Pácticas de Análisis Matemático con Julia

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Tabla de contenidos

Prefacio

¡Bienvenido a Prácticas de Análisis Matemático con Julia!

Este libro presenta una recopilación de prácticas de Análisis Matemático en una y varias variables reales con el lenguaje de programación Julia, con problemas aplicados a las Ciencias y las Ingenierías.

No es un libro para aprender a programar con Julia, ya que solo enseña el uso del lenguaje y de algunos de sus paquetes para resolver problemas de Cálculo tanto numérico como simbólico. Para quienes estén interesados en aprender a programar en este Julia, os recomiendo leer este manual de Julia.

Licencia

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Julia es un lenguaje de programación especialmente orientado al cálculo numérico y el análisis de datos. Julia permite además realizar cálculos simbólicos y dispone de una gran biblioteca de paquetes con aplicaciones en muy diversas áreas de las Matemáticas como Cálculo, Álgebra, Geometría, Matemática Discreta o Estadística.

La ventaja de Julia frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, MATLAB o Sage radica en su potencia de cálculo y su velocidad (equiparable al lenguaje C), lo que lo hace ideal para manejar grandes volúmenes de datos o realizar tareas que requieran largos y complejos cálculos. Además, es software libre por lo que resulta ideal para introducirlo en el aula como soporte computacional para los modelos matemáticos sin coste alguno.

En el siguiente enlace se explica el procedimiento de instalación de Julia.

Existen también varios entornos de desarrollo online que permiten ejecutar código en Julia sin necesidad de instalarlo en nuestro ordenador, como por ejemplo Replit, Cocalc o Codeanywhere.

El objetivo de esta práctica es introducir al alumno en la utilización de este lenguaje, enseñándole a realizar las operaciones básicas más habituales en Cálculo.

1.1 El REPL de Julia

Para arrancar el REPL^(REPL es el acrónimo de Read, Evaluate, Print and Loop, que describe el funcionamiento del compilador de Julia) de julia basta con abrir una terminal y teclear `julia`.

```
prompt> julia
               _
   _       _ _(_)_     |  Documentation: https://docs.julialang.org
  (_)     | (_) (_)    |
   _ _   _| |_  __ _   |  Type "?" for help, "]?" for Pkg help.
  | | | | | | |/ _` |  |
  | | |_| | | | (_| |  |  Version 1.7.3 (2022-05-06)
 _/ |\__'_|_|_|\__'_|  |  Official https://julialang.org/ release
|__/                   |

julia>
```

1.2 El gestor de paquetes de Julia

Julia viene con varios paquetes básicos preinstalados, como por ejemplo el paquete `LinearAlgebra` que define funciones básicas del Álgebra Lineal, pero en estas prácticas utilizaremos otros muchos paquetes que añaden más funcionalidades que no vienen instalados por defecto y tendremos que instalarlos aparte. Julia tiene un potente gestor de paquetes que facilita la búsqueda, instalación, actualización y eliminación de paquetes.

Por defecto el gestor de paquetes utiliza el repositorio de paquetes oficial pero se pueden instalar paquetes de otros repositorios.

Para entrar en el modo de gestión de paquetes hay que teclear `]`. Esto produce un cambio en el *prompt* del REPL de Julia.

Los comandos más habituales son:

- `add p`: Instala el paquete `p` en el entorno activo de Julia.
- `update`: Actualiza los paquetes del entorno activo de Julia.
- `status`: Muestra los paquetes instalados y sus versiones en el entorno activo de Julia.

- `remove p`: Elimina el paquete `p` del entorno activo de Julia.

ℹ Ejemplo

Para instalar el paquete `SymPy` para cálculo simbólico basta con teclear `add Sympy`.

```
(@v1.7) pkg> add SymPy
    Updating registry at `~/.julia/registries/General.toml`
   Resolving package versions...
    Updating `~/.julia/environments/v1.7/Project.toml`
  [24249f21] + SymPy v1.1.6
    Updating `~/.julia/environments/v1.7/Manifest.toml`
  [3709ef60] + CommonEq v0.2.0
  [38540f10] + CommonSolve v0.2.1
  [438e738f] + PyCall v1.93.1
  [24249f21] + SymPy v1.1.6
```

1.3 Operadores aritméticos.

El uso más simple de Julia es la realización de operaciones aritméticas como en una calculadora. En Julia se utilizan los siguientes operadores.

Operador	Descripción
`x + y`	Suma
`x - y`	Resta
`x * y`	Producto
`x / y`	División
`x ÷ y`	Cociente división entera
`x % y`	Resto división entera
`x ^ y`	Potencia

1.4 Operadores de comparación

Operador	Descripción
`==`	Igualdad
`!=`,	Desigualdad
`<`	Menor que
`<=`,	Menor o igual que

Operador	Descripción
`>`	Mayor que
`>=`,	Mayor o igual que

1.5 Operadores booleanos

Operador	Descripción
`!x`	Negación
`x && y`	Conjunción (y)
`x || y`	Disyunción (o)

Existen también un montón de funciones predefinidas habituales en Cálculo.

1.6 Funciones de redondeo

Función	Descripción
`round(x)`	Devuelve el entero más próximo a `x`
`round(x, digits = n)`	Devuelve al valor más próximo a `x` con `n` decimales
`floor(x)`	Redondea `x` al próximo entero menor
`ceil(x)`	Redondea `x` al próximo entero mayor
`trunc(x)`	Devuelve la parte entera de `x`

Ejemplo

```
julia> round(2.7)
3.0

julia> floor(2.7)
2.0

julia> floor(-2.7)
-3.0

julia> ceil(2.7)
3.0

julia> ceil(-2.7)
-2.0

julia> trunc(2.7)
2.0

julia> trunc(-2.7)
-2.0

julia> round(2.5)
2.0

julia> round(2.786, digits = 2)
2.79
```

1.7 Funciones de división

Función	Descripción
`div(x,y)`, `x÷y`	Cociente de la división entera
`fld(x,y)`	Cociente de la división entera redondeado hacia abajo
`cld(x,y)`	Cociente de la división entera redondeado hacia arriba
`rem(x,y)`, `x%y`	Resto de la división entera. Se cumple `x == div(x,y)*y + rem(x,y)`
`mod(x,y)`	Módulo con respecto a `y`. Se cumple `x == fld(x,y)*y + mod(x,y)`
`gcd(x,y...)`	Máximo común divisor positivo de `x`, `y`,...
`lcm(x,y...)`	Mínimo común múltiplo positivo de `x`, `y`,...

Ejemplo

```
julia> div(5,3)
1

julia> cld(5,3)
2

julia> 5%3
2

julia> -5%3
-2

julia> mod(5,3)
2

julia> mod(-5,3)
1

julia> gcd(12,18)
6

julia> lcm(12,18)
36
```

1.8 Funciones para el signo y el valor absoluto

Función	Descripción
`abs(x)`	Valor absoluto de `x`
`sign(x)`	Devuelve -1 si `x` es positivo, -1 si es negativo y 0 si es 0.

ℹ Ejemplo

```
julia> abs(2.5)
2.5

julia> abs(-2.5)
2.5

julia> sign(-2.5)
-1.0

julia> sign(0)
0

julia> sign(2.5)
1.0
```

1.9 Raíces, exponenciales y logaritmos

Función	Descripción
`sqrt(x)`, `√x`	Raíz cuadrada de `x`
`cbrt(x)`, `x`	Raíz cúbica de `x`
`exp(x)`	Exponencial de `x`
`log(x)`	Logaritmo neperiano de `x`
`log(b,x)`	Logaritmo en base `b` de `x`
`log2(x)`	Logaritmo en base 2 de `x`
`log10(x)`	Logaritmo en base 10 de `x`

Ejemplo

```
julia> sqrt(4)
2.0

julia> cbrt(27)
3.0

julia> exp(1)
2.718281828459045

julia> exp(-Inf)
0.0

julia> log(1)
0.0

julia> log(0)
-Inf

julia> log(-1)
ERROR: DomainError with -1.0:
log will only return a complex result if called with a complex argument.
...

julia> log(-1+0im)
0.0 + 3.141592653589793im

julia> log2(2^3)
3.0
```

1.10 Funciones trigonométricas

Función	Descripción
`hypot(x,y)`	Hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos `x` e `y`
`sin(x)`	Seno del ángulo `x` en radianes
`sind(x)`	Seno del ángulo `x` en grados
`cos(x)`	Coseno del ángulo `x` en radianes
`cosd(x)`	Coseno del ángulo `x` en grados
`tan(x)`	Tangente del ángulo `x` en radianes

Función	Descripción
`tand(x)`	Tangente del ángulo `x` en grados
`sec(x)`	Secante del ángulo `x` en radianes
`csc(x)`	Cosecante del ángulo `x` en radianes
`cot(x)`	Cotangente del ángulo `x` en radianes

Ejemplo

```
julia> sin( /2)
1.0

julia> cos( /2)
6.123233995736766e-17

julia> cosd(90)
0.0

julia> tan( /4)
0.9999999999999999

julia> tand(45)
1.0

julia> tan( /2)
1.633123935319537e16

julia> tand(90)
Inf

julia> sin( /4)^2 + cos( /4)^2
1.0
```

1.11 Funciones trigonométricas inversas

Función	Descripción
`asin(x)`	Arcoseno (inversa del seno) de `x` en radianes
`asind(x)`	Arcoseno (inversa del seno) de `x` en grados
`acos(x)`	Arcocoseno (inversa del coseno) de `x` en radianes
`acosd(x)`	Arcocoseno (inversa del coseno) de `x` en grados

Función	Descripción
`atan(x)`	Arcotangente (inversa de la tangente) de `x` en radianes
`atand(x)`	Arcotangente (inversa de la tangente) de `x` en grados
`asec(x)`	Arcosecante (inversa de la secante) de `x` en radianes
`acsc(x)`	Arcocosecante (inversa de la cosecante) de `x` en radianes
`acot(x)`	Arcocotangente (inversa de la cotangente) de `x` en radianes

i Ejemplo

```
julia> asin(1)
1.5707963267948966

julia> asind(1)
90.0

julia> acos(-1)
3.141592653589793

julia> atan(1)
0.7853981633974483

julia> atand(tan( /4))
45.0
```

1.12 Precedencia de operadores

A la hora de evaluar una expresión aritmética, Julia evalúa los operadores según el siguiente orden de prioridad (de mayor a menor prioridad).

Categoría	Operadores	Asociatividad
Funciones	`exp`, `log`, `sin`, etc.	
Exponenciación	`^`	Derecha
Unarios	`+ - √`	Derecha
Fracciones	`//`	Izquierda
Multiplicación	`* / % & \ ÷`	Izquierda
Adición	`+ - |`	Izquierda
Comparaciones	`> < >= <= == != !==`	
Asignaciones	`= += -= *= /= //= ^= ÷= %= |= &=`	Derecha

Cuando se quiera evaluar un operador con menor prioridad antes que otro con mayor prioridad, hay que utilizar paréntesis.

Ejemplo

```
julia> 1 + 4 ^ 2 / 2 - 3
6.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / 2 - 3
5.5

julia> (1 + 4) ^ 2 / 2 - 3
9.5

julia> 1 + 4 ^ 2 / (2 - 3)
-15.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / (2 - 3)
-17.0
```

1.13 Definición de variables

Para definir variables se pueden utilizar cualquier carácter Unicode. Los nombres de las variables pueden contener más de una letra y, en tal caso, pueden usarse también números, pero siempre debe comenzar por una letra. Así, para Julia, la expresión `xy`, no se interpreta como el producto de la variable x por la variable y, sino como la variable xy. Además, se distingue entre mayúsculas y minúsculas, así que no es lo mismo xy que xY.

2 Sucesiones de números reales

2.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```julia
using SymPy  # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
using Makie # Para obtener gráficos interactivos.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

Ejercicio 2.1. Dar los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a. $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$

> **Ayuda**
>
> Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 10 usando compresiones de arrays.

> **Solución**
>
> ```julia
> a(n) = 2n + 1
> println([a(n) for n = 1:10])
> ```
>
> ```
> [3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21]
> ```

b. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

```
# Como reales
a(n) = 1 / n
println([a(n) for n = 1:10])
# Como racionales
a(n) = 1//n
println([a(n) for n = 1:10])
```

```
[1.0, 0.5, 0.3333333333333333, 0.25, 0.2, 0.16666666666666666, 0.14285714285714285, 0.1
Rational{Int64}[1, 1//2, 1//3, 1//4, 1//5, 1//6, 1//7, 1//8, 1//9, 1//10]
```

c. $((-1)^n)_{n=1}^\infty$

Solución

```
a(n) = (-1)^n
println([a(n) for n = 1:10])
```

```
[-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]
```

d. $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^\infty$

Solución

```
a(n) = (1 + 1 / n)^n
println([a(n) for n = 1:10])
```

```
[2.0, 2.25, 2.3703703703703702, 2.44140625, 2.4883199999999994, 2.5216263717421135, 2.5
```

e. $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

```
a(n) = n == 1 ? 1 : sqrt(1+a(n-1))
println([a(n) for n = 1:10])
```

```
Real[1, 1.4142135623730951, 1.5537739740300374, 1.5980531824786175, 1.6118477541252516,
```

Ejercicio 2.2. Dibujar en una gráfica los 50 primeros términos de las siguientes sucesiones y deducir si son convergentes o no. En el caso de que sean convergentes, dar un valor aproximado de su límite.

Ayuda

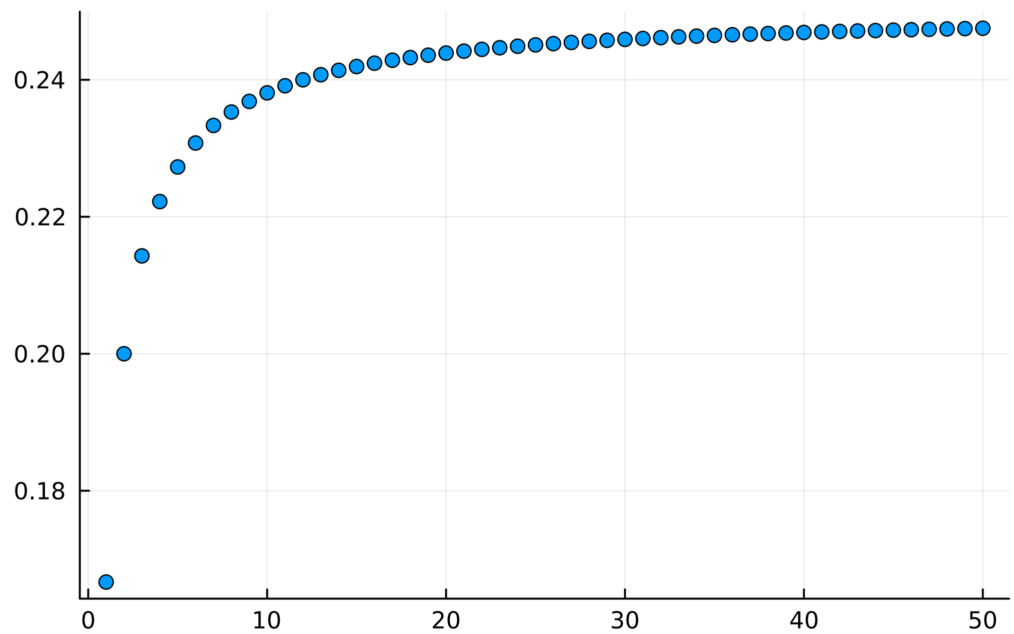
Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior. Después usar la función `scatter` del paquete `Plots`, o bien la función `scatter` del paquete `Makie`, para dibujar el array de términos.

a. $\left(\frac{n}{4n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

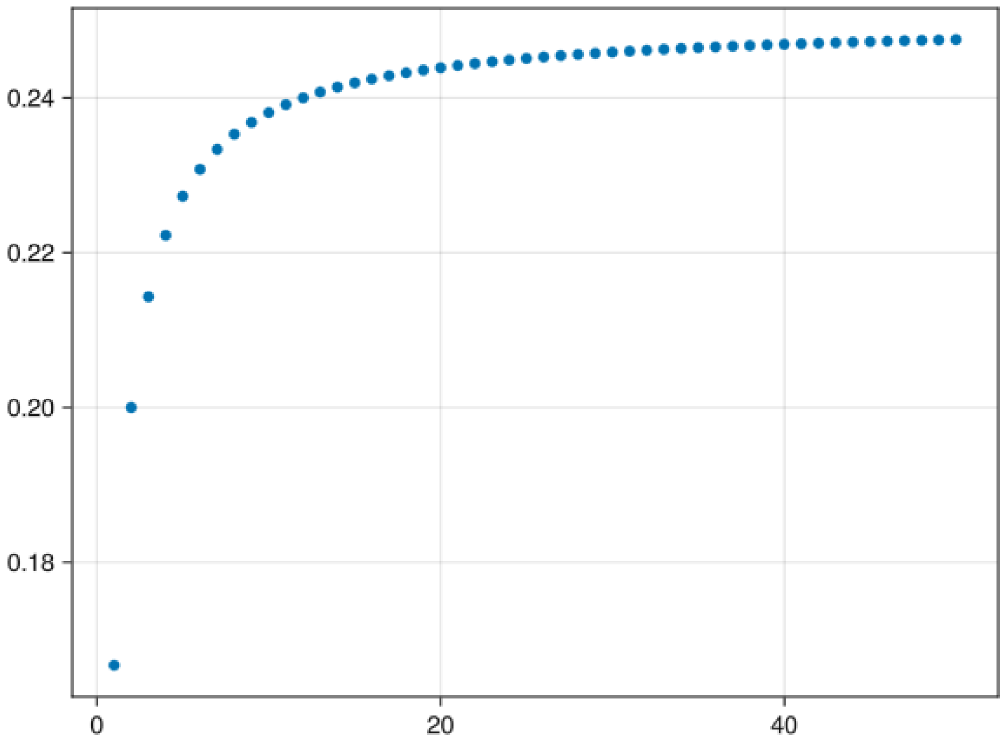
2.2 Plots

```
using Plots
a(n) = n / (4n + 2)
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



2.3 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n / (4n + 2)
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



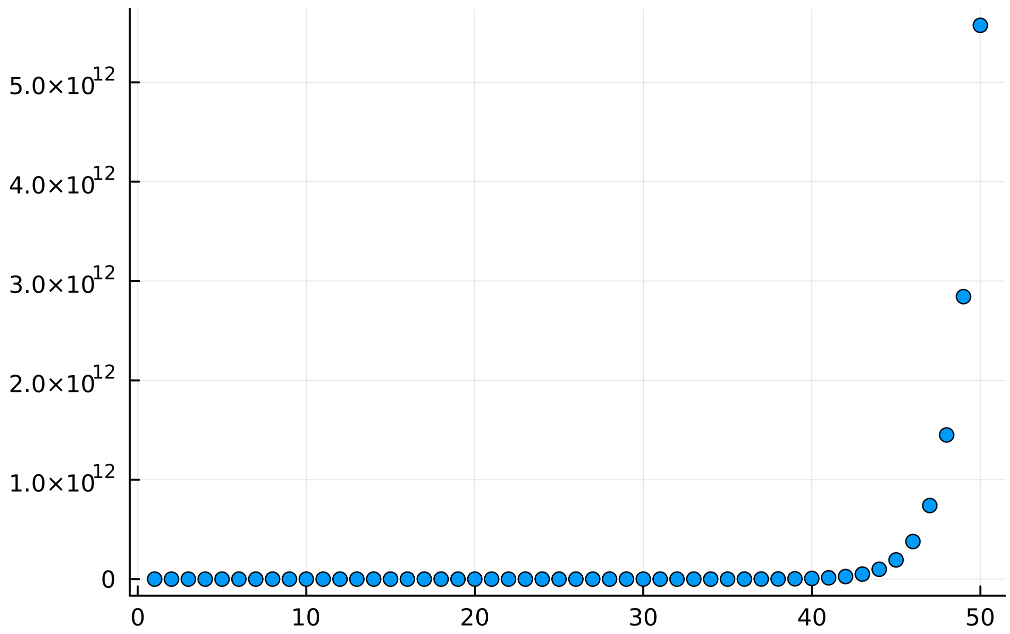
La sucesión converge al número 0.25.

b. $\left(\frac{2^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

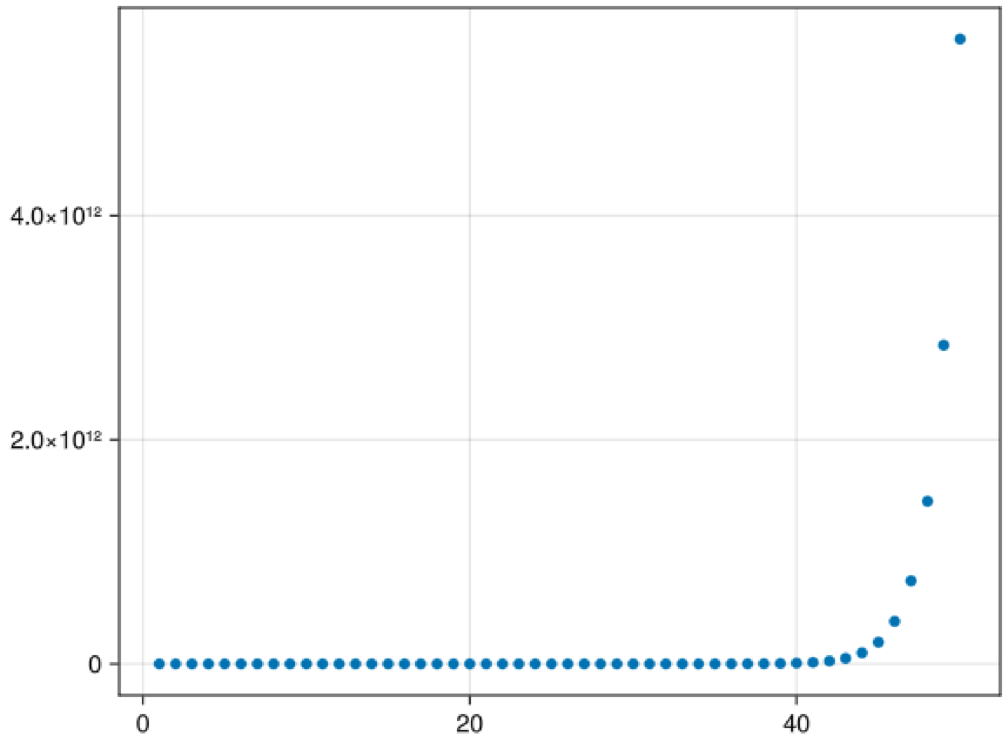
2.4 Plots

```
using Plots
a(n) = 2^n / (4n + 2)
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



2.5 Makie

```
using GLMakie
a(n) = 2^n / (4n + 2)
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



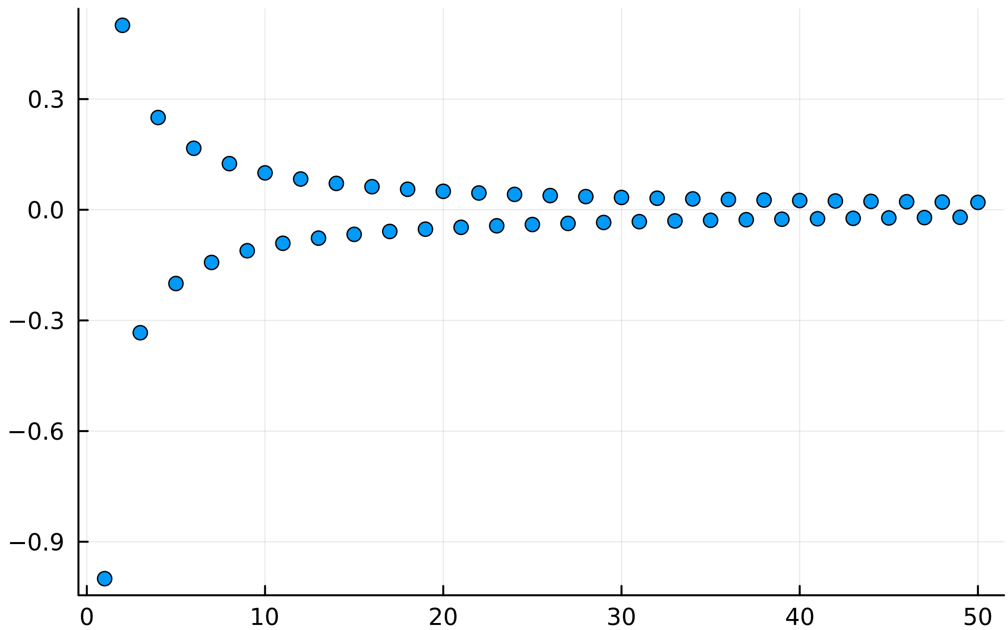
La sucesión diverge.

c. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

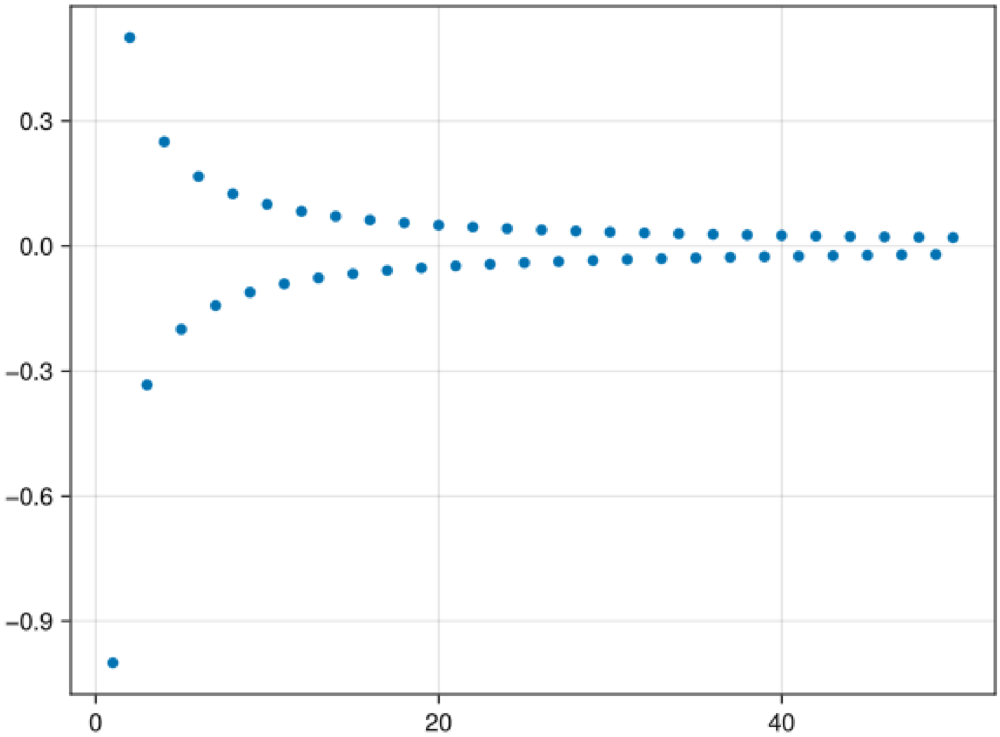
2.6 Plots

```
using Plots
a(n) = (-1)^n / n
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



2.7 Makie

```
using GLMakie
a(n) = (-1)^n / n
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



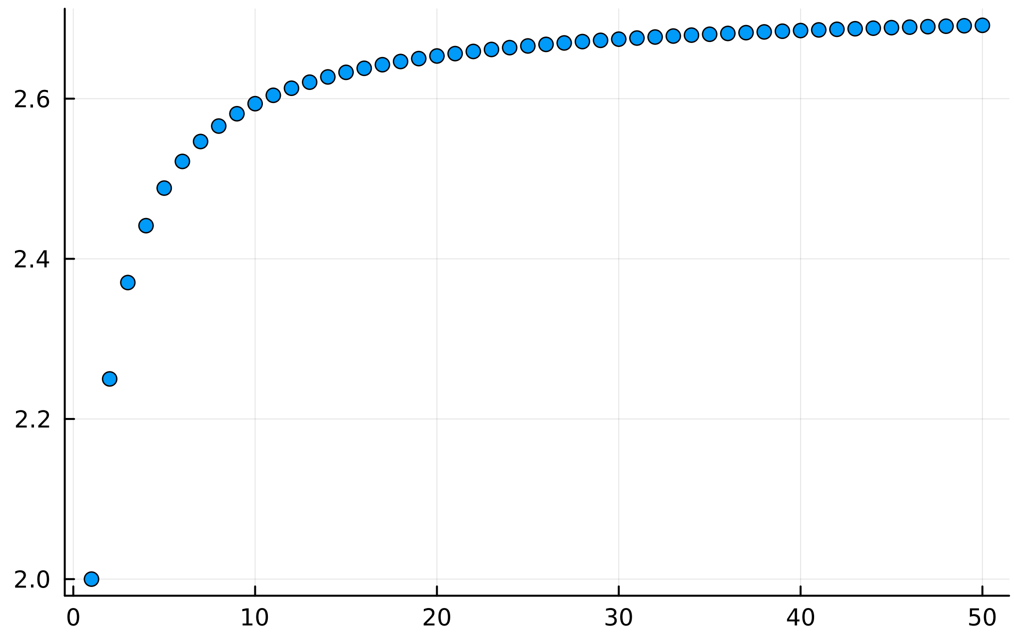
La sucesión converge al 0.

d. $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

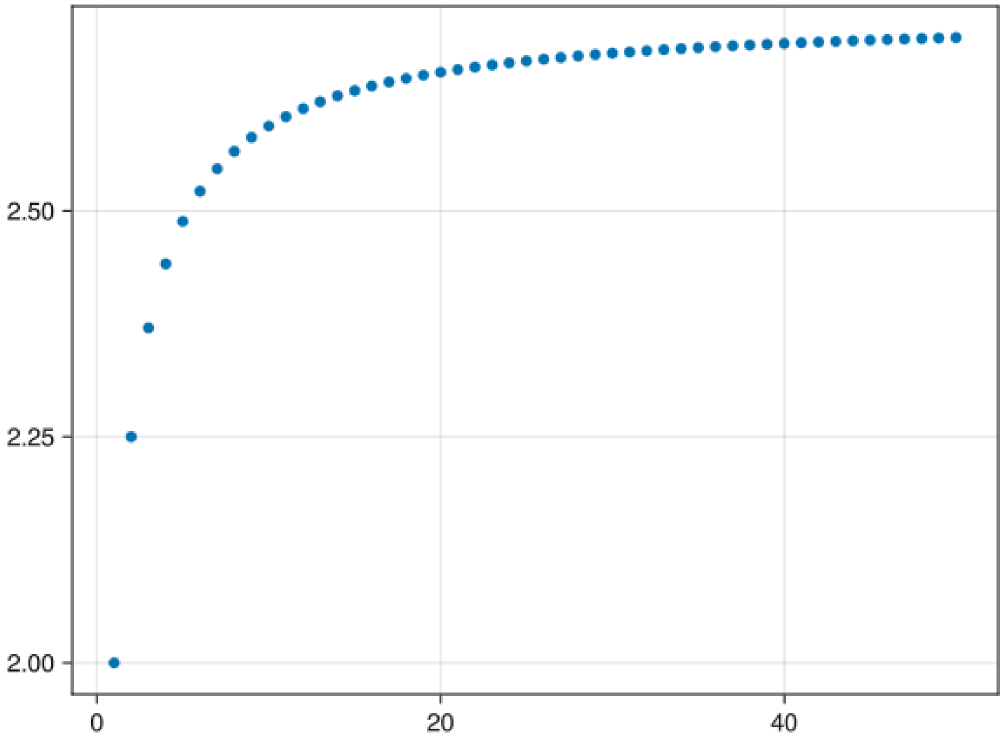
2.8 Plots

```
using Plots
a(n) = (1 + 1 / n)^n
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



2.9 Makie

```
using GLMakie
a(n) = (1 + 1 / n)^n
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



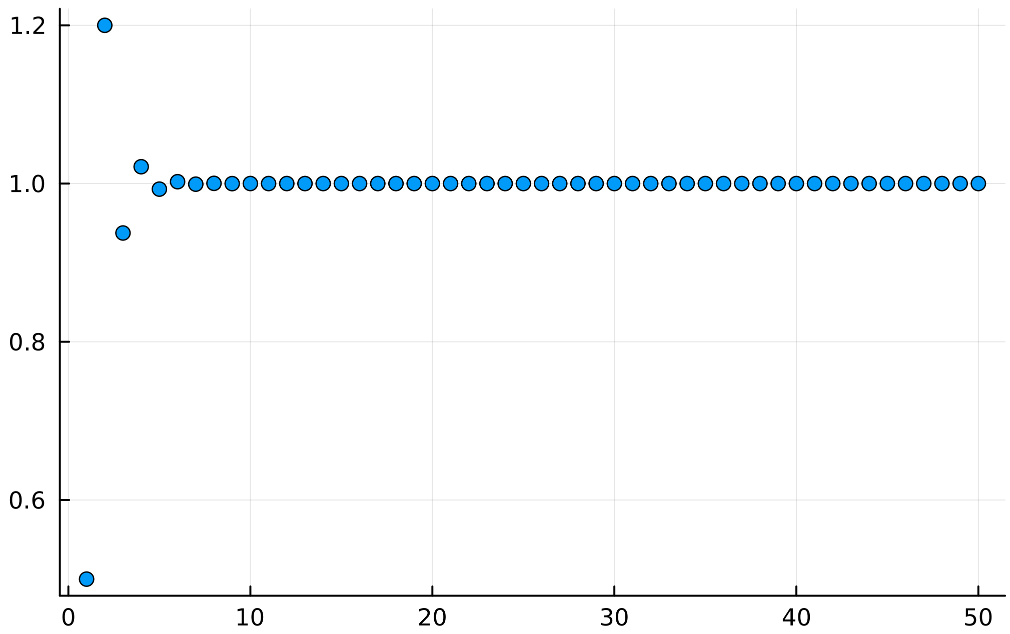
La sucesión converge aproximadamente a 2.7.

e. $a_1 = 0.5$ y $a_{n+1} = \frac{3}{2+a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

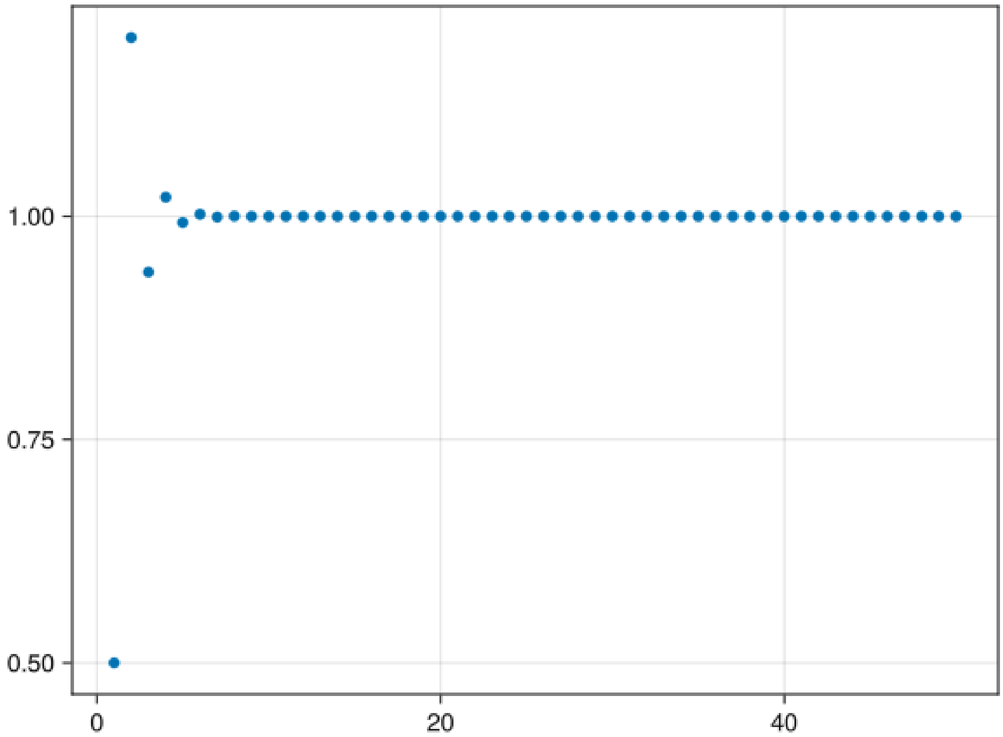
2.10 Plots

```
using Plots
a(n) =  n == 1 ? 0.5 : 3/(2+a(n-1))
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



2.11 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n == 1 ? 0.5 : 3/(2+a(n-1))
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



La sucesión converge aproximadamente a 1.

Ejercicio 2.3. Calcular el límite, si existe, de las siguiente sucesiones.

a. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Ayuda

Definir una función para el término general y usar la función `limit` del paquete `SymPy` para calcular el límite de la sucesión.

Solución

```
using SymPy
@syms n  # Declaración de la variable simbólica n.
a(n) = 1/n
limit(a(n), n=>oo)
```

0

b. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

```
@syms n
a(n) = (-1)^n
limit(a(n), n=>oo)
```

NaN

c. $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

```
@syms n
a(n) = (1 + 1 / n)^n
limit(a(n), n=>oo)
```

e

Ejercicio 2.4. En el siglo III A.C Arquímedes usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia (y de paso el valor de π). La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

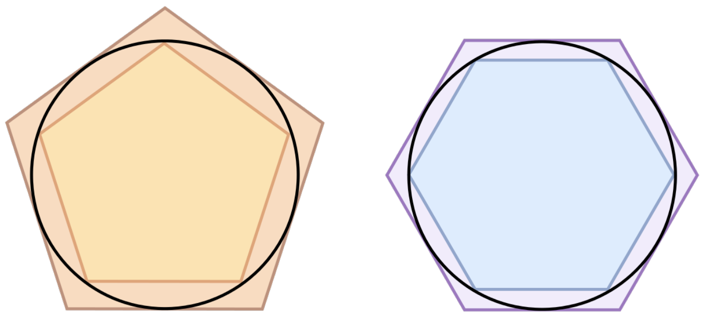


Figura 2.1: Aproximación del área de una circunferencia mediante polígonos regulares

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

En el caso de los polígonos inscritos dentro de la circunferencia, como dos de los lados siempre coinciden con el radio de la circunferencia r, el perímetro del polígon de n lados puede calcularse con la fórmula

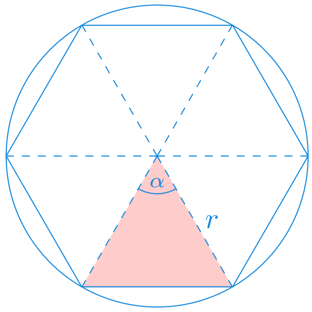


Figura 2.2: Descomposición de un hexágono en triángulos

$$p_n = 2nrFrsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

y el área puede calcularse con la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2}nr^2Frsen\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

a. Calcular el perímetro de los polígonos de e 10^i lados, para $i = 1, \dots, 6$ tomando $r = 1$.

Solución

```
p(n) = 2n*sin(pi/n)
println([p(10^i) for i = 1:6])
```

```
[6.180339887498948, 6.282151815625658, 6.283174971759127, 6.28318520382533, 6.283185306
```

a. Calcular el área de los polígonos de 10^i lados, para $i = 1, \dots, 6$ tomando $r = 1$.

Solución

```
a(n) = n*sin(2*pi/n)/2
println([a(10^i) for i = 1:6])
```

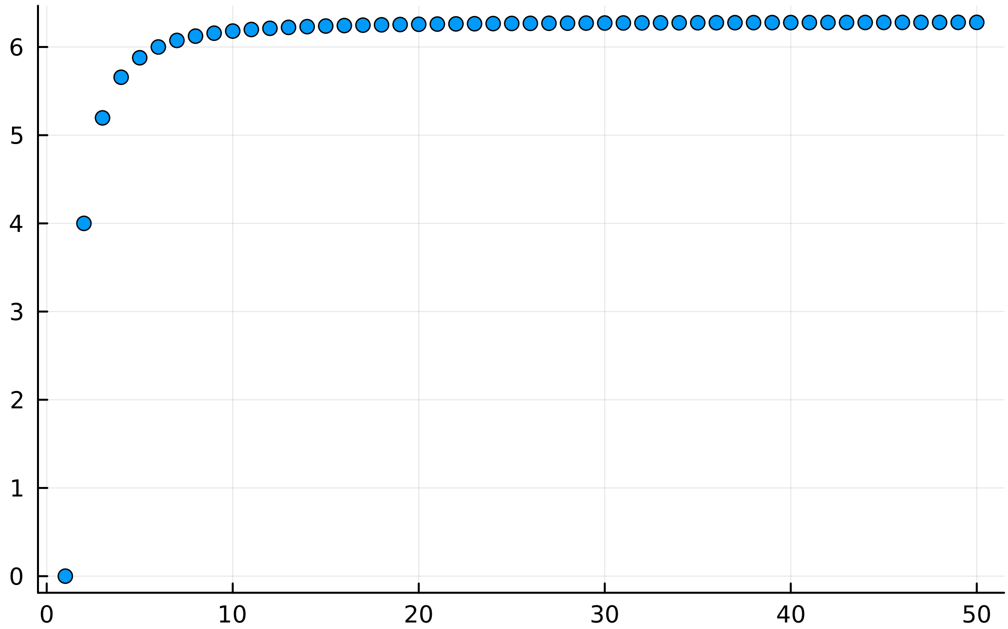
```
[2.938926261462366, 3.1395259764656687, 3.1415719827794755, 3.141592446881286, 3.141592
```

a. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de los perímetros de los polígonos tomando $r = 1$.

Solución

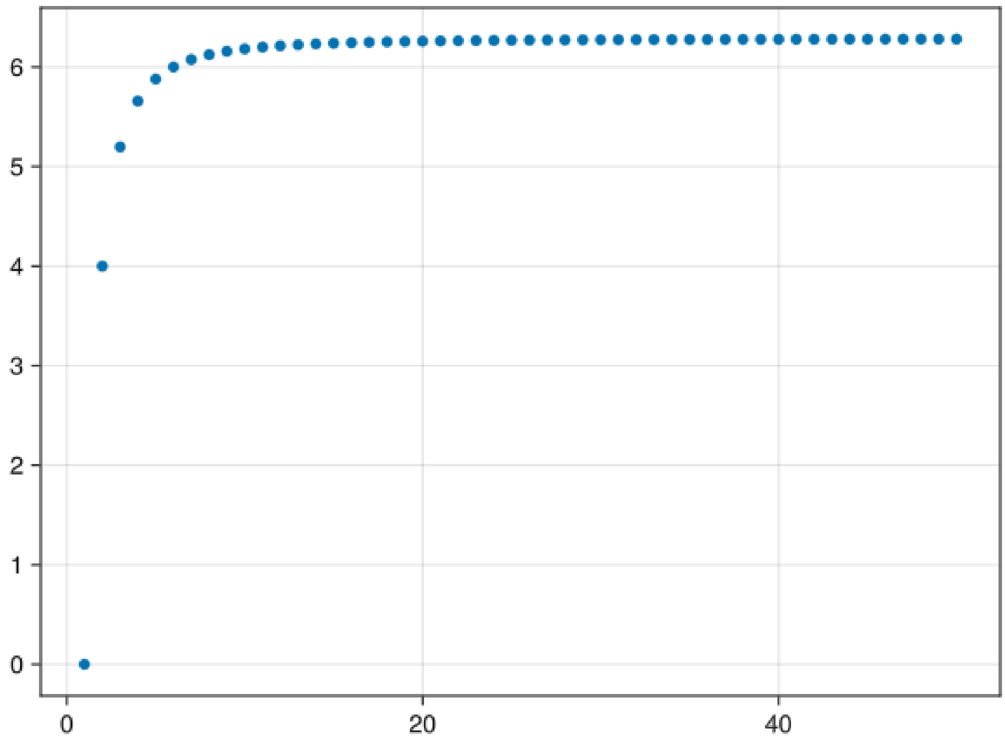
2.12 Plots

```
using Plots
a(n) = 2n*sin(pi/n)
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



2.13 Makie

```
using GLMakie
a(n) = 2n*sin(pi/n)
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```

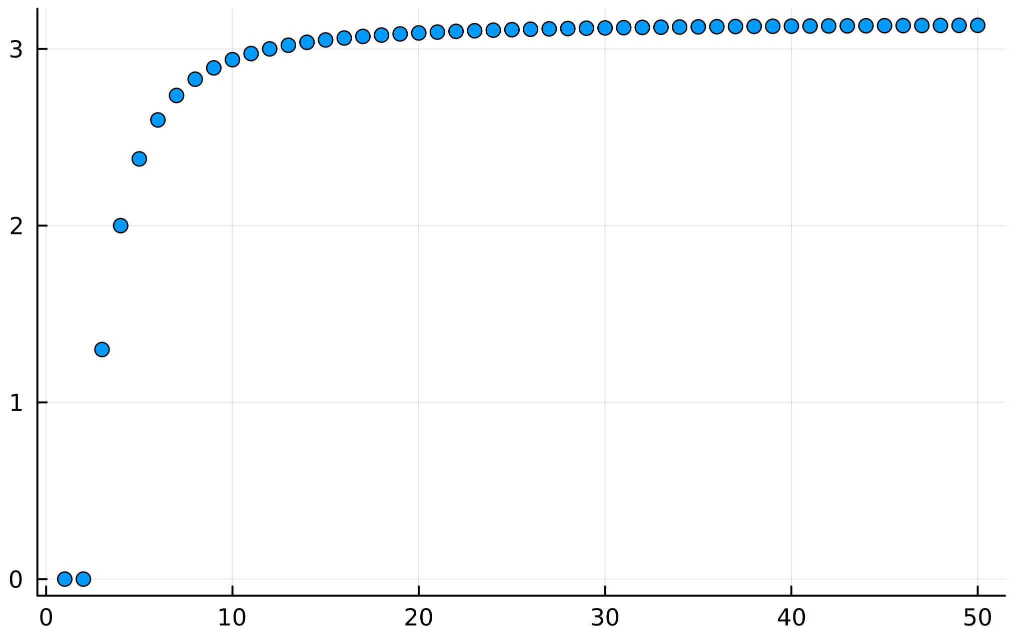


b. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de las areas de los polígonos tomando $r = 1$.

