paquetes instalados y sus versiones en el entorno activo de Julia.

• remove p: Elimina el paquete p del entorno activo de Julia.

```
i Ejemplo

Para instalar el paquete SymPy para cálculo simbólico basta con teclear add Sympy.

(@v1.7) pkg> add SymPy
        Updating registry at `~/.julia/registries/General.toml`
        Resolving package versions...
        Updating `~/.julia/environments/v1.7/Project.toml`
        [24249f21] + SymPy v1.1.6
        Updating `~/.julia/environments/v1.7/Manifest.toml`
        [3709ef60] + CommonEq v0.2.0
        [38540f10] + CommonSolve v0.2.1
        [438e738f] + PyCall v1.93.1
        [24249f21] + SymPy v1.1.6
```

1.3 Operadores aritméticos.

El uso más simple de Julia es la realización de operaciones aritméticas como en una calculadora. En Julia se utilizan los siguientes operadores.

Operador	Descripción
x + y	Suma
х - у	Resta
x * y	Producto
х / у	División
x ÷ y	Cociente división entera
х % у	Resto división entera
x ^ y	Potencia

1.4 Operadores de comparación

Operador	Descripción
==	Igualdad
!=,	Desigualdad
<	Menor que
<=,	Menor o igual que

Operador	Descripción
>	Mayor que
>=,	Mayor o igual que

1.5 Operadores booleanos

Operador	Descripción
!x	Negación
x && y	Conjunción (y)
x y	Disyunción (o)

Existen también un montón de funciones predefinidas habituales en Cálculo.

1.6 Funciones de redondeo

Función	Descripción
round(x)	Devuelve el entero más próximo a x
<pre>round(x, digits = n)</pre>	Devuelve al valor más próximo a ${\tt x}$ con ${\tt n}$
	decimales
floor(x)	Redondea x al próximo entero menor
ceil(x)	Redondea x al próximo entero mayor
trunc(x)	Devuelve la parte entera de ${\tt x}$

```
i Ejemplo
  julia> round(2.7)
  3.0
  julia> floor(2.7)
  2.0
  julia> floor(-2.7)
  -3.0
  julia> ceil(2.7)
  3.0
  julia> ceil(-2.7)
  -2.0
  julia> trunc(2.7)
  2.0
  julia> trunc(-2.7)
  -2.0
  julia> round(2.5)
  2.0
  julia> round(2.786, digits = 2)
  2.79
```

1.7 Funciones de división

Función	Descripción
div(x,y), x÷y	Cociente de la división entera
fld(x,y)	Cociente de la división entera redondeado hacia abajo
<pre>cld(x,y)</pre>	Cociente de la división entera redondeado hacia arriba
rem(x,y), x%y	Resto de la división entera. Se cumple $x == div(x,y)*y +$
	rem(x,y)
mod(x,y)	Módulo con respecto a y. Se cumple $x == fld(x,y)*y + mod(x,y)$
gcd(x,y)	Máximo común divisor positivo de x, y,

Función	Descripción
lcm(x,y)	Mínimo común múltiplo positivo de x, y,

```
i Ejemplo

julia> div(5,3)
1

julia> cld(5,3)
2

julia> 5%3
2

julia> -5%3
-2

julia> mod(5,3)
2

julia> mod(-5,3)
1

julia> gcd(12,18)
6

julia> lcm(12,18)
36
```

1.8 Funciones para el signo y el valor absoluto

Función	Descripción
abs(x)	Valor absoluto de x
sign(x)	Devuelve -1 si x es positivo, -1 si es negativo y 0 si es 0.

```
i Ejemplo

julia> abs(2.5)
2.5

julia> abs(-2.5)
2.5

julia> sign(-2.5)
-1.0

julia> sign(0)
0

julia> sign(2.5)
1.0
```

1.9 Raíces, exponenciales y logaritmos

Función	Descripción
$sqrt(x), \sqrt{x}$	Raíz cuadrada de x
cbrt(x), x	Raíz cúbica de x
exp(x)	Exponencial de x
log(x)	Logaritmo neperiano de \mathbf{x}
log(b,x)	Logaritmo en base \mathtt{b} de \mathtt{x}
log2(x)	Logaritmo en base 2 de \mathbf{x}
log10(x)	Logaritmo en base 10 de x

```
i Ejemplo
  julia> sqrt(4)
  2.0
  julia> cbrt(27)
  3.0
  julia> exp(1)
  2.718281828459045
  julia> exp(-Inf)
  0.0
  julia> log(1)
  0.0
  julia> log(0)
  -Inf
  julia > log(-1)
  ERROR: DomainError with -1.0:
  log will only return a complex result if called with a complex argument.
  julia > log(-1+0im)
  0.0 + 3.141592653589793im
  julia > log2(2^3)
  3.0
```

1.10 Funciones trigonométricas

Función	Descripción
hypot(x,y)	Hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos x e y
sin(x)	Seno del ángulo x en radianes
sind(x)	Seno del ángulo x en grados
cos(x)	Coseno del ángulo x en radianes
cosd(x)	Coseno del ángulo x en grados

Función	Descripción	
tan(x)	Tangente del ángulo x en radianes	
tand(x)	Tangente del ángulo x en grados	
sec(x)	Secante del ángulo x en radianes	
csc(x)	Cosecante del ángulo x en radianes	
cot(x)	Cotangente del ángulo ${\tt x}$ en radianes	

```
i Ejemplo
  julia> sin(/2)
  1.0
  julia> cos(/2)
  6.123233995736766e-17
  julia> cosd(90)
  0.0
  julia> tan(/4)
  0.99999999999999
  julia> tand(45)
  1.0
  julia> tan(/2)
  1.633123935319537e16
  julia> tand(90)
  Inf
  julia> sin(/4)^2 + cos(/4)^2
  1.0
```