Solución

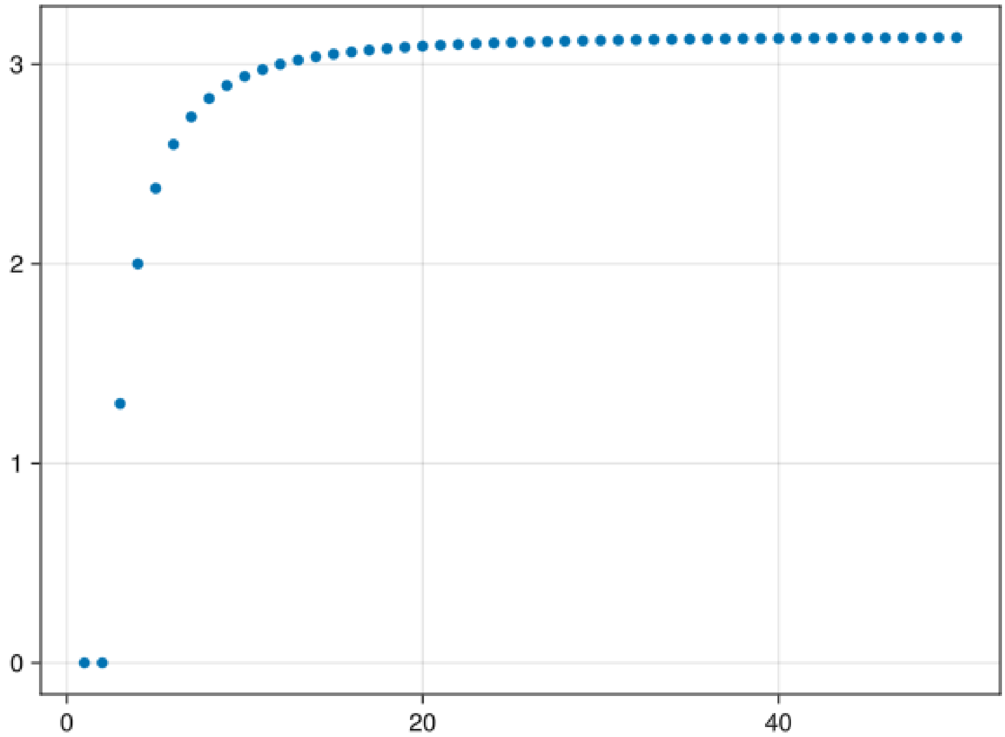
2.14 Plots

```
using Plots
a(n) = n*sin(2*pi/n)/2
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



2.15 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n*sin(2*pi/n)/2
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



a. Calcular el límite de la sucesión de los perímetros de los polígonos tomando $r = 1$.

Solución

```
using SymPy
@syms n
a(n) = 2n*sin(PI/n)  # Para cálculo simbólico es mejor utilizar la constante simbólica
limit(a(n), n=>oo)
```

2π

a. Usando el resultado anterior, calcular el perímetro del círculo de radio r.

Solución

```
using SymPy
@syms n, r
a(n) = 2n*r*sin(PI/n)
limit(a(n), n=>oo)
```

$2\pi r$

a. Calcular el límite de la sucesión de las areas de los polígonos tomando $r = 1$.

Solución

```
using SymPy
@syms n
a(n) = n*sin(2*PI/n)/2
limit(a(n), n=>oo)
```

π

a. Usando el resultado anterior, calcular el area del círculo de radio r.

Solución

```
using SymPy
@syms n, r
a(n) = n*r^2*sin(2*PI/n)/2
limit(a(n), n=>oo)
```

πr^2

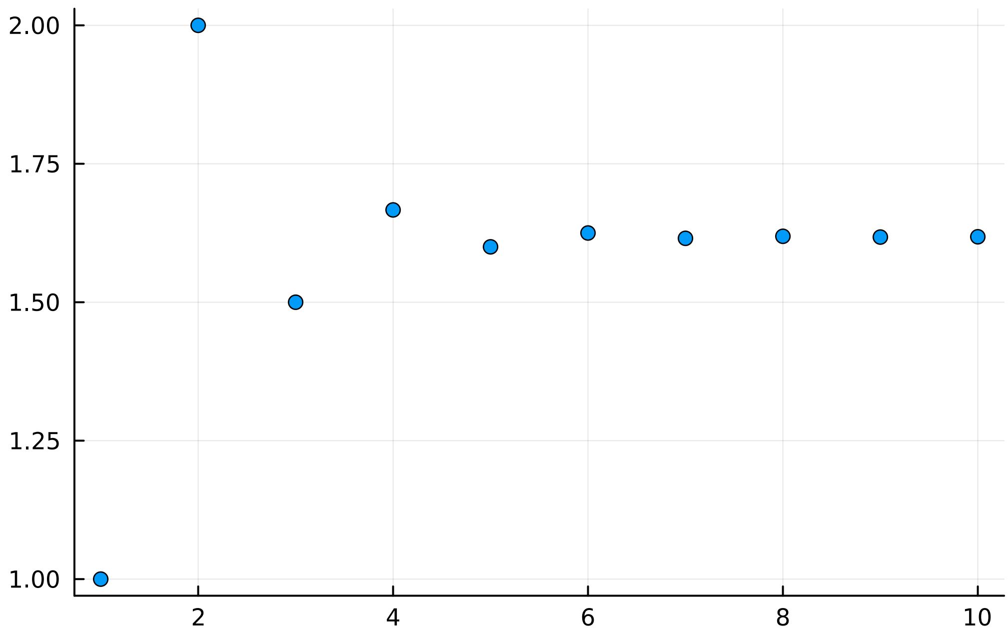
Ejercicio 2.5. Dada la sucesión $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se pide:

a. Dibujar la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión. ¿Es una sucesión monótona?

Solución

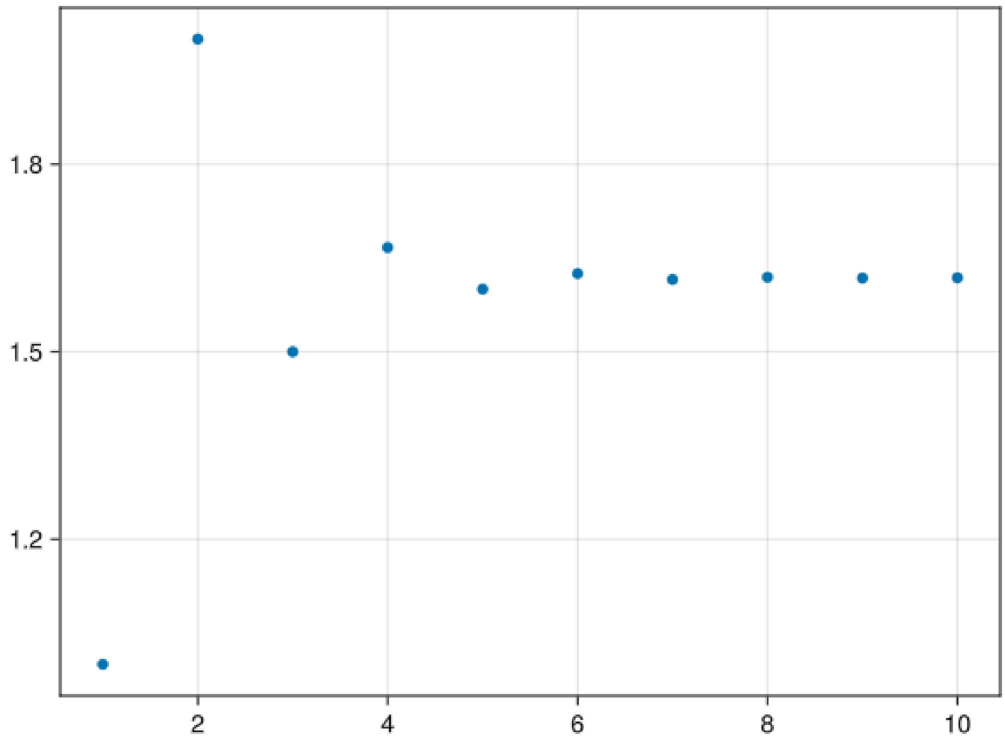
2.16 Plots

```
using Plots
a(n) =  n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
scatter([a(n) for n = 1:10], legend=false)
```



2.17 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
Makie.scatter([a(n) for n = 1:10])
```



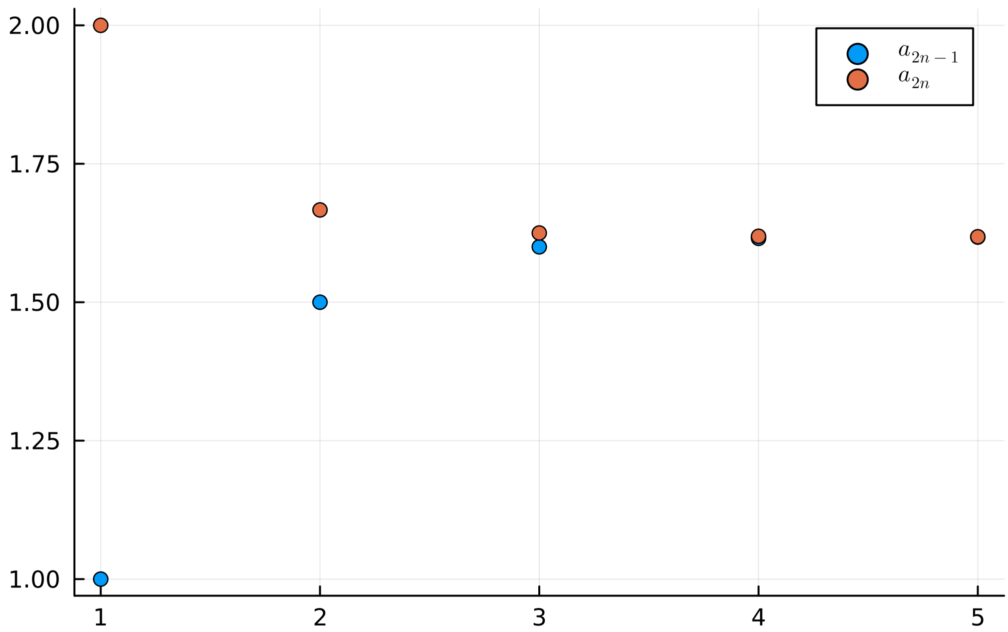
La sucesión no es monótona.

b. Dibujar la gráfica de los 5 primeros términos de las subsucesiones con los términos pares e impares. ¿Son monótonas?

Solución

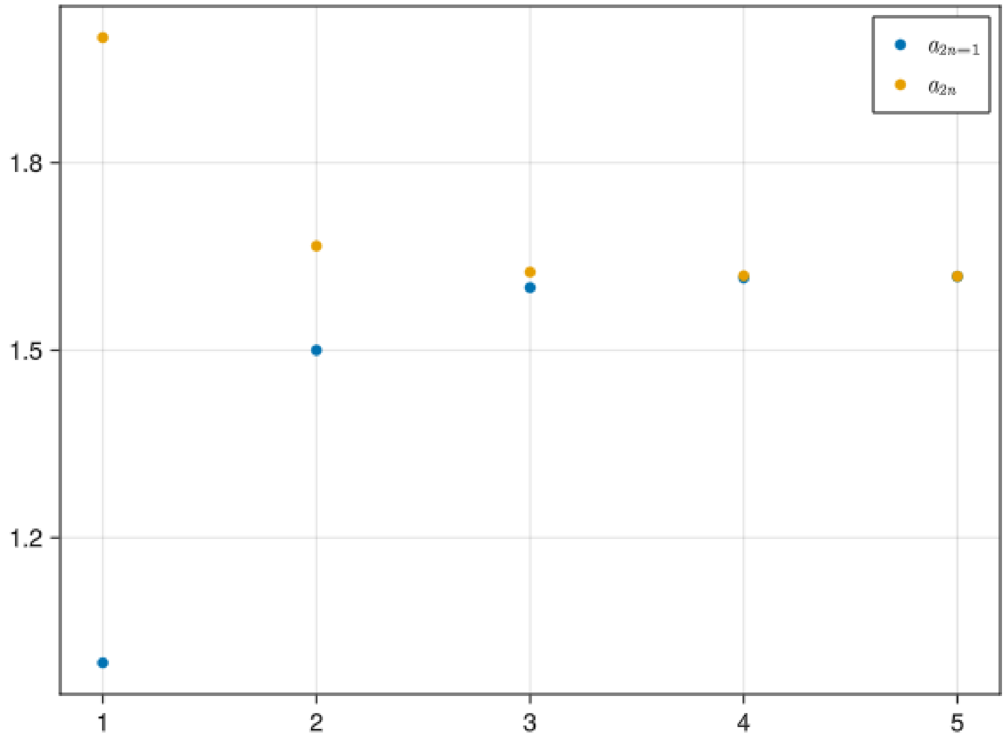
2.18 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
a(n) =  n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
Plots.scatter([a(2i-1) for i=1:5], label = L"$a_{2n-1}$")
Plots.scatter!([a(2i) for i=1:5], label = L"$a_{2n}$")
```



2.19 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
fig, ax = Makie.scatter([a(2i-1) for i = 1:5], label = L"$a_{2n-1}$" )
Makie.scatter!(ax,[a(2i) for i=1:5], label = L"$a_{2n}$")
axislegend()
fig
```



La sucesión de los términos impares es creciente y la de los pares es decreciente.

2.20 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.6. Calcular el décimo término de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 2.7. Calcular los 10 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ y averiguar hacia dónde converge.

- ☐ 0
- ☐ 1.5
- ☐ 1
- ☐ 0.5

☐ No converge

Ejercicio 2.8. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la sucesión $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

insert image here

Ejercicio 2.9. A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$, ¿crees que la sucesión converge?

☐ Yes

☐ No

Ejercicio 2.10. A la vista de la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$, ¿crees que la sucesión converge?

☐ Yes

☐ No

Ejercicio 2.11. A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión dada por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ¿crees que la sucesión converge?

☐ Yes

☐ No

Ejercicio 2.12. ¿Cuál es el límite de la sucesión $\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

3 Funciones elementales

3.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
using Makie # Para obtener gráficos interactivos.
using SymPy # Para el cálculo simbólico.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
using Latexify  # Para convertir expresiones a código LaTeX.
```

Ejercicio 3.1. La siguiente tabla contiene el número de bacterias en un cultivo cada hora que pasa.

Horas	Bacterias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

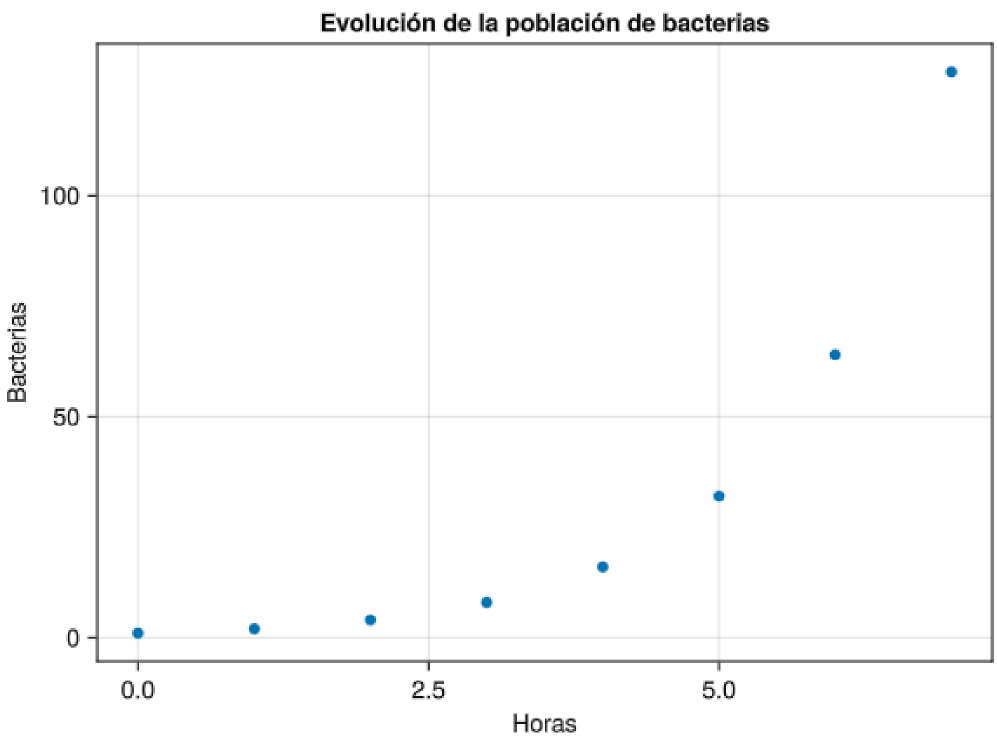
Dibujar una gráfica con la evolución del la población de bacterias.

> **Ayuda**
>
> Definir los valores de las horas en un vector `x` y el número de bacterias en otro `y` y luego utilizar la función `scater(x,y)` del paquete `Makie`, o `scatter(x,y)` del paquete `Plots` para dibujar una gráfica de puntos.

Solución

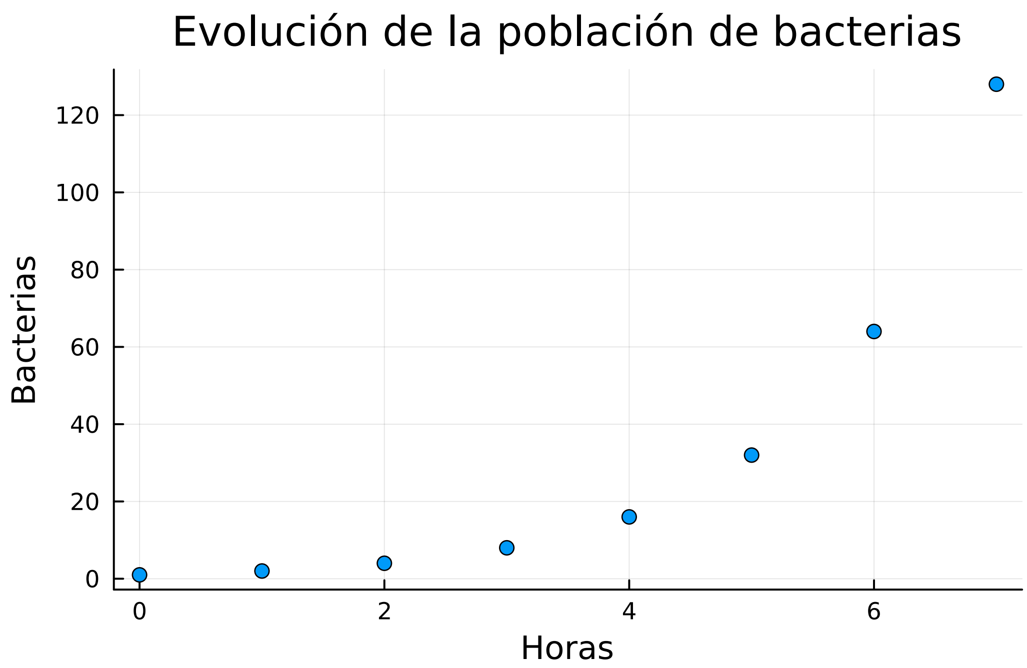
3.2 Makie

```
using GLMakie
horas = 0:7
bacterias = [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], xlabel="Horas", ylabel="Bacterias", title="Evolución de la poblaci
Makie.scatter!(ax, horas, bacterias)
fig
```



3.3 Plots

```
using Plots
horas = 0:7
bacterias = [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]
Plots.scatter(horas, bacterias, xlab="Horas", ylab="Bacterias", title="Evolución de la
```



¿Los pares dados en la tabla forman una función?

Solución

Si, porque para cada hora hay a lo sumo un número de bacterias con el que se relaciona.

¿Qué fórmula crees que explica la evolución del número de bacterias en función de las horas que pasan? Dibuja en la gráfica anterior la función con esa fórmula.

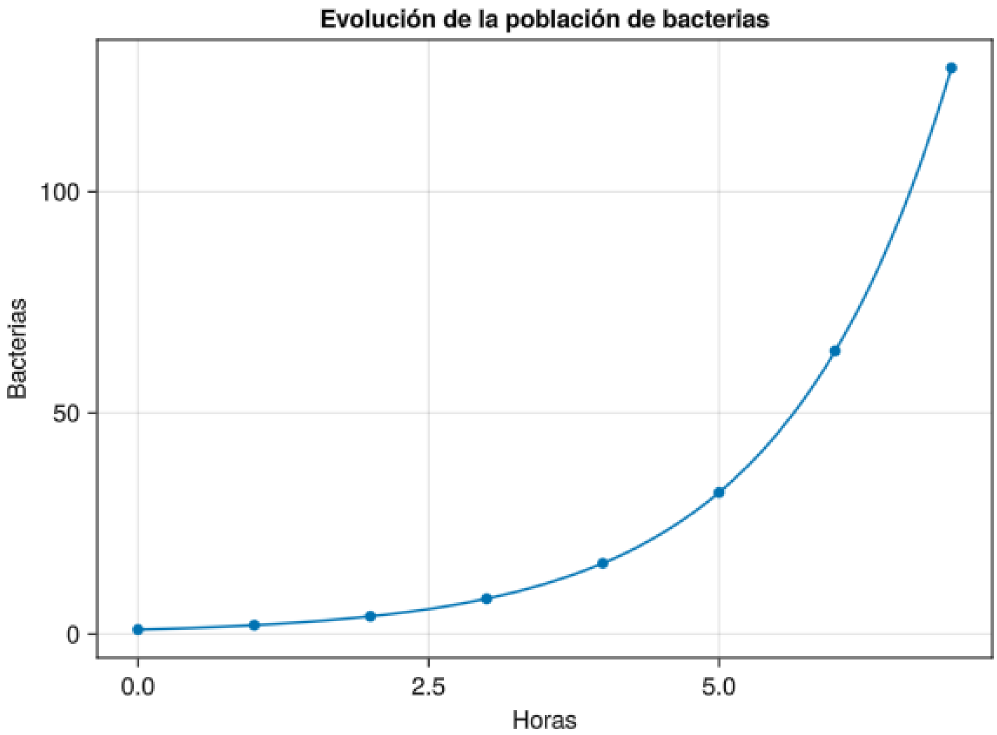
Ayuda

Para añadir una nueva gráfica a una anterior se añade un signo de exclamación `!` a la función de graficación. Para una gráfica de líneas, utilizar la función `lines!` del paquete `Makie`, o `plot!` del paquete `Plots`, pasándole el nombre de la función si se ha definido previamente o la definición anónima de la función

Solución

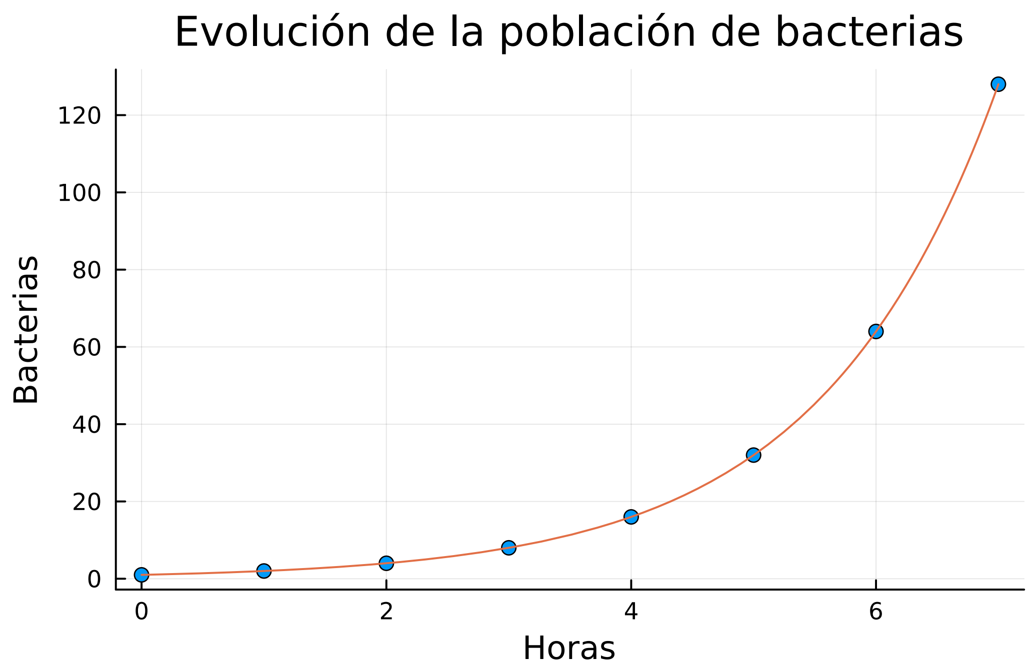
3.4 Makie

```
Makie.lines!(ax, 0..7, x -> 2^x)
fig
```



3.5 Plots

```
using Plots
Plots.plot!(x -> 2^x)
```



Ejercicio 3.2. En el lanzamiento vertical de un objeto, la posición que ocupa el objeto en cada instante t, viene dado por la función

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

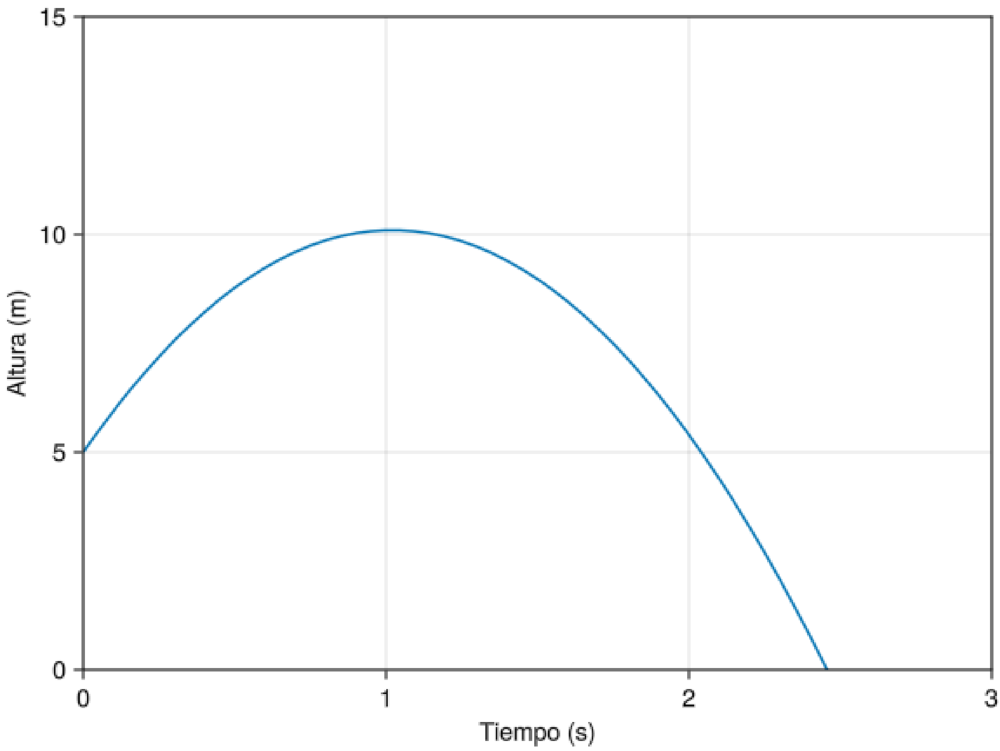
donde y_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial con que se lanza, y g es la aceleración de la gravedad. Una pelota se lanza verticalmente desde la ventada de un edificio a 5 m de altura, con una velocidad inicial de 10 m/s. Dibujar la gráfica de la posición de la pelota en función del tiempo, tomando una aceleración de la gravedad $g = -9.8$ m/s².

> **Ayuda**
>
> Declarar t como una variable simbólica usando el paquete `SymPy`, definir después las constantes y_0, v_0 y g, y luego definir la función $y(t)$ mediante la fórmula dada. Para dibujar la gráfica de la función, usar la función lines! del paquete `Makie` o la función `plot` del paquete `Plots`, pasándole el nombre de la función. Como no tienen sentido los instantes negativos, ni las posiciones negativas, restringir la ventana de graficación a valores de t y de y positivos usando los parámetros `xlim` e `ylim`.

Solución

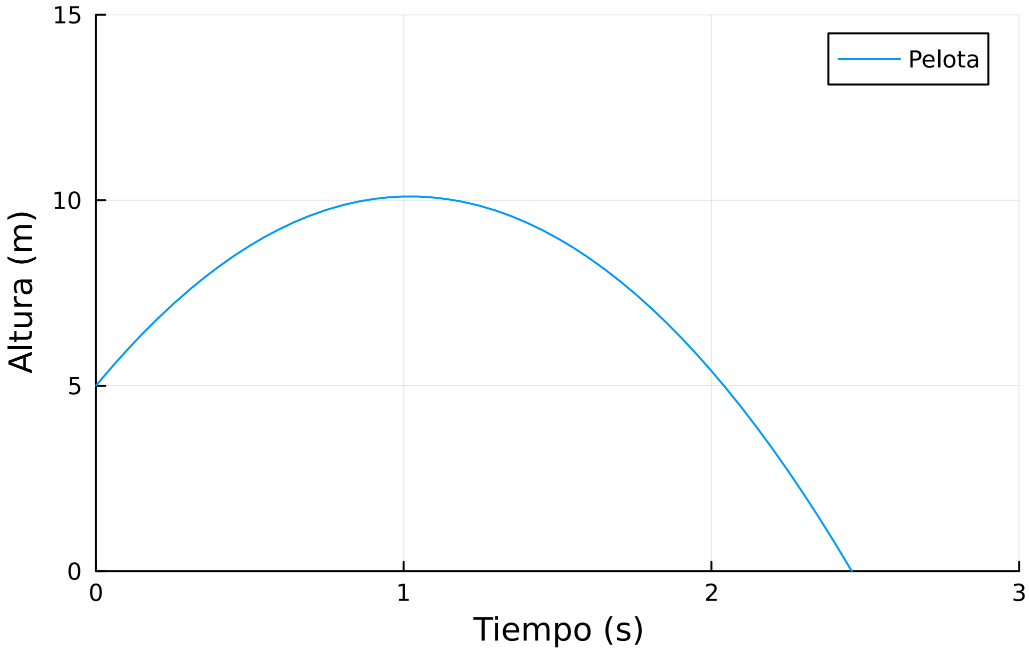
3.6 Makie

```
using GLMakie, SymPy
@syms t  #Declaramos t como una variable simbólica
y  = 5
v  = 10
const gravedad = -9.8  #Declaramos la gravedad como una constante
y0(t) = y +v *t+ 1/2*gravedad*t^2
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], limits=(0, 3, 0, 15), xlabel="Tiempo (s)", ylabel="Altura (m)")
Makie.lines!(ax, 0..3, y0, label="Pelota")
fig
```



3.7 Plots

```
using Plots, SymPy
@syms t  #Declaramos t como una variable simbólica
y  = 5
v  = 10
const gravedad = -9.8  #Declaramos la gravedad como una constante
y0(t) = y +v *t+ 1/2*gravedad*t^2
Plots.plot(y0, xlims=(0,3), ylims=(0,15), label="Pelota", xlab="Tiempo (s)", ylab="Altu
```



Al mismo tiempo que se lanza la pelota, un ascensor exterior baja por la fachada del mismo edificio desde una altura de 8 m con una velocidad constante de 2 m/s. Dibujar la gráfica de la posición del ascensor junto a la gráfica de la pelota.

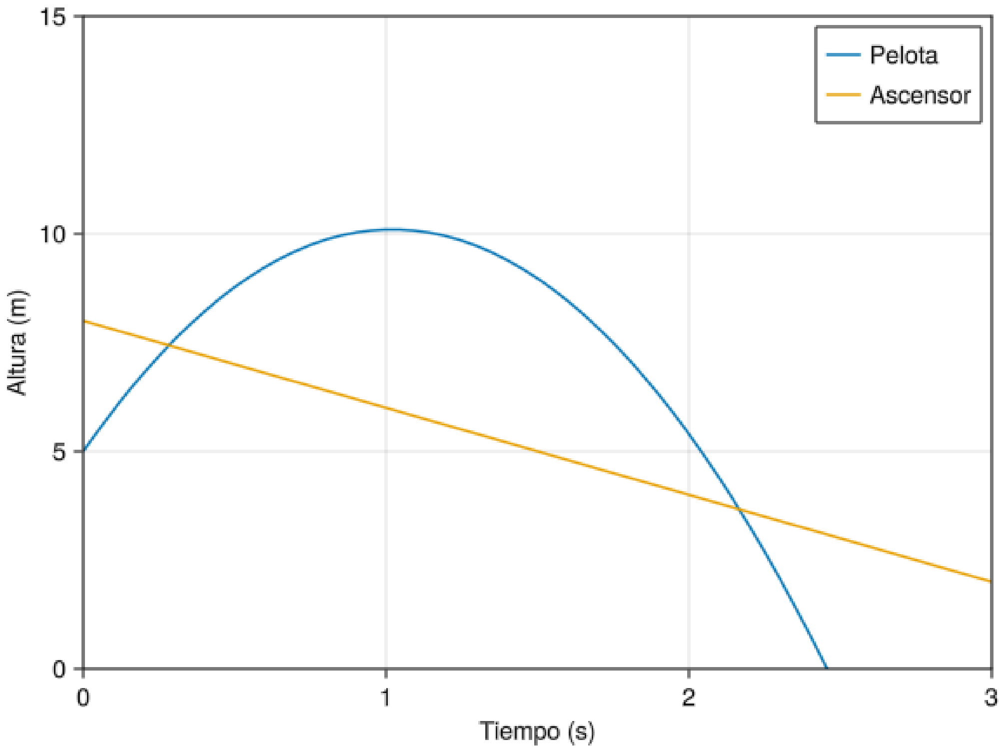
Ayuda

La función que define la posición del ascensor que baja desde una altura y_1 con una velocidad constante v_1 en cada instante t es $y(t) = y_1 - v_1 t$.

Solución

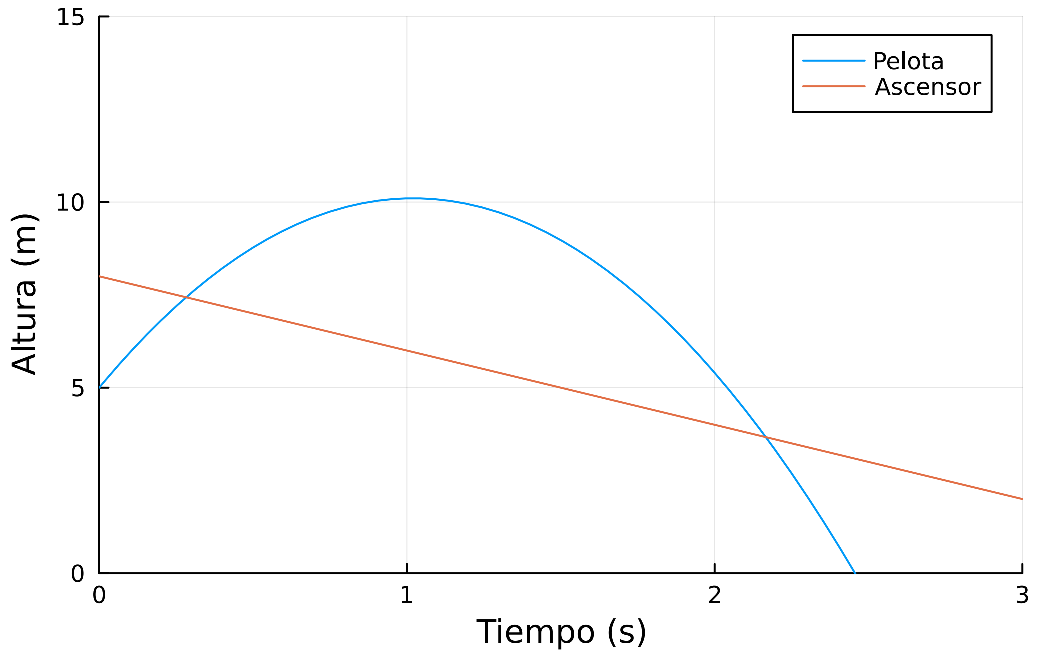
3.8 Makie

```
y  = 8
v  = 2
y1(t) = y -v *t
Makie.lines!(ax, 0..3, y1, label="Ascensor")
axislegend()
fig
```



3.9 Plots

```
y  = 8
v  = 2
y1(t) = y -v *t
Plots.plot!(y1, label="Ascensor")
```

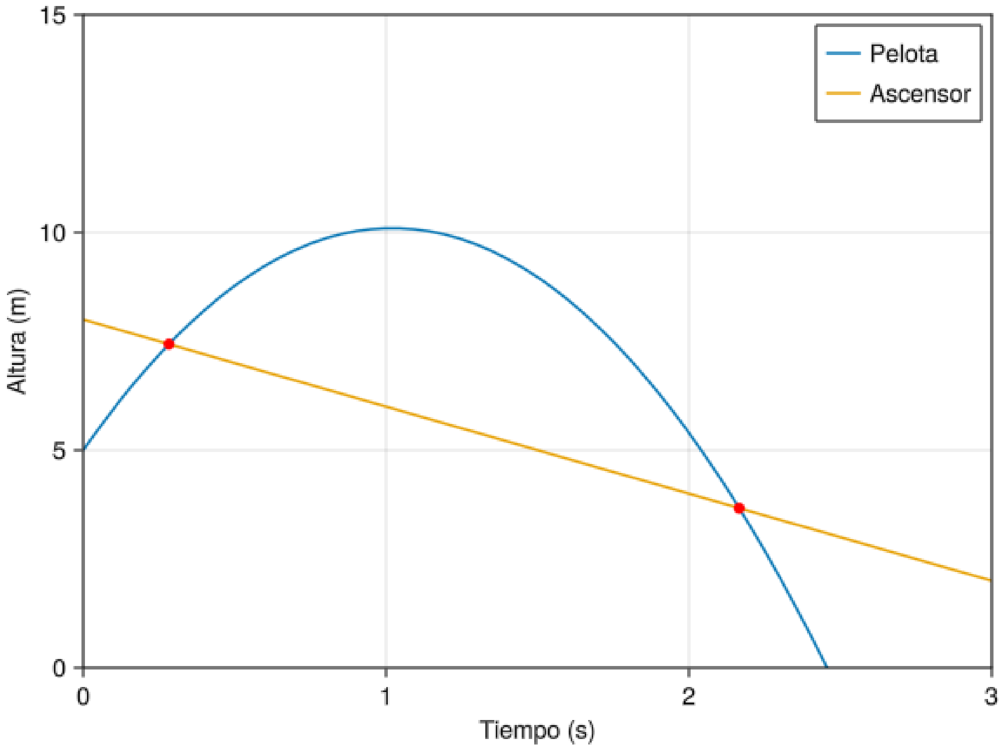


¿En qué instantes el ascensor estará a la misma altura de la pelota? Dibujar los puntos correspondientes a esos instantes en la gráfica anterior.

Solución

3.10 Makie

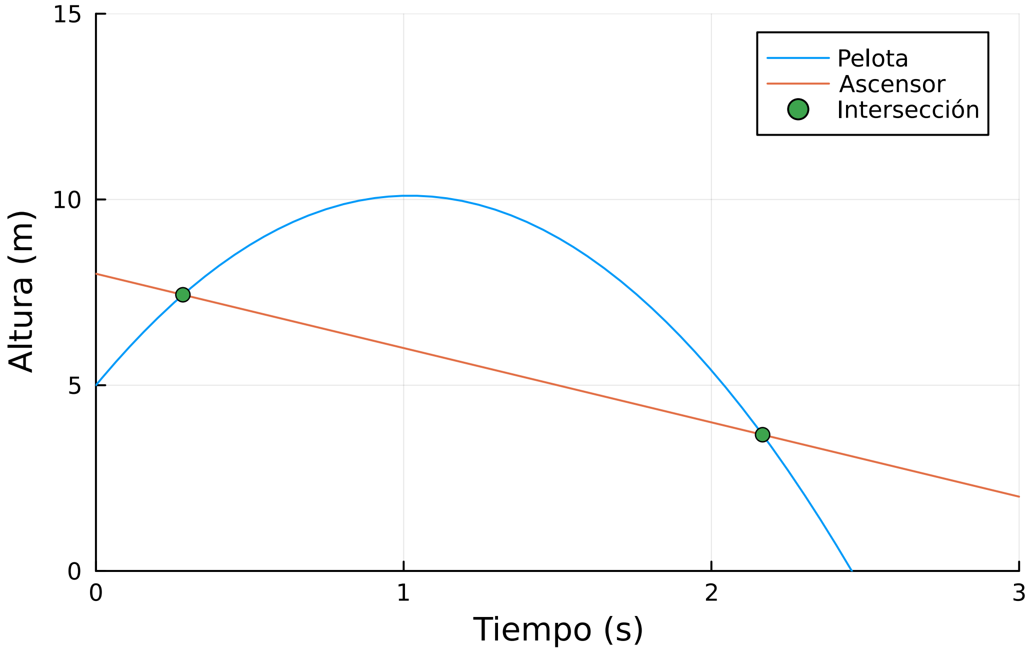
```
sol = float(solve(y0(t)-y1(t)))
Makie.scatter!(ax, sol, y1.(sol), color = :red, label="Intersección")
fig
```



3.11 Plots

```
sol = solve(y0(t)-y1(t))
print("Instantes: ", sol)
Plots.scatter!(sol, y1.(sol), label="Intersección")
```

```
Instantes: Sym{PyCall.PyObject}[0.282613815574341, 2.16636577626239]
```



Ejercicio 3.3. El volumen de un globo esférico depende del radio según la función $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calcular la función que expresa el radio en función del volumen y dibujar su gráfica.

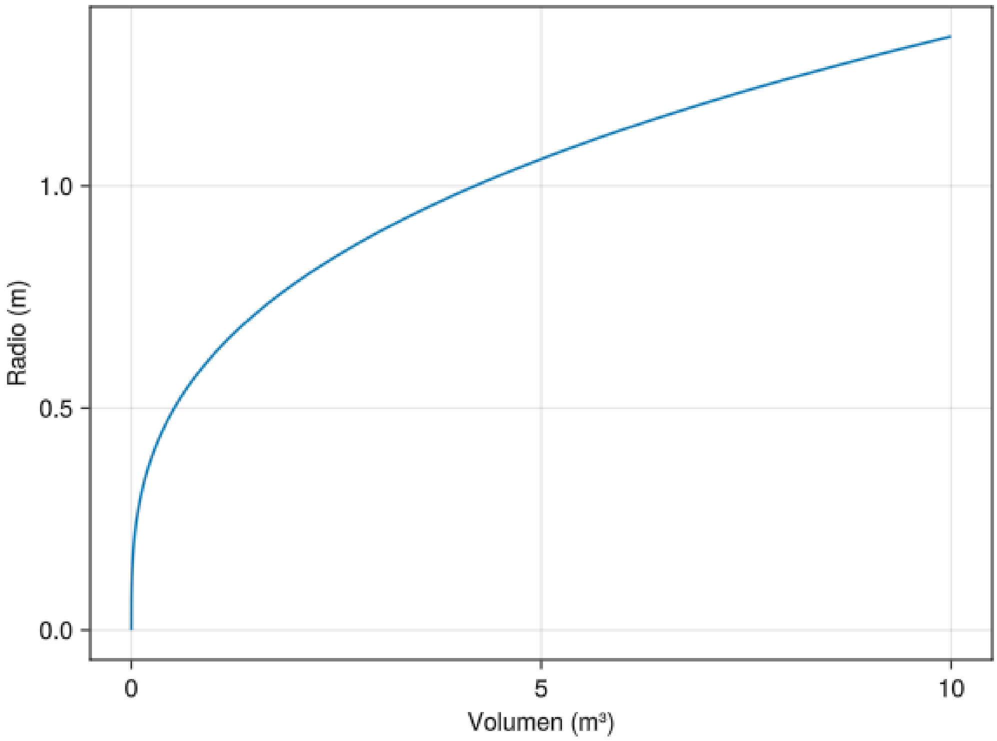
Ayuda

Declarar las variables simbólicas `r` y `v` usando el paquete `SymPy` y definir la función `vol(r)` que expresa el volumen del globo en función del radio.
Después utilizar la función `solve` del paquete `SymPy` para despejar `r` de la ecuación `v-vol(r)=0`.

Solución

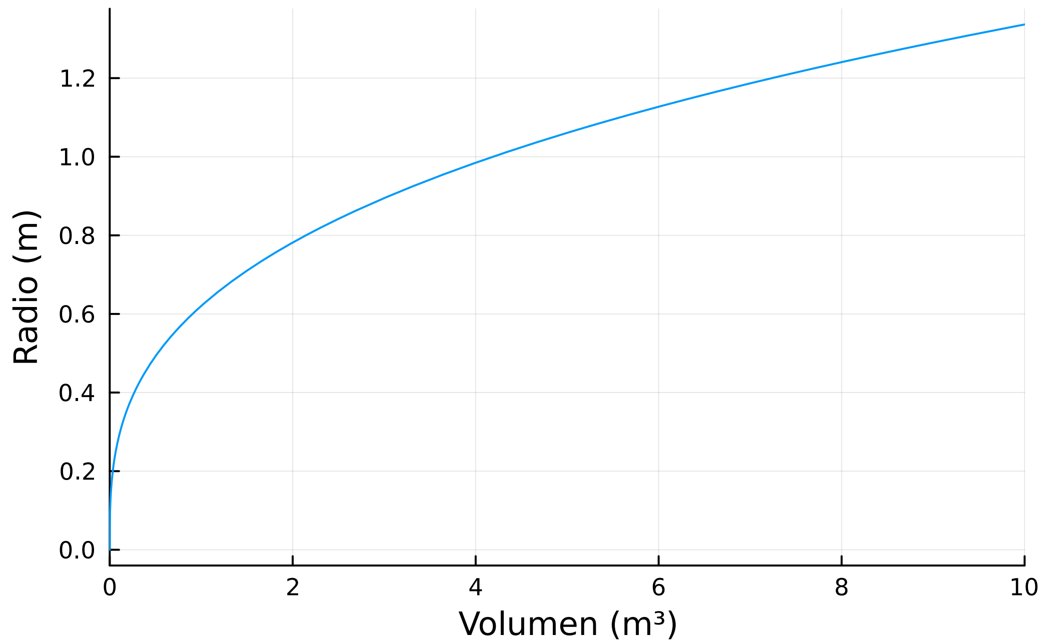
3.12 Makie

```julia
using GLMakie, SymPy
@syms r v
vol(r) = 4/3*pi*r^3
rad = lambdify(solve(v-vol(r),r)[1])
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], xlabel="Volumen (m³)", ylabel="Radio (m)")
Makie.lines!(ax, 0..10, rad)
fig
```



3.13 Plots

```julia
using Plots, SymPy
@syms r v
vol(r) = 4/3*pi*r^3
rad2 = solve(v-vol(r),r)[1]
Plots.plot(rad2, xlim=(0,10), xlab="Volumen (m³)", ylab="Radio (m)", legend=false)
```



Si empezamos a introducir helio en el globo de manera que su volumen a los t minutos viene dado por la función $v(t) = t^2 + 2t$, dibujar la gráfica de la función que da el radio en cada instante.

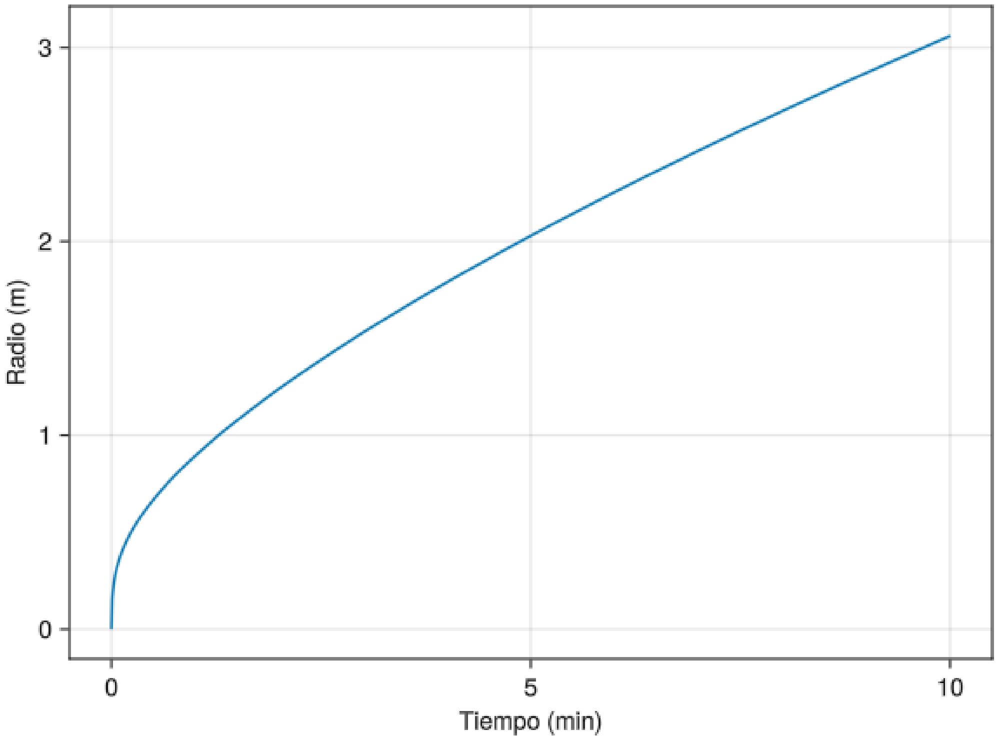
Ayuda

Declarar las variables simbólicas `t` usando el paquete `SymPy` y definir la función `vol(t)` que expresa el volumen del globo en función del tiempo.
Después utilizar a el operador de composición $\circ$ para componer la función del volumen con la función del radio.

Solución

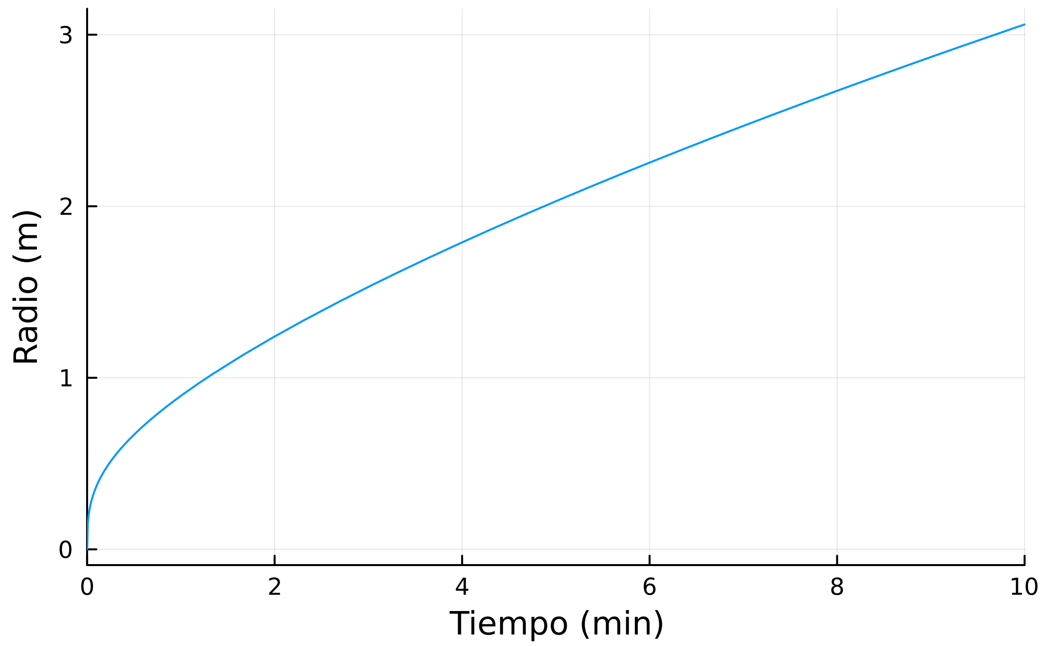
3.14 Makie

```
using GLMakie
vol(t)=t^2+2t
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], xlabel = "Tiempo (min)", ylabel = "Radio (m)")
Makie.lines!(ax, 0..10, rad∘vol)
fig
```



3.15 Plots

```
using Plots, SymPy
@syms t
vol(t)=t^2+2t
Plots.plot(rad2 vol, xlim = (0,10), xlab = "Tiempo (min)", ylab = "Radio (m)", legend =
```



Si el globo explota cuando el radio alcanza los 3 m, ¿cuándo explotará el globo?

Solución

```
sol = solve((rad∘vol)(t)-3)
```

```
2-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
 -11.6816354332674
  9.68163543326738
```

El globo explotará a los 9.68163543326738 minutos.

Ejercicio 3.4. Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

en el intervalo $[-3, 4]$ y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

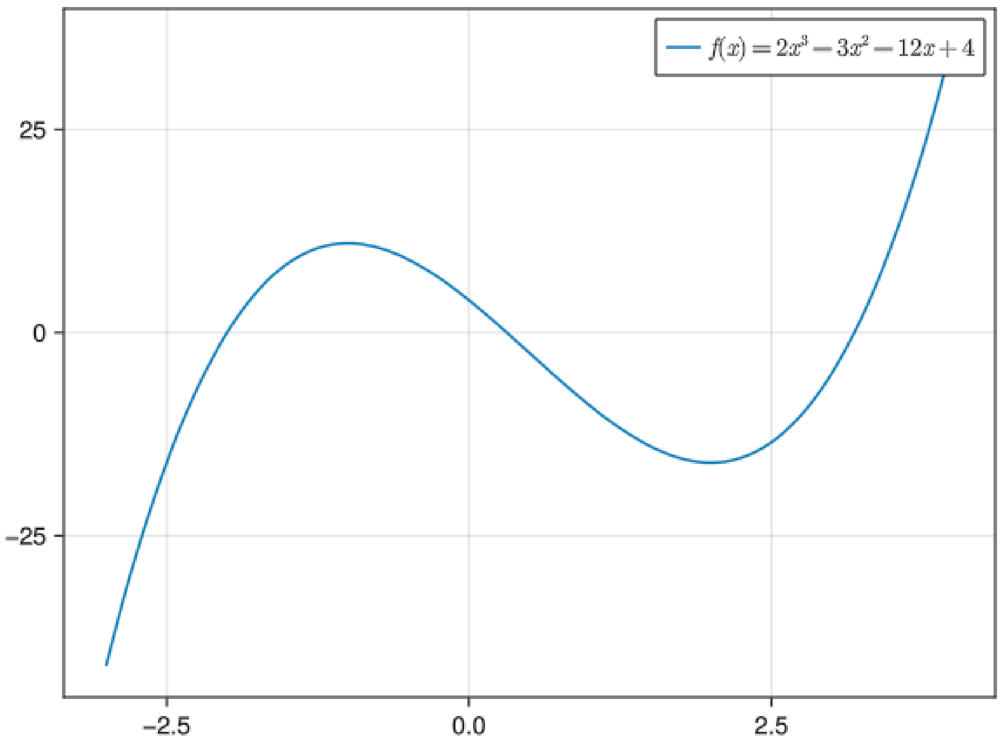
Ayuda

Definir la función y usar la función usar la función `lines!` del paquete `Makie` o `plot` del paquete `Plots`.

Solución

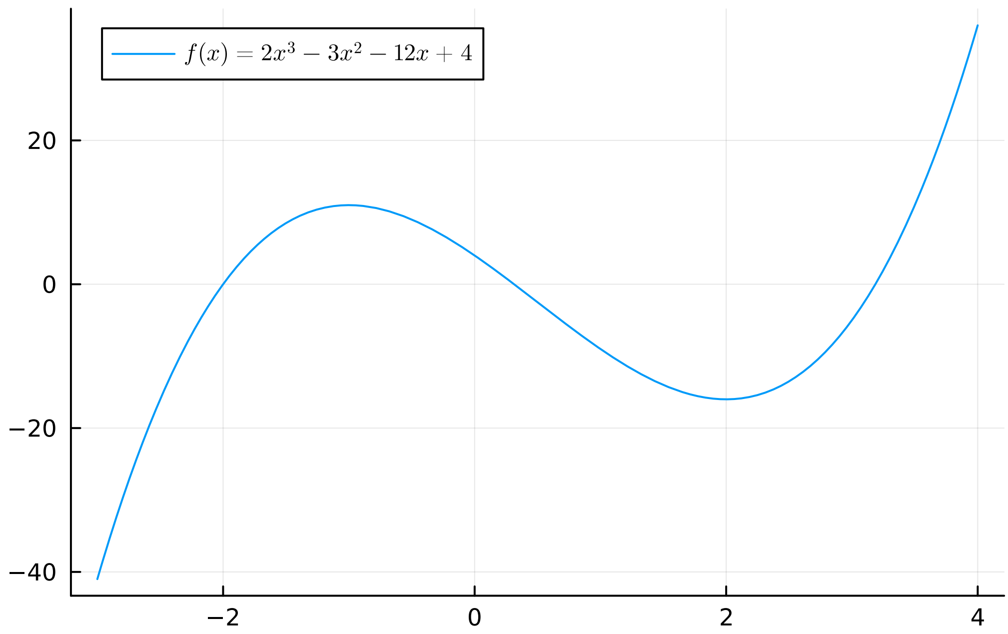
3.16 Makie

```
using GLMakie
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -3..4, f, label = L"$f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4$")
axislegend()
fig
```



3.17 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
Plots.plot(f, -3, 4, label=L"$f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4$")
```



a. Dominio

Solución

$FrDom(f) = \mathbb{R}$

b. Imagen

Solución

$FrIm(f) = \mathbb{R}$

c. Raíces

Solución

```
using SymPy
@syms x
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
raices = solve(f(x))  # Solución exacta
print(raices)
N(raices)  # Solución aproximada con decimales
```

```
Sym{PyCall.PyObject}[-2, 7/4 - sqrt(33)/4, sqrt(33)/4 + 7/4]

3-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
                -2
 7/4 - sqrt(33)/4
 sqrt(33)/4 + 7/4
```

Hay tres raíces en $x = -2$, $x = 0.31$ y $x = 3.19$ aproximadamente.

d. Signo

Solución

Intervalos con $f(x)$ negativa: $(-\infty, -2) \cup (0.31, 3.19)$.
Intervalos con $f(x)$ positiva: $(-2, 0.31) \cup (3.19, \infty)$.

e. Crecimiento

Solución

Intervalos con $f(x)$ creciente: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.
Intervalos con $f(x)$ decreciente: $(-1, 2)$.

f. Extremos

Solución

Máximo relativo en $x = -1$ y el valor máximo es $f(-1) = 11$.
Mínimo relativo en $x = 2$ y el valor del mínimo es $f(2) = -16$.

g. Concavidad

Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(0.5, \infty)$.
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty, 0.5)$.

h. Puntos de inflexión

Solución

Punto de inflexión en $x = 0.5$.

Ejercicio 3.5. Dibujar la gráfica de la función

$$g(t) = \frac{t^4 + 19t^2 - 5}{t^4 + 9t^2 - 10}$$

en el intervalo $[-8, 8]$ y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

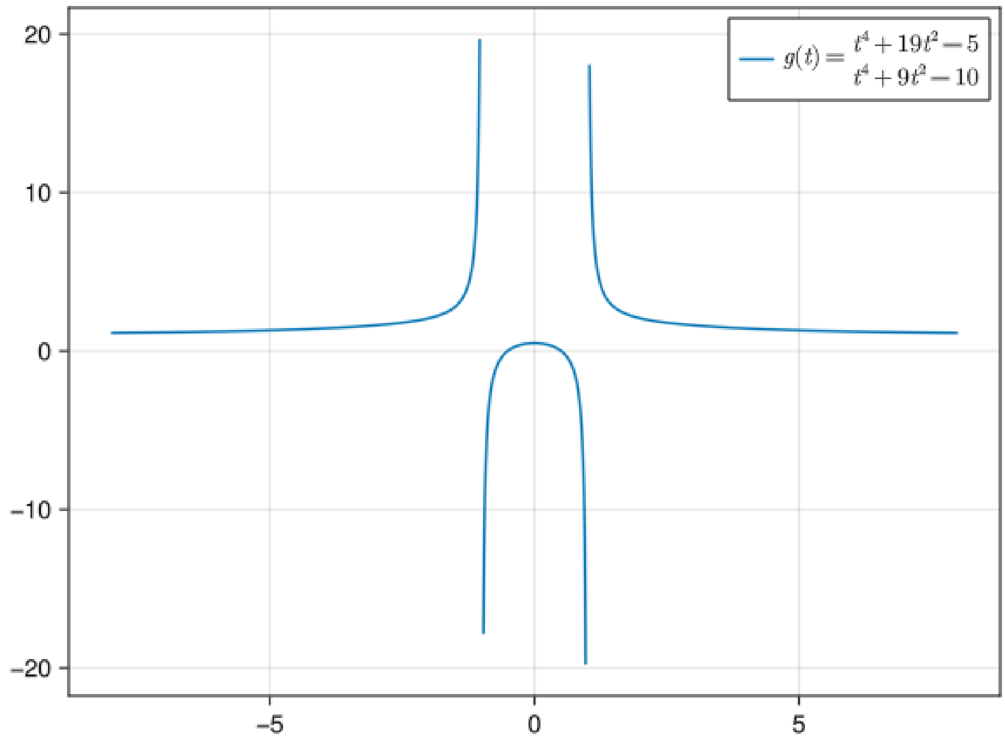
Ayuda

Usar la función `lines` del paquete `Makie`, o la función `plot` del paquete `Plots` con el parámetro `aspect_ratio=1.0` para que los ejes tengan la misma escala.
Para respetar las discontinuidades autilizar la función `rangeclamp()` del paquete `MTH229`.

Solución

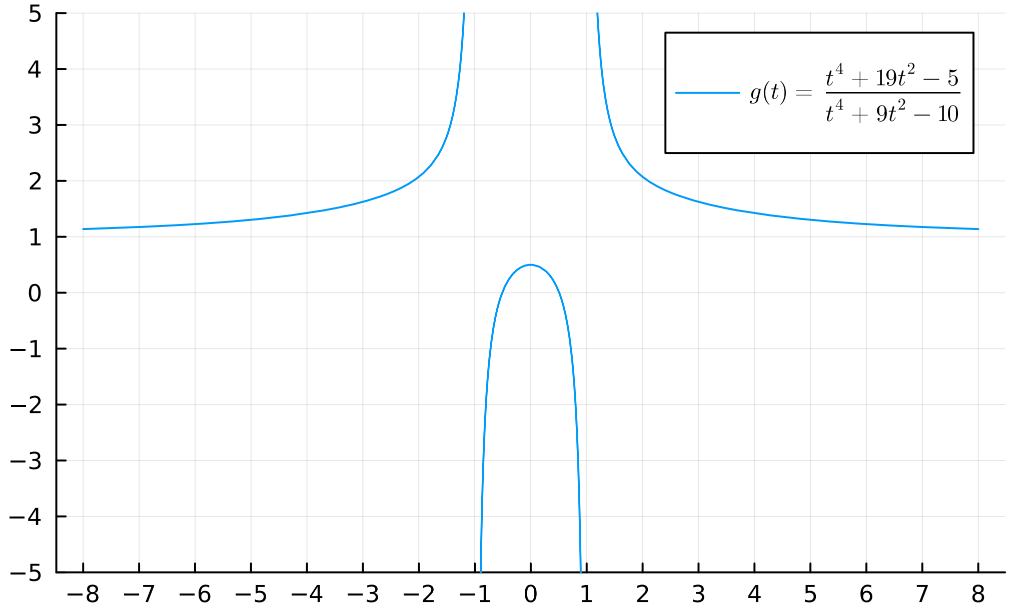
3.18 Makie

```
using GLMakie
g(t) = (t^4+19t^2-5) / (t^4+9t^2-10)
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -8..8, rangeclamp(g), label = L"$g(t) = \frac{t^4+19t^2-5}{t^4+9t^2-10
axislegend()
fig
```



3.19 Plots

```
using Plots
g(t) = (t^4+19t^2-5) / (t^4+9t^2-10)
Plots.plot(rangeclamp(g), -8, 8, aspect_ratio=1.0, ylims=(-5,5) , xticks =Vector(-10:10
```



a. Dominio. ¿Qué pasa si aplicamos la función a algún valor fuera de su dominio?

💡 Solución

$FrDom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

```
g(-1), g(1)
```

```
(Inf, Inf)
```

Como se observa, al aplicar la función a -1 y 1 se obtiene ∞.

b. Imagen

💡 Solución

$FrIm(f) = \mathbb{R} \setminus (0.5, 1]$

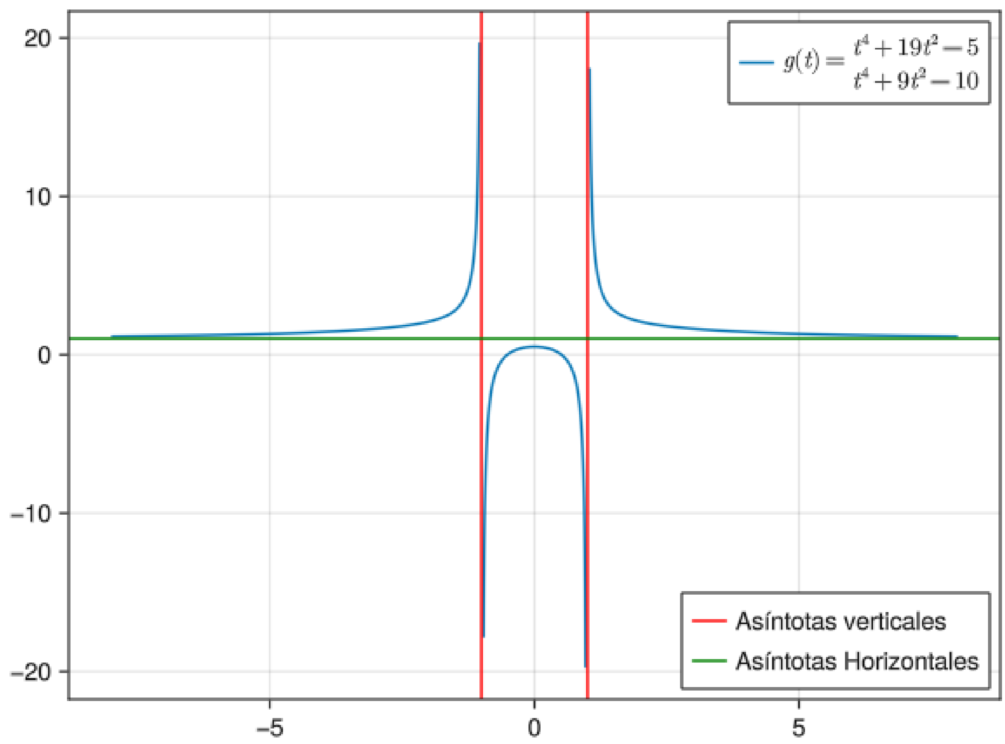
c. Asíntotas. Dibujarlas.

> **Ayuda**
>
> Buscar las asíntotas verticales en los puntos fuera del dominio de la función.
> Para dibujar asíntotas verticales usar la función `vlines!` del paquete `Makie`, o `vline` del paquete `Plots`, y para dibujar las asíntotas horizontales usar la función `hlines!` del paquete `Makie`, o `hline` del paquete `Plots`.

> **Solución**

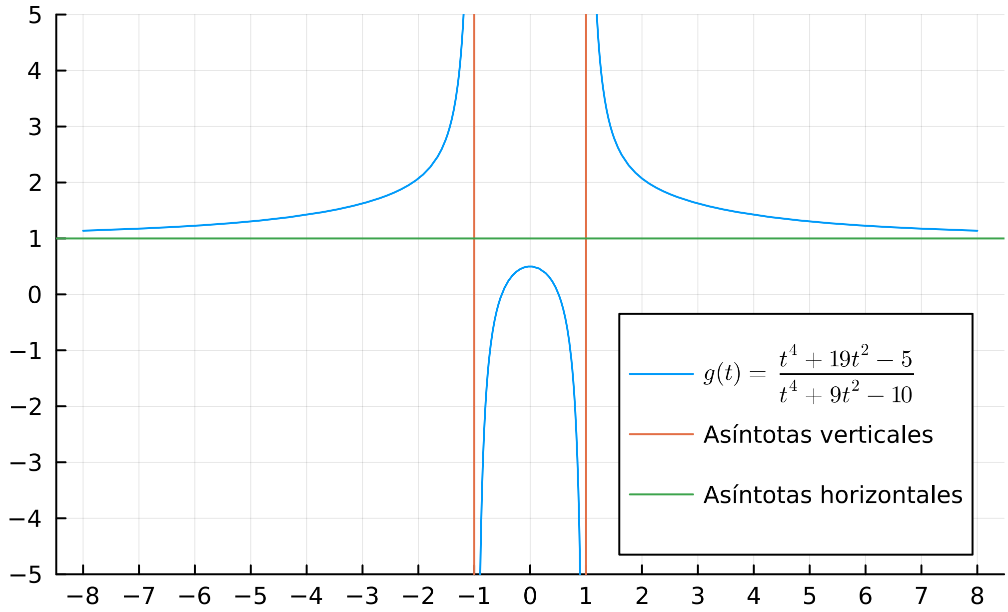
3.20 Makie

```
av = Makie.vlines!(ax, [-1,1], color = :red)
ah = Makie.hlines!([1], color = :green)
axislegend(ax, [av, ah], ["Asíntotas verticales", "Asíntotas Horizontales"], position =
fig
```



3.21 Plots

```julia
Plots.vline!([-1,1], label="Asíntotas verticales")
Plots.hline!([1], label="Asíntotas horizontales", legend=:bottomright)
```



Asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.
Asíntotas horizontales en $y = 1$.
No hay asíntotas oblicuas.

d. Raíces

Solución

Hay dos raíces en $x = -0.5$ y $x = 0.5$ aproximadamente.

e. Signo

Solución

Intervalos con $f(x)$ positiva: $(-\infty, -1) \cup (-0.5, 0.5) \cup (1, \infty)$.
Intervalos con $f(x)$ negativa: $(-1, -0.5) \cup (0.5, 1)$.

e. Crecimiento

Solución

Intervalos con $f(x)$ creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.
Intervalos con $f(x)$ decreciente: $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

f. Extremos

Solución

Máximo relativo en $x = 0$ y el valor máximo es $g(0) = 0.5$.
No hay mínimos relativos.

g. Concavidad

Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-1, 1)$.

h. Puntos de inflexión

Solución

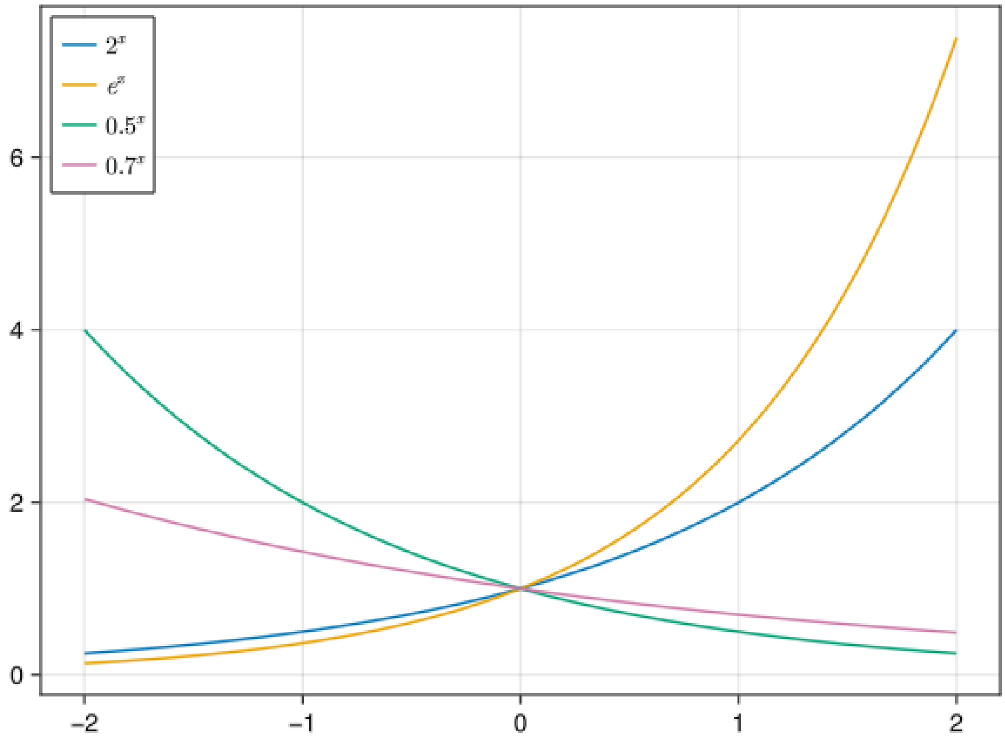
No hay puntos de inflexión.

Ejercicio 3.6. Dibujar la gráficas de las siguientes funciones exponenciales 2^x, e^x, 0.5^x, 0.7^x y responder a las siguientes preguntas comparando las gráficas.

Solución

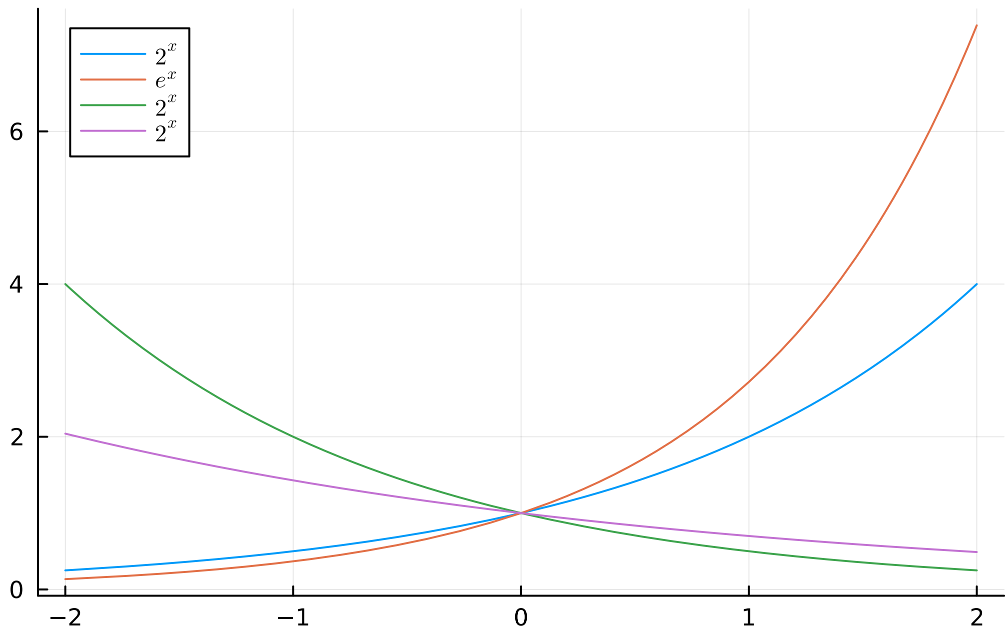
3.22 Makie

```
using GLMakie
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -2..2, x -> 2^x, label=L"$2^x$")
Makie.lines!(ax, -2..2, exp, label=L"$e^x$")
Makie.lines!(ax, -2..2, x -> 0.5^x, label=L"$0.5^x$")
Makie.lines!(ax, -2..2, x -> 0.7^x, label=L"$0.7^x$")
axislegend(position = :lt)
fig
```



3.23 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
Plots.plot(2^x, -2, 2, label=L"$2^x$")
Plots.plot!(exp(x), label=L"$e^x$")
Plots.plot!(0.5^x, label=L"$2^x$")
Plots.plot!(0.7^x, label=L"$2^x$")
```



a. ¿Cuál es el dominio de una función exponencial?

Solución

$\mathbb{R}$.

b. ¿Cuál es la imagen de una función exponencial?

Solución

$\mathbb{R}^+$.

c. ¿Cómo es el crecimiento de una función exponencial?

Solución

a^x es creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$.

d. ¿Tienen extremos una función exponencial?

Solución

No

e. ¿Cómo es la curvatura de una función exponencial?

Solución

Es cóncava hacia arriba.

Ejercicio 3.7. Dibujar la gráficas de las funciones trigonométricas $Frsen(x)$, $Frsen(x+2)$, $Frsen(x)+2$, $Frsen(2x)$ y $2Frsen(x)$, y completar la siguiente tabla estudiando su periodo y amplitud.

Función	Periodo	Amplitud
$Frsen(x)$		
$Frsen(x+2)$		
$Frsen(x)+2$		
$Frsen(2x)$		
$2Frsen(x)$		

¿Qué conclusiones sacas?

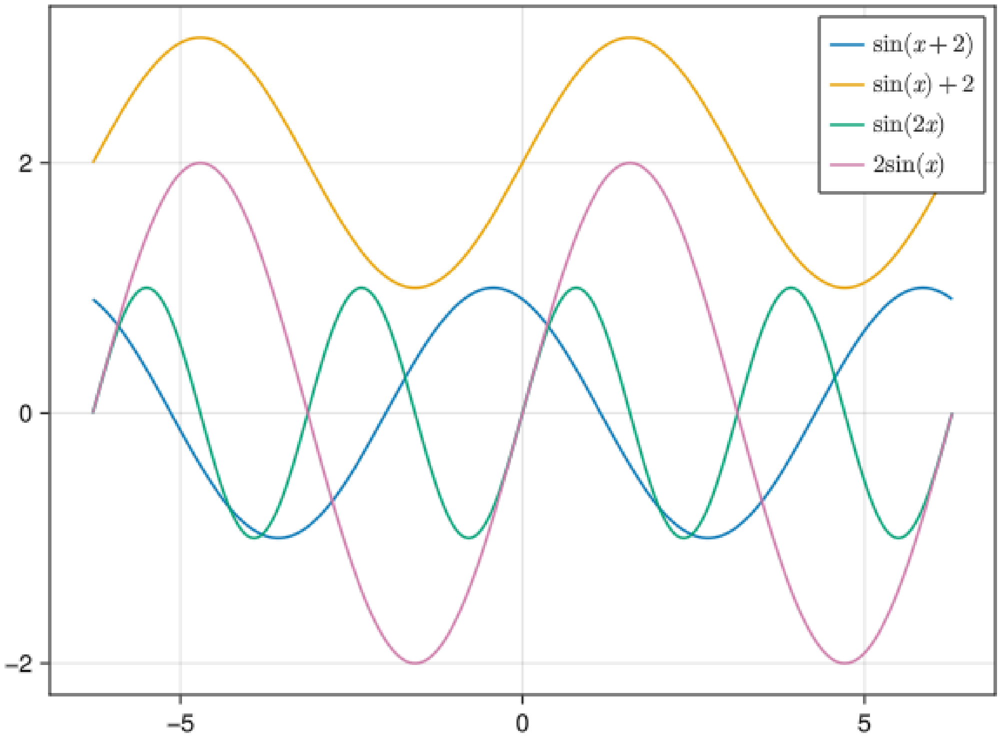
Ayuda

El periodo es el mínimo intervalo en el que la gráfica de la función se repite, y la amplitud es la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función.

Solución

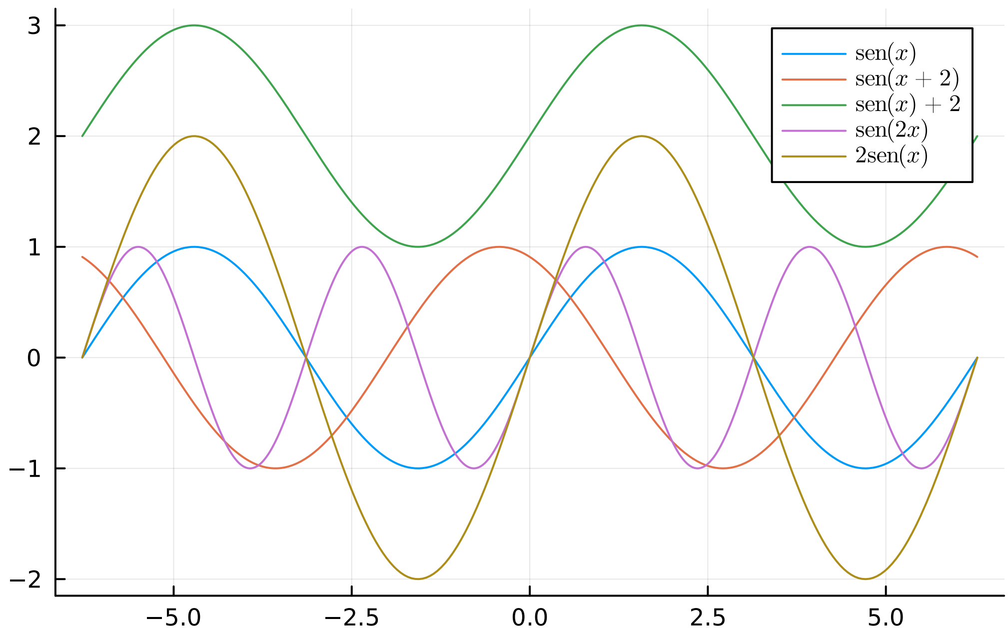
3.24 Makie

```
using GLMakie
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> sin(x+2), label=L"$\sin(x+2)$")
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> sin(x)+2, label=L"$\sin(x)+2$")
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> sin(2x), label=L"$\sin(2x)$")
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> 2sin(x), label=L"$2\sin(x)$")
axislegend()
fig
```



3.25 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
Plots.plot(sin(x), -2*pi, 2*pi, label=L"$\operatorname{sen}(x)$")
Plots.plot!(sin(x+2), label=L"$\operatorname{sen}(x+2)$")
Plots.plot!(sin(x)+2, label=L"$\operatorname{sen}(x)+2$")
Plots.plot!(sin(2x), label=L"$\operatorname{sen}(2x)$")
Plots.plot!(2sin(x), label=L"$2\operatorname{sen}(x)$")
```



Función	Periodo	Amplitud
$Frsen(x)$	2π	1
$Frsen(x+2)$	2π	1
$Frsen(x)+2$	2π	1
$Frsen(2x)$	π	1
$2Frsen(x)$	2π	2

Se observa que al sumar una constante a la función seno o a su argumento, el periodo y la amplitud no cambian. Sin embargo, si se multiplica por una constante el seno, cambia la amplitud, y si se multiplica su argumento, cambia el periodo.

Ejercicio 3.8. Dibujar la gráfica de la función a trozos

$$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2; \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

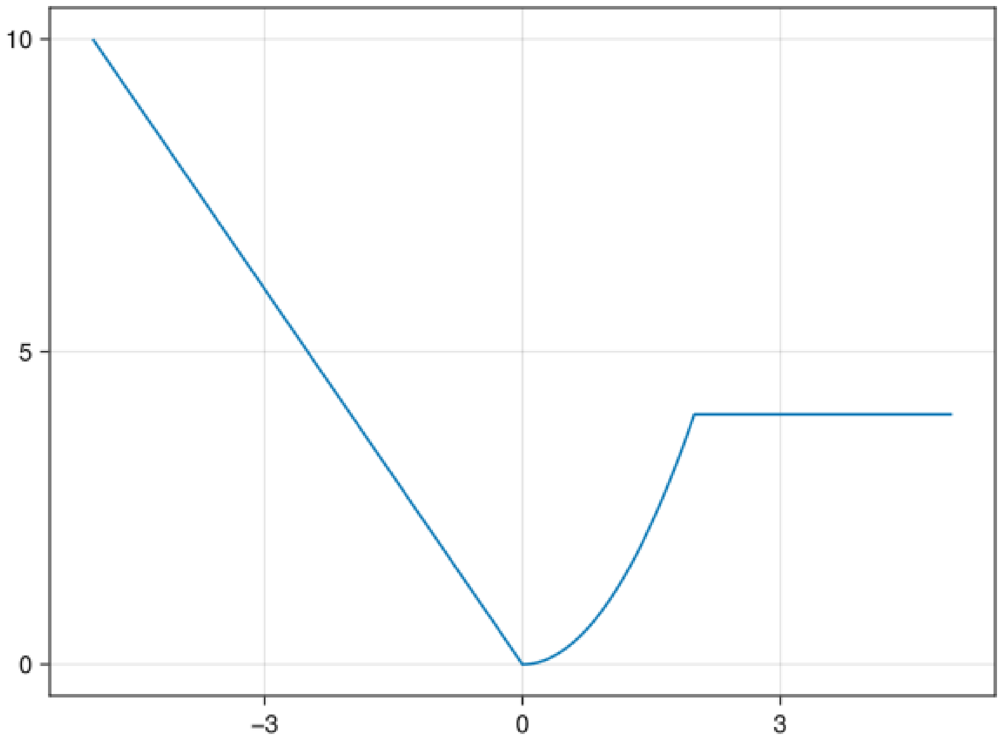
i Ayuda

Usar el operador condicional anidado.