1.11 Funciones trigonométricas inversas

Función	Descripción	
asin(x)	Arcoseno (inversa del seno) de x en radianes	
asind(x)	Arcoseno (inversa del seno) de x en grados	

Función	Descripción
acos(x)	Arcocoseno (inversa del coseno) de x en radianes
acosd(x)	Arcocoseno (inversa del coseno) de x en grados
atan(x)	Arcotangente (inversa de la tangente) de x en radianes
atand(x)	Arcotangente (inversa de la tangente) de x en grados
asec(x)	Arcosecante (inversa de la secante) de x en radianes
acsc(x)	Arcocosecante (inversa de la cosecante) de x en radianes
acot(x)	Arcocotangente (inversa de la cotangente) de ${\tt x}$ en radianes

```
i Ejemplo

julia> asin(1)
1.5707963267948966

julia> asind(1)
90.0

julia> acos(-1)
3.141592653589793

julia> atan(1)
0.7853981633974483

julia> atand(tan(/4))
45.0
```

1.12 Precedencia de operadores

A la hora de evaluar una expresión aritmética, Julia evalúa los operadores según el siguiente orden de prioridad (de mayor a menor prioridad).

Categoría Operadores	Asociatividad
Funciones exp, log, sin, etc.	
Exponenciación	Derecha
Unarios + - √	Derecha
Fracciones //	Izquierda
Multiplicación∕ % & \ ÷	Izquierda
Adición + -	Izquierda
Comparaciones >= <= == != !==	

Categoría Operadores	Asociatividad
Asignaciones += -= *= /= //= ^= ÷= %= = &=	Derecha

Cuando se quiera evaluar un operador con menor prioridad antes que otro con mayor prioridad, hay que utilizar paréntesis.

```
i Ejemplo

julia> 1 + 4 ^ 2 / 2 - 3
6.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / 2 - 3
5.5

julia> (1 + 4) ^ 2 / 2 - 3
9.5

julia> 1 + 4 ^ 2 / (2 - 3)
-15.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / (2 - 3)
-17.0
```

1.13 Definición de variables

Para definir variables se pueden utilizar cualquier carácter Unicode. Los nombres de las variables pueden contener más de una letra y, en tal caso, pueden usarse también números, pero siempre debe comenzar por una letra. Así, para Julia, la expresión xy, no se interpreta como el producto de la variable x por la variable y, sino como la variable xy. Además, se distingue entre mayúsculas y minúsculas, así que no es lo mismo xy que xy.

2 Sucesiones de números reales

2.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

Ejercicio 2.1. Dar los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

```
a. (2n+1)_{n=1}^{\infty}
```

i Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 10 usando compresiones de arrays.

```
Solución
x(n) = 2n + 1
print([x(n) for n = 1:10])
[3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21]
```

b.
$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

```
Solución
```

```
# Como reales
x(n) = 1 / n
print([x(n) for n = 1:10])
# Como racionales
x(n) = 1//n
print([x(n) for n = 1:10])
```

Rational{Int64}[1//1, 1//2, 1//3, 1//4, 1//5, 1//6, 1//7, 1//8, 1//9, 1//10]

c.
$$((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$$

Solución

```
x(n) = (-1)^n
print([x(n) for n = 1:10])
```

[-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]

d.
$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

Solución

```
x(n) = (1 + 1 / n)^n
print([x(n) for n = 1:10])
```

[2.0, 2.25, 2.3703703703703702, 2.44140625, 2.488319999999994, 2.5216263717421135, 2.5

e.
$$x_1=1$$
y $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Solución

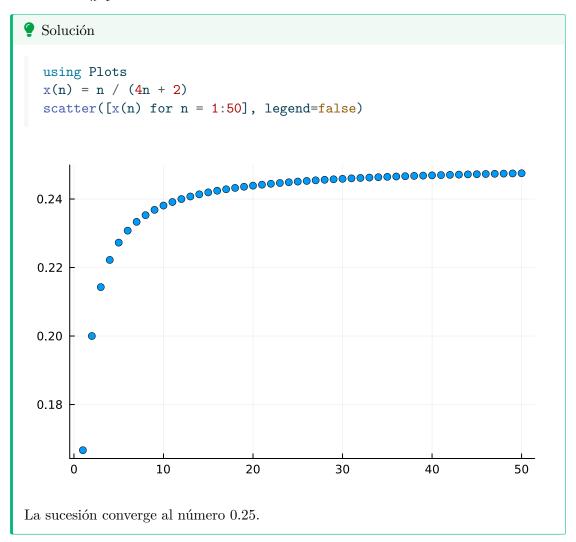
```
x(n) = n == 1 ? 1 : sqrt(1+x(n-1))
print([x(n) for n = 1:10])
```

Real[1, 1.4142135623730951, 1.5537739740300374, 1.5980531824786175, 1.6118477541252516]

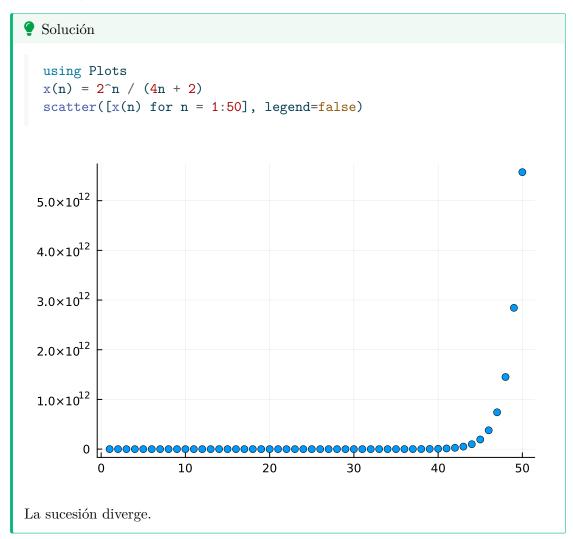
Ejercicio 2.2. Dibujar en una gráfica los 50 primeros términos de las siguientes sucesiones y deducir si son convergentes o no. En el caso de que sean convergentes, dar un valor aproximado de su límite.