Solución

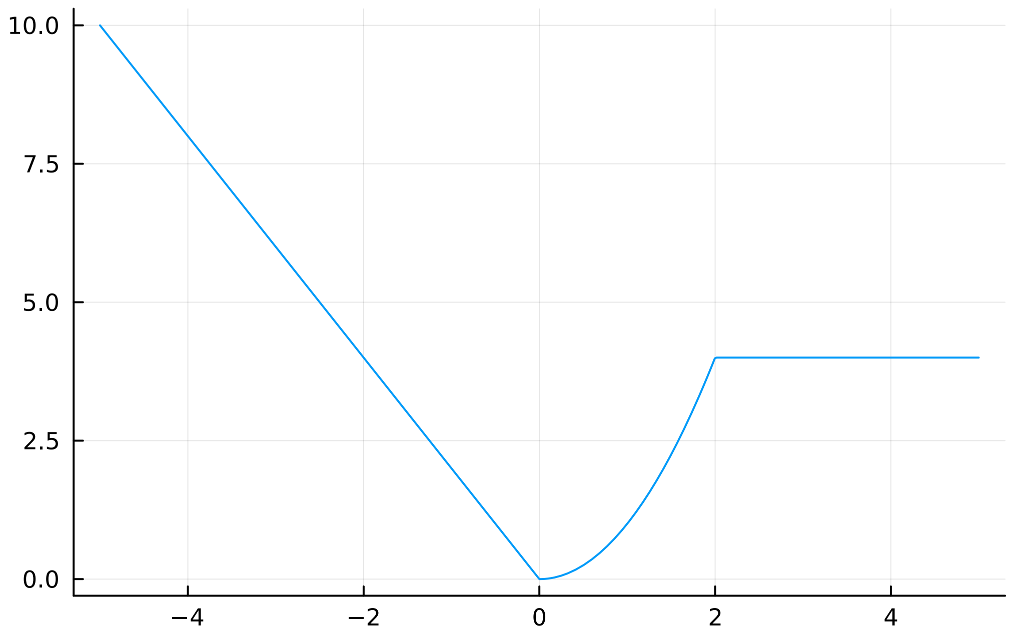
3.26 Makie

```
using GLMakie
h(x) = x<=0 ? -2x : x<=2 ? x^2 : 4
Makie.lines(-5..5, h)
```



3.27 Plots

```
using Plots
h(x) = x<=0 ? -2x : x<=2 ? x^2 : 4
Plots.plot(h, legend = false)
```



Ejercicio 3.9. Una hormiga se mueve sobre el plano real de manera que en cada instante t su posición viene dada por las funciones

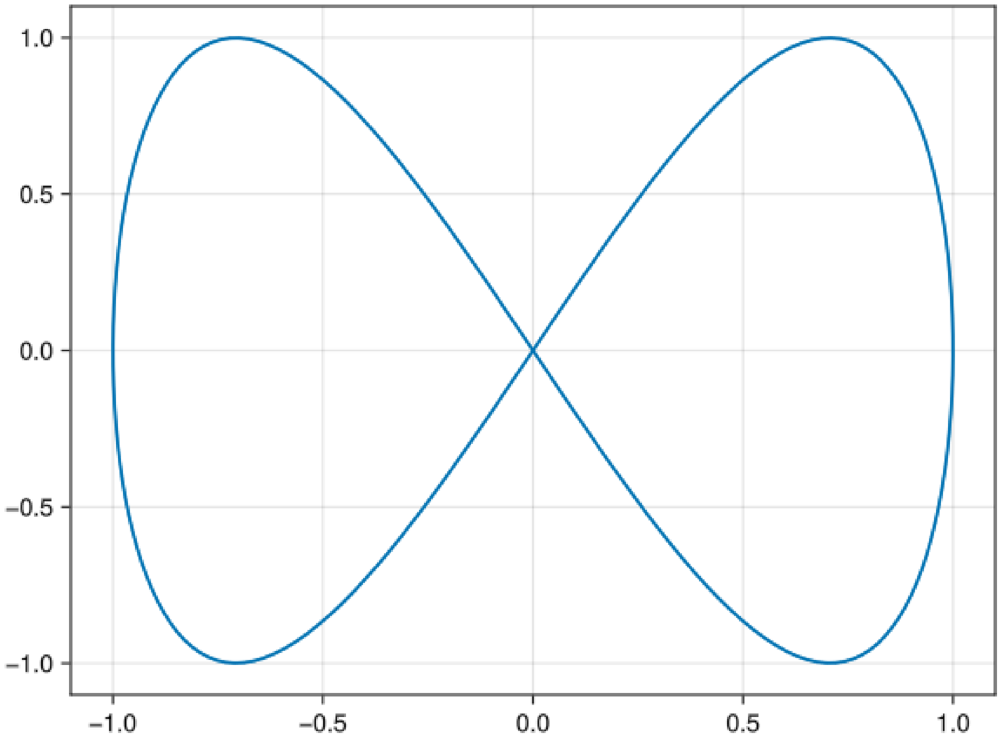
$$\begin{cases} x = Frsen(t) \\ y = Frsen(2t) \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de la trayectoria de la hormiga.

Solución

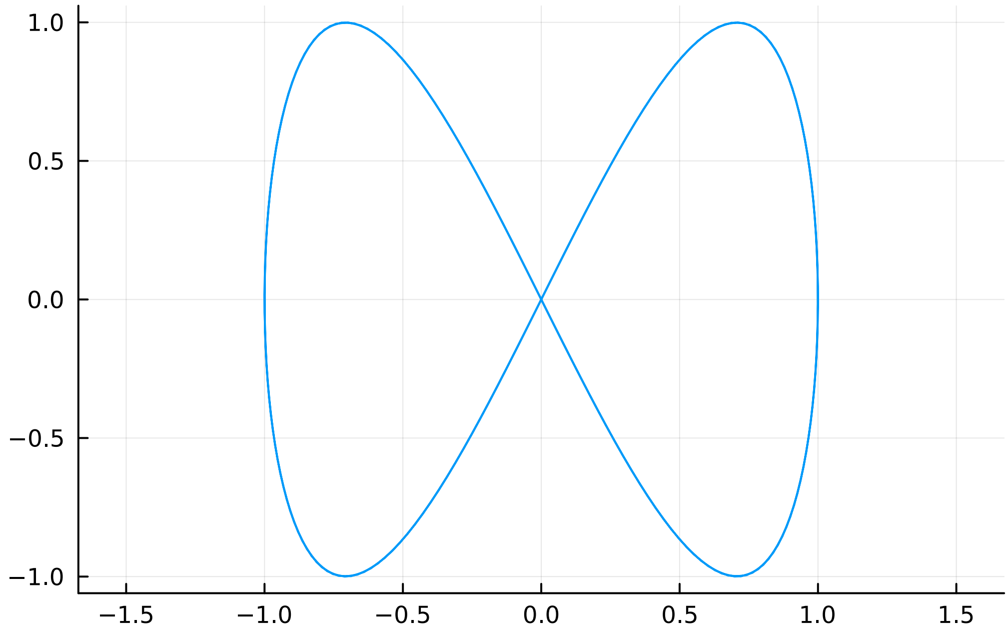
3.28 Makie

```
using GLMakie
u1(t)=sin(t)
v1(t)=sin(2t)
ts = range(0, 4pi, 200)
Makie.lines(u1.(ts), v1.(ts))
```



3.29 Plots

```
using Plots
u1(t)=sin(t)
v1(t)=sin(2t)
Plots.plot(u1, v1, 0, 4pi, aspect_ratio=1.0, legend = false)
```



3.30 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.10. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen dominio $\mathbb{R}$ e imagen $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$?

- ☐ $$x^4 - 2x^3 + 4x$$
- ☐ $$2^x$$
- ☐ $$1/x^2$$
- ☐ $$|x|$$
- ☐ $$\sqrt(x)$$

(*Select one or more*)

Ejercicio 3.11. Dibujar las gráficas de las funciones logarítmicas $\ln(x)$, $\log_2(x)$ y $\log_{0.5}(x)$ y contestar a las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es el dominio de una función logarítmica?

☐

$$\mathbb{R}$$

☐

$$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

☐

$$\mathbb{R}^+$$

☐

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}$$

☐ Las otras opciones son falsas.

b. ¿Cuál es la imagen de una función logarítmica?

☐

$$\mathbb{R}^-$$

☐ Las otras opciones son falsas.

☐

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}$$

☐

$$\mathbb{R}^+$$

☐

$$\mathbb{R}$$

c. ¿Cómo es el crecimiento la función logarítmica $\log_a(x)$?

☐ Creciente si $0 < a < 1$

☐ Decreciente si $0 < a < 1$

☐ Creciente si $a < 1$

☐ Creciente si $a > 1$

(*Select one or more*)

d. ¿Cómo es la concavidad la función logarítmica $\log_a(x)$?

☐ Cóncava hacia arriba si $a > 1$

☐ Cóncava hacia arriba si $0 < a < 1$

☐ Cóncava hacia abajo si $0 < a < 1$

☐ Cóncava hacia abajo si $a < 1$

(*Select one or more*)

Ejercicio 3.12. ¿Cuál es el periodo y la amplitud de la función $2\cos(x/2)$?

☐ y 2

☐ 4 y 1

☐ 2 y 1

☐ 4 y 2

☐ 2 y 2

Ejercicio 3.13. ¿Cuál de las gráficas corresponde a la siguiente función paramétrica?

$$f(t) = \begin{cases} Frsen(2t) - \cos(t) \\ Frsen(t) + \cos(t) \end{cases}$$

insert image here

4 Límites de funciones reales

4.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

Ejercicio 4.1. Sea la función $f(x) = x^2$.

a. Estudiar la tendencia de f cuando x se aproxima a 3 por la derecha, evaluando la función en $x = 3 + \frac{1}{10i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

> **Ayuda**
>
> Definir la función y aplicar la función a los valores de x indicados usando compresiones de arrays.

> **Solución**
>
> ```
> f(x) = x^2
> a = 3
> print([f(a+1/10i) for i = 1:10])
> ```
>
> ```
> [9.610000000000001, 9.302499999999998, 9.201111111111111, 9.150625, 9.1204, 9.10027
> ```
>
> La función tiende a 9.

b. Estudiar la tendencia de f cuando x se aproxima a 3 por la izquierda, evaluando la función en $x = 3 - \frac{1}{10i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

Solución

```
print([f(a-1/10i) for i = 1:10])
```

```
[8.41, 8.7025, 8.801111111111112, 8.850625, 8.8804, 8.900277777777777, 8.914489795
```

La función también tiende a 9.

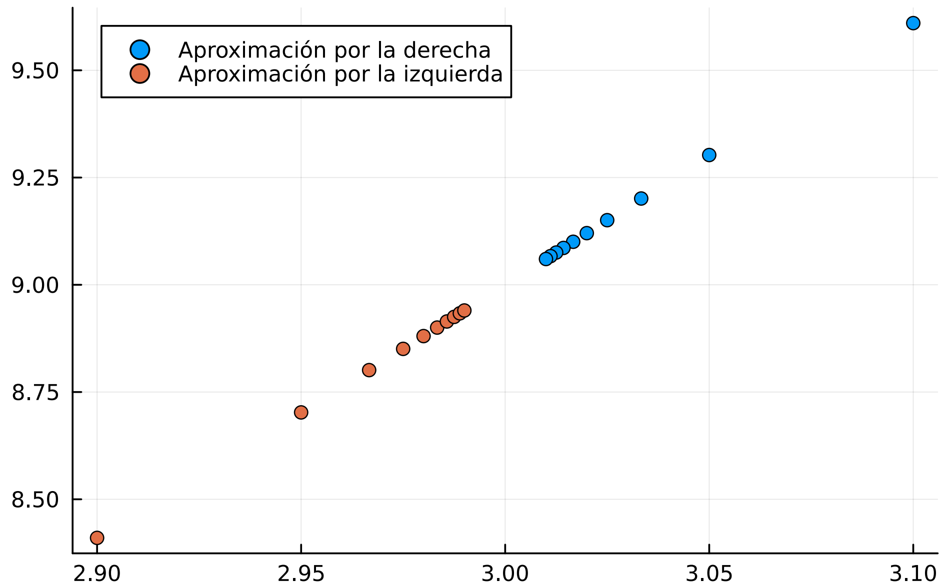
c. Dibujar la gráfica de los valores de f evaluados en los apartados anteriores diferenciando la tendencia por la izquierda de la tendencia por la derecha.

Ayuda

Definir un vector con los valores de x y otro con los valores correspondientes de $f(x)$ y usar la función `scatter` del paquete `Plots`, pasandole los dos vectores.

Solución

```
xd = [a+1/10i for i=1:10]
scatter(xd, f.(xd), label="Aproximación por la derecha")
xi = [a-1/10i for i=1:10]
scatter!(xi, f.(xi), label="Aproximación por la izquierda", legend=:topleft)
```



d. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de f en $x = 3$.

Ayuda

Declarar la variable simbólica `x` con `@syms` imponiento la restricción `real=true`, definir la función y usar la función `limit` del paquete `SymPy` para calcular los límites laterales de la función. Para el límite por la izquierda indicar el parámetro `dir="-"` y para el límite por la derecha `dir="+"`.

Solución

```
@syms x::real
li = limit(f(x), x=>3, dir="-")
println("Límite por la izquierda: ", li)
ld = limit(f(x), x=>3, dir="+")
println("Límite por la derecha: ", ld)
```

```
Límite por la izquierda: 9
Límite por la derecha: 9
```

Ejercicio 4.2. Sea la función $g(x) = (1+x)^{1/x}$.

a. Estudiar la tendencia de g cuando x se aproxima a 0 por la derecha, evaluando la función en $x = \frac{1}{10^i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

Solución

```
g(x) = (1+x)^(1/x)
a = 0
print([g(a+1/10^i) for i = 1:10])
```

```
[2.5937424601000023, 2.7048138294215285, 2.7169239322355936, 2.7181459268249255, 2
```

La función tiende a e.

b. Estudiar la tendencia de g cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, evaluando la función en $x = -\frac{1}{10^i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

Solución

```
print([g(a-1/10^i) for i = 1:10])
```

```
[2.867971990792441, 2.7319990264290284, 2.719642216442853, 2.71841775501015, 2.718
```

La función también tiende a e.

c. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de g en $x = 0$.

Solución

```
@syms x::real
li = limit(g(x), x=>0, dir="-")
println("Límite por la izquierda: ", li)
ld = limit(g(x), x=>0, dir="+")
println("Límite por la derecha: ", ld)
```

```
Límite por la izquierda: E
Límite por la derecha: E
```

Ejercicio 4.3. Considérese la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2}.$$

a. Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites:

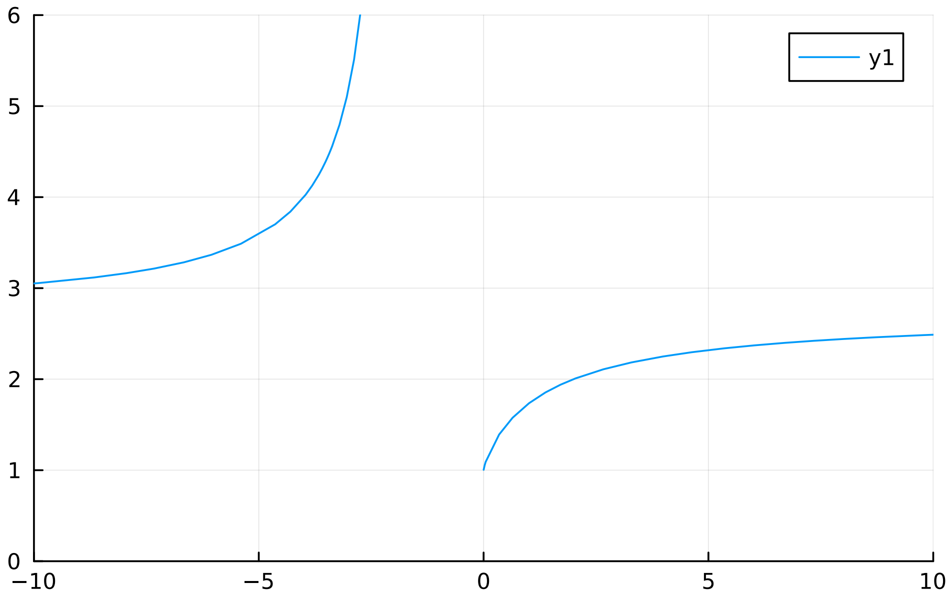
- $\lim_{x\to -2^-} f(x)$
- $\lim_{x\to -2^+} f(x)$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$
- $\lim_{x\to 0} f(x)$

Ayuda

Utilizar la función `plot!` del paquete `Plots`. Usar los parámetros `xlims=(a,b)` para restringir la región de dibujo al intervalo (a, b) del eje x, y `ylims=(c,d)` para restringir la región de dibujo al intervalo (c, d) del eje y.

Solución

```
using Plots
f(x) = (1+2/x)^(x/2)
plot(f, xlims=(-10,10), ylims=(0,6))
```



A la vista de la gráfica, se puede concluir que

i. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$.
ii. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ no existe.
iii. $\lim_{x\to -\infty} f(x) \approx 2.7$.
iv. $\lim_{x\to +\infty} f(x) \approx 2.7$.
v. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.
vi. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

b. Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
println("Límite por la izquieda en -2: ", limit(f(x), x=>-2, dir="-"))
println("Límite por la derecha en -2: ", limit(f(x), x=>-2, dir="+"))
println("Límite en -∞: ", limit(f(x), x=>-oo))
println("Límite en ∞: ", limit(f(x), x=>oo))
println("Límite en 2: ", limit(f(x), x=>2))
println("Límite en 0: ", limit(f(x), x=>0))
```

```
Límite por la izquieda en -2: oo
Límite por la derecha en -2: -oo
Límite en -∞: E
Límite en ∞: E
```

```
Límite en 2: 2
Límite en 0: 1
```

Precaución

Aunque Julia calcula el límite en -2 por la derecha y el límite en 0, a la vista de la gráfica, estos límites en realidad no existen, ya que la función no está definida en el intervalo de $[-2, 0]$.

Ejercicio 4.4. Calcular los siguientes límites

a. $\lim_{x\to 0} Frsen\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
limit(sin(1/x), x=>0)
```

$\langle -1, 1\rangle$
Como no se obtiene un valor concreto, sino un rango de valores, el límite no existe.

b. $\lim_{x\to 0} xFrsen\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución

```
limit(x*sin(1/x), x=>0)
```

0

c. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}Frsen(x)$

Solución

```
limit( ^(-x)*sin(x), x=>oo)
```

0

d. $\lim_{x\to a} \frac{Frsen(x)-Frsen(a)}{x-a}$

Solución

```
@syms a::real
limit((sin(x)-sin(a))/(x-a), x=>a)
```

$\cos(a)$

Ejercicio 4.5. Calcular el valor de las siguientes funciones en los puntos dados y su límite. Corroborar los límites obtenidos gráficamente.

a. $f(x) = \frac{Frsen(x)}{x}$ en $x = 0$.

Solución

La función f no está definida en $x = 0$ de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

```
f(x)=sin(x)/x
f(0)
```

```
NaN
```

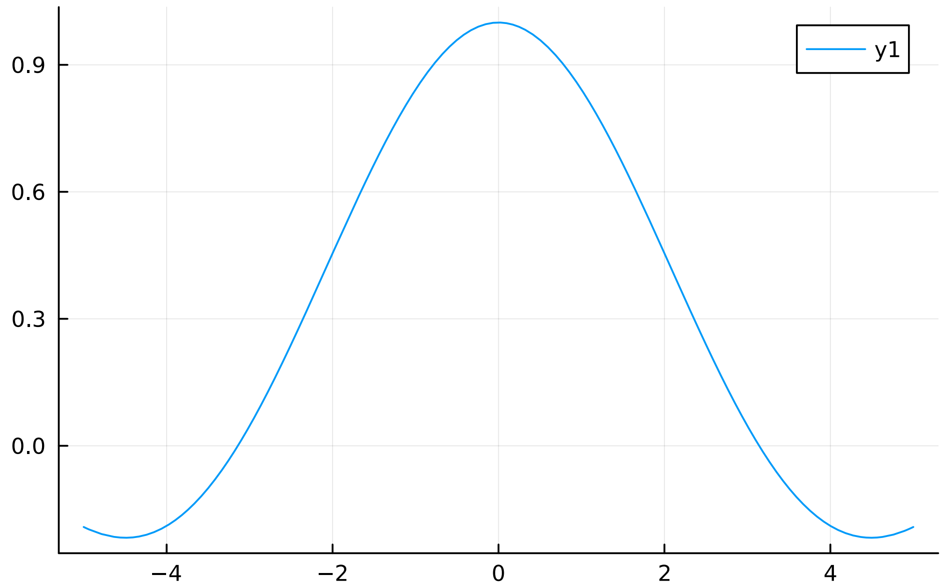
Ahora calculamos el límite de f en 0.

```
@syms x::real
f(x)=sin(x)/x
limit(f(x), x=>0)
```

1

Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de f en un entorno de 0.

```
using Plots
plot(f)
```



b. $g(x) = \frac{\cos(x)}{x-\pi/2}$ en $x = \pi/2$.

Solución

La función f no está definida en $x = 0$ de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

```
g(x)=cos(x)/(x-pi/2)
g(pi/2)
```

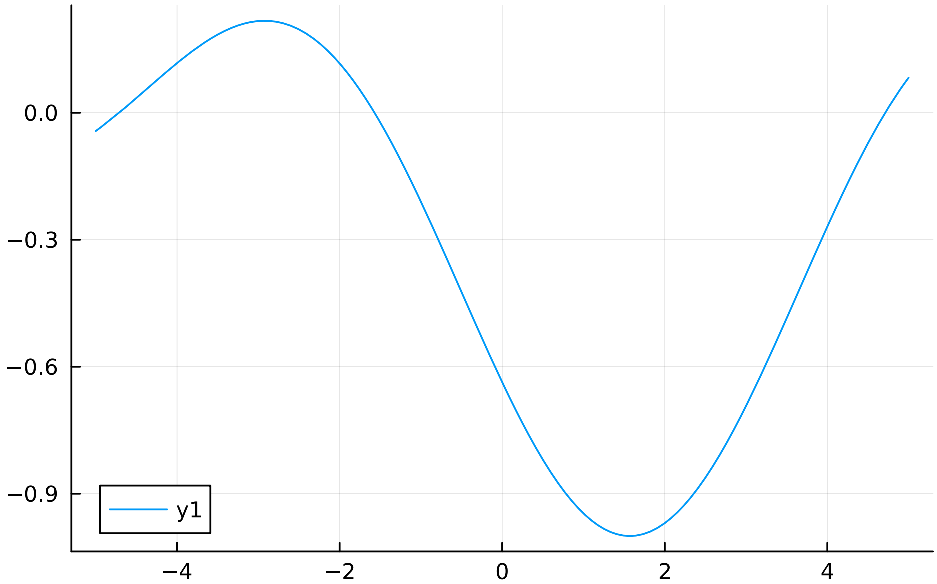
```
Inf
```

Como se puede observar, se obtiene ∞ en lugar de indeterminado. La razón está en la representación de los números reales mediante números con coma flotante, de manera que $\pi/2$ se redondea al número de coma flotante más próximo, y al aplicar el coseno se obtiene un número muy próximo a 0 pero distinto de 0.
Ahora calculamos el límite de g en $\pi/2$.

```
limit(g(x), x=>pi/2)
```

-0.017235371463439
Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de g en un entorno de $\pi/2$.

```
using Plots
plot(g)
```



Como se puede apreciar gráficamente la tendencia de g en $\pi/2$ es -1 y no el valor obtenido con el cálculo del límite. De nuevo el problema está en la aproximación de *pi* como un real en coma flotante. Afortunadamente el paquete `SymPy` permite definir una constante como simbólica para evitar su conversión a número en coma flotante, usando la función `Sym()`. También podemos usar la constante simbólica predefinida `Pi`. Repetimos la definición de la función y el cálculo de nuevo convirtiendo π en una constante simbólica.

```
g(x)=cos(x)/(x-Sym(pi)/2)
limit(g(x), x=>Sym(pi)/2)
```

-1

Ejercicio 4.6. Considérese la función

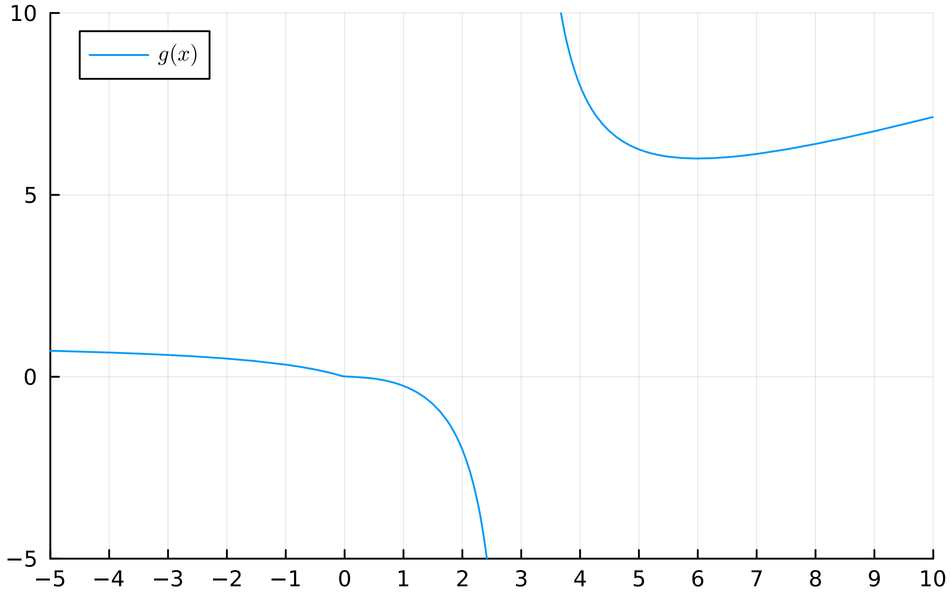
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{2x-6} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

a. Dibujar la gráfica de g y determinar gráficamente si existen asíntotas.

> **Ayuda**
>
> Para respetar las discontinuidades utilizar la función `rangeclamp()` del paquete `MTH229`.

Solución

```
using Plots, MTH229, LaTeXStrings
@syms x::real
g1(x) = x/(x-2)
g2(x) = x^2/(2x-6)
g(x) = x<=0 ? g1(x) : g2(x)
plot(rangeclamp(g), xlims=(-5,10), ylims=(-5,10), xticks=-5:10, label = L"g(x)", l
```



A la vista de la gráfica, se observa que g tiene una asíntota vertical en $x = 3$, una asíntota horizontal $y = 1$ en $-\infty$ y parece que también hay una asíntota oblicua en ∞.

b. Calcular las asíntotas verticales de g y dibujarlas.

Solución

Estudiamos primero el dominio para ver dónde no está definida la función. Como tanto la rama negativa como la positiva son funciones racionales, hay que ver los puntos que anulan el denominador.

```
println("Puntos fuera del dominio de la rama negativa: ", solve(x-2))
println("Puntos fuera del dominio de la rama positiva: ", solve(2x-6))
```

```
Puntos fuera del dominio de la rama negativa: Sym{PyCall.PyObject}[2]
Puntos fuera del dominio de la rama positiva: Sym{PyCall.PyObject}[3]
```

Así pues la rama negativa está definida en todos $\mathbb{R}^-$ y la rama positiva en

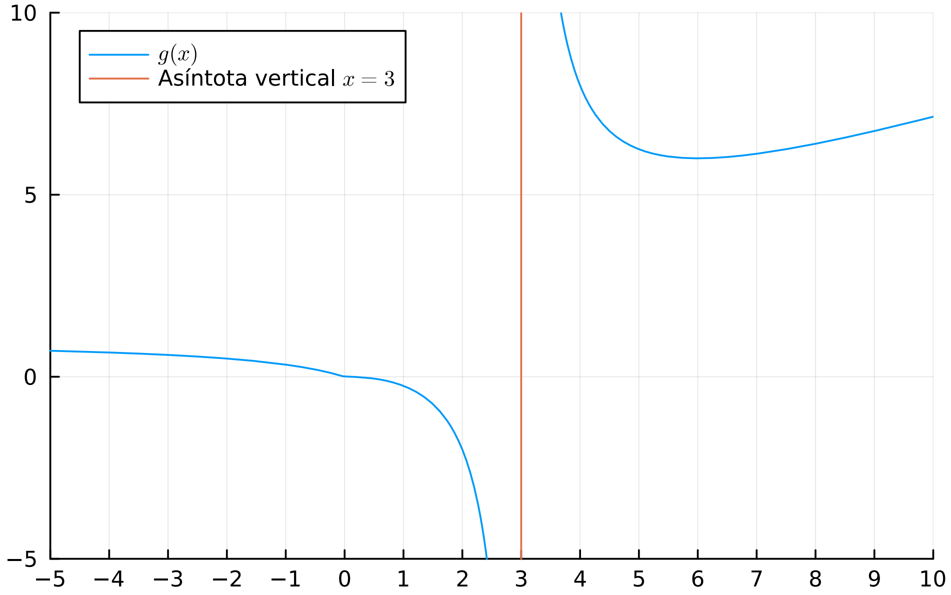
$\mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$. Es en este último punto donde g puede tener asíntota vertical, así que estudiamos los límites laterales.

```julia
println("Límte en 3 por la izquierda: ", limit(g(x), x=>3, dir="-"))
println("Límte en 3 por la derecha: ", limit(g(x), x=>3, dir="+"))
```

```
Límte en 3 por la izquierda: -oo
Límte en 3 por la derecha: oo
```

Por tanto, g tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

```julia
vline!([3], label = L"Asíntota vertical $x=3$")
```



c. Calcular las asíntotas horizontales de g.

Solución

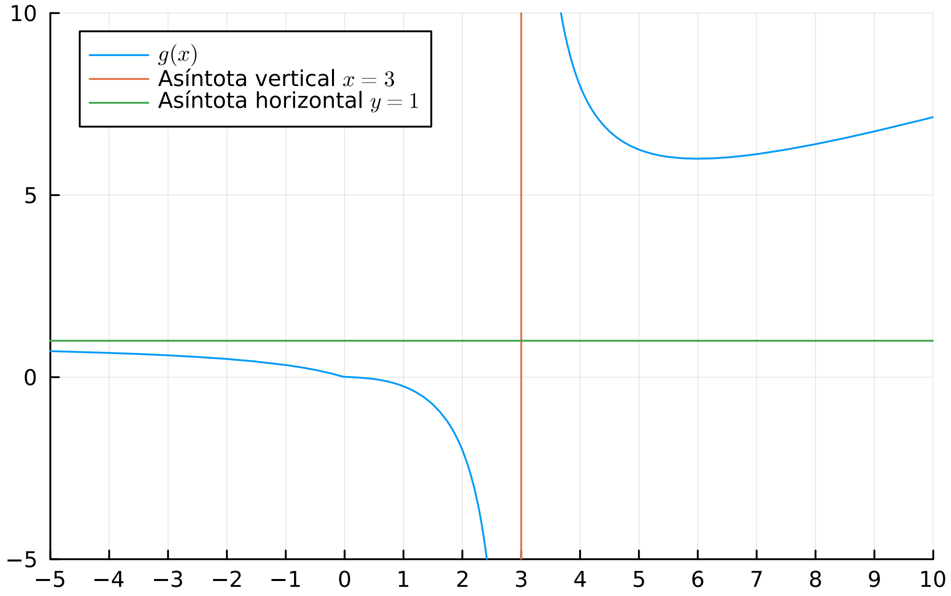
Estudiamos los límites en el infinito.

```julia
println("Límite en -∞: ", limit(g1(x), x=>-oo))
println("Límite en ∞: ", limit(g2(x), x=>oo))
```

```
Límite en -∞: 1
Límite en ∞: oo
```

Por tanto, g tiene una asíntota horizontal $y = 1$ en $-\infty$.

```julia
hline!([1], label = L"Asíntota horizontal $y=1$")
```



d. Calcular las asíntotas oblicuas de g.

Solución

Estudiamos el límite en ∞ de $\frac{f(x)}{x}$ (en $-\infty$ no puede haber asíntota oblicua al haber asíntota horizontal).

```
limit(g2(x)/x, x=>oo)
```

$\frac{1}{2}$

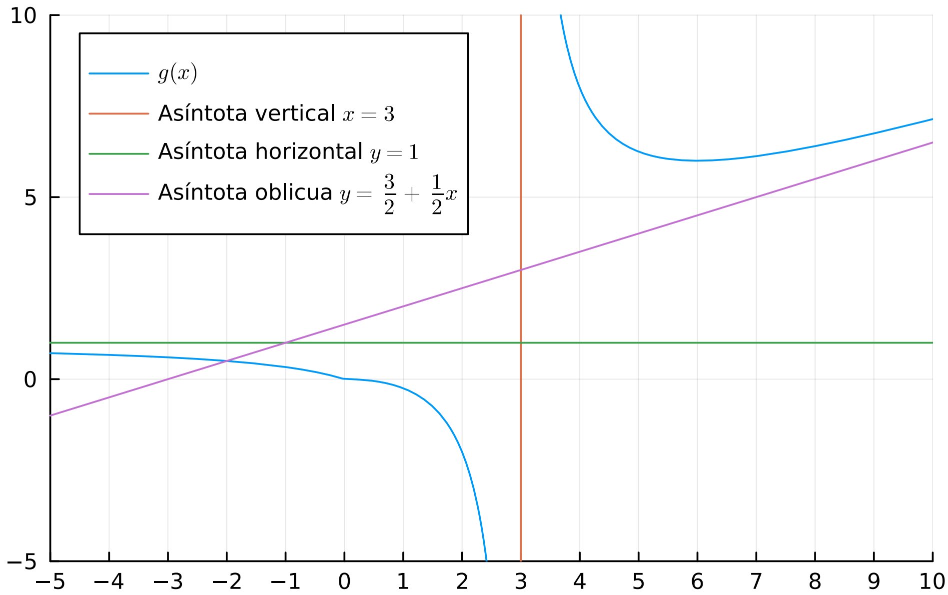
Por tanto, g tiene una asíntota oblicua con pendiente $b = 1/2$ en ∞. Para obtener el término independiente de la asíntota calculamos el límite en ∞ de $f(x) - \frac{1}{2}x$.

```
limit(g2(x)-x/2, x=>oo)
```

$\frac{3}{2}$

Por tanto, g tiene una asíntota oblicua $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$.

```
plot!(3/2+x/2, label = L"Asíntota oblicua $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x$")
```



Ejercicio 4.7. Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-2x}{3x^2+x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{Frtg(x)+a}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar a para que la función sea continua en todo su dominio?

Ayuda

Calcular el límite en 0 por la izquierda de la función de la rama negativa, y el límite en 0 por la derecha de la función de la rama positiva. Después resolver la ecuación simbólica que resulta de igualar los dos límites. Para crear la ecuación simbólica debe utilizarse la función `Eq()` del paquete `SymPy` y después resolverla con la función `solve()`.

Solución

```
@syms x::real a::real
h1(x) = (2x^2-2x)/(3x^2+x)
h2(x) = (tan(x)-a*x)/x
l1 = limit(h1(x), x=>0, dir="-")
l2 = limit(h2(x),x=>0, dir="+")
solve(Eq(l1,l2))
```

```
1-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
 3
```

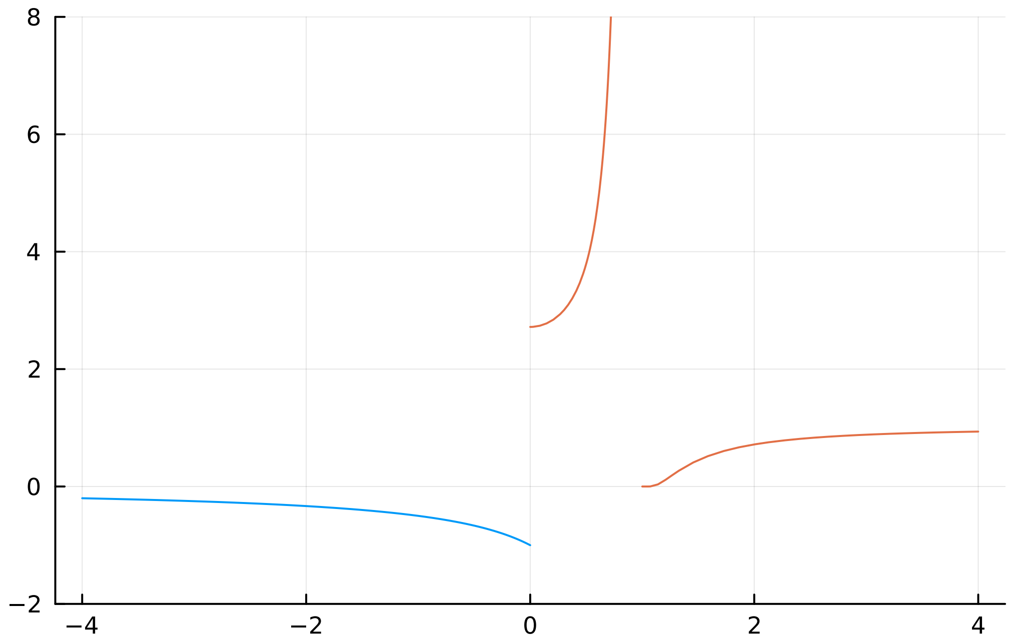
Ejercicio 4.8. Representar gráficamente y clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Solución

Para estudiar las discontinuidades de una función tenemos que estudiar los puntos que no están en el dominio y los puntos donde cambia la definición de la función en el caso de una función definida a trozos.

```julia
using Plots, MTH229, LaTeXStrings
@syms x::real
f1(x) = (x+1)/(x^2-1)
f2(x) = 1/exp(1/(x^2-1))
plot(f1, -4, 0, ylim=(-2,8), legend=false)
plot!(rangeclamp(f2), 0, 4)
```



Para determinar el dominio de la rama negativa, al ser una función racional, tenemos que ver los puntos que anulan el denominador.

```julia
solve(x^2-1)
```

```
2-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
 -1
  1
```

Así pues, la función no está definida en $x = -1$ (la otra raíz queda fuera de la rama negativa). Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en $x = -1$.

```julia
println("Límite en -1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="-"))
println("Límite en -1 por la derecha: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="+"))
```

```
Límite en -1 por la izquierda: -1/2
Límite en -1 por la derecha: -1/2
```

Como el límite existe, f tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.
Del mismo modo la rama positiva no está definida en $x = 1$ ya que se anula el denominador del exponente de la función exponencial. Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en $x = 1$.

```julia
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f2(x), x=>1, dir="-"))
println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>1, dir="+"))
```

```
Límite en 1 por la izquierda: oo
Límite en 1 por la derecha: 0
```

Como los límites laterales son distintos, f tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.
Finalmente, estudiamos los límites laterales en $x = 0$, que es donde cambia la definición de la función.

```julia
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=>0, dir="-"))
println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>0, dir="+"))
```

```
Límite en 1 por la izquierda: -1
Límite en 1 por la derecha: E
```

Como los límites laterales son distintos, f tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

Ejercicio 4.9. El teorema de Bolzano permite construir un algoritmo para encontrar raíces de una función continua en un intervalo $[a, b]$ cuando $f(a)f(b) < 0$. Este algoritmo se conoce como el *algoritmo de bisección* y básicamente consiste en repetir los siguientes pasos:

1. Calcular el centro del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Si $f(c) = 0$, c es una raíz y se termina la búsqueda.
3. En caso contrario, si $f(a)f(c) < 0$ hacer $b = c$, y si no, hacer $a = c$.
4. Repetir la búsqueda.

Construir una función que implemente este algoritmo y utilizarlo para calcular una raíz de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 6x - 2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

```
function raices_biseccion(f, a, b, error=1e-10)
  if f(a) == 0 return(a) end
  if f(b) == 0 return(b) end
  if f(a) * f(b) > 0 error("Las imágenes de los extremos del intervalo no tienen signo
  c = (a+b)/2
  while abs(b-a) > error
    if f(c) == 0 return(c) end
    if f(a) * f(c) < 0
       b = c
    else
       a = c
    end
    c = (a+b)/2
  end
  c
end

f(x)=x^5+3x^4-2x^3+6x-4
print(raices_biseccion(f, 0, 1))
```

```
0.6496996753558051
```

4.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.10. En 1683 Jacob Bernouilli estudió la evolución del interés compuesto cuando el periodo de actualización se hacía cada vez más pequeño.

Si disponemos de 1€ en una cuenta corriente que ofrece un 100% de interés anual, al cabo de un año tendremos 2€ en la cuenta. Si la cuenta ofrece un interés del 50% cada 6 meses, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25€.$$

Si la cuenta ofrece un interés del 25% cada trimestre, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.44140625€.$$

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del 1/12% mensual?

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del 1/365% diario?

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta se actualiza de manera continua con un interés $1/x$% cuando $x \to \infty$?

- ☐ 3
- ☐ $$e^{-1}$$
- ☐ 2.7182818284590
- ☐ e
- ☐ $$e^2$$

Ejercicio 4.11. Calcular los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to\pi/4} \dfrac{Frsen(x) - \cos(x)}{1 - Frtg(x)}$.

b. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-2x-1}$.

c. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x}$

☐
$$1$$

☐ NaN

☐
$$-\infty$$

☐ 0

☐
$$\infty$$

d. $\lim_{x\to 1} \frac{a^{1-x}-1}{1-x}$.

☐
$$\sqrt{a}$$

☐
$$e^a$$

☐
$$\ln(a)$$

☐ Las otras opciones son falsas.

☐
$$1/a$$

Ejercicio 4.12. ¿Cuáles de las siguientes rectas son asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{3x+3}$?

☐
$$y = 1$$

☐
$$y = 3x+1$$

☐
$$x = -1$$

☐
$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$$

☐
$$y = \frac{x-1}{3}$$

(*Select one or more*)

Ejercicio 4.13. ¿Cuándo debería valer la función $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ para que fuese continua en $x = 0$.

Ejercicio 4.14. Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x - 2 & \text{si } x \leq 0, \\ \cos(x - \pi/4) + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar a para que la función sea continua en todo su dominio?

☐ No hay ningún valor de de a que haga la función continua

☐
$$2 - \sqrt{2}$$

☐
$$-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

☐
$$-2$$

☐
$$-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 4.15. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $g(x) = \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}}$ en $x = -1$?

☐ Salto finito

☐ Evitable

☐ Es continua

☐ Segunda especie

☐ Salto infinito

Ejercicio 4.16. Calcular de forma aproximada con el algoritmo de bisección una solución de la ecuación $e^{-x} = \cos(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ con un error menor de 10^{-15}.

5 Derivadas de funciones reales

5.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using ImplicitPlots # Para dibujar curvas implícitas.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
using Latexify  # Para convertir expresiones a código LaTeX.
```

Ejercicio 5.1. Galileo Galilei trató de estudiar el movimiento de un cuerpo en caída libre con un experimento en el que midió la distancia recorrida cada segundo por una bola que caía por un plano inclinado.

Figura 5.1: Plano inclinado de Galileo.

La siguiente tabla recoge sus mediciones.

Tiempo (s)	Distancia (cm)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Tiempo (s)	Distancia (cm)
5	25

a. Dibujar la gráfica que resulta de unir los puntos correspondientes a los pares de la tabla con segmentos. ¿Qué forma tiene la gráfica?

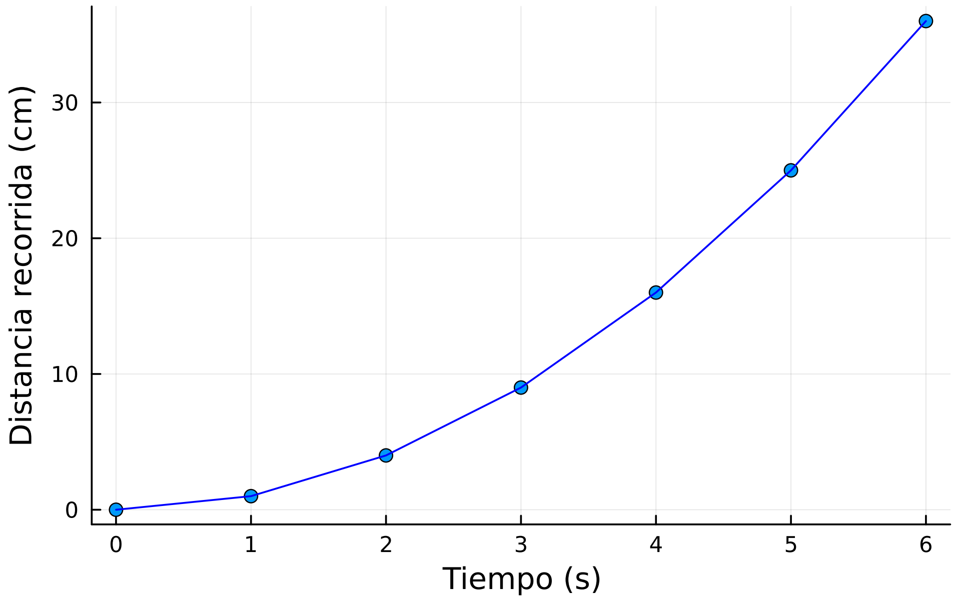
Ayuda

Definir dos arrays con los valores del tiempo y la distancia y usar la función `scatter` del paquete `Plots`, o bien la función `scatter` del paquete `Makie`, para dibujar el array de términos.

Solución

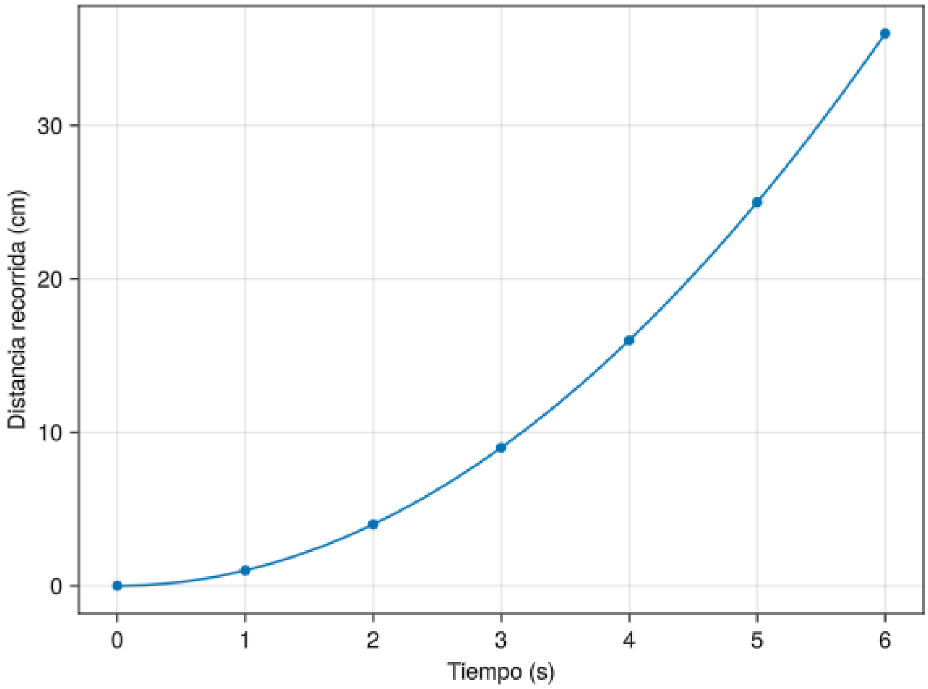
5.2 Plots

```
using Plots
t = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
d = [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36]
Plots.scatter(t, d, legend=false)
plt = Plots.plot!(t, d, linecolor="blue", xlab="Tiempo (s)", ylab="Distancia recor
```



5.3 Makie

```
using GLMakie
t = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
d = [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36]
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], xlabel="Tiempo (s)", ylabel="Distancia recorrida (cm)")
Makie.scatter!(ax, t, d)
f(x) = x^2
Makie.lines!(ax, 0..6, f)
fig
```



Se aprecia que una forma parabólica.

b. Calcular la velocidad media (tasa de variación media) desde los instantes $t = 0, 1, 2$ hasta el instante $t = 3$ y dibujar la rectas secantes a la gráfica anterior en esos instantes. ¿Cómo es la tendencia de las velocidades medias?

Ayuda

La tasa de variación media de una función f en un intervalo $[a, b]$ viene dada por la fórmula

$$TVM(f,[a,b]) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

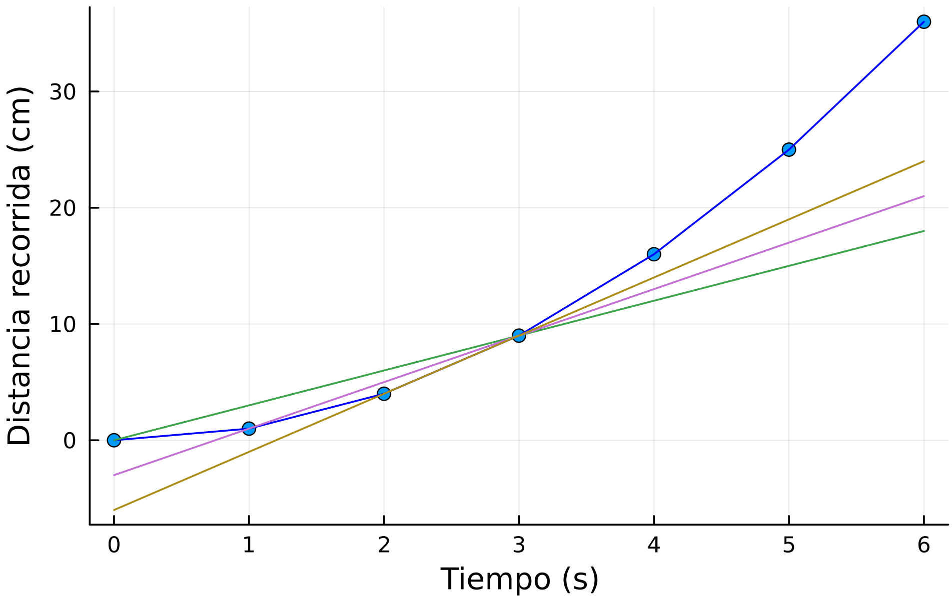
y la recta secante a la función f en el intervalo $[a,b]$ tiene ecuación

$$y = f(a) + TVM(f,[a,b])(x-a).$$

Solución

```
# Función para el cálculo de la velocidad media en del instante i al instante j.
tvm(i, j) = (d[j]-d[i])/(t[j]-t[i])
j = 4
# Cálculo de las velocidades medias.
for i in 1:3
    println("Velocidad media desde el instante $(t[i]) al instante $(t[j]): $(tvm(
end
# Función para calcular la ecuación de la recta secante en los instantes i y j.
secante(x, i, j) = d[i] + tvm(i, j) * (x - t[i])
# Dibujo de las rectas secantes
for i in 1:3
    plt = Plots.plot!(x -> secante(x,i,j))
end
plt
```

```
Velocidad media desde el instante 0 al instante 3: 3.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 1 al instante 3: 4.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 2 al instante 3: 5.0 cm/s
```



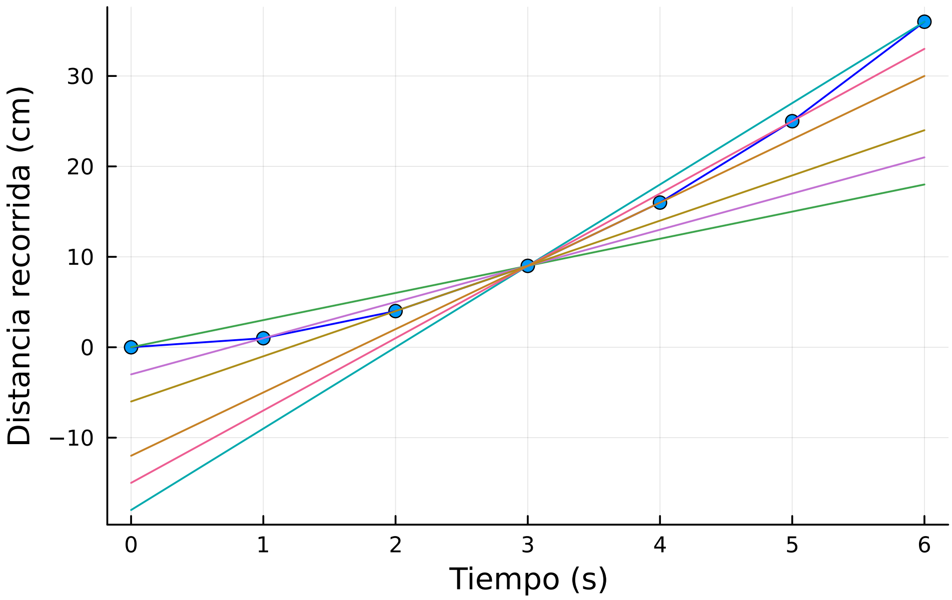
Las velocidades medias crecen a medida que pasa el tiempo.

c. Calcular la velocidad media desde el instante $t = 3$ hasta los instantes $t = 6, 5, 4$ y dibujar la rectas secantes a la gráfica anterior en esos instantes. ¿Cómo es la tendencia de las velocidades medias? ¿Hacia dónde tiende la velocidad media cuando los aproximamos al instante $t = 3$ con instantes menores y mayores?

Solución

```
i = 4
# Cálculo de las velocidades medias.
for j in 7:-1:5
    println("Velocidad media desde el instante $(t[i]) al instante $(t[j]): $(tvm(
end
# Dibujo de las rectas secantes.
for j in 7:-1:5
    plt = Plots.plot!(x -> secante(x,i,j))
end
plt
```

```
Velocidad media desde el instante 3 al instante 6: 9.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 3 al instante 5: 8.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 3 al instante 4: 7.0 cm/s
```



Las velocidades medias decrecen a medida que el tiempo decrece.
Se puede deducir que las velocidades medias tienden a 6 cm/s cuando los instantes se aproximan a 3 s.

d. Calcular la variación en la distancia recorrida cada segundo que pasa. ¿Cómo evoluciona la velocidad de la bola?

Solución

```
v = []
for i in 2:length(d)
    push!(v, d[i]-d[i-1])
    println("Velocidad media desde el instante $(t[i-1]) al instante $(t[i]): $(v[
end
```

```
Velocidad media desde el instante 0 al instante 1: 1 cm/s
Velocidad media desde el instante 1 al instante 2: 3 cm/s
Velocidad media desde el instante 2 al instante 3: 5 cm/s
Velocidad media desde el instante 3 al instante 4: 7 cm/s
Velocidad media desde el instante 4 al instante 5: 9 cm/s
Velocidad media desde el instante 5 al instante 6: 11 cm/s
```

e. Calcular la variación en la velocidad cada segundo que pasa. ¿Cómo evoluciona la aceleración de la bola? ¿Qué conclusiones sacó Galileo sobre la aceleración de la bola?

Solución

```
for i in 2:length(v)
    println("Aceleración media desde el instante $(t[i-1]) al instante $(t[i]): $(
end
```

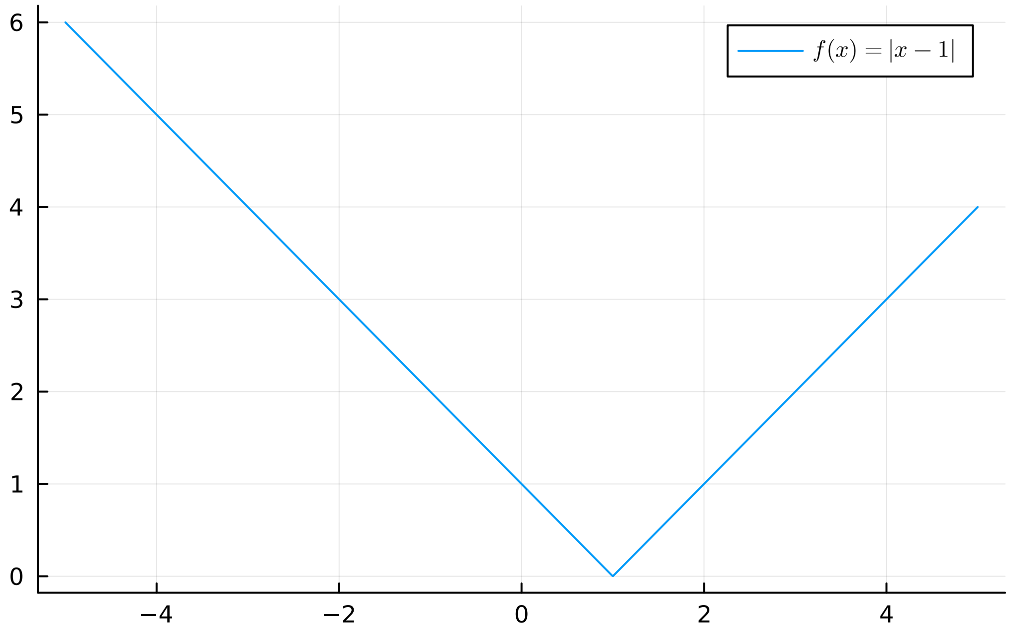
```
Aceleración media desde el instante 0 al instante 1: 2 cm/s
Aceleración media desde el instante 1 al instante 2: 2 cm/s
Aceleración media desde el instante 2 al instante 3: 2 cm/s
Aceleración media desde el instante 3 al instante 4: 2 cm/s
Aceleración media desde el instante 4 al instante 5: 2 cm/s
```

Se observa que la aceleración es la misma. Galileo concluyó que la aceleración de un cuerpo en caída libre era uniforme.

Ejercicio 5.2. Representar gráficamente la función $f(x) = |x - 1|$ y estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$ haciendo uso de la definición de derivada.

Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = abs(x-1)
display(Plots.plot(f(x), label=L"f(x)=|x-1|"))
println("Derivada por la izquierda: ", limit((f(x)-f(1))/(x-1), x=>1, dir="-"))
println("Derivada por la derecha: ", limit((f(x)-f(1))/(x-1), x=>1, dir="+"))
```




```
Derivada por la izquierda: -1
Derivada por la derecha: 1
```

Como la derivada por la izquierda y por la derecha no son iguales, la función no es derivable en $x = 1$.

Ejercicio 5.3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones hasta el orden 4 y deducir la expresión de la derivada de orden n.

a. $f(x) = \ln(x + 1)$

> **Ayuda**
>
> Usar la función `diff(f,n)` del paquete `SymPy` para calcular simbólicamente la derivada de grado `n` de la función `f`.

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = log(x+1)
println("Primera derivada: ", diff(f(x)))
println("Segunda derivada: ", diff(f(x), x, 2))
println("Tercera derivada: ", diff(f(x), x, 3))
println("Cuarta derivada: ", diff(f(x), x, 4))
```

```
Primera derivada: 1/(x + 1)
Segunda derivada: -1/(x + 1)^2
Tercera derivada: 2/(x + 1)^3
Cuarta derivada: -6/(x + 1)^4
```

La derivada de orden n es $f^{(n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$.

b. $f(x) = a^x$

Solución

```
using SymPy
@syms x::real a::real
g(x) = a^x
println("Primera derivada: ", diff(g(x), x))
println("Segunda derivada: ", diff(g(x), x, 2))
println("Tercera derivada: ", diff(g(x), x, 3))
println("Cuarta derivada: ", diff(g(x), x, 4))
```

```
Primera derivada: a^x*log(a)
Segunda derivada: a^x*log(a)^2
Tercera derivada: a^x*log(a)^3
Cuarta derivada: a^x*log(a)^4
```

La derivada de orden n es $g^{(n} = a^x \ln(a)^n$.

c. $h(x) = Frsen(x) + \cos(x)$

💡 Solución

```julia
using SymPy
@syms x::real
h(x) = sin(x)+cos(x)
println("Primera derivada: ", diff(h(x)))
println("Segunda derivada: ", diff(h(x), x, 2))
println("Tercera derivada: ", diff(h(x), x, 3))
println("Cuarta derivada: ", diff(h(x), x, 4))
```

```
Primera derivada: -sin(x) + cos(x)
Segunda derivada: -(sin(x) + cos(x))
Tercera derivada: sin(x) - cos(x)
Cuarta derivada: sin(x) + cos(x)
```

La derivada de orden n es

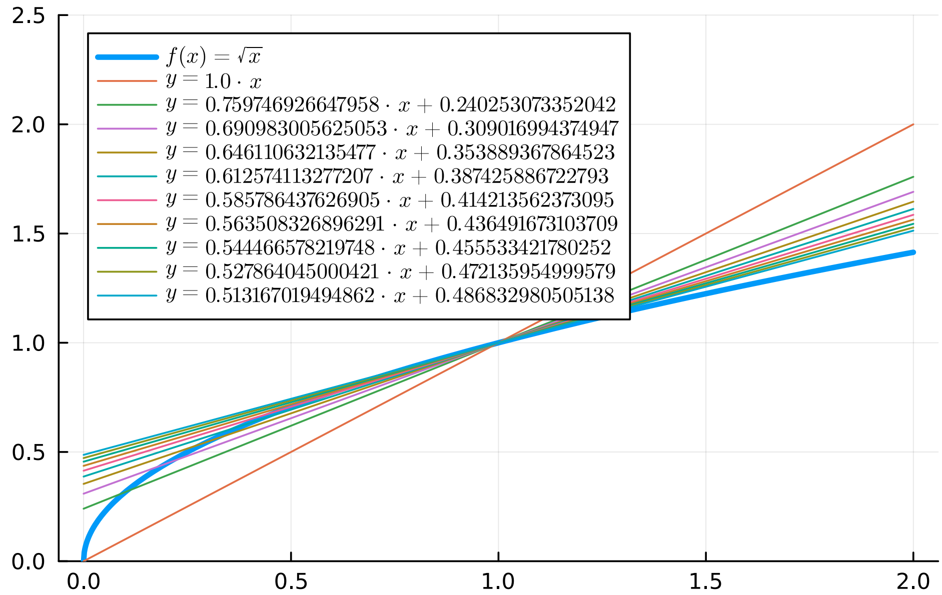
$$h^{(n} = \begin{cases} Frsen(x) + \cos(x) & \text{si } n = 4k \\ \cos(x) - Frsen(x) & \text{si } n = 4k+1 \\ -Frsen(x) - \cos(x) & \text{si } n = 4k+2 \\ -\cos(x) + Frsen(x) & \text{si } n = 4k+3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 5.4. Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

a. Dibujar la gráfica de f y dibujar las rectas secantes a f en los intervalos $[\frac{i}{10}, 1]$ para $i = 0, \ldots, 9$. ¿Hacia dónde tienden las pendientes de las rectas secantes?

💡 Solución

```julia
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real
f(x) = sqrt(x)
plt = Plots.plot(f, 0, 2, ylims=(0,2.5), linewidth = 3, label=L"f(x)=\sqrt{x}", le
secante(x, i, j) = f(i) + (f(j)-f(i))/(j-i) * (x - i)
for i in 0:9
    sec = secante(x, i/10, 1)
    plt = Plots.plot!(sec, label =L"y=" * latexify(sec))
end
plt
```



Se deduce que las pendientes de las rectas secantes tienen a 0.5.

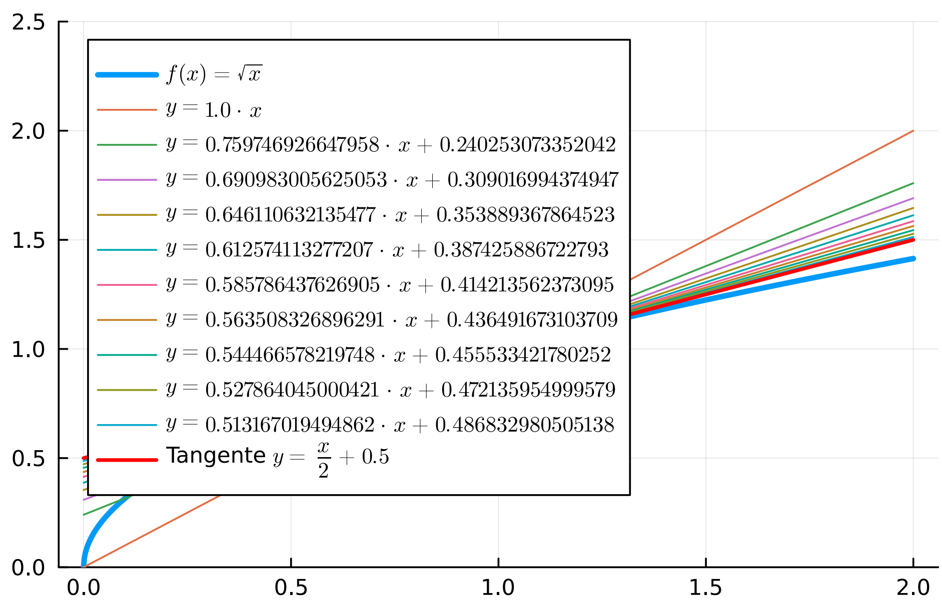
b. Dibujar la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$.

Ayuda

La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto a es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
Usar la función `diff(f)` del paquete `SymPy` para calcular simbólicamente la derivada de la función `f`.

Solución

```
tg = f(1) + diff(f(x))(1) * (x-1)
Plots.plot!(tg, linewidth = 2, color = "red", label="Tangente " * L"y=" * latexify
```



Ejercicio 5.5. Calcular y dibujar las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$ en $x = 1$.

Ayuda

La ecuación de la recta tangente a una función f en el punto a es

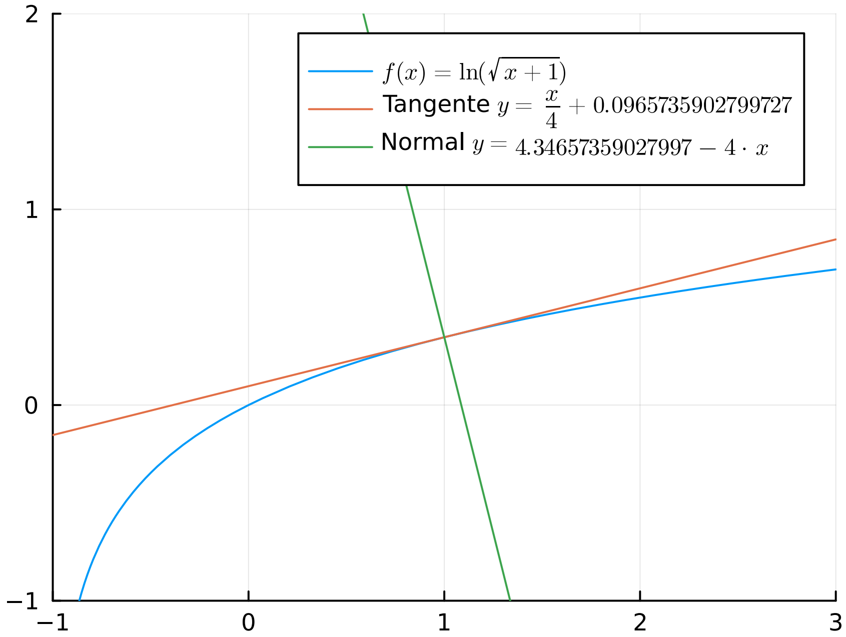
$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

y la de la recta normal

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real
f(x) = log(sqrt(x+1))
Plots.plot(f, -1, 3, xlims=(-1,3), ylims=(-1,2), aspect_ratio=1, label=L"f(x)=\ln(\sqrt
tg = f(1) + diff(f(x))(1) * (x-1)
Plots.plot!(tg, label="Tangente "*L"y="*latexify(tg))
nm = f(1) - 1/diff(f(x))(1) * (x-1)
Plots.plot!(nm, label="Normal "*L"y="*latexify(nm))
```

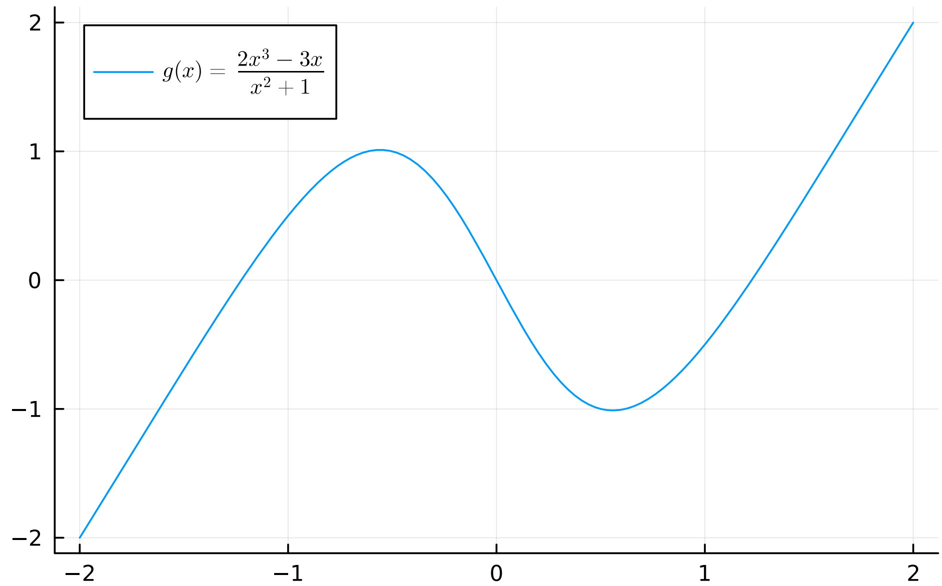


Ejercicio 5.6. Sea la función $g(x) = \dfrac{2x^3 - 3x}{x^2 + 1}$.

a. Dibujar la gráfica de g.

Solución

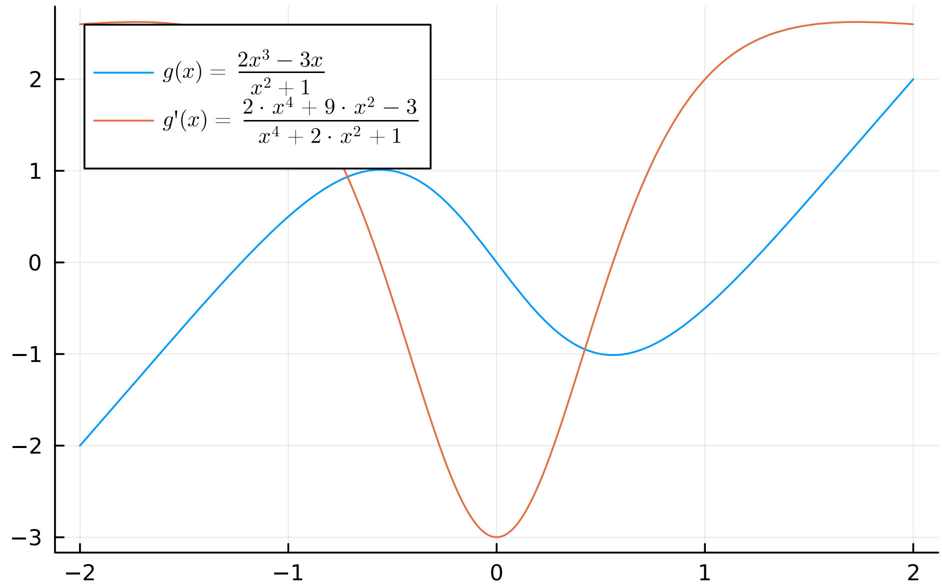
```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real
g(x) = (2x^3-3x) / (x^2+1)
Plots.plot(g, -2, 2, label=L"g(x)=\frac{2x^3-3x}{x^2+1}", legend=:topleft)
```



b. Calcular la derivada de g y dibujar su gráfica en la misma gráfica que la de g.

Solución

```
Plots.plot!(diff(g(x)), label=L"g'(x)="*latexify(simplify(diff(g(x)))))
```



c. Calcular los puntos críticos de g.

Ayuda

Los puntos críticos de una función son los puntos donde se anula la derivada.

Solución

```
N.(solve(diff(g(x))))
```

```
2-element Vector{Float64}:
 -0.5583347485961263
  0.5583347485961263
```

Existen dos puntos críticos en $x = -0.55$ y $x = 0.55$ aproximadamente.

d. A la vista de los puntos críticos y de la gráfica de la función derivada, determinar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función.

Ayuda

Una función f derivable en el punto a es creciente si y solo si $f'(a) > 0$ y decrecientes si y solo si $f'(a) < 0$.

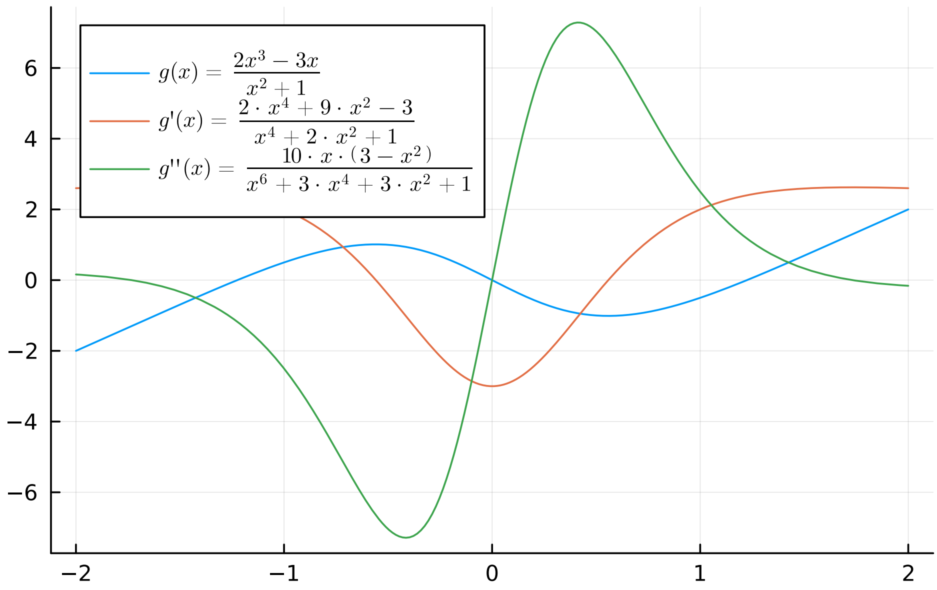
Solución

La derivada es positiva en los intervalos $(-\infty, -0.55)$ y $(0.55, \infty)$, por lo que la función g es creciente en estos intervalos, y la derivada es negativa en el intervalo $(-0.55, 0.55)$, por lo que la función g es decreciente en este intervalo.
En el punto crítico $x = -0.55$ la derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha, por lo que, según el criterio de la primera derivada, la función g tiene un máximo relativo.
En el punto crítico $x = 0.55$ la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha, por lo que, según el criterio de la primera derivada, la función g tiene un mínimo relativo.

e. Calcular segunda la derivada de g y dibujar su gráfica en la misma gráfica que la de g.

Solución

```
Plots.plot!(diff(g(x), x, 2), label=L"g''(x)="*latexify(simplify(diff(g(x), x, 2))
```



f. Calcular los puntos que anulan la segunda derivada de g.

Solución

```julia
N.(solve(diff(g(x), x, 2)))
```

```
3-element Vector{Real}:
  0
 -1.7320508075688772
  1.7320508075688772
```

Existen tres puntos donde se anula $g''(x)$, en $x = -1.73$, $x = 0$ y $x = 1.73$ aproximadamente.

g. A la vista de las raíces de la gráfica de la segunda derivada, determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función g.

Ayuda

Una función f dos veces derivable en el punto a es cóncava hacia arriba si y solo si $f''(a) > 0$ y cóncava hacia abajo si y solo si $f''(a) < 0$. Los puntos de inflexión de una función son los puntos donde cambia la concavidad.

💡 Solución

La segunda derivada es positiva en los intervalos $(-\infty, -1,73)$ y $(0, 1.73)$, por lo que la función g es cóncava hacia arriba en esos intervalos, y la segunda derivada es negativa en los intervalos $(-1.73, 0)$ y $(1.73, \infty)$, por lo que la función g es cóncava hacia abajo en esos intervalos.
g tiene tres puntos de inflexión en $x = 1.73$, $x = 0$ y $x = 1.73$, donde cambia la concavidad de la función.

Ejercicio 5.7. Considérese la curva con ecuación $x^4 - 3x^2 + 2y^2 = 0$.

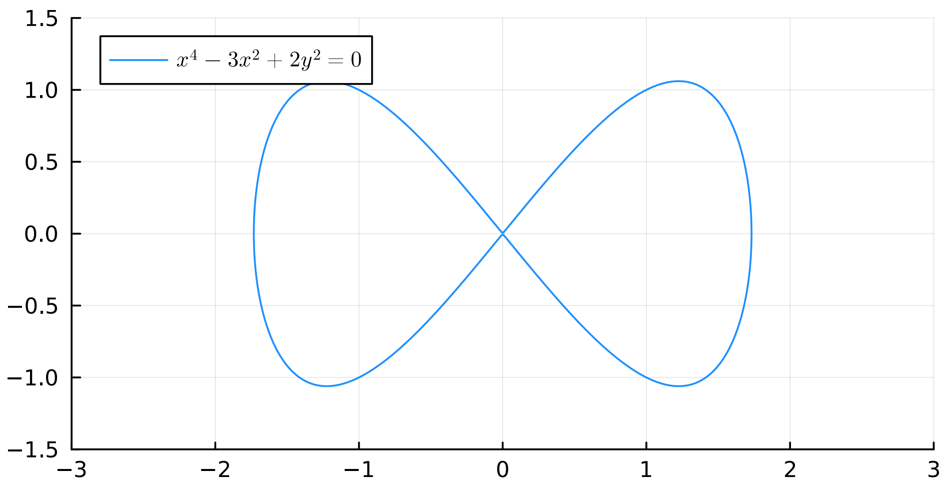
a. Dibujar la gráfica de la curva.

ℹ Ayuda

Para dibujar curvas implícitas utilizar la función `implicit_plot` del paquete `ImplicitPlots`.

💡 Solución

```
using ImplicitPlots, Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real y::real
f(x,y) = x^4 - 3x^2 + 2y^2
implicit_plot(f; xlims=(-3,3), ylims=(-1.5,1.5), label=L"x^4-3x^2+2y^2=0", legend=
```



b. Calcular la tasa de variación de y con respecto a x en el punto $(1, 1)$.

Ayuda

Para realizar derivadas implícitas simbólicamente hay que definir una función simbólica con el comando `@syms u()` del paquete `SymPy` y reemplazar `y` por `u(x)` en la ecuación de la curva implícita.
Después hay que hacer la derivada de ambos lados de la ecuación y finalmente hay que resolver la ecuación despejando la derivada de `u(x)`.

Solución

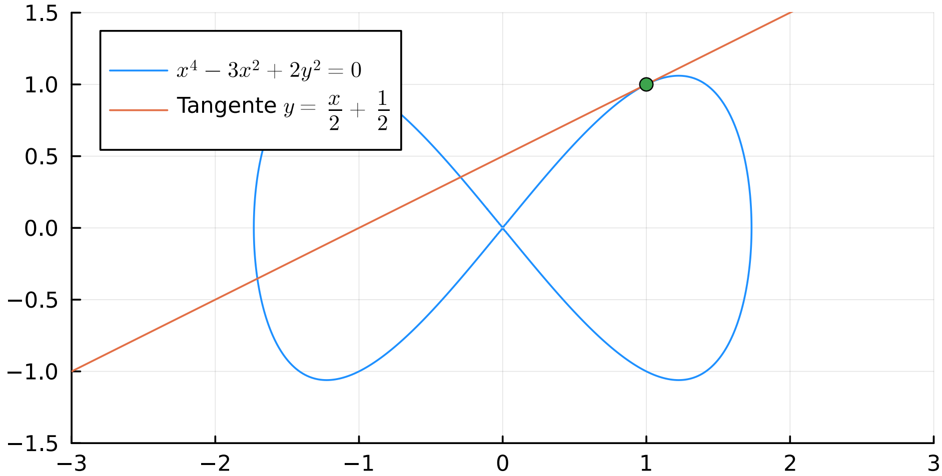
```
# Declaramos una función simbólica
@syms u()
# Reemplazamos y por una función simbólica u(x).
ex1 = subs(f(x,y), y=>u(x))
# Calculamos la derivada de ambos lados de la ecuación y la resolvemos para la der
du = solve(diff(ex1, x), diff(u(x), x))[1]
# Deshacemos el cambio y = u(x).
dy = subs(du, u(x) => y)
println("y'=", dy)
```

```
y'=x*(3 - 2*x^2)/(2*y)
```

c. Dibujar la recta tangente a la curva anterior en el punto $(1, 1)$.

Solución

```
using Latexify
# Definimos la funciónd de la recta tangente
tg = 1 + dy(1,1) * (x-1)
Plots.plot!(tg, label="Tangente "*L"y="*latexify(tg))
# Dibujamos el punto (1,1)
Plots.scatter!([1],[1], label="")
```



Ejercicio 5.8. Crear una función para calcular el polinomio de Taylor de grado n una función f en un punto a y utilizarla para dibujar los polinomios de Taylor de la función $f(x) = Frsen(x)$ en $a = 0$ hasta el grado 5.

Ayuda

La fórmula del polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto a es

$$P_{f,a}^n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

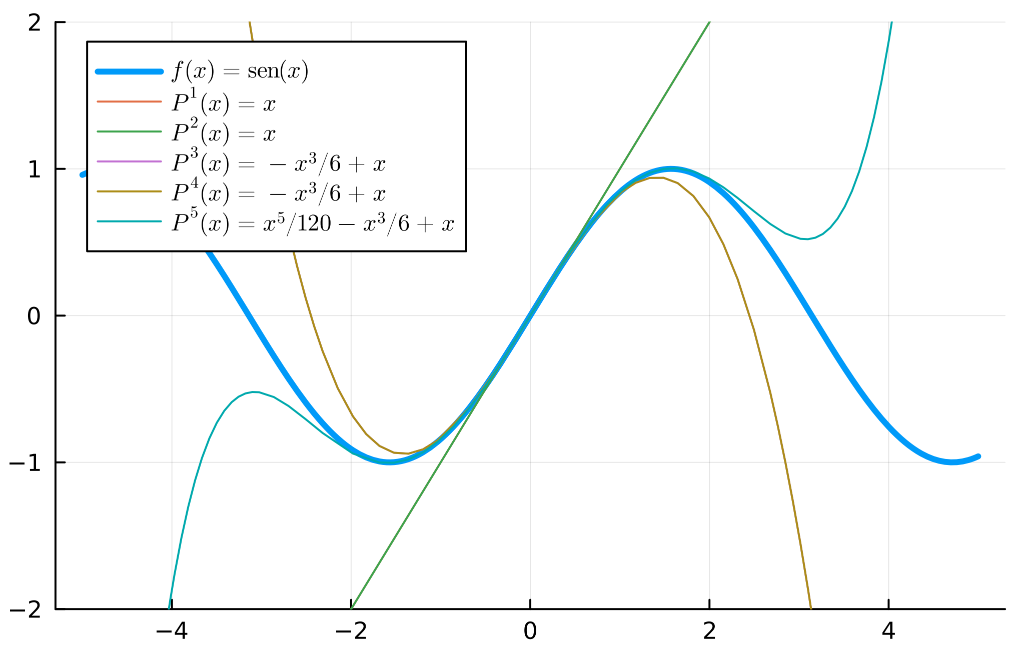
Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real

function taylor(f, a=0, n=2)
    sum(diff(f, x, i)(a) / factorial(i) * (x-a)^i for i=0:n)
end

f(x) = sin(x)
plt = Plots.plot(f, ylims=(-2,2), linewidth=3, label=L"f(x)=\operatorname{sen}(x)")

for i in 1:5
    pol = taylor(f(x), 0, i)
    plt = Plots.plot!(pol, label=latexstring("P^{$(i)}(x)=$(pol)"))
end
plt
```



Ejercicio 5.9. Calcular los polinomios de Taylor hasta grado 10 de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a. $f(x) = \cos(x)$ en $x = \pi/2$.

Ayuda

Para calcular polinomios de Taylor utilizar la función `series` del paquete `SymPy`.

Advertencia

La función `series` da el polinomio de grado $n-1$ junto con el error de orden n, por lo que si se quiere un polinomio de orden n hay que llamar a la función con un orden $n+1$.

Solución

```julia
using SymPy
@syms x::real
f(x) = cos(x)
SymPy.series(f(x), x, Sym(pi)/2, 11)
```

$\frac{\pi}{2} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{120} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7}{5040} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^9}{362880} - x + O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{11}; x \to \frac{\pi}{2}\right)$

b. $g(x) = \ln(x)$ en $x = 1$

Solución

```julia
g(x) = log(x)
SymPy.series(g(x), x, 1, 10)
```

$-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^9}{9} + x + O\left((x-1)^{10}; x \to 1\right)$

a. $h(x) = e^{Frsen(x)}$ en $x = 0$

Solución

```julia
h(x) = exp(sin(x))
SymPy.series(h(x), x, 0, 10)
```

$1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} - \frac{x^6}{240} + \frac{x^7}{90} + \frac{31x^8}{5760} + \frac{x^9}{5670} + O\left(x^{10}\right)$

Ejercicio 5.10. Aproximar el número $\ln(1.2)$ mediante un polinomio de Taylor de grado 8 y dar una cota del error cometido. ¿Hasta qué grado habría que llegar para obtener un error menor de 10^{-10}?

Ayuda

El error en la aproximación de una función $f(b)$ mediante un polinomio de Taylor de grado n en el punto a viene dado por el resto de Taylor, que en la forma de Lagrange es

$$R^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ con } x \in [a,b].$$

Solución

Utilizaremos un polinomio de MacLaurin de grado 5 para la función $f(x) = \ln(1+x)$.

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = log(1+x)
pol = SymPy.series(f(x), x, 0, 6).removeO()
println("Aproximación de ln(1.2): ", N(pol(0.2)))
```

```
Aproximación de ln(1.2): 0.18233066666666667
```

Para dar una cota del error cometido calculamos el resto de Taylor en la forma de Lagrange.

```
resto = diff(f(x), x, 6) / factorial(6) * 0.2^6
println("Resto de Taylor de orden 6: ", resto)
println("Derivada del resto : ", diff(resto))
```

```
Resto de Taylor de orden 6: -1.06666666666667e-5/(x + 1)^6
Derivada del resto : 6.4e-5/(x + 1)^7
```

Como la derivada no se anula en el intervalo $[1,2]$, no hay extremos relativos, y al ser una función continua en un intervalo cerrado, alcanza el máximo y mínimos absolutos en los extremos.

```
println("Cota del error: " , maximum(N(abs.([resto(0), resto(0.2)]))))
println("Error: ", abs(log(1.2)-pol(0.2)))
```

```
Cota del error: 1.06666666666667e-5
Error: 9.10987271207642e-6
```

Así pues, el error en la aproximación de $\ln(1.2)$ es menor que $1.06 \cdot 10^{-5}$.
Para ver la fórmula general del resto de Taylor en la forma de Lagrange para un polinomio de Taylor de orden n, calculamos las primeras derivadas sucesivas.

```
println("Primera derivada: ", diff(f(x)))
println("Segunda derivada: ", diff(f(x), x, 2))
println("Tercera derivada: ", diff(f(x), x, 3))
println("Cuarta derivada: ", diff(f(x), x, 4))
```

```
Primera derivada: 1/(x + 1)
Segunda derivada: -1/(x + 1)^2
Tercera derivada: 2/(x + 1)^3
Cuarta derivada: -6/(x + 1)^4
```

Así pues, se deduce que la derivada de orden n es $f^{(n}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, de manera que el resto de Taylor de orden n es

$$|R^n_{f,0}(x)| = \left|(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n+1)!(x+1)^n}0.2^{n+1}\right| = \left|\frac{0.2^{n+1}}{(n+1)n(x+1)^n}\right| \; x \in [0, 0.2].$$

Como se trata de una función positiva y decreciente en el intervalo $[0, 0.2]$, alcanza el máximo absoluto en el extremo inferior del intervalo, es decir, en $x = 0$, y por tanto se tiene,

$$|R^n_{f,1}(x)| \leq \left|\frac{0.2^{n+1}}{(n+1)n}\right|.$$

Finalmente calculamos el primer número natural n tal que $|R^n_{f,1}(x)| < 10^{-10}$.

```
n=6
while 0.2^(n+1) / (n*(n+1)) > 10^-10
    n += 1
end
print(n)
```

```
11
```

Así pues, habría que llegar al grado 11.

5.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.11. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} Frsen(x)^2 & \text{si } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leq c, \\ \ln(x) & \text{si } c < x, \end{cases}$$

¿Para qué valores de a, b y c la función es derivable en todo $\mathbb{R}$?

- ☐ $$a = 1, b = 0, c = e.$$
- ☐ $$a = 1, b = 1, c = 1.$$
- ☐ $$a = \sqrt{e}, b = 0, c = \frac{1}{e}.$$
- ☐ $$a = \frac{1}{2e}, b = 0, c = e^{1/2}.$$
- ☐ Para ningún valor.

Ejercicio 5.12. ¿Cuál es la derivada de orden n de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$?