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior. Después usar la función scatter del paquete Plots para dibujar el array de términos.

a.
$$\left(\frac{n}{4n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$$



b.
$$\left(\frac{2^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

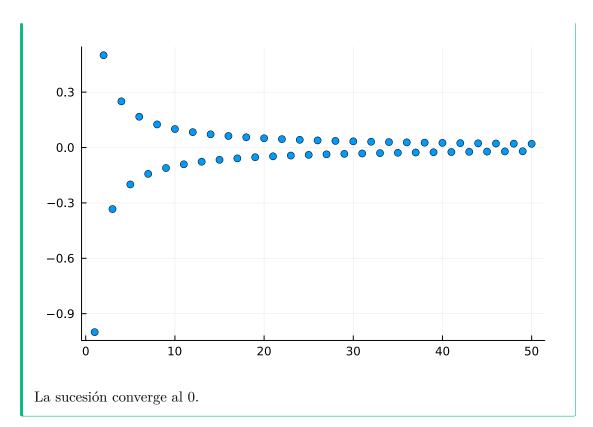


c.
$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

```
Solución

using Plots
x(n) = (-1)^n / n
```

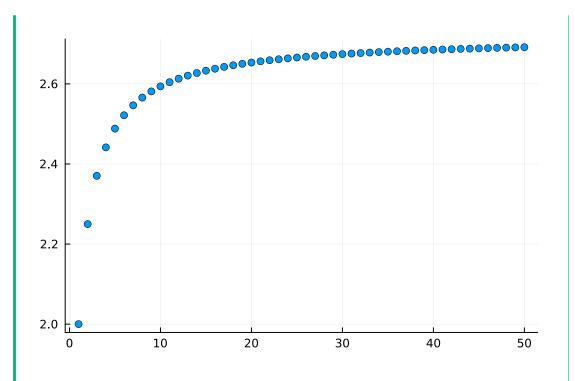
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)



d.
$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

```
Solución

using Plots
x(n) = (1 + 1 / n)^n
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```

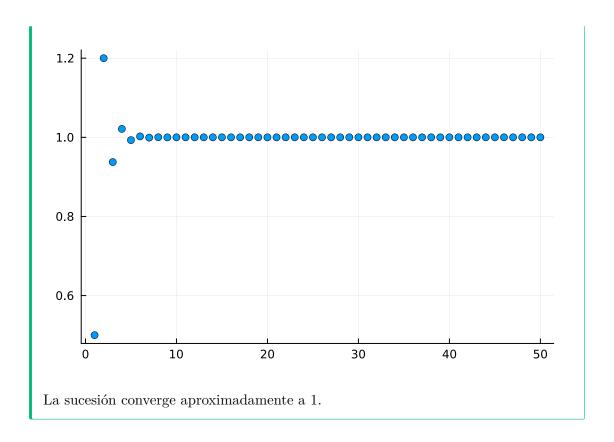


La sucesión converge aproximadamente a 2.7.

e.
$$x_1=0.5$$
y $x_{n+1}=\frac{3}{2+x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Solución

```
using Plots x(n) = n == 1 ? 0.5 : 3/(2+x(n-1)) scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```



Ejercicio 2.3. Calcular el límite, si existe, de las siguiente sucesiones.

a. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

i Ayuda

Definir una función para el término general usar la función limit del paquete SymPy para calcular el límite de la sucesión.

```
Solución

using SymPy
    @syms n::(integer, positive) # Declaración de la variable simbólica n.
    x(n) = 1/n
    limit(x(n), n=>oo)
```

```
b. ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}
```

```
Solución

@syms n::(integer, positive)
x(n) = (-1)^n
limit(x(n), n=>00)
NaN
```

```
c. \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}
```

```
    Solución

    Osyms n::(integer, positive)
    x(n) = (1 + 1 / n)^n
    limit(x(n), n=>oo)

e
```

Ejercicio 2.4. En el siglo III A.C Arquímedes usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia (y de paso el valor de π). La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

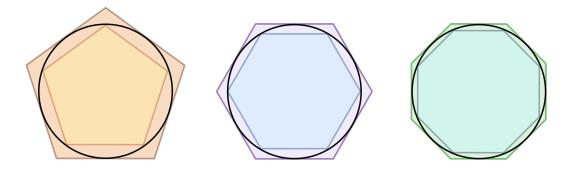


Figura 2.1: Aproximación del área de una circunferencia mediante polígonos regulares

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

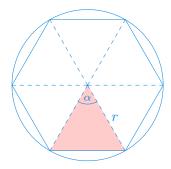


Figura 2.2: Descomposición de un hexágono en triángulos

En el caso de los polígonos inscritos dentro de la circunferencia, como dos de los lados siempre coinciden con el radio de la circunferencia r, el área del polígono de n lados puede calcularse con la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2} n r^2 Frsen\left(\frac{360}{n}\right)$$

a. Calcular el área de los polígonos de 10^i lados, para $i=1,\dots,6$ tomando r=1.

```
Solución

a(n) = n*sind(360/n)/2
print([a(10^i) for i = 1:6])
```

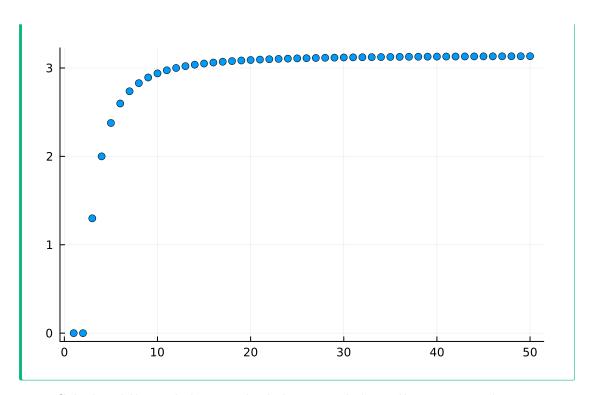
b. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de las areas de los polígonos

[2.938926261462366, 3.1395259764656687, 3.1415719827794755, 3.141592446881286, 3.141592

b. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de las areas de los polígonos tomando r=1.

```
Solución

using Plots
a(n) = n*sind(360/n)/2
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



c. Calcular el límite de la sucesión de las areas de los polígonos tomando r=1.