- ☐ $$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i+1}{2^n}(x+1)^{-(2n+1)/2}.$$
- ☐ $$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i-1}{2^n}(x+1)^{-(2n+1)/2}.$$
- ☐ $$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i}{2^n}(x+1)^{-(2n+1)/2}.$$
- ☐ $$\frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^n}(x+1)^{-(2n-1)/2}.$$
- ☐ $$\frac{(-1)^n n!}{2^n}(x+1)^{-n/2}.$$

Ejercicio 5.13. Dadas las funciones $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{2}}\right)$ y $g(x) = x^3+1$, ¿en qué puntos la recta normal a f y la recta tangente a g con paralelas?

Ejercicio 5.14. Calcular el máximo y el mínimo absoluto de la función $g(x) = \sqrt{x^4 - 3x^3 + \frac{5}{2}x^2}$ en el intervalo $[-0.5, 1.5]$.

a. Mínimo absoluto

b. Máximo absoluto

Ejercicio 5.15. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas sobre la función $h(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$?

☐ Tiene un punto de inflexión en $x = 3$.

☐ Es cóncava hacia abajo en $(1, 3)$.

☐ Tiene un mínimo en $x = 1$.

☐ Tiene un máximo en $x = 1$.

☐ Es decreciente en todo $\mathbb{R}$.

(*Select one or more*)

Ejercicio 5.16. Una cuerda de longitud l está sujeta en sus extremos en los puntos $(0, 0)$ y (a, b). De la cuerda cuelga un anillo. ¿En qué posición estará el anillo debido a la fuerza de gravedad suponiendo que $l = 10$, $a = 3$ y $b = 2$?

i Ayuda

Puesto que la longitud de la cuerda es fija, del siguiente diagrama se deduce que las las posiciones (x, y) que puede ocupar el anillo vienen dadas por la ecuación

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

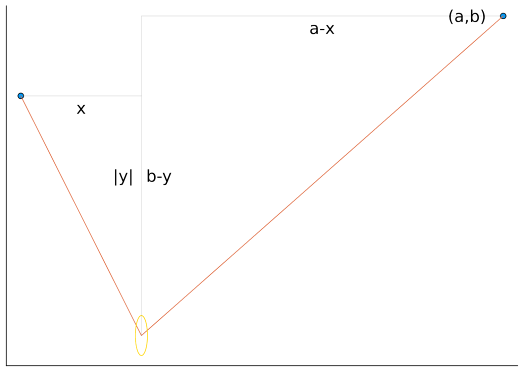


Figura 5.2: Descomposición en triángulos rectángulos de la posición que ocupa un anillo suspendido de una cuerda de tamaño l sujeta en sus extremos en los puntos $(0,0)$ y (a,b).

Coordenada x

Coordenada y

Ejercicio 5.17. Calcular de manera aproximada el valor de $Frsen(1/2)$ usando los siguientes polinomios de Taylor de la función $f(x) = Frsen(x)$.

a. Polinomio de Taylor de grado 20 en el punto $\pi/6$.

b. Polinomio de MacLaurin de grado 100.

a. ¿Qué polinomio da una mejor aproximación?

☐ El polinomio de MacLaurin de grado 100.

☐ El polinomio de Taylor de grado 20 en $\pi/6$.

6 Integrales de funciones reales

6.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico de integrales.
using QuadGK  # Para el cálculo numérico de integrales.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
using PrettyTables # Para formatear tablas.
using CalculusWithJulia # Utilidades varias para cálculo.
```

Ejercicio 6.1. Sea $f(x) = x^2$.

a. Calcular la suma inferior de Riemann de f en el intervalo $[0, 1]$, tomando una partición de 10 subinvervalos de igual amplitud.

> Ayuda
>
> La suma inferior de Riemann de una función f en un intervalo $[a, b]$ se obtiene sumando las áreas de los rectángulos que resultan de tomar una partición del intervalo, tomando como base la amplitud de los subintervalos y el como altura el mínimo valor de f en el subintervalo.

> Solución
>
> ```
> f(x) = x^2
> # Definimos la amplitud de los subintervalos.
> Δx = 1/10
> # Calculamos las áreas de los rectángulos tomando como altura el mínimo valor de l
> areas_inf = [f((i-1)*Δx)*Δx for i = 1:10]
> # Sumamos las áreas de los rectángulos.
> sum_inf = sum(areas_inf)
> ```
>
> ```
> 0.2850000000000001
> ```

b. Calcular la suma superior de Riemann de f en el intervalo $[0, 1]$, tomando una partición de 10 subinvervalos de igual amplitud.

> **Ayuda**
>
> La suma superior de Riemann de una función f en un intervalo $[a, b]$ se obtiene sumando las áreas de los rectángulos que resultan de tomar una partición del intervalo, tomando como base la amplitud de los subintervalos y el como altura el máximo valor de f en el subintervalo.

> **Solución**
>
> ```
> f(x) = x^2
> # Definiendo la amplitud de los subintervalos.
> Δx = 1/10
> # Calculamos las áreas de los rectángulos tomando como altura el máximo valor de l
> areas_sup = [f(i*Δx)*Δx for i = 1:10]
> # Sumamos las áreas de los rectángulos.
> sum_sup = sum(areas_sup)
> ```
>
> ```
> 0.3850000000000001
> ```

c. Dar una cota del error cometido en la aproximación del área encerrada entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[0, 1]$ tomando sumas de Riemann para una partición en 10 subintervalos.

> **Solución**
>
> La suma inferior de Riemann nos da una cota inferior del área que queda encerrada entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo $[a, b]$, mientras que la suma superior de Riemann nos da una cota superior. Por tanto, si tomamos cualquier valor entre la suma inferior y la suma superior de Riemann como aproximación del área encerrada entre la gráfica de f y el eje x, una cota del error cometido será la diferencia entre la suma superior y la suma inferior.
>
> ```
> error = sum_sup - sum_inf
> ```
>
> ```
> 0.10000000000000003
> ```

d. Definir una función para calcular de manera aproximada el área encerrada entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[a, b]$ tomando sumas de Riemann para una partición en n subintervalos, y el error cometido en la aproximación. Utilizarla para calcular los errores aproximados al aproximar el area de f en el intervalo $[0, 1]$ tomando particiones desde 10 a 100 subintervalos.

Solución

```
using PrettyTables
f(x) = x^2

function suma_inf(f, a, b, n)
    """
    Función que calcular la suma inferior de Riemann de una función f en el interv
    """
    Δx = (b-a)/n
    return sum([f(a+(i-1)*Δx)*Δx for i = 1:n])
end

function suma_sup(f, a, b, n)
    """
    Función que calcular la suma superior de Riemann de una función f en el interv
    """
    Δx = (b-a)/n
    return sum([f(a+i*Δx)*Δx for i = 1:n])
end

function area(f, a, b, n)
    """
    Función que calcular de manera aproximada el área encerrada entre la gráfica d
    """
    area_inf = suma_inf(f, a, b, n)
    area_sup = suma_sup(f, a, b, n)
    area = (area_inf + area_sup) / 2
    error = area_sup - area_inf
    return area, error
end

suma_sup(f, 0, 1, 10)
area(f, 0, 1, 10)
areas = [area(f, 0, 1, 10^n) for n=1:6]
pretty_table(hcat(first.(areas), last.(areas)); header = ["Aproximación", "Error"]
```

```
  Aproximación    Error

         0.335      0.1
       0.33335     0.01
      0.333334    0.001
```

```
0.333333   0.0001
0.333333   1.0e-5
0.333333   1.0e-6
```

Ejercicio 6.2. Calcular las primitivas de las siguientes funciones.

Ayuda

Para calcular la primitiva de una función se puede usar la función `integrate(f)` del paquete `SymPy`, donde `f` es la función a integrar.

a. $f(x) = x^2 \ln(x)$

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
primitiva = integrate(x^2*log(x))
```

$\frac{x^3 \log{(x)}}{3} - \frac{x^3}{9}$

Obsérvese que la primitiva obtenida con la función `integrate` no incluye la típica constante que define la familia de primitivas.
Podemos comprobar que efectivamente es la primitiva derivándola.

```
diff(primitiva)
```

$x^2 \log{(x)}$

b. $g(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

Solución

```
integrate(log(log(x))/x)
```

$\log{(x)} \log{(\log{(x)})} - \log{(x)}$

c. $h(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 6}{x^5 - x}$

Solución

Se trata de una función racional, así que hacemos primero la descomposición en fracciones simples. Para ello se puede usar la función `apart(f)` del paquete `SymPy`.

```
h(x) = (2x^3+x^2+6)/(x^5-x)
# Descomposición en fracciones simples.
apart(h(x))
```

$\frac{5x+2}{2(x^2+1)} + \frac{5}{4(x+1)} + \frac{9}{4(x-1)} - \frac{6}{x}$

Y ahora calculamos la primitiva.

```
integrate(h(x))
```

$-6\log(x) + \frac{9\log(x-1)}{4} + \frac{5\log(x+1)}{4} + \frac{5\log(x^2+1)}{4} + Fratan(x)$

d. $i(x) = x^a$

Solución

Cuando en la función aparece algún parámetro, es necesario indicar la variable con respecto a la que calcular la integral. Para ello se utiliza la función `integrate(f, x)`, siendo `x` la variable con respecto a la que integrar.

```
@syms a::real
integrate(x^a, x)
```

$$\begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} & \text{for } a \neq -1 \\ \log(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

e. $j(x) = (1 + \log(x))\sqrt{1 + x^2\log(x)^2}$

Solución

```
@syms x::real
j(x) = (1 + log(x)) * sqrt(1 + (x*log(x))^2 )
# El cálculo directo de la integral no funciona.
integrate(j(x))
# Ayudamos a SymPy con la sustitución.
h(x) = x*log(x)
@syms y::real dy::real
# Definimos la nueva función con el cambio de variable.
g(y) = j(x)(h(x) => y, diff(h(x), x) => 1)
# Integramos la nueva función y deshacemos el cambio de variable.
integrate(g(y))(y => h(x))
```

$\frac{x\sqrt{x^2\log(x)^2+1}\log(x)}{2} + \frac{Frasinh(x\log(x))}{2}$

Ejercicio 6.3. Calcular las siguientes integrales definidas:

Ayuda

Para calcular una integral definida también se puede usar la función `integrate(f, (x, a, b))`, del paquete SymPy, donde, además de la función `f`, hay que indicar la variable de integración `x` y los límites de integración `a` y `b`.

a. $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
integrate(x^3/(x^2+x+1), (x, -1/2, 0))
```

$-0.625 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

b. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$

Solución

```
integrate(sqrt(16-x^2)/x, (x, 2, 4))
```

$-2\sqrt{3} + 4Fracosh(2)$

c. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos(2x)}$

Solución

```
integrate(1/(3+cos(2x)), (x, 0, PI/2))
```

$\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

Ejercicio 6.4. Calcular la integral definida $\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx$ con un error menor de 10^{-10}.

Ayuda

Esta función no tiene primitiva como se puede comprobar al realizar la integral con la función `integrate`. Para calcularla hay que recurrir a métodos numéricos de aproximación. Para ello se puede usar la función `quadgk` del paquete QuadGK que realiza el cálculo de la integral mediante el método de la cuadratura de Gauss-Kronrod.

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = x^x
integrate(f(x), (x, 0, 1))
```

$\int_0^1 x^x\,dx$
No es posible calcular la primitiva con `integrate` porque esta función no tiene primitiva, así que hay que calcular la integral definida de manera aproximada por métodos numéricos.

```
using QuadGK
quadgk(f(x), 0, 1, rtol = 10^-10)
```

```
(0.783430510710741, 7.598588099878845e-11)
```

Ejercicio 6.5. Dibujar y calcular el área encerrada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$ y el eje de abscisas en el intervalo $[2, 7]$.

Ayuda

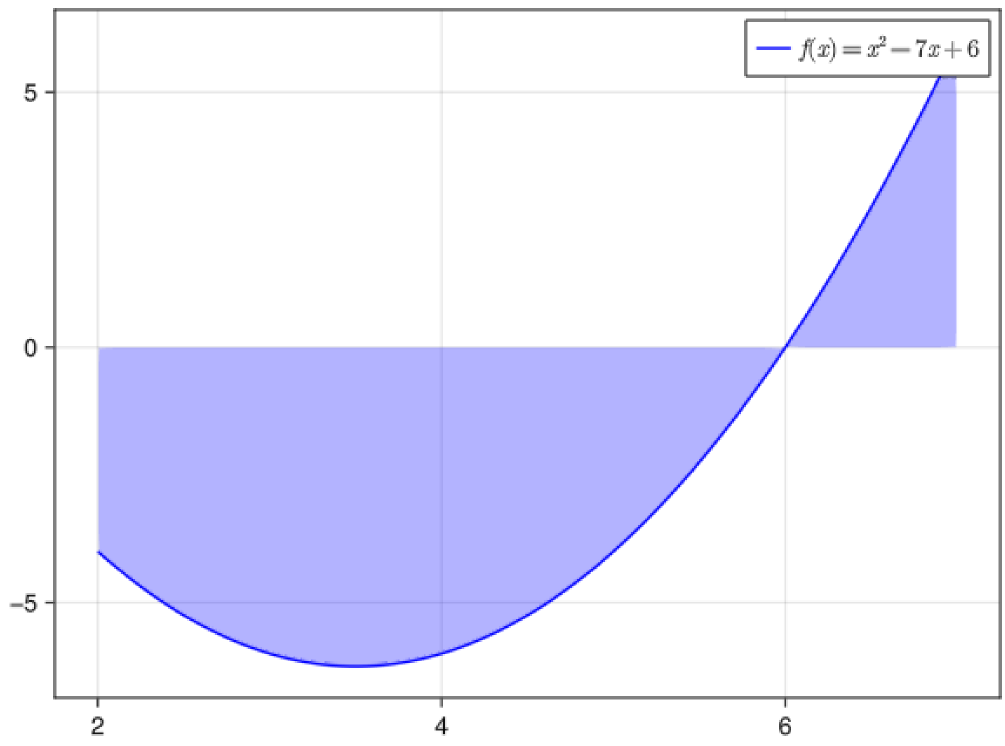
Para calcular el área encerrada entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo $[a, b]$, hay que descomponer el intervalo de integración en los subintervalos donde la función es positiva y los subintervalos donde es negativa, e integrar la función en cada intervalo por separado.
Otra opción es calcular el área mediante la integral del valor absoluto de la función.

Solución 1

Dibujamos primero la región.

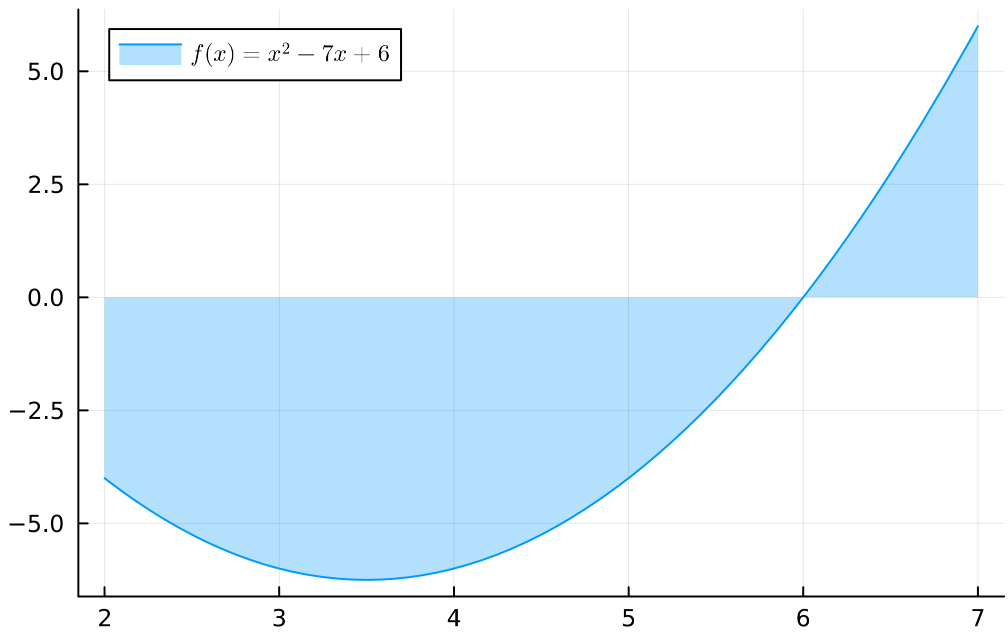
6.2 Makie

```julia
using SymPy, LaTeXStrings, GLMakie
@syms x::real
f(x) = x^2-7x+6
# Definimos un rango de valores para x.
xs = range(2, 7, length=100)
# Creamos la figura.
fig = Figure()
# Definimos los ejes.
ax = Axis(fig[1, 1])
# Dibujamos la región.
band!(ax, xs, f.(xs), [0], color = :blue, alpha = 0.3)
# Dibujamos la función.
lines!(ax, xs, f.(xs), color = :blue, label = L"$f(x)=x^2-7x+6$")
# Añadimos la leyenda.
axislegend(ax)
# Mostramos la figura.
fig
```



6.3 Plots

```julia
using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = x^2-7x+6
# Dibujamos la región y la gráfica de la función.
Plots.plot(f, 2, 7, fillrange = 0, fillalpha = 0.3, label = L"$f(x)=x^2-7x+6$")
```



Y ahora calculamos el área de la región sombreada.

```julia
# Calculamos primero las raíces de la función
solve(f(x))
# Descomponemos el intervalo de integración en los subintervalos [2,6] (función negativ
-integrate(f(x), (x, 2, 6)) + integrate(f(x), (x, 6, 7))
```

$\frac{43}{2}$

Solución 2

En general, para calcular áreas bajo una curva, es más rápido integrar el valor absoluto de la función.

```julia
integrate(abs(f(x)), (x, 2, 7))
```

$\frac{43}{2}$

Ejercicio 6.6. Calcular y dibujar el área comprendida entre las parábolas $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$.

Solución

Calculamos primero el área comprendida entre las dos funciones.

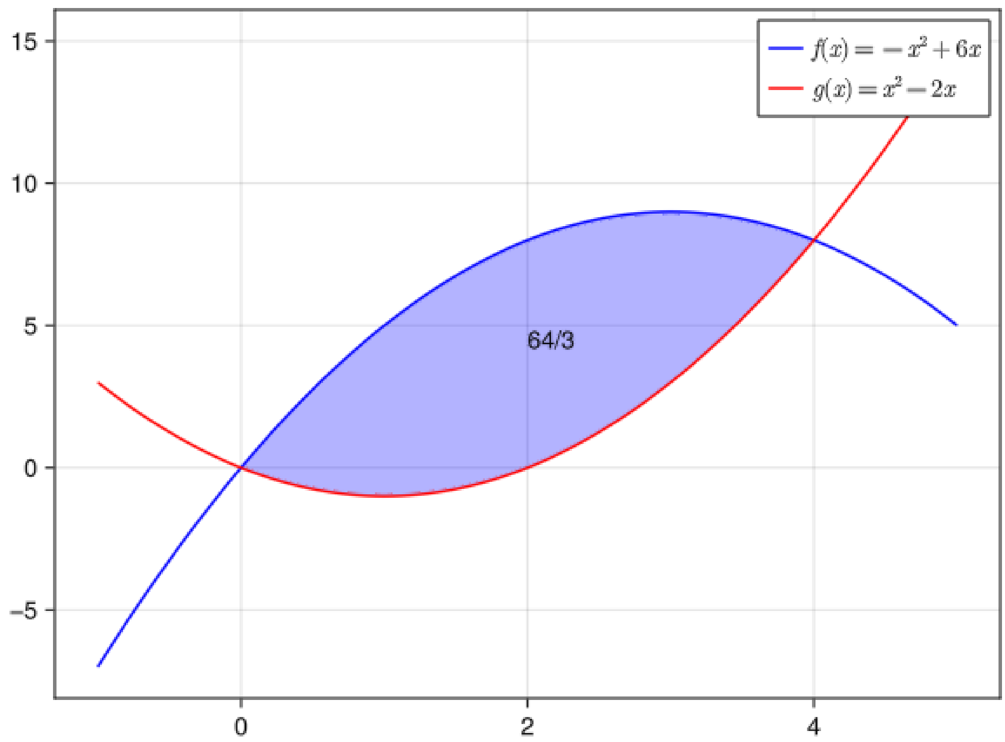
```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = -x^2+6x
g(x) = x^2-2x
# Calculamos primero los puntos de corte de la función.
a, b = solve(f(x)-g(x))
# Calculamos el área comprendida entre las dos funciones entre los puntos de corte.
sol = integrate(f(x)-g(x), (x, a, b))
```

$\frac{64}{3}$

Y ahora dibujamos el área calculada.

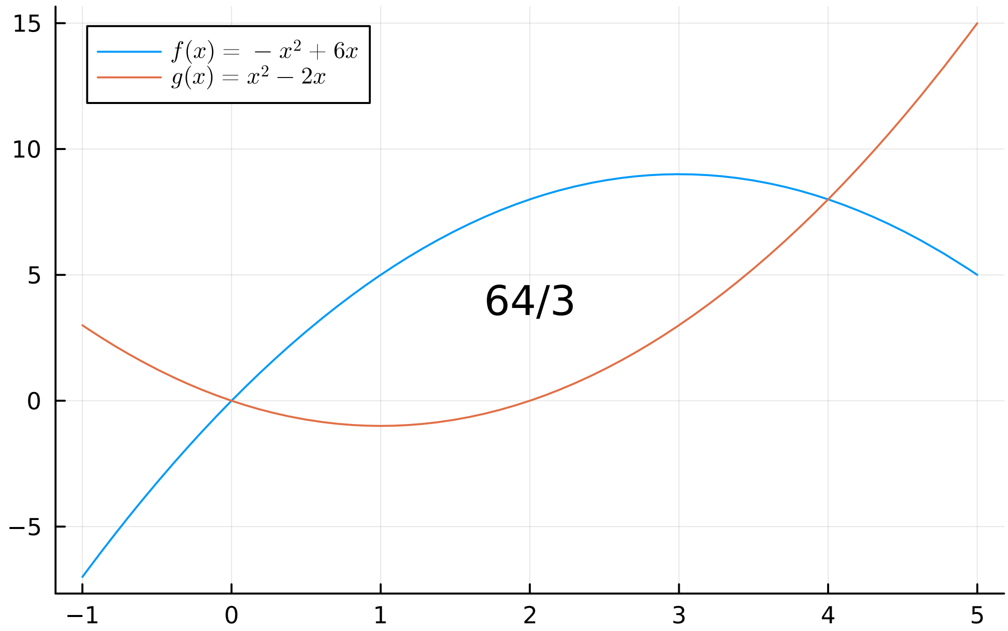
6.4 Makie

```julia
using GLMakie
# Definimos un rango de valores para x.
xs = range(-1, 5, length=100)
# Definimos un rango de valores para x en el intervalo de intersección.
xs2 = range(a, b, length=100)
# Creamos la figura.
fig = Figure()
# Definimos los ejes.
ax = Axis(fig[1, 1])
# Dibujamos la región.
band!(ax, xs2, f.(xs2), g.(xs2), color = :blue, alpha = 0.3)
# Dibujamos la función.
lines!(ax, xs, f.(xs), color = :blue, label = L"$f(x)=-x^2+6x$")
lines!(ax, xs, g.(xs), color = :red, label = L"$g(x)=x^2-2x$")
# Añadimos el area calculada.
text!(2, 4, text = "$sol")
# Añadimos la leyenda.
axislegend(ax)
# Mostramos la figura.
fig
```



6.5 Plots

```
using Plots
Plots.plot!(g, a, b, fillrange = f, fillalpha = 0.3, label = "")
Plots.plot(f, -1, 5, label = L"$f(x)=-x^2+6x$")
Plots.plot!(g, label = L"$g(x)=x^2-2x$")
annotate!(2, 4, sol)
```



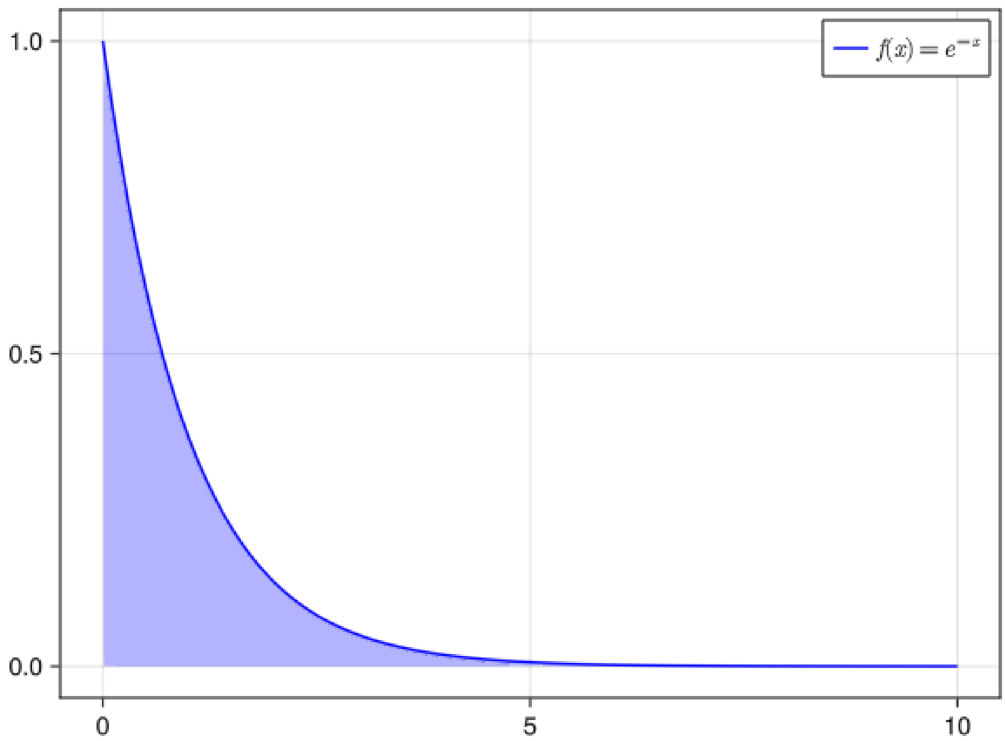
Ejercicio 6.7. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$ y calcular el área total encerrada entre la gráfica y el eje x para $x > 0$.

Solución

Dibujamos primero la gráfica.

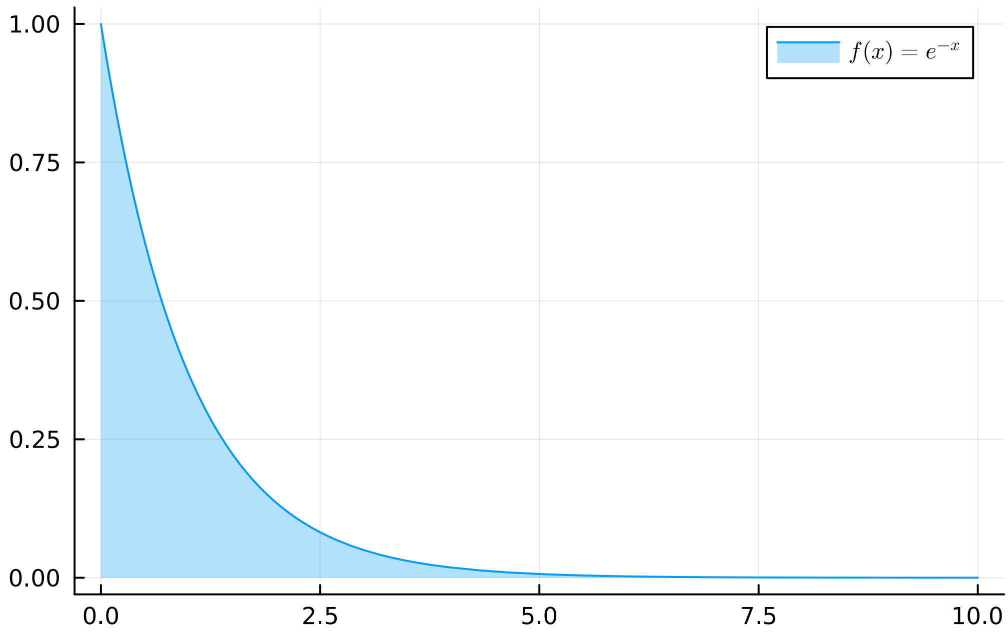
6.6 Makie

```julia
using SymPy, LaTeXStrings, GLMakie
@syms x::real
f(x) = exp(-x)
# Definimos un rango de valores para x.
xs = range(0, 10, length=100)
# Creamos la figura.
fig = Figure()
# Definimos los ejes.
ax = Axis(fig[1, 1])
# Dibujamos la región.
band!(ax, xs, f.(xs), 0, color = :blue, alpha = 0.3)
# Dibujamos la función.
lines!(ax, xs, f.(xs), color = :blue, label = L"$f(x)=e^{-x}$")
# Añadimos la leyenda.
axislegend(ax)
# Mostramos la figura.
fig
```



6.7 Plots

```
using SymPy, LaTeXStrings, Plots
@syms x::real
f(x) = exp(-x)
Plots.plot(f(x), 0, 10, fillrange = 0, fillalpha = 0.3, label = L"$f(x)=e^{-x}$")
```



Y ahora calculamos el área mediante la integral impropia entre 0 y ∞.

```
integrate(f(x), (x, 0, oo))
```

1

Ejercicio 6.8. Dibujar la región encerrada por la curvas polares $f(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ y $g(\theta) = 3\cos(\theta)$ y calcular su área.

Ayuda

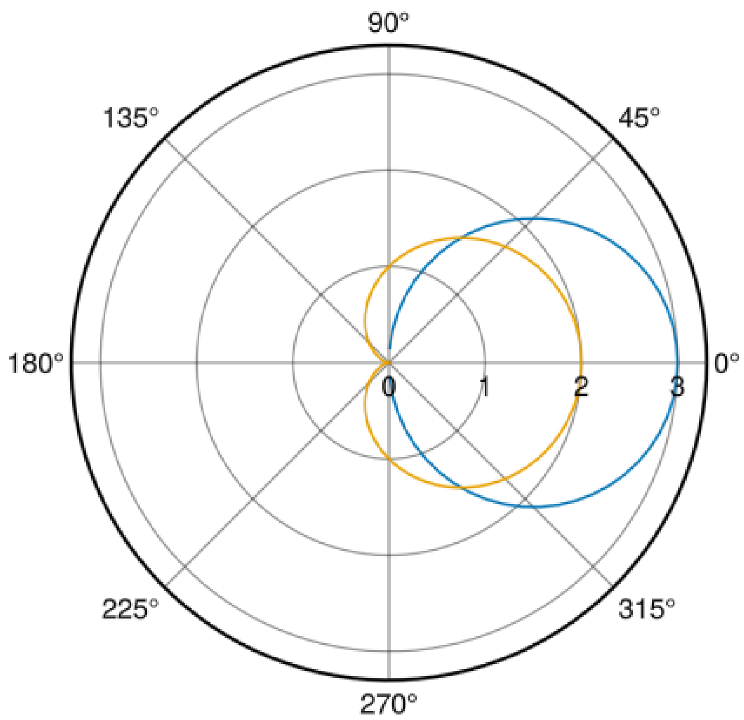
Para dibujar curvas polares se pueden definir los ejes polares con la función `PolarAxis` del paquete `Makie`, o bien se puede usar la función `plot` del paquete `Plots` con el argumento `proj = :polar`.

Solución

Dibujamos primero las curvas polares.

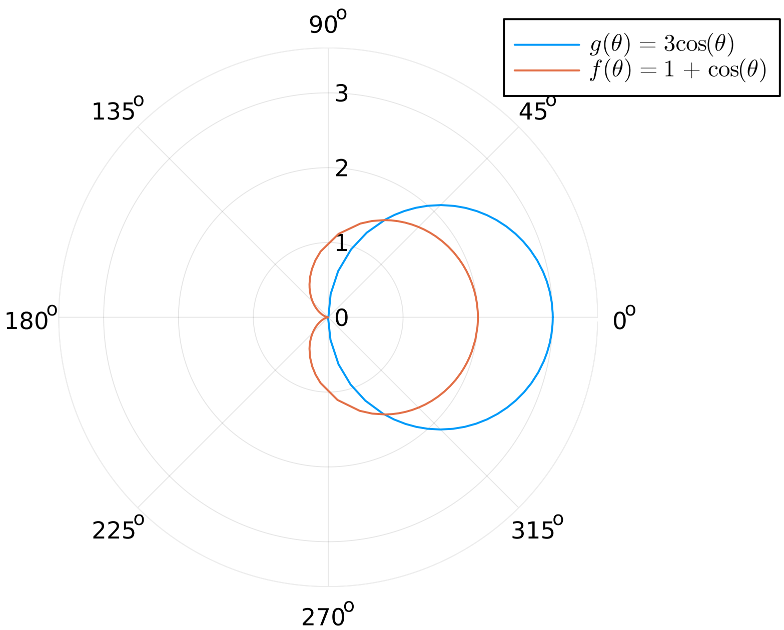
6.8 Makie

```
using SymPy, GLMakie
@syms  ::real
f( ) = 1 + cos( )
g( ) = 3cos( )
# Generamos los valores de
 s = range(0, 2pi, 100)
fig = Figure()
ax = PolarAxis(fig[1, 1], radius_at_origin = 0)
lines!(ax,  s, g.( s), label =  L"g(\theta) = 3\cos(\theta)")
lines!(ax,  s, f.( s), label = L"f(\theta) = 1 + \cos(\theta)")
fig
```



6.9 Plots

```
using SymPy, Plots
@syms  ::real
f( ) = 1 + cos( )
g( ) = 3*cos( )
Plots.plot(g, 0, pi, proj = :polar, label = L"g(\theta) = 3\cos(\theta)")
Plots.plot!(f, 0, 2pi, proj = :polar, label = L"f(\theta) = 1 + \cos(\theta)")
```



Y ahora calculamos el area encerrada entre ellas.

```
# Calculamos los puntos de corte de las funciones.
a, b = solve(f( )-g( ))
# Ajustamos los ángulos para recorrer la región en el sentido correcto.
a, b = b - 2pi, a
# Calculamos el de la región con forma de media luna encerrada entre g y f.
area_luna = integrate(g( )^2/2, ( , a, b)) - integrate(f( )^2/2, ( , a, b))
# Finalmente calculamos el area de g y le restamos el área de la media luna.
N(integrate(g( )^2/2, ( , 0, pi)) - area_luna)
```

```
3.9269908169872414
```

Ejercicio 6.9. Un vehículo se mueve con una velocidad dada por la función $Frsen(t)^2$. ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo $[0, 2\pi]$?

Ayuda

Para calcular el valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ tenemos que calcular la integral definida

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = sin(x)^2
1/(2*PI) * integrate(f(x), (x, 0, 2PI))
```

$\frac{1}{2}$

Ejercicio 6.10. Representar gráficamente la región del primer cuadrante limitada por la función $f(x) = 2 + Frsen(x)$ y el eje x en el intervalo $[0, 2\pi]$ y hallar el volumen del sólido de revolución generado al rotar esta región alrededor del eje x.

Ayuda

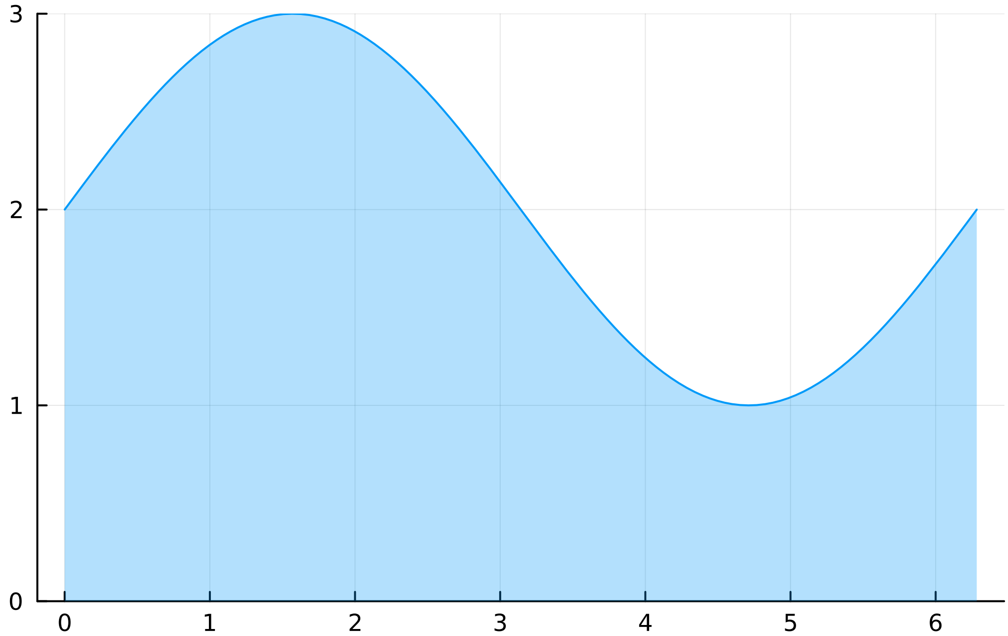
Para calcular el volumen de un sólido de revolución generado al rotar la gráfica de una función $f(x)$ alrededor del eje x en el intervalo $[a,b]$, mediante discos cilíndricos perpendiculares al eje x, hay que calcular la integral definida

$$\int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

Solución

Dibujamos primero la región.

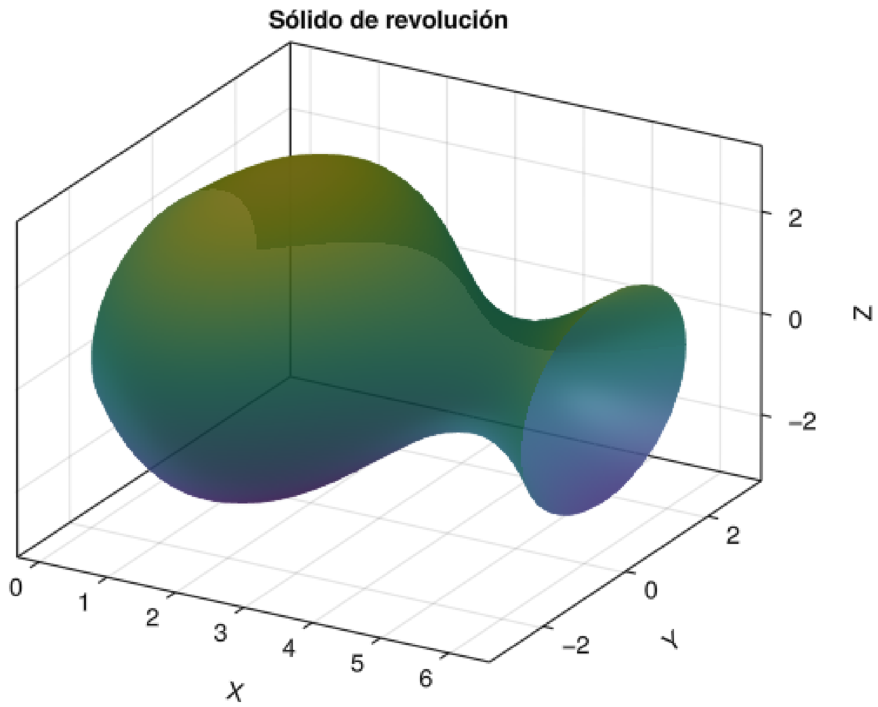
```
using SymPy, Plots
@syms x::real
f(x) = sin(x)+2
Plots.plot(f, 0, 2pi, ylim=(0,3), fillrange = 0, fillalpha = 0.3, label = "")
```



A continuación dibujamos el sólido de revolución parametrizado en 3D.

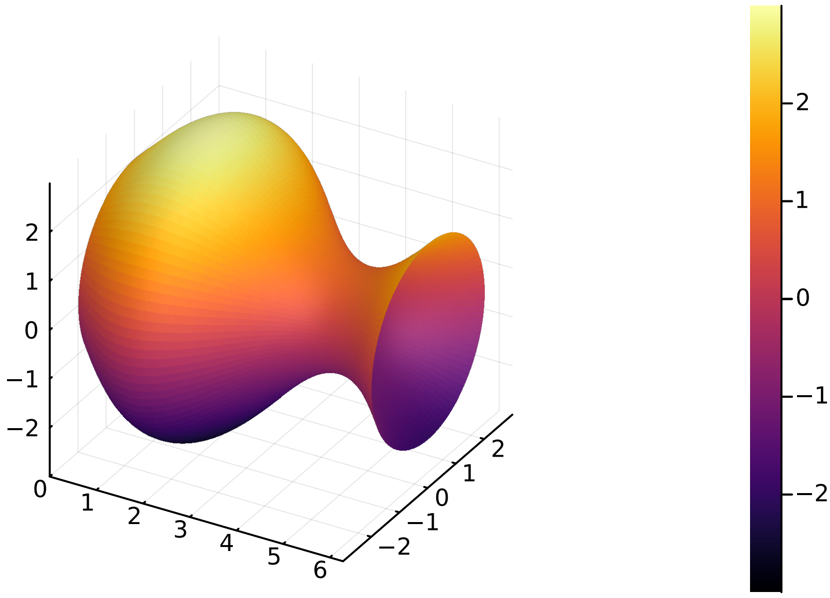
6.10 Makie

```
using GLMakie
# Generamos los valores de x y
x = LinRange(0, 2pi, 100)
 = LinRange(0, 2pi, 100)
# Generamos los valores de X, Y y Z de la superficie de revolución.
xs = [i for i in x, j in ]
ys = [f(i) * cos(j) for i in x, j in ]
zs = [f(i) * sin(j) for i in x, j in ]
# Creamos la figura.
fig = Figure()
# Definimos los ejes.
ax = Axis3(fig[1, 1], azimuth = -pi/3, title = "Sólido de revolución", xlabel = "X", yl
# Dibujamos la superficie de revolución
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs, alpha = 0.9)
# Mostamos la figura.
fig
```



6.11 Plots

```
using CalculusWithJulia
@syms x::real u::real v::real
f(x) = sin(x)+2
S(u, v) = (u, f(u)*cos(v), f(u)*sin(v))
us = range(0, 2pi, length=100)
vs = range(0, 2pi, length=100)
ws = unzip(S.(us, vs'))
Plots.surface(ws...)
```



Finalmente, calculamos el volumen del sólido de revolución.

```
N(integrate(pi*f(x)^2, (x, 0, 2pi)))
```

```
88.82643960980423
```

Ejercicio 6.11. Calcular el volumen del toro que se obtiene al rotar la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y.

Ayuda

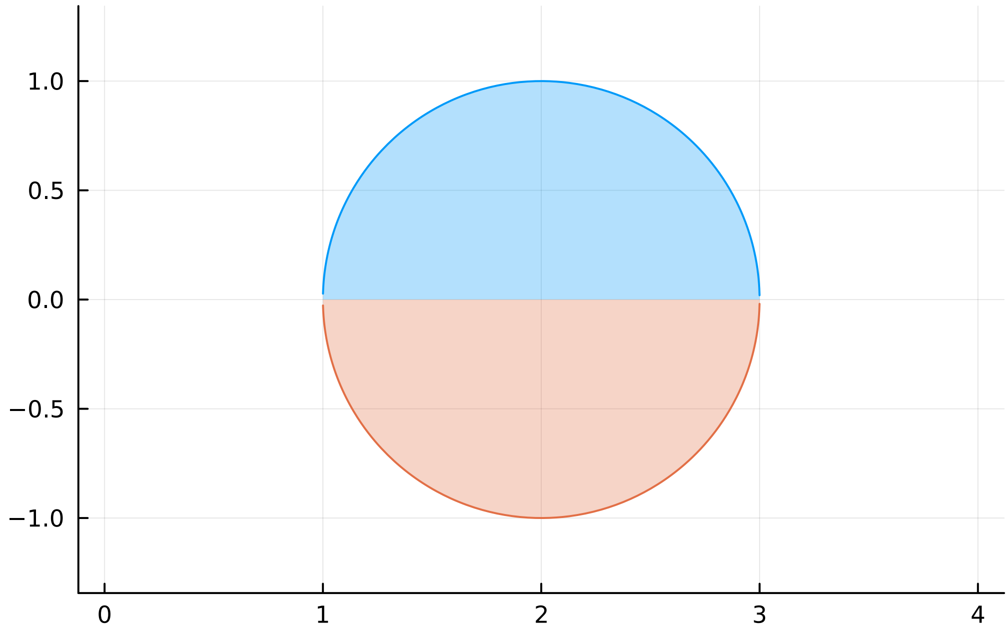
En este caso, usaremos envoltorios cilíndricos para calcular el volumen del sólido de revolución. Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar alrededor del eje y la gráfica de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, mediante envoltorios cilíndricos, hay que calcular la integral definida

$$\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx.$$

Solución

Dibujamos primero la región.