```
Solución

using SymPy
    @syms n::(integer, positive)
    a(n) = n*sin(2pi/n)/2
    limit(a(n), n=>oo)

3.14159265358979
```

d. Usando el resultado anterior, calcular el area del círculo de radio r.

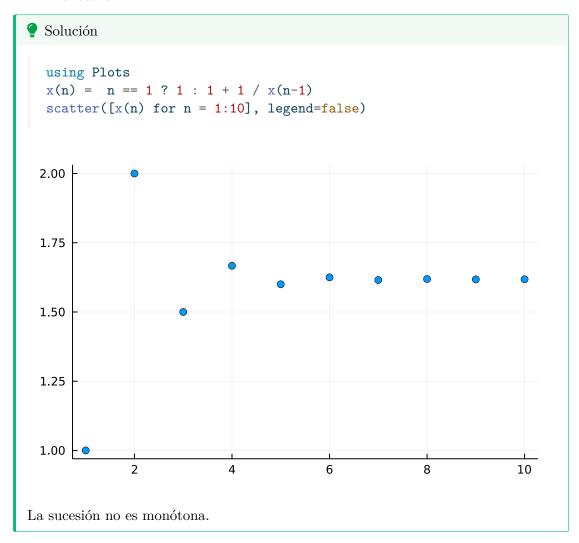
```
Solución

using SymPy
    @syms n::(integer, positive), r
    a(n) = n*r^2*sin(2pi/n)/2
    limit(a(n), n=>oo)

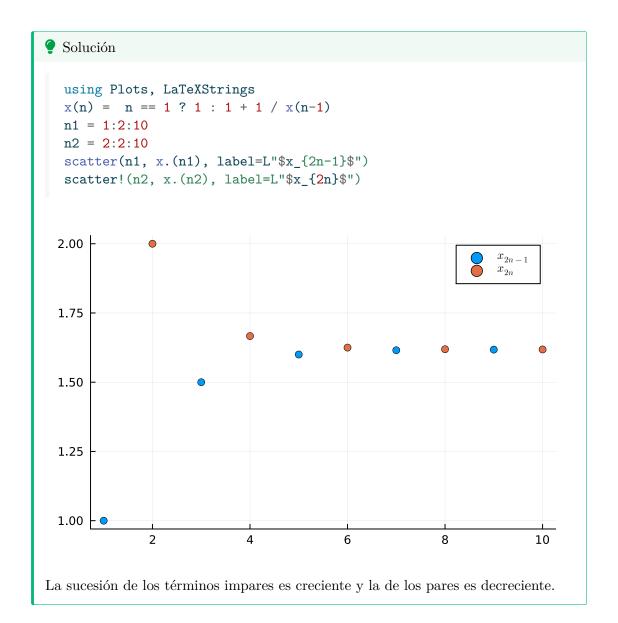
3.14159265358979r²
```

Ejercicio 2.5. Dada la sucesión $x_1=1$ y $x_{n+1}=1+\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N},$ se pide:

a. Dibujar la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión. ¿Es una sucesión monótona?



b. Dibujar la gráfica de los 5 primeros términos de las subsucesiones con los términos pares e impares. ¿Son monótonas?



2.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.6. Calcular el décimo término de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 2.7. Calcular los 10 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ y averiguar acia dónde converge.
\square 0
\square 1
\square No converge
$\square \ 0.5$
\square 1.5
Ejercicio 2.8. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la sucesión $x_1=3$ y $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\ \forall n\in\mathbb{N}.$
nsert image here
Ejercicio 2.9. A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ crees que la sucesión converge? \square Si \square No
Ejercicio 2.10. A la vista de la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión $\frac{n^n}{n!}\Big)_{n=1}^{\infty}$, ¿crees que la sucesión converge? \Box Si \Box No
Ejercicio 2.11. A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión dada cor $x_1=1$ y $x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$ $\forall n\in\mathbb{N},$ ¿crees que la sucesión converge? \Box Si \Box No

Ejercicio 2.12. ¿Cuál es el límite de la sucesión $\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

3 Funciones elementales

3.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using Plots # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using SymPy # Para el cálculo simbólico.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

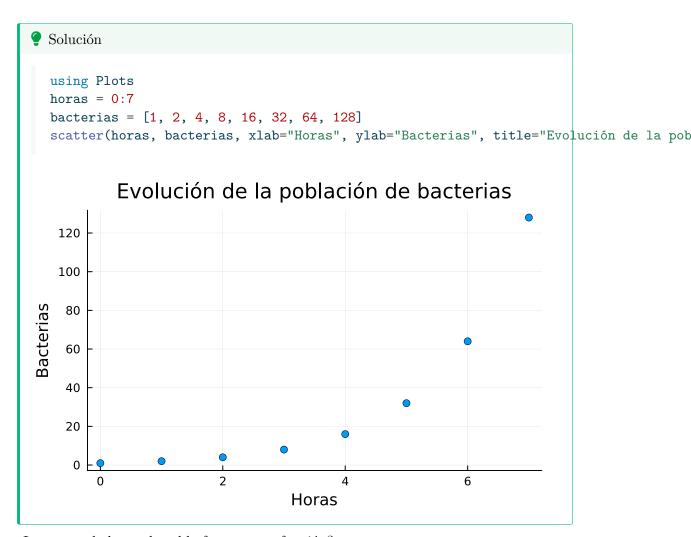
Ejercicio 3.1. La siguiente tabla contiene el número de bacterias en un cultivo cada hora que pasa.

Horas	Bacterias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

Dibujar una gráfica con la evolución del la población de bacterias.

i Ayuda

Definir los valores de las horas en un vector \mathbf{x} y el número de bacterias en otro y y luego utilizar la función $\mathbf{scatter}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ del paquete \mathbf{Plots} para dibujar una gráfica de puntos.



¿Los pares dados en la tabla forman una función?

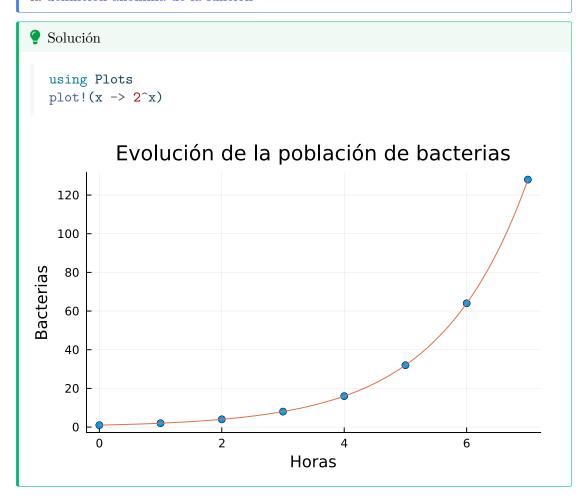
Solución

Si, porque para cada hora hay a lo sumo un número de bacterias con el que se relaciona.

¿Qué fórmula crees que explica la evolución del número de bacterias en función de las horas que pasan? Dibuja en la gráfica anterior la función con esa fórmula.

i Ayuda

Para añadir una nueva gráfica a una anterior se añade un signo de exclamación! a la función de graficación. Para una gráfica de líneas, utilizar la función plot! del paquete Plots, pasándole el nombre de la función si se ha definido previamente o

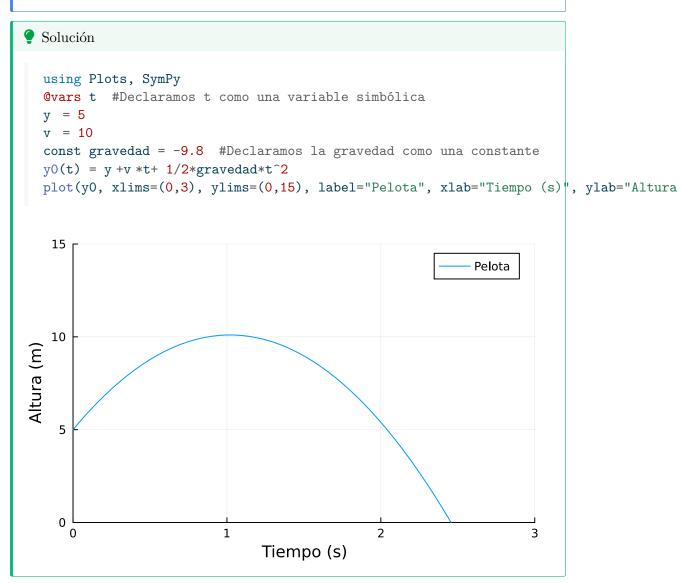


Ejercicio 3.2. En el lanzamiento vertical de un objeto, la posición que ocupa el objeto en cada instante t, viene dado por la función

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

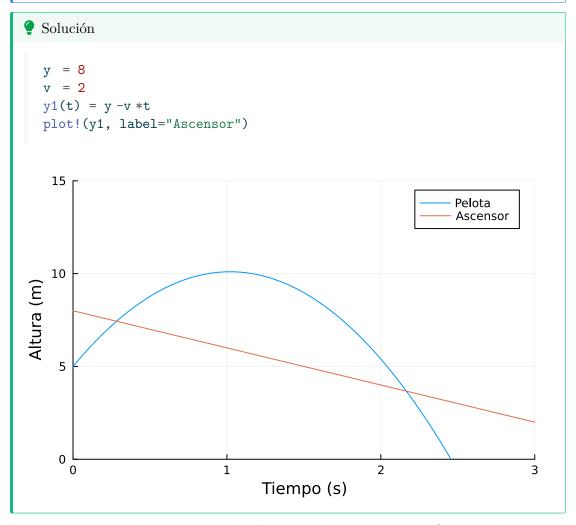
donde y_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial con que se lanza, y g es la aceleración de la gravedad. Una pelota se lanza verticalmente desde la ventada de un edificio a 5 m de altura, con una velocidad inicial de 10 m/s. Dibujar la gráfica de la posición de la pelota en función del tiempo, tomando una aceleración de la gravedad $g=-9.8 \text{ m/s}^2$.

Declarar t como una variable simbólica usando el paquete SymPy , definir después las constantes y_0, v_0 y g, y luego definir la función y(t) mediante la fórmula dada. Para dibujar la gráfica de la función, usar la función plot pasándole el nombre de la función. Como no tienen sentido los instantes negativos, ni las posiciones negativas, restringir la ventana de graficación a valores de t y de y positivos usando los parámetros xlim e ylim.



Al mismo tiempo que se lanza la pelota, un ascensor exterior baja por la fachada del mismo edificio desde una altura de 8~m con una velocidad constante de 5~m/s. Dibujar la gráfica de la posición del ascensor junto a la gráfica de la pelota.

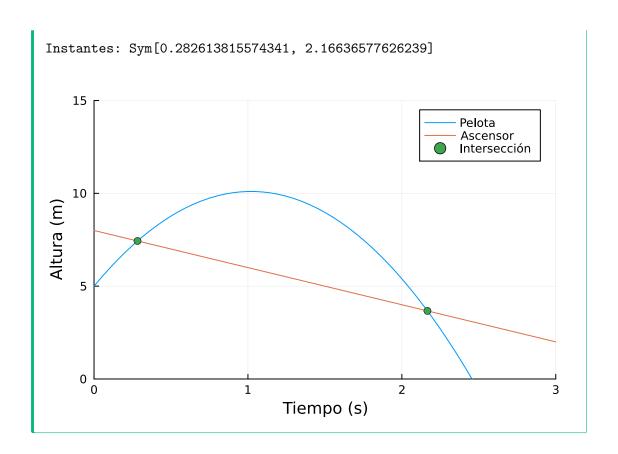
La función que define la posición del ascensor que baja desde una altura y_1 con una velocidad constante v_1 en cada instante t es $y(t)=y_1-v_1t$.



¿En qué instantes el ascensor estará a la misma altura de la pelota? Dibujar los puntos correspondientes a esos instantes en la gráfica anterior.