```
using SymPy, Plots
@syms x::real
f(x) = sqrt(1-(x-2)^2)
Plots.plot(f(x), 0, 4, fillrange = 0, fillalpha = 0.3, aspect_ratio = 1, label = "")
Plots.plot!(-f(x), 0, 4, fillrange = 0, fillalpha = 0.3, aspect_ratio = 1, label = "")
```



Para el caso particular del toro, como el círculo que lo genera es simétrico con respecto al eje X, calcularemos la mitad de su volumen aprovechando la simetría y lo multiplicaremos por 2.

```
2 * integrate(2PI*x*f(x), (x, 1, 3))
```

$4\pi^2$

Ejercicio 6.12. Una empresa fabrica tejas de chapa con forma ondulada cuyo perfil viene dado por la curva $y = Frsin\left(\frac{x}{2}\right)$. Si se quieren obtener tejas de 100 cm de longitud, ¿qué longitud tienen que tener las planchas de chapa para fabricarlas?

Ayuda

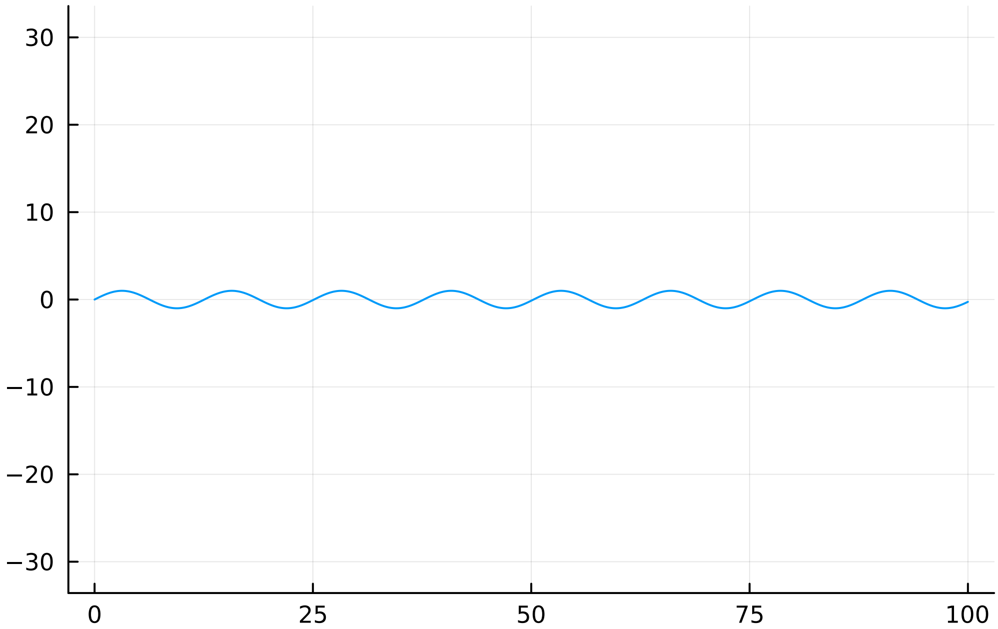
Para calcular la longitud de una curva dada por la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, hay que calcular la integral

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Solución

Dibujamos primero el perfil de las chapas.

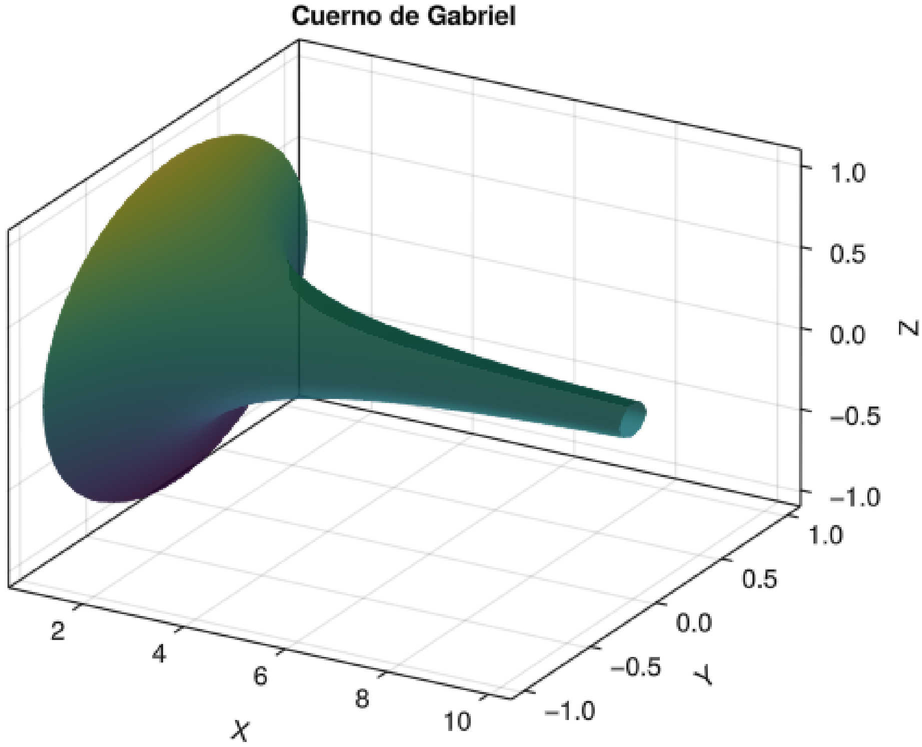
```
using SymPy, Plots
@syms x::real
f(x) = sin(x/2)
Plots.plot(f(x), 0, 100, aspect_ratio = 1, label = "")
```




```
using QuadGK
quadgk(sqrt(1+diff(f(x))^2), 0, 100)
```

```
(105.954416730336, 1.2200227161862642e-6)
```

Ejercicio 6.13. El cuerno de Gabriel es un sólido de revolución que se obtiene al rotar la función $f(x) = 1/x$ alrededor del eje x para $x \geq 1$.



a. El volumen del cuerno de Gabriel.

> **Solución**
>
> Calculamos su volumen mediante discos cilíndricos transversales al eje x.
>
> ```
> using SymPy
> @syms x::real
> f(x) = 1/x
> integrate(PI*f(x)^2, (x, 1, oo))
> ```
>
> π

b. Calcular la superficie del cuerno de Gabriel.

> **Ayuda**
>
> Para calcular la superficie del sólido de revolución que se obtiene al rotar la gráfica de la función $f(x)$ alrededor del eje x en el intervalo $[a, b]$ hay que calcular la integral definida

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = 1/x
integrate(2PI*f(x)*sqrt(1+diff(f(x))^2), (x, 1, oo))
```

∞

Así pues, se da la paradoja de que el cuerno de Gabriel tiene un volumen finito, pero una superficie infinita.

Ejercicio 6.14. Un depósito con forma de sólido de revolución generado al rotar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ alrededor del eje y en el intervalo de 0 a 4 m, contiene 100000 l de aceite con una densidad de $\delta = 900$ kg/m^3. ¿Qué trabajo se realiza al vaciar el depósito por arriba?

Ayuda

Para calcular el trabajo realizado por una fuerza aplicada sobre un objeto y que provoca un desplazamiento desde $x = a$ hasta $x = b$, basta con calcular la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

En este caso, tomando discos cilíndricos perpendiculares al eje y, el volumen de cada disco viene dado por la función $V(y) = \pi f^{-1}(y)^2\Delta y$ y, por tanto, la masa de cada uno de estos discos es $M(y) = \delta\pi f^{-1}(y)^2\Delta y$. Como la única fuerza que actúa sobre la masa es la gravedad, la fuerza aplicada a la masa de cada disco es $F(y) = gM(y) = g\delta\pi f^{-1}(y)^2\Delta y$. Finalmente, como la masa de cada uno de los discos debe elevarse una distancia $4-y$, el trabajo realizado para vaciar el depósito se calcula mediante la integral definida

$$\int_0^h g\delta\pi f^{-1}(y)^2(4-y)\,dy$$

donde h es el nivel del aceite.

Solución

Calculamos primero el nivel del aceite en el depósito. Para ello necesitamos el volumen contenido en el depósito hasta una altura h.

```
using SymPy
@syms x::real y::real
f(x) = x^2/2
f ¹(y) = solve(y-f(x), x)[2]
# Volumen hasta una altura h
V(x) = integrate(PI*f ¹(y)^2, (y, 0, x))
# Nivel para un volumen de 100 m³
nivel = solve(V(x)-100)[2]
```

$\frac{10}{\sqrt{\pi}}$

Ahora calculamos el trabajo realizado al vaciar el depósito por arriba.

```
 = 900
gravedad = 9.81
N(integrate(gravedad* *PI*f ¹(y)^2*(8-y), (y, 0, nivel)))
```

```
3.7423801112379064e6
```

Ejercicio 6.15. Dibujar la región que se obtiene con la intersección de la recta $y = x-1$ y la parábola $y = (x-1)^2$, y dibujar su centroide. ¿Cuál es le volumen del sólido de revolución generado al rotar esta región sobre el eje x? ¿Y al rotarla sobre el eje y?

Ayuda

Para calcular el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de una región plana encerrada por dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ hay que calcular por separado el centro de masas $\bar{x}$ con respecto al eje y, y el centro de masas $\bar{y}$ con respecto al eje x, mediante cociente de las siguientes integrales definidas

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))\,dx}{\int_a^b f(x) - g(x)\,dx}$$

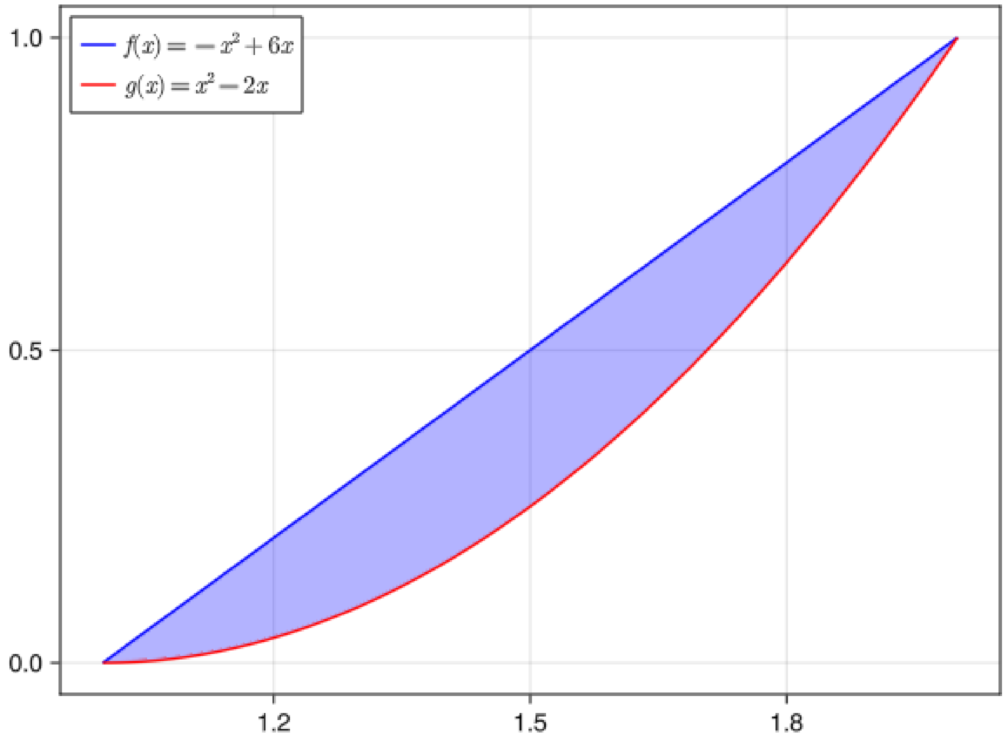
$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2 - g(x)^2\,dx}{\int_a^b f(x) - g(x)\,dx}$$

Solución

Dibujamos primero la región. Para ello hay que calcular primero los puntos de corte de las dos curvas.

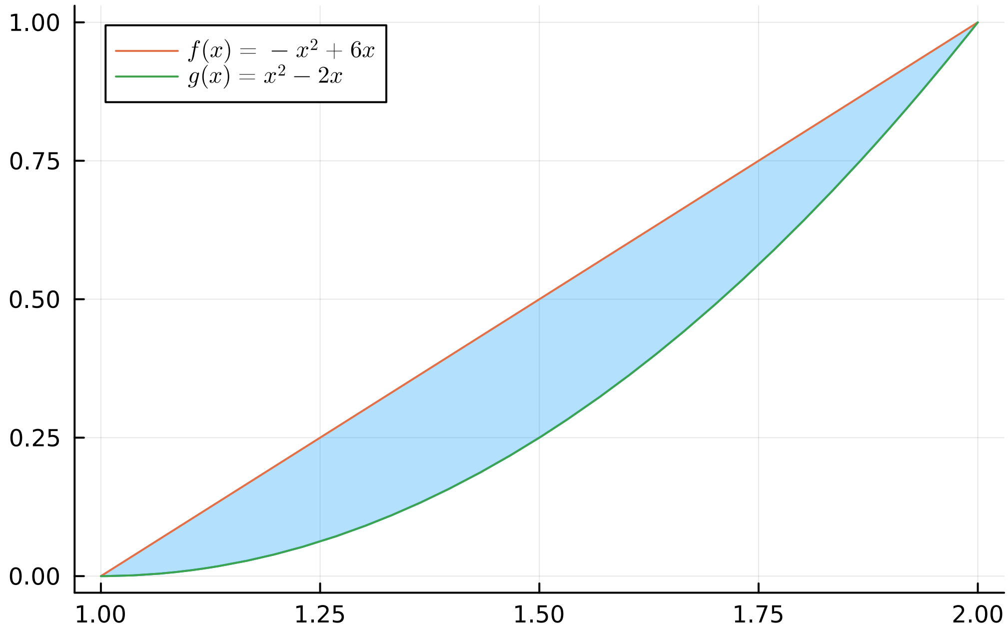
6.12 Makie

```
using SymPy, GLMakie
@syms x::real
f(x) = x-1
g(x) = (x-1)^2
# Calculo de los puntos de corte.
a, b = float(solve(f(x)-g(x)))
# Definimos un rango de valores para x.
xs = range(a, b, length=100)
# Creamos la figura.
fig = Figure()
# Definimos los ejes.
ax = Axis(fig[1, 1])
# Dibujamos la región.
band!(ax, xs, f.(xs), g.(xs), color = :blue, alpha = 0.3)
# Dibujamos la función.
lines!(ax, xs, f.(xs), color = :blue, label = L"$f(x)=-x^2+6x$")
lines!(ax, xs, g.(xs), color = :red, label = L"$g(x)=x^2-2x$")
# Añadimos la leyenda.
axislegend(ax, position = :lt)
# Mostramos la figura.
fig
```



6.13 Plots

```
using SymPy, Plots
@syms x::real
f(x) = x-1
g(x) = (x-1)^2
# Calculo de los puntos de corte.
a, b = float(solve(f(x)-g(x)))
# Dibujamos la región.
Plots.plot(g, a, b, fillrange = f, fillalpha = 0.3, label = "")
# Dibujamos la gráfica de f.
Plots.plot!(f, a, b, label = L"$f(x)=-x^2+6x$")
# Dibujamos la gráfica de g.
Plots.plot!(g, label = L"$g(x)=x^2-2x$")
```



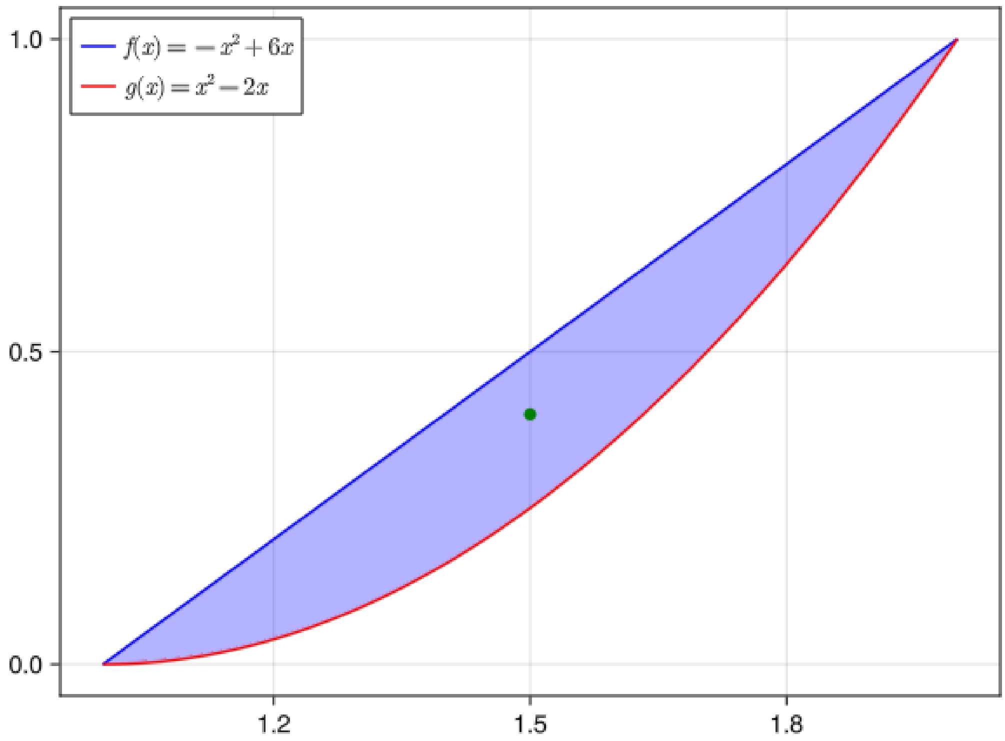
Ahora calculamos el centroide de la región y lo dibujamos.

```
# Coordenada x del centroide.
cx = integrate(x*(f(x)-g(x)), (x, a, b)) / integrate(f(x)-g(x), (x, a, b))
# Coordenada y del centroide
cy = 1/2 * integrate(f(x)^2-g(x)^2, (x, a, b)) / integrate(f(x)-g(x), (x, a, b))
```

0.3999999999999996

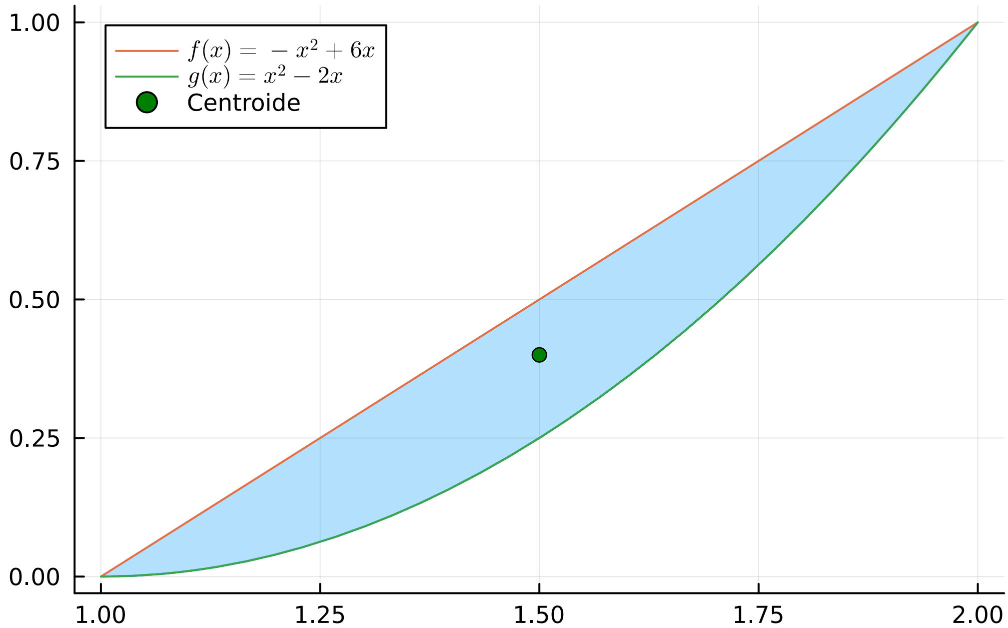
6.14 Makie

```
Makie.scatter!(Point2(cx, cy), color = :green, markersize = 10, label = "Centroide")
fig
```



6.15 Plots

```
Plots.scatter!([cx], [cy], color = :green, label = "Centroide")
```



Para calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar esta región sobre el eje x podemos usar el teorema de Pappus que establece que el volumen es el area de la región multiplicada por la longitud del camino recorrido por el centroide. Al rotar la región sobre el eje x el camino recorrido por el centroide es $2\pi\bar{y}$.

```
2*PI*cy*integrate(f(x)-g(x), (x,a, b))
```

0.133333333333332π

Y al rotarla sobre el eje y el camino recorrido por el centroide es $2\pi\bar{x}$.

```
2*PI*cx*integrate(f(x)-g(x), (x, a, b))
```

0.5π

6.16 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.16. Calcular la suma superior de Riemann de la función $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ en el intervalo $[1, 2]$, tomando una partición de 100 subinvervalos de igual amplitud.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.17. Calcular el area encerrada entre las funciones $f(x) = Frsin(x)$ y $\cos(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.18. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ y calcular el área total encerrada entre la gráfica y el eje x.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.19. Calcular el área encerrada entre las curvas polares $f(\theta) = 2Frsen(3\theta)$ y $g(\theta) = 1$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.20. La función $T(t) = 100te^{-t}$ define la temperatura de un sistema en cada instante t. Calcular la temperatura media en el intervalo $[0, 5]$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.21. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación al rededor del eje x de la región comprendida entre las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = \frac{x-1}{2}$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Calcular también el volumen del sólido de revolución generado al rotar la misma región alrededor del eje y.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.22. La curva $y = a\cosh(x/a)$ se conoce como *catenaria*. ¿Cuál es la longitud de la catenaria con $a = 2$ entre -1 y 1?

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.23. Un depósito metálico tiene la forma del elipsoide que se obtiene al rotar la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$ alrededor del eje x. Calcular la cantidad de chapa metálica necesaria para construir el depósito.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 6.24. La función de densidad del modelo de distribución de probabilidad exponencial Exp(1) es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

☐ La media es menor que la mediana

☐ La media es igual que la mediana

☐ La media es mayor que la mediana.

7 Series de números reales

7.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
using Makie # Para obtener gráficos interactivos.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
using Bessels  # Para definir funciones de Bessel.
```

Ejercicio 7.1. La paradoja de la dicotomía de Zenon establece que para que un corredor pueda recorrer una distancia hasta la meta, primero tiene que recorrer la mitad de la distancia, después la mitad de la distancia restante, después la mitad de la distancia restante, y así hasta el infinito, por lo que, aparentemente, nunca llegaría a la meta.

La serie que calcula la distancia recorrida por el corredor es

$$\sum \frac{1}{2^n}$$

a. Calcular los 50 primeras sumas parciales de la serie.

> **Ayuda**
>
> Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays. Usar la función `cumsum` para realizar sumas parciales.

> **Solución**

7.2 Solución 1

```
a(n) = 1/2^n
an = [a(n) for n = 1:50]
cumsum(an)
```

```
50-element Vector{Float64}:
 0.5
 0.75
 0.875
 0.9375
 0.96875
 0.984375
 0.9921875
 0.99609375
 0.998046875
 0.9990234375
 0.99951171875
 0.999755859375
 0.9998779296875

 0.999999999998181
 0.9999999999990905
 0.9999999999995453
 0.9999999999997726
 0.9999999999998863
 0.9999999999999432
 0.9999999999999716
 0.9999999999999858
 0.9999999999999929
 0.9999999999999964
 0.9999999999999982
 0.9999999999999991
```

7.3 Solución 2

```
a(n) = 1/2^n
A(n) = sum(a, 1:n)
An = [A(n) for n = 1:50]
```

```
50-element Vector{Float64}:
 0.5
 0.75
 0.875
 0.9375
 0.96875
 0.984375
 0.9921875
```

```
0.99609375
0.998046875
0.9990234375
0.99951171875
0.999755859375
0.9998779296875
⋮
0.999999999998181
0.9999999999990905
0.9999999999995453
0.9999999999997726
0.9999999999998863
0.9999999999999432
0.9999999999999716
0.9999999999999858
0.9999999999999929
0.9999999999999964
0.9999999999999982
0.9999999999999991
```

b. Dibujar en una gráfica las primeras sumas parciales de la serie.

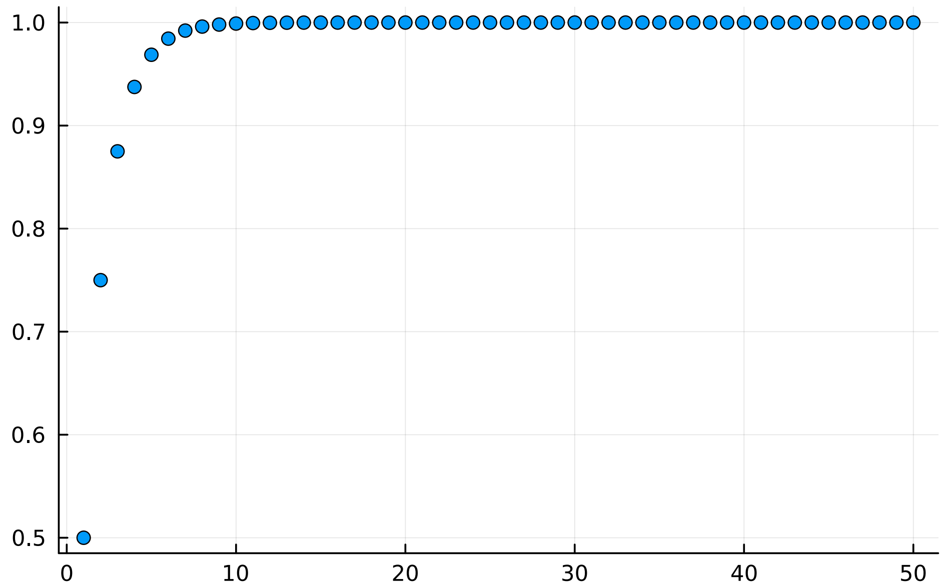
Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior y usar la función `cumsum` para calcular las sumas parciales. Después usar la función `scatter` del paquete `Plots`, o bien la función `scatter` del paquete `Makie`, para dibujar el array de las sumas parciales.

Solución

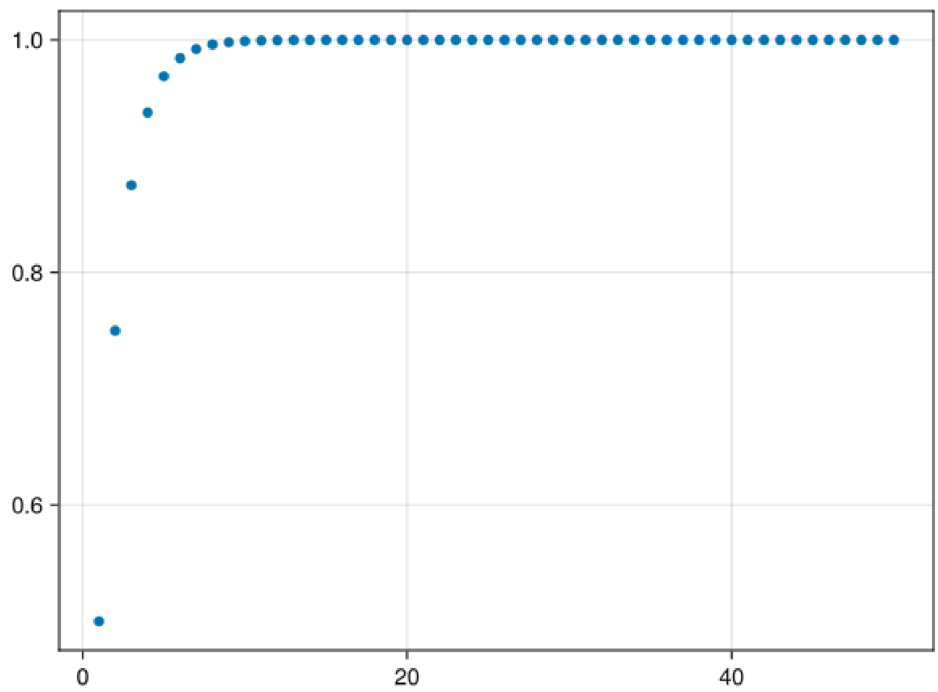
7.4 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
Plots.scatter(An, legend=false)
```



7.5 Makie

```
using GLMakie
Makie.scatter(An)
```



c. ¿Es cierto que el corredor nunca llegará a la meta?

Solución

No, porque la serie converge a 1.

Ejercicio 7.2. Calcular las 50 primeras sumas parciales de la serie $\sum \frac{1}{n!}$ empezando en $n = 0$. ¿Cuántas cifras decimales del número e son correctas en la última suma parcial?

Ayuda

Para que no se desborde cálculo del factorial deben usarse enteros de la clase `BigInt`.

Solución

```
a(n) = 1/factorial(big(n))
an = [a(n) for n = 0:50]
An = cumsum(an)
decimales = round(abs(log10(abs( -last(An)))))
println(An)
println("Cifras del número e correctas: $decimales")
```

```
BigFloat[1.0, 2.0, 2.5, 2.666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
Cifras del número e correctas: 66.0
```

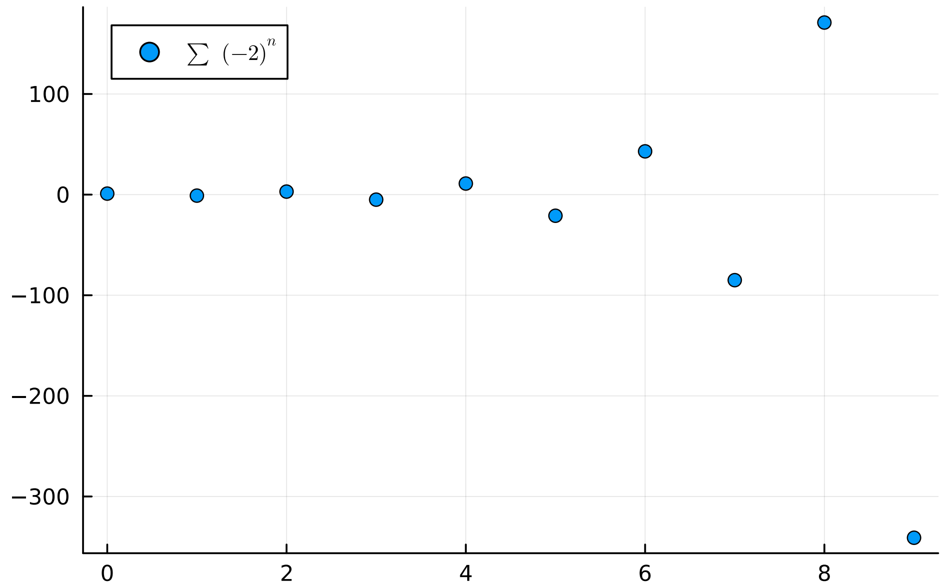
Ejercicio 7.3. Dibujar una gráfica con los 10 primeros términos de las series geométricas $\sum r^n$ para $r = -2$, $r = -1/2$, $r = 1/2$ y $r = 2$. ¿Para qué valores de r crees que converge la serie?

Solución

a. $r = -2$.

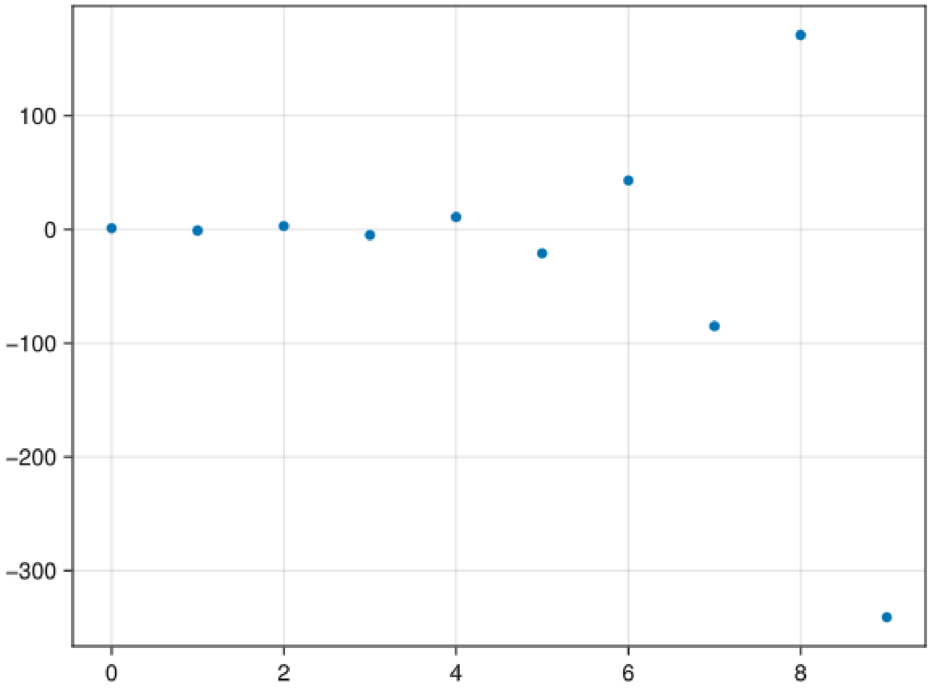
7.6 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
an = [(-2)^n for n = 0:9]
Plots.scatter(0:9, cumsum(an), label=L"$\sum (-2)^n$")
```



7.7 Makie

```
using GLMakie
an = [(-2)^n for n = 0:9]
Makie.scatter(0:9, cumsum(an))
```

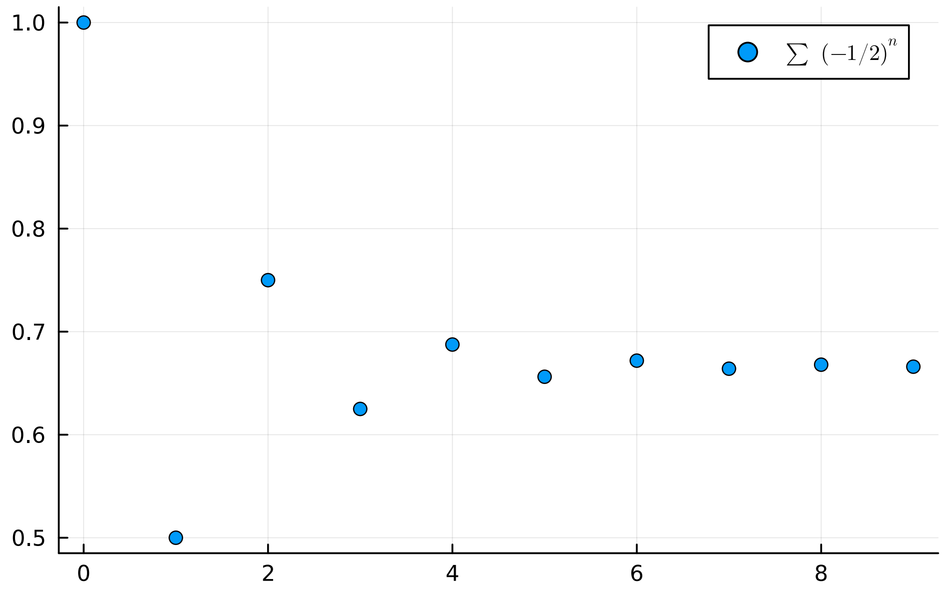


La serie diverge.

b. $r = -1/2$.

7.8 Plots

```
bn = [(-1/2)^n for n = 0:9]
Plots.scatter(0:9, cumsum(bn), label=L"$\sum (-1/2)^n$")
```



7.9 Makie

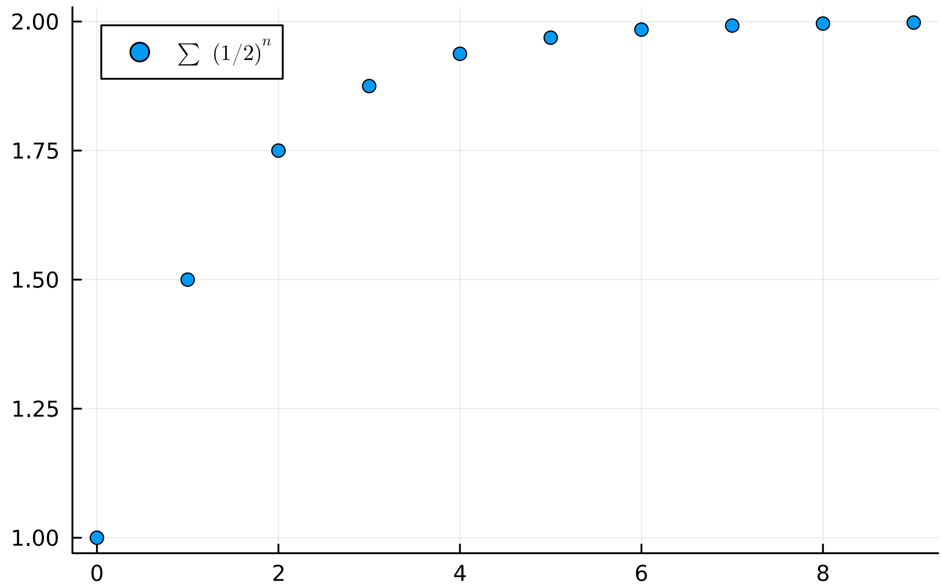
```
bn = [(-1/2)^n for n = 0:9]
Makie.scatter(0:9, cumsum(bn))
```

La serie converge.

c. $r = 1/2$.

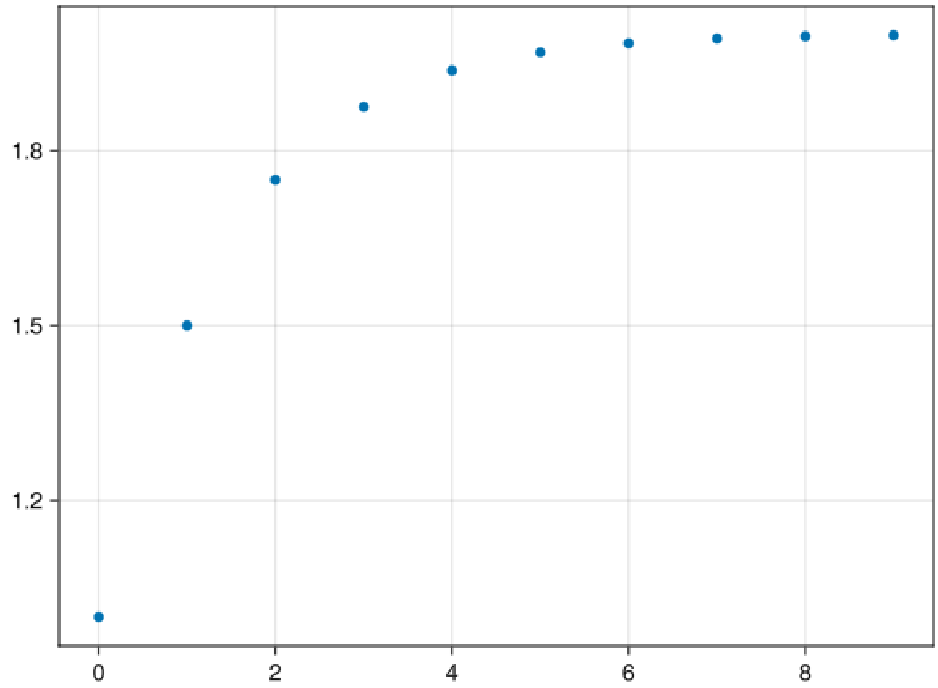
7.10 Plots

```
cn = [(1/2)^n for n = 0:9]
Plots.scatter(0:9, cumsum(cn), label=L"$\sum (1/2)^n$")
```



7.11 Makie

```
cn = [(1/2)^n for n = 0:9]
Makie.scatter(0:9, cumsum(cn))
```

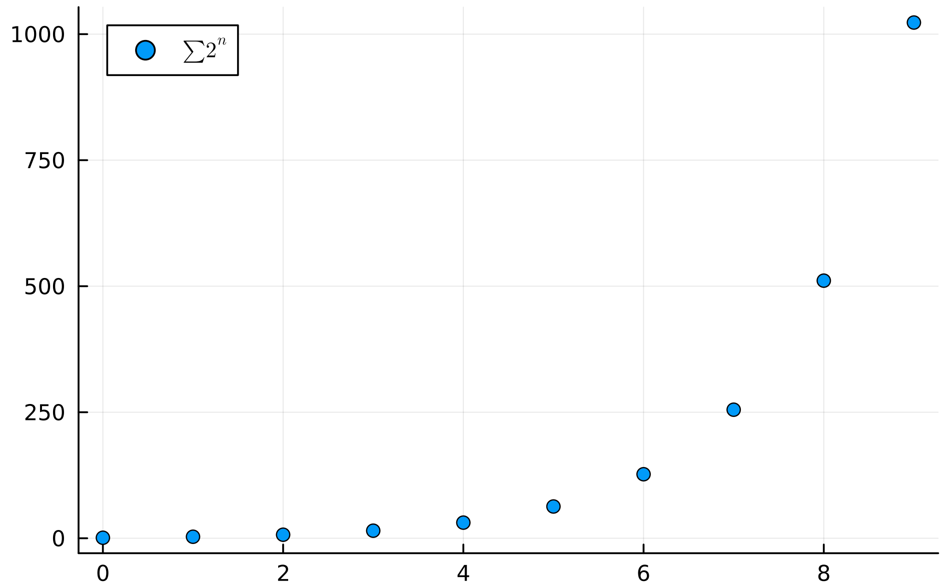


La serie converge.

d. $r = 2$.

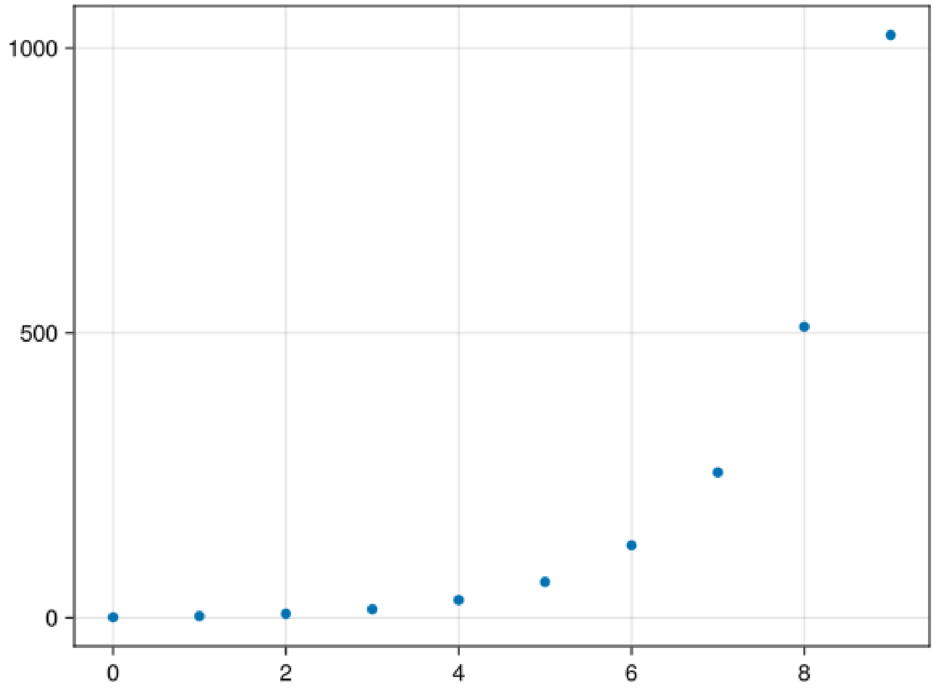
7.12 Plots