```
    Solución

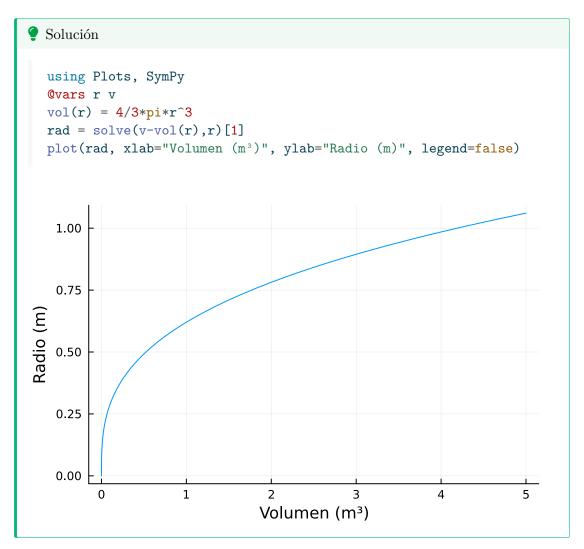
sol = solve(y0(t)-y1(t))
    print("Instantes: ", sol)
    scatter!(sol, y1.(sol), label="Intersección")
```



Ejercicio 3.3. El volumen de un globo esférico depende del radio según la función $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calcular la función que expresa el radio en función del volumen y dibujar su gráfica.

Declarar las variables simbólicas ${\tt r}$ y ${\tt v}$ usando el paquete ${\tt SymPy}$ y definir la función ${\tt vol(r)}$ que expresa el volumen del globo en función del radio.

Después utilizar la función solve del paquete SymPy para despejar r de la ecuación v-vol(r)=0.

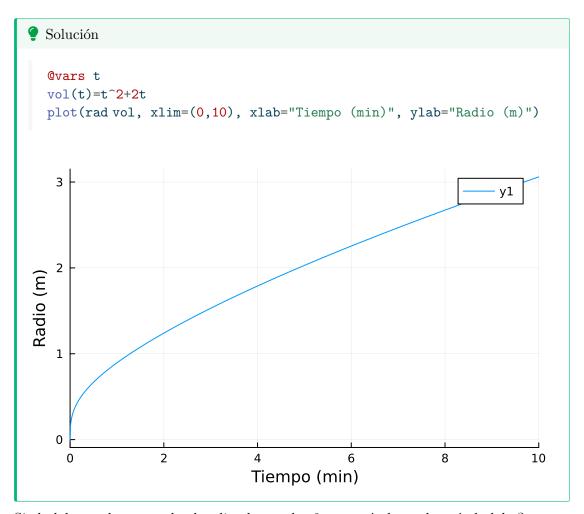


Si empezamos a introducir helio en el globo de manera que su volumen a los t minutos viene dado por la función $v(t) = t^2 + 2t$, dibujar la gráfica de la función que da el radio en cada instante.

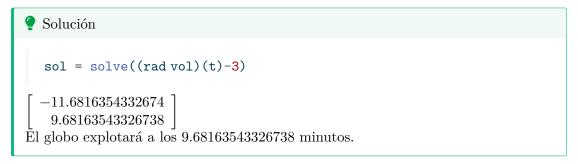
i Ayuda

Declarar las variables simbólicas t
 usando el paquete SymPy y definir la función vol(t) que expresa el volumen del globo en función del tiempo.

Después utilizar a el operador de composición \circ para componer la función del volumen con la función del radio.



Si el globo explota cuando el radio alcanza los 3 m, ¿cuándo explotará el globo?



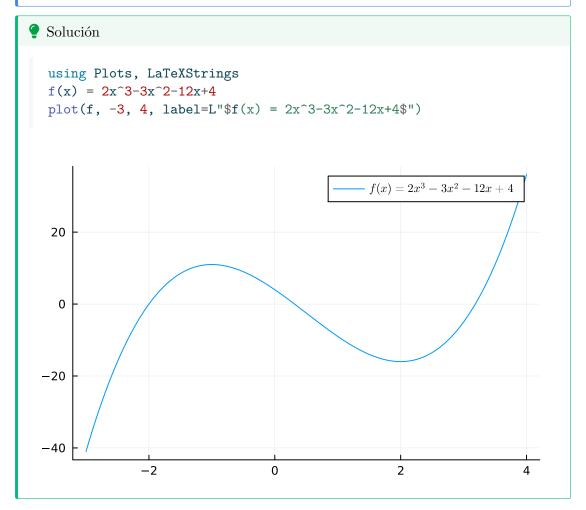
Ejercicio 3.4. Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

en el intervalo [-3,4] y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

i Ayuda

Definir la función y usar la función plot del paquete Plots.



a. Dominio

Solución

 $Dom(f) = \mathbb{R}$

b. Imagen

$$Im(f)=\mathbb{R}$$

c. Raíces

Solución

```
using SymPy
@syms x
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
raices = solve(f(x)) # Solución exacta
print(raices)
N(raices) # Solución aproximada con decimales

Sym[-2, 7/4 - sqrt(33)/4, sqrt(33)/4 + 7/4]
3-element Vector{Real}:
-2
```

- $0.3138593383654928350373471329452676704449338855043019080750306323585\\24819635648$
- 3.186140661634507164962652867054732329555066114495698091924969367641475180364343

Hay tres raíces en x = -2, x = 0.31 y x = 3.19 aproximadamente.

d. Signo

Solución

```
Intervalos con f(x) negativa: (-\infty, -2) \cup (0.31, 3.19).
Intervalos con f(x) positiva: (-2, 0.31) \cup (3.19, \infty).
```

e. Crecimiento

Solución

```
Intervalos con f(x) creciente: (-\infty, -1) \cup (2, \infty).
Intervalos con f(x) decreciente: (-1, 2).
```

f. Extremos

Máximo relativo en x = -1 y el valor máximo es f(-1) = 11. Mínimo relativo en x = 2 y el valor del mínimo es f(2) = -16.

g. Concavidad

Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(0.5, \infty)$. Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty, 0.5)$.

h. Puntos de inflexión

Solución

Punto de inflexión en x = 0.5.

Ejercicio 3.5. Dibujar la gráfica de la función

$$g(t) = \frac{t^4 + 19t^2 - 5}{t^4 + 9t^2 - 10}$$

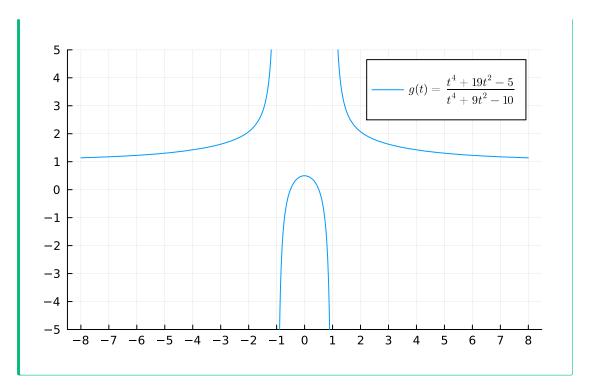
en el intervalo [-8, 8] y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

i Ayuda

Usar la función plot como en el ejercicio anterior con el parámetro aspect_ratio=1.0 para que los ejes tengan la misma escala.

Para respetar las discontinuidades utilizar aplicar la función rangeclamp del paquete MTH229.

Solución



a. Dominio. ¿Qué pasa si aplicamos la función a algún valor fuera de su dominio?

Solución

 $Dom(f) = \mathbb{R} \ \{-1,1\}$

(Inf, Inf)

Como se observa, al aplicar la función a -1 y 1 se obtiene ∞ .

b. Imagen

Solución

 $Im(f) = \mathbb{R} \ (0.5, 1]$

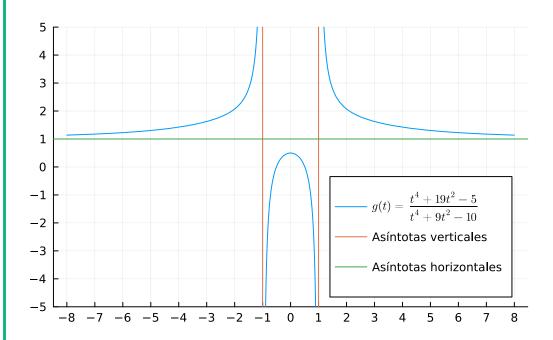
c. Asíntotas. Dibujarlas.

i Ayuda

Buscar las asíntotas verticales en los puntos fuera del dominio de la función. Para dibujar asíntotas verticales usar la función vline del paquete Plots, y para dibujar las asíntotas horizontales usar la función hline.

Solución

vline!([-1,1], label="Asíntotas verticales")
hline!([1], label="Asíntotas horizontales", legend=:bottomright)



Asíntotas verticales en x = -1 y x = 1.

Asíntotas horizontales en y = 1.

No hay asíntotas oblicuas.

d. Raíces

Solución

Hay dos raíces en x = -0.5 y x = 0.5 aproximadamente.

e. Signo

Intervalos con f(x) positiva: $(-\infty, -1) \cup (-0.5, 0.5) \cup (1, \infty)$. Intervalos con f(x) negativa: $(-1, -0.5) \cup (0.5, 1)$.

e. Crecimiento

Solución

Intervalos con f(x) creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Intervalos con f(x) decreciente: $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

f. Extremos

Solución

Máximo relativo en x=0 y el valor máximo es g(0)=0.5. No hay mínimos relativos.

g. Concavidad

Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Intervalos de concavidad hacia abajo: (-1, 1).

h. Puntos de inflexión

Solución

No hay puntos de inflexión.

Ejercicio 3.6. Dibujar la gráficas de las siguientes funciones exponenciales 2^x , e^x , 0.5^x , 0.7^x y responder a las siguientes preguntas comparando las gráficas.

a. ¿Cuál es el dominio de una función exponencial?



b. ¿Cuál es la imagen de una función exponencial?



c. ¿Cómo es el crecimiento de una función exponencial?

 a^x es creciente si a>1 y decreciente si 0< a<1.

d. ¿Tienen extremos una función exponencial?

Solución

No

e. ¿Cómo es la curvatura de una función exponencial?

Solución

Es cóncava hacia arriba.

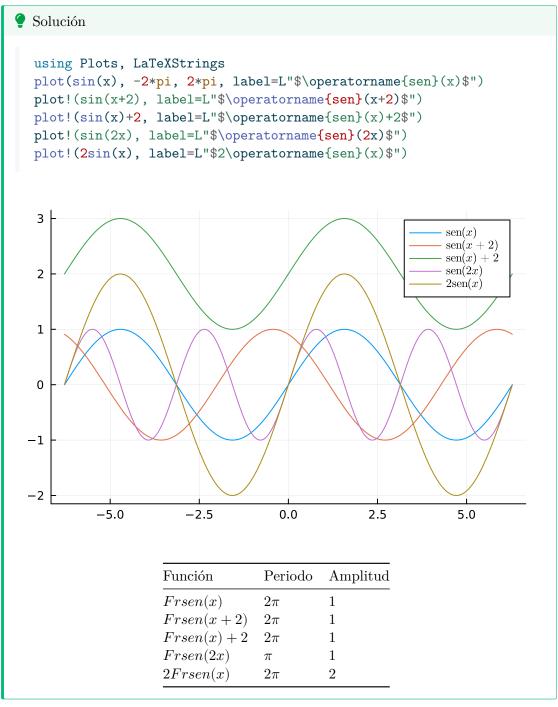
Ejercicio 3.7. Dibujar la gráficas de las funciones trigonométricas Frsen(x), Frsen(x+2), Frsen(x)+2, Frsen(2x) y 2Frsen(x), y completar la siguiente tabla estudiando su periodo y amplitud.

Función	Periodo	Amplitud
$\overline{Frsen(x)}$		
Frsen(x+2)		
Frsen(x) + 2		
Frsen(2x)		
2Frsen(x)		

¿Qué conclusiones sacas?

i Ayuda

El periodo es el mínimo intervalo en el que la gráfica de la función se repite, y la amplitud es la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función.



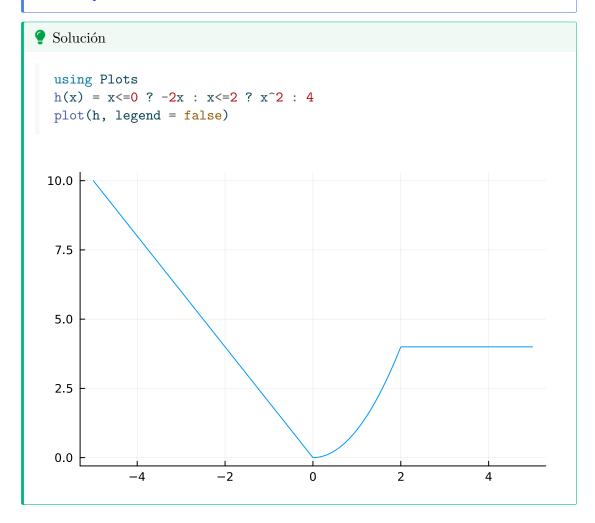
Se observa que al sumar una constante a la función seno o a su argumento, el periodo y la amplitud no cambian. Sin embargo, si se multiplica por una constante el seno, cambia la amplitud, y si se multiplica su argumento, cambia el periodo.

Ejercicio 3.8. Dibujar la gráfica de la función a trozos

$$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 0; \\ x^2 & \text{si } 0 < x \le 2; \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

i Ayuda

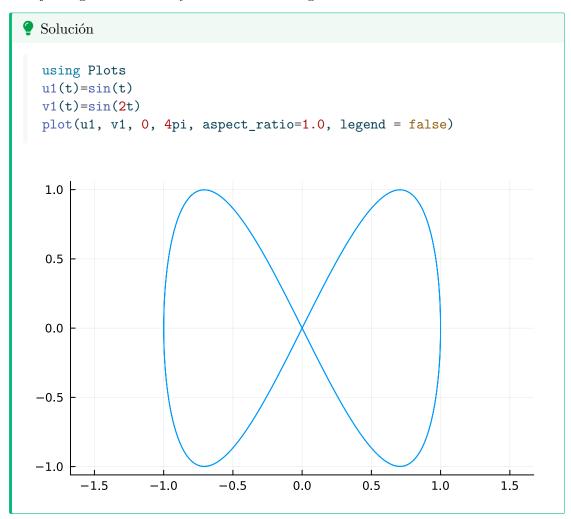
Usar el operador condicional anidado.



Ejercicio 3.9. Una hormiga se mueve sobre el plano real de manera que en cada instante t su posición viene dada por las funciones

$$\begin{cases} x = Frsen(t) \\ y = Frsen(2t) \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de la trayectoria de la hormiga.



3.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.10. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen dominio \mathbb{R} e imagen $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$?

$$1/x^{2}$$

	$x^4 - 2x^3 + 4x$
	2^x
	x
	$\sqrt(x)$
(Select one or more)	
Ejercicio 3.11. Dibujar las gr $\log_{0.5}(x)$ y contestar a las siguier	ráficas de las funciones logarítmicas $\ln(x),\ \log_2(x)$ y ntes preguntas.
a. ¿Cuál es el dominio de una	función logarítmica?
\Box Las otras opciones son falsa	S.
	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
	$\mathbb{R}_{-}\{0\}$
	\mathbb{R}^+
	$\mathbb R$
b. ¿Cuál es la imagen de una	función logarítmica?
\Box Las otras opciones son falsa	S.
	$\mathbb R$
	$\mathbb{R}_{-}\{0\}$
	\mathbb{R}^+
	\mathbb{R}^-

c. ¿Cómo es el crecimiento la función logarítmica $\log_a(x)?$
\Box Creciente si $a > 1$
\Box Creciente si $0 < a < 1$
\Box Creciente si $a < 1$
\Box Decreciente si $0 < a < 1$
(Select one or more)
d. ¿Cómo es la concavidad la función logarítmica $\log_a(x)?$
\Box Cóncava hacia arriba si $0 < a < 1$
\Box Cóncava hacia abajo si $a<1$
\Box Cóncava hacia abajo si $0 < a < 1$
\Box Cóncava hacia arriba si $a>1$
(Select one or more)
Ejercicio 3.12. ¿Cuál es el periodo y la amplitud de la función $2\cos(x/2)$?
$\square \ 2 \ \ \mathrm{y} \ 1$
$\square \ 2 \ \ \mathrm{y} \ 2$
\square 4 y 2
\square 4 y 1
\square y 2

Ejercicio 3.13. ¿Cuál de las gráficas corresponde a la siguiente función paramétrica?

$$f(t) = \begin{cases} Frsen(2t) - \cos(t) \\ Frsen(t) + \cos(t) \end{cases}$$

insert image here