```
dn = [2^n for n = 0:9]
Plots.scatter(0:9, cumsum(dn), label=L"$\sum 2^n$")
```



7.13 Makie

```
dn = [2^n for n = 0:9]
Makie.scatter(0:9, cumsum(dn))
```



La serie diverge.

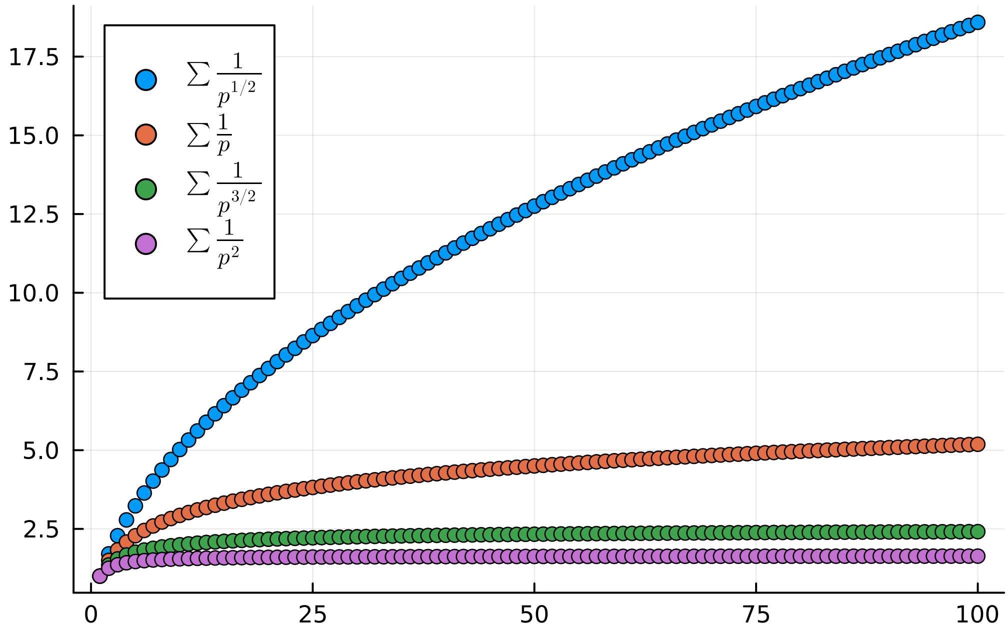
Se puede concluir que la serie converge para $|r| < 1$.

Ejercicio 7.4. Dibujar en la misma gráfica los 100 primeros términos de las series $\sum \frac{1}{n^p}$ para $p = 1/2$, $p = 1$, $p = 3/2$ y $p = 2$.

¿Para qué valores de p crees que la serie converge?

Solución

```
using Plots, LaTeXStrings
a(n,p) = 1/n^p
an = [a(n,1/2) for n = 1:100]
Plots.scatter(cumsum(an), label=L"$\sum \frac{1}{p^{1/2}}$", legend=:topleft)
bn = [a(n,1) for n = 1:100]
Plots.scatter!(cumsum(bn), label=L"$\sum \frac{1}{p}$")
cn = [a(n,3/2) for n = 1:100]
Plots.scatter!(cumsum(cn), label=L"$\sum \frac{1}{p^{3/2}}$")
dn = [a(n,2) for n = 1:100]
Plots.scatter!(cumsum(dn), label=L"$\sum \frac{1}{p^2}$")
```



Se puede concluir que la serie converge para $p > 1$.

Ejercicio 7.5. Una suma parcial de cualquier serie convergente se puede utilizar como aproximación de la suma de la serie. La aproximación será mejor cuanto mayor sea el orden de la serie parcial, pero depende de la velocidad a la que la serie converja a su suma. En el caso de las series alternadas que converjan, el error en la estimación de la suma mediante la suma parcial de orden n siempre es menor o igual que el término de n de la sucesión correspondiente, es decir, para la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$, se cumple que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i\right| \leq a_n$$

Calcular la suma aproximada de las siguientes series alternadas con un error menor de 10^{-10}. ¿Cuál es la primera suma parcial que da esa aproximación?

a. $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$

Solución

```
error = 10^-10
a(n) = (-1)^n/factorial(n)
i = 0
while abs(a(i)) > error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i")
println("Aproximación: $(sum(a, 0:i))")
```

```
Suma parcial de orden 14
Aproximación: 0.36787944117216204
```

b. $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$

Solución

```
error = 10^-10
a(n) = (-1)^n*log(n)/n^2
i = 2
while abs(a(i)) > error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i")
println("Aproximación: $(sum(a, 2:i))")
```

```
Suma parcial de orden 357592
Aproximación: 0.10131657821350423
```

Ejercicio 7.6. Usar las sumas parciales de las siguientes series para calcular de manera aproximada el valor de π. ¿Hasta qué orden de la suma parcial es necesario llegar para obtener una error menor de 10^{-4}? ¿Qué serie converge más rápidamente?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Ayuda

Usar el hecho de que la suma de la serie de Basilea es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

💡 Solución

```julia
using SymPy
@syms x::real
a(n) = 1/n^2
error = 10^-4
i = 1
while integrate(a(x), (x, i, oo)) > error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i: $(sqrt(6*sum(a, 1:i)))")
```

```
Suma parcial de orden 10000: 3.1414971639472102
```

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

ℹ Ayuda

Usar el hecho de que la suma de la serie de Leibniz es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

💡 Solución

```julia
using SymPy
@syms x::real
a(n) = (-1)^n/(2n+1)
error = 10^-4
i = 0
while abs(a(i)) > error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i: $(4*sum(a, 0:i))")
```

```
Suma parcial de orden 5000: 3.1417926135957948
```

Ejercicio 7.7. Calcular hasta la suma funcional parcial de orden 9 de la serie de Maclaurin para la función $Frarctg(x)$. Deducir el término general de la serie y estudiar su radio de convergencia.

Se puede probar que esta serie también converge en $x = 1$. Usar este hecho para calcular el valor de π con un error menor de 10^-8.

Ayuda

Para calcular polinomios de Taylor utilizar la función `series` del paquete `SymPy`. Para calcular el radio de convergencia utilizar el criterio de la razón para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias.

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
p(n) = SymPy.series(atan(x), x, 0, n+1).removeO()
for i = 1:5
    println("Suma funcional parcial de grado $(2i-1): $(p(2i-1))")
end
```

```
Suma funcional parcial de grado 1: x
Suma funcional parcial de grado 3: -x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 5: x^5/5 - x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 7: -x^7/7 + x^5/5 - x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 9: x^9/9 - x^7/7 + x^5/5 - x^3/3 + x
```

El término general de la serie es $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, y por tanto, se trata de una serie alternada.

```
@syms n::integer
c(n) = (-1)^(n-1)/(2n-1)
limit(abs(c(n)/c(n+1)), n => Inf)
```

1

El radio de convergencia es $R = 1$, y por tanto la serie converge para $-1 < x < 1$. En realidad, su dominio de convergencia es $[-1, 1]$.

```
error = 10^-8
i = 0
while abs(c(i)) >= error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i")
println("Aproximación de  : $(4*sum(c, 1:i))")
```

```
Suma parcial de orden 50000001
Aproximación de  : 3.141592673589794
```

Ejercicio 7.8. La función de Bessel de orden 0 se obtiene a partir de la suma de la serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Esta función sirve, entre otras cosas, para explicar la distribución de temperaturas en una lámina circular o las vibraciones de una membrana.

a. Calcular el radio de convergencia de la función de Bessel.

> **Ayuda**
>
> Utilizar el criterio de la razón para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias.

> **Solución**

```julia
using SymPy
@syms n::integer
c(n) = (-1)^n*1/(2^(2n)*factorial(n)^2)
limit(abs(c(n)/c(n+1)), n => Inf)
```

∞

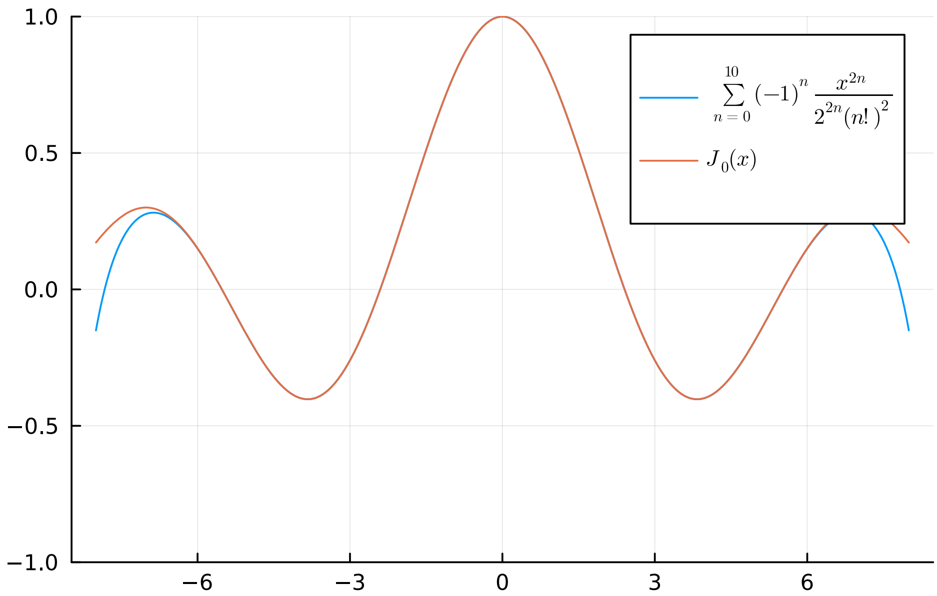
La serie converge para todo $\mathbb{R}$.

b. Dibujar en una misma gráfica la suma funcional parcial de orden 10 de la serie y la función de Bessel de orden 0.

> **Ayuda**
>
> Usar el paquete `Bessels` para dibujar la función de Bessel de orden 0.

> **Solución**

```julia
using Plots, LaTeXStrings, Bessels
@syms x::real
a(x,n) = (-1)^n/(2^(2n)*factorial(n)^2) * x^(2n)
N = 10
an = [a(x,n) for n=0:N]
An = sum(an)
Plots.plot(An, -8, 8,  ylims = (-1,1), label=L"$\sum_{n=0}^{10} (-1)^n\frac{x^{2n}
Plots.plot!(besselj0, label = L"$J_0(x)$")
```



La serie converge para todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.9. Una serie de Fourier es una serie cuyo término general se construye combinando funciones sinusoidales simples (como senos y cosenos) que converge puntualmente a una función periódica continua. La forma general de una serie de Fourier es

$$a_0 + \sum a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n Frsen\left(\frac{2n\pi}{T}t\right),$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier y T es el periodo.

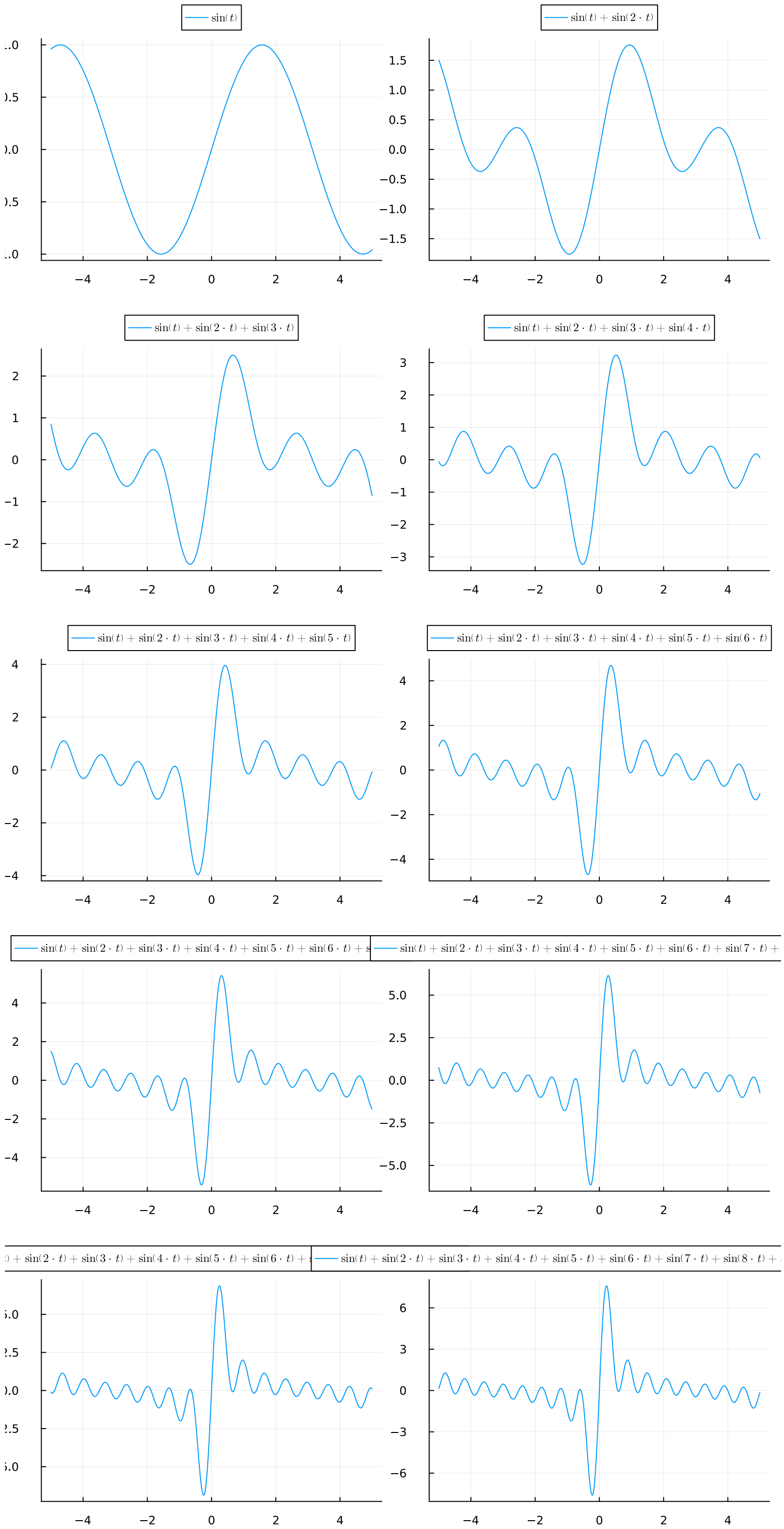
Las series de Fourier son muy útiles para aproximar funciones periódicas que describen las ondas, por lo que se utilizan a menudo para modelizar procesos que involucran sonido, imágenes o corriente eléctrica.

Dibujar las gráficas las 10 primeras sumas parciales de las siguientes series de Fourier y predecir hacia qué función convergen.

a. $\sum Frsen(nt)$

Solución

```
using Plots, SymPy, Latexify
@syms t::real
a(t,n) = sin(n*t)
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = []  # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, Plots.plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
Plots.plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```



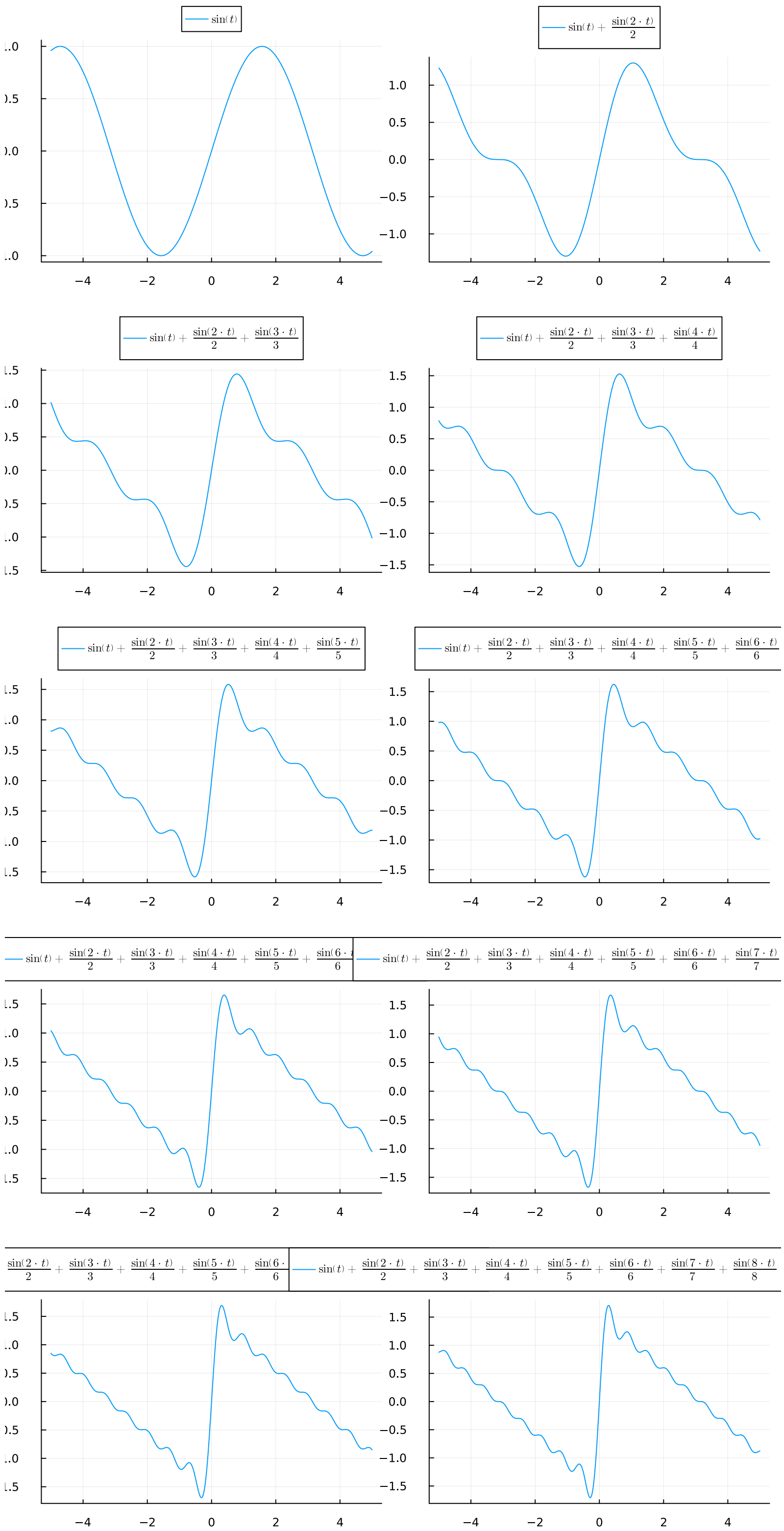
sin(t)
sin(t) + sin(2 · t)
sin(t) + sin(2 · t) + sin(3 · t)
sin(t) + sin(2 · t) + sin(3 · t) + sin(4 · t)
sin(t) + sin(2 · t) + sin(3 · t) + sin(4 · t) + sin(5 · t)
sin(t) + sin(2 · t) + sin(3 · t) + sin(4 · t) + sin(5 · t) + sin(6 · t)
sin(t) + sin(2 · t) + sin(3 · t) + sin(4 · t) + sin(5 · t) + sin(6 · t) +
sin(t) + sin(2 · t) + sin(3 · t) + sin(4 · t) + sin(5 · t) + sin(6 · t) + sin(7 · t) +
+ sin(2 · t) + sin(3 · t) + sin(4 · t) + sin(5 · t) + sin(6 · t) +
sin(t) + sin(2 · t) + sin(3 · t) + sin(4 · t) + sin(5 · t) + sin(6 · t) + sin(7 · t) + sin(8 · t) +

Converge aproximadamente a la función de tipo *pulso*, que se anula en todo su dominio excepto en los puntos $x = 2n\pi$ donde se produce discontinuidad de salto.

b. $\sum \frac{Frsen(nt)}{n}$

Solución

```
using Plots, SymPy, Latexify
@syms t::real
a(t,n) = sin(n*t)/n
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = []  # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, Plots.plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
Plots.plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```

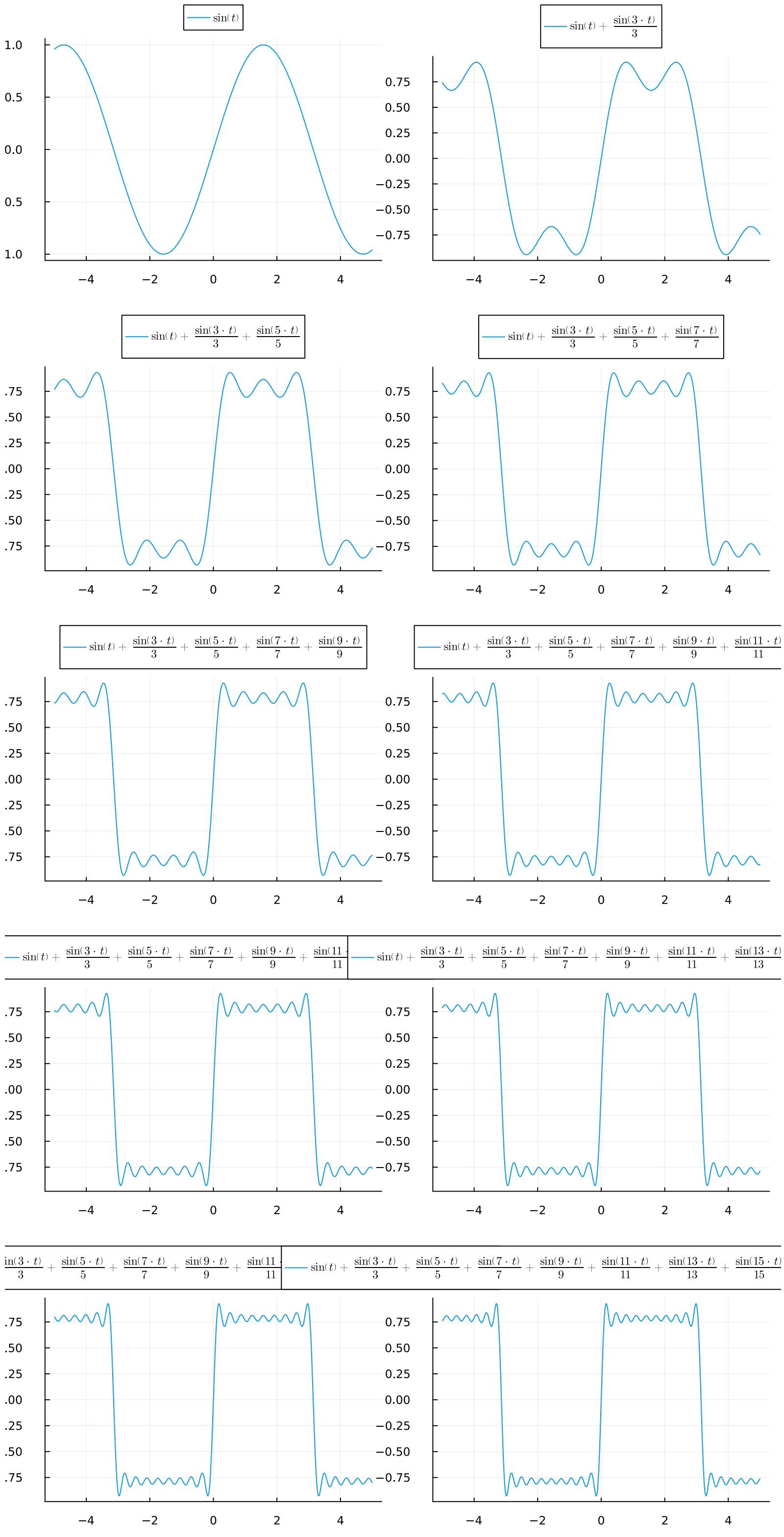

$\sin(t)$
$\sin(t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2}$
$\sin(t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3}$
$\sin(t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3} + \frac{\sin(4 \cdot t)}{4}$
$\sin(t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3} + \frac{\sin(4 \cdot t)}{4} + \frac{\sin(5 \cdot t)}{5}$
$\sin(t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3} + \frac{\sin(4 \cdot t)}{4} + \frac{\sin(5 \cdot t)}{5} + \frac{\sin(6 \cdot t)}{6}$
$\sin(t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3} + \frac{\sin(4 \cdot t)}{4} + \frac{\sin(5 \cdot t)}{5} + \frac{\sin(6 \cdot t)}{6} + \frac{\sin(7 \cdot t)}{7}$
$\sin(t) + \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3} + \frac{\sin(4 \cdot t)}{4} + \frac{\sin(5 \cdot t)}{5} + \frac{\sin(6 \cdot t)}{6} + \frac{\sin(7 \cdot t)}{7} + \frac{\sin(8 \cdot t)}{8}$

Converge aproximadamente a la función de tipo *diente de sierra* con periodo 2π.

c. $\sum \frac{Frsen((2n-1)t)}{2n-1}$

Solución

```
using Plots, SymPy, Latexify
@syms t::real
a(t,n) = sin((2n-1)t)/(2n-1)
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = []  # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, Plots.plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
Plots.plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```


sin(t)
sin(t) + sin(3 · t)/3
sin(t) + sin(3 · t)/3 + sin(5 · t)/5
sin(t) + sin(3 · t)/3 + sin(5 · t)/5 + sin(7 · t)/7
sin(t) + sin(3 · t)/3 + sin(5 · t)/5 + sin(7 · t)/7 + sin(9 · t)/9
sin(t) + sin(3 · t)/3 + sin(5 · t)/5 + sin(7 · t)/7 + sin(9 · t)/9 + sin(11 · t)/11
sin(t) + sin(3 · t)/3 + sin(5 · t)/5 + sin(7 · t)/7 + sin(9 · t)/9 + sin(11 · t)/11 + sin(13 · t)/13
sin(t) + sin(3 · t)/3 + sin(5 · t)/5 + sin(7 · t)/7 + sin(9 · t)/9 + sin(11 · t)/11 + sin(13 · t)/13 + sin(15 · t)/15

Converge aproximadamente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 & \text{si } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ -0.75 & \text{si } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \end{cases}$$

7.14 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.10. Calcular la suma parcial de orden 100 de las siguientes series (empezando en $n = 1$):

a. $\sum \frac{1}{n2^n}$

*Hint: *

Introducir hasta 20 decimales

b. $\sum \frac{n!}{n^n}$

*Hint: *

Introducir hasta 40 decimales

Ejercicio 7.11. Dibujar las 100 primeras sumas parciales de las siguientes series y determinar cuáles convergen.

- ☐ $$\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$$
- ☐ $$\sum n!/n^n$$
- ☐ $$\sum \frac{\ln(n)}{n}$$
- ☐ $$\sum \cos(1/n)$$
- ☐ $$\sum \frac{e^{1/n}}{n}$$

(*Select one or more*)

Ejercicio 7.12. ¿Hasta qué suma parcial de la serie de Maclaurin de la función e^x hay que llegar para aproximar el número $\sqrt{e}$ con un error menor de 10^{-50}?

Ejercicio 7.13. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

a. $\sum \frac{(x-2)^n}{n5^n}$

b. $\sum \frac{2^n(x-2)^n}{\sqrt{(n+3)}}$

Ejercicio 7.14. La fuerza que ejerce la gravedad que actúa sobre un cuerpo de masa m a una altura h sobre la superficie de la Tierra viene dada por la fórmula

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra (tomar un radio medio 6371 km) y g es la aceleración de la gravedad (tomar 9.81 m/s^2). Expresar F como una serie de potencias de h/R y usarla para dar la aproximación de cuarto grado de F para $h = 100$ m. ¿Cuál es error relativo cometido en la aproximación?

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

Aplicar el teorema de la serie alternada para dar una cota superior del error relativo cometido en la aproximación anterior.

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

Ejercicio 7.15. ¿Cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la serie de Fourier

$$\sum (-1)^n \frac{Frsen((2n-1)t)}{(2n-1)^2} \ ?$$

insert image here

8 Funciones vectoriales

8.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
using Makie, GLMakie # Para el dibújo de gráficas en 3d.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
using LinearAlgebra # Para el módulo, producto escalar y vectorial de vectores.
using Roots # Para calcular soluciones de ecuaciones numéricamente.
```

Ejercicio 8.1. Representar gráficamente los vectores $\mathbf{u} = (3, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2)$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ en el plano real $\mathbb{R}^2$.

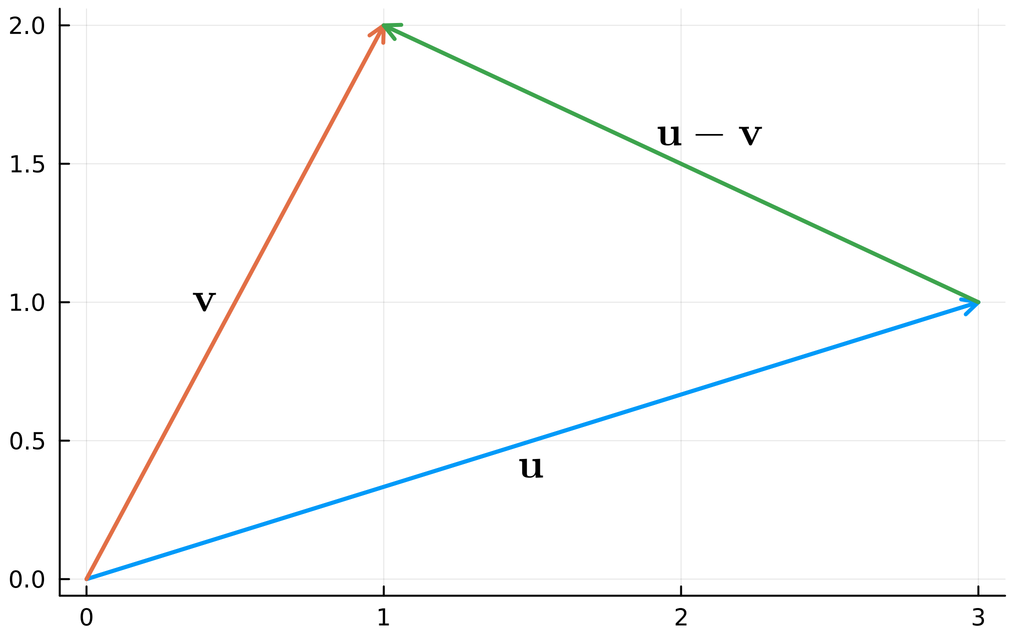
Ayuda

Usar la función `plot` del paquete `Plots`, añadiendo el parámetro `arrow = true` para dibujar flechas que representan vectores. También se puede usar la función `arrows!` del paquete `Makie` para dibujar flechas.

Solución

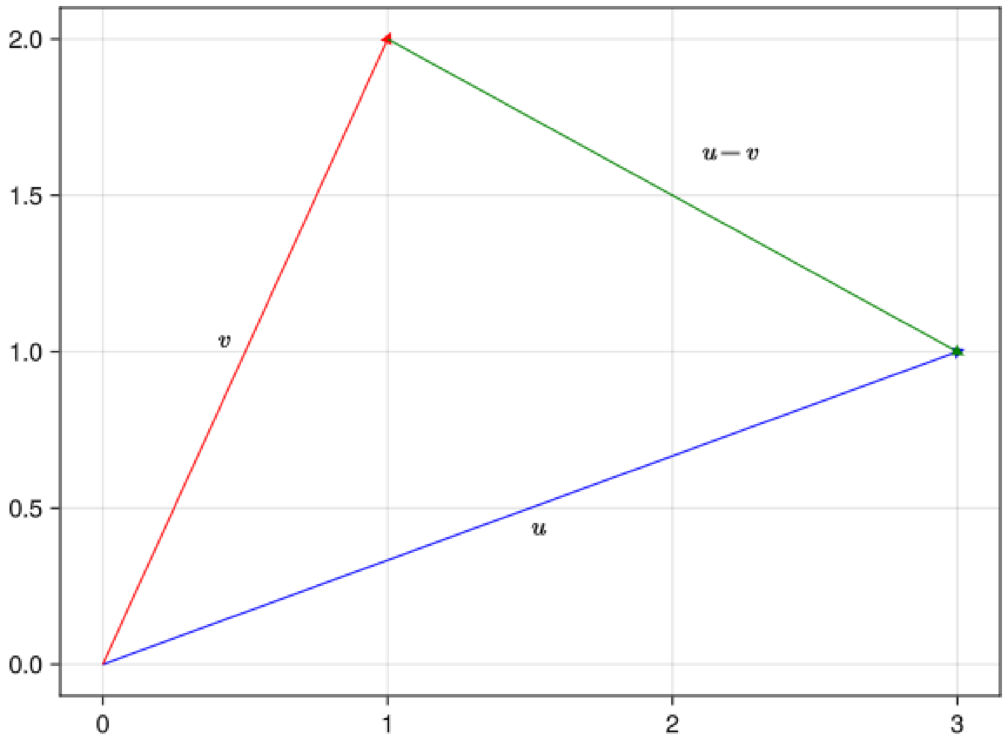
8.2 Plots

```
using Plots
using LaTeXStrings
Plots.plot([0, 3], [0, 1], arrow = true, linewidth = 2, legend = false)
annotate!(1.5, 0.4, L"$\mathbf{u}$")
Plots.plot!([0, 1], [0, 2], arrow = true, linewidth = 2)
annotate!(0.4, 1, L"$\mathbf{v}$")
Plots.plot!([3, 1], [1, 2], arrow = true, linewidth = 2)
annotate!(2.1, 1.6, L"$\mathbf{u}-\mathbf{v}$")
```



8.3 Makie

```
using GLMakie
using LaTeXStrings
o = Point2(0, 0)
u = Vec2(3, 1)
v = Vec2(1, 2)
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
arrows!(ax, [o], [u], color = :blue)
text!(ax, 1.5, 0.4, text = L"$\mathbf{u}$")
arrows!(ax, [o], [v], color = :red)
text!(ax, 0.4, 1, text = L"$\mathbf{v}$")
arrows!(ax, [o+v], [u-v], color = :green)
text!(ax, 2.1, 1.6, text = L"$\mathbf{u}-\mathbf{v}$")
fig
```



Ejercicio 8.2. Sean $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ y $\mathbf{v} = (3, 0, 2)$ dos vectores del espacio real $\mathbb{R}^3$.

a. Calcular el módulo (norma) de ambos vectores y construir vectores unitarios con su misma dirección.

> **Ayuda**
>
> Usar la función `norm` del paquete `LinearAlgebra` para calular el módulo de un vector.

> **Solución**

```
using LinearAlgebra
u = [-1, 2, -1]
v = [-2, 0, 1]
println("Módulo de u: $(norm(u))")
println("Módulo de v: $(norm(v))")
println("Vector unitario con la dirección de u $(u/norm(u))")
println("Vector unitario con la dirección de v $(v/norm(v))")
```

```
Módulo de u: 2.449489742783178
Módulo de v: 2.23606797749979
Vector unitario con la dirección de u [-0.4082482904638631, 0.8164965809277261, -0
Vector unitario con la dirección de v [-0.8944271909999159, 0.0, 0.447213595499957
```

b. Calcular su producto escalar.

> **Ayuda**
>
> Usar la función `dot` del paquete `LinearAlgebra` para calcular el producto escalar de dos vectores.

> **Solución**

```julia
println("Producto escalar de u y v: $(dot(u, v))")
# También se puede usar el clásico punto
println("Producto escalar de u y v: $(u   v)")
```

```
Producto escalar de u y v: 1
Producto escalar de u y v: 1
```

c. Calcular su producto vectorial.

> **Ayuda**
>
> Usar la función `cross` del paquete `LinearAlgebra` para calcular el producto vectorial de dos vectores.

> **Solución**

```julia
println("Producto vectorial de u y v: $(cross(u, v))")
# También se puede usar la clásica cruz ×
println("Producto vectorial de u y v: $(u × v)")
```

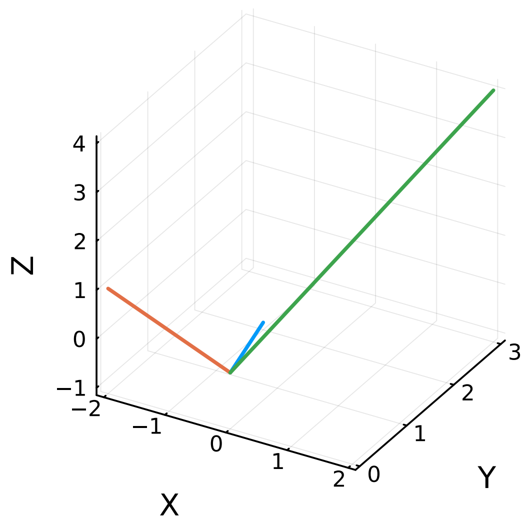
```
Producto vectorial de u y v: [2, 3, 4]
Producto vectorial de u y v: [2, 3, 4]
```

d. Dibujar **u**, **v** y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ en el espacio real.

Solución

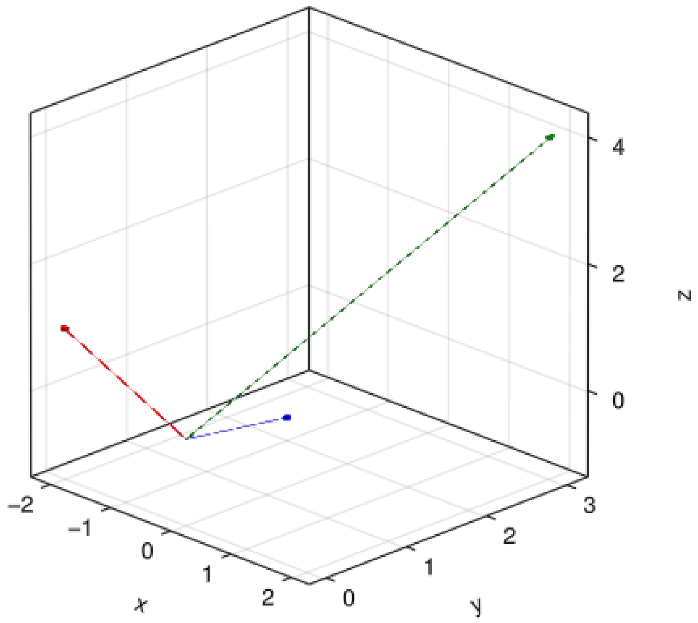
8.4 Plots

```
using Plots
uv = u × v
Plots.plot([0, u[1]], [0, u[2]], [0, u[3]], arrow = true, linewidth = 2, xlabel =
Plots.plot!([0, v[1]], [0, v[2]], [0, v[3]], arrow = true, linewidth = 2)
Plots.plot!([0, uv[1]], [0, uv[2]], [0, uv[3]], arrow = true, linewidth = 2)
```



8.5 Makie

```
using GLMakie
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], azimuth = -pi/4, aspect = (1,1,1))
O = [0, 0 ,0]
arrows!(ax, [Point3(O)], [Vec3(u), Vec3(v), Vec3(u × v)],
    linecolor = [:blue,:red, :green], arrowcolor = [:blue,:red, :green],
    linewidth = 0.02, arrowsize = Vec3(0.1, 0.1, 0.1))
fig
```



Ejercicio 8.3. Dibujar las trayectorias de las siguientes funciones vectoriales.

a. $f(t) = (Frsen(t), \cos(t))$.

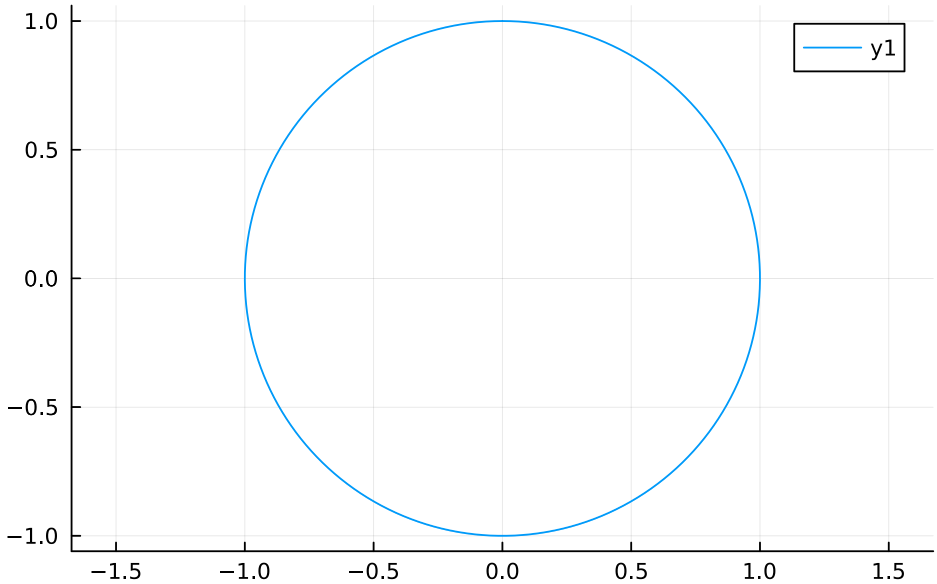
Ayuda

Usar la función `plot` del paquete `Plots` o la función `lines` del paquete `Makie` para dibujar la trayectoria, pasándole cada una de las funciones componentes separadas por comas.

Solución

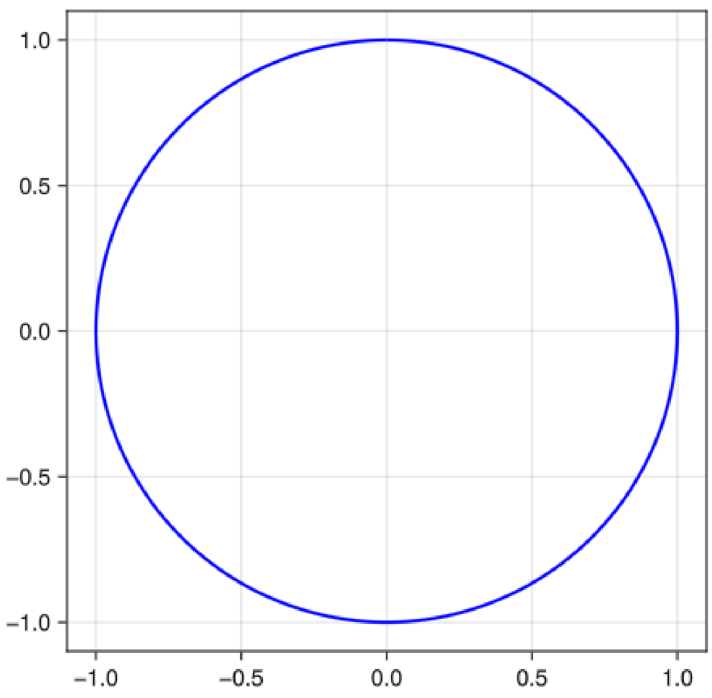
8.6 Plots

```
using Plots
f(t) = [sin(t), cos(t)]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
xs = [f(t)[1] for t in ts]
ys = [f(t)[2] for t in ts]
Plots.plot(xs, ys, aspect_ratio = :equal)
```



8.7 Makie

```
using GLMakie
f(t) = [sin(t), cos(t)]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point2.(f.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], aspect = 1)
lines!(ax, points, linewidth = 2, color = :blue)
fig
```

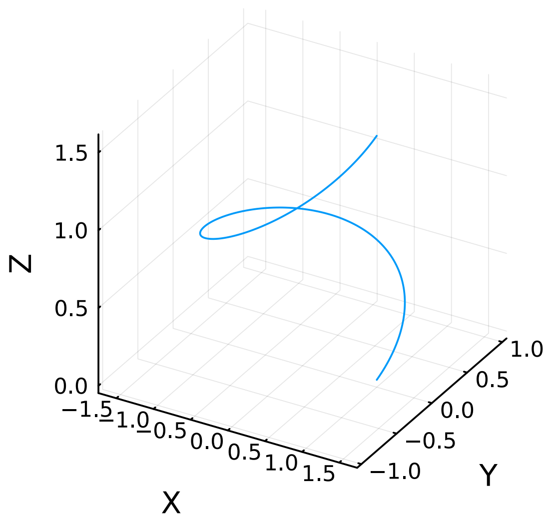


b. $\mathbf{g}(t) = (\cos(t), Frsen(t), t/4)$.

Solución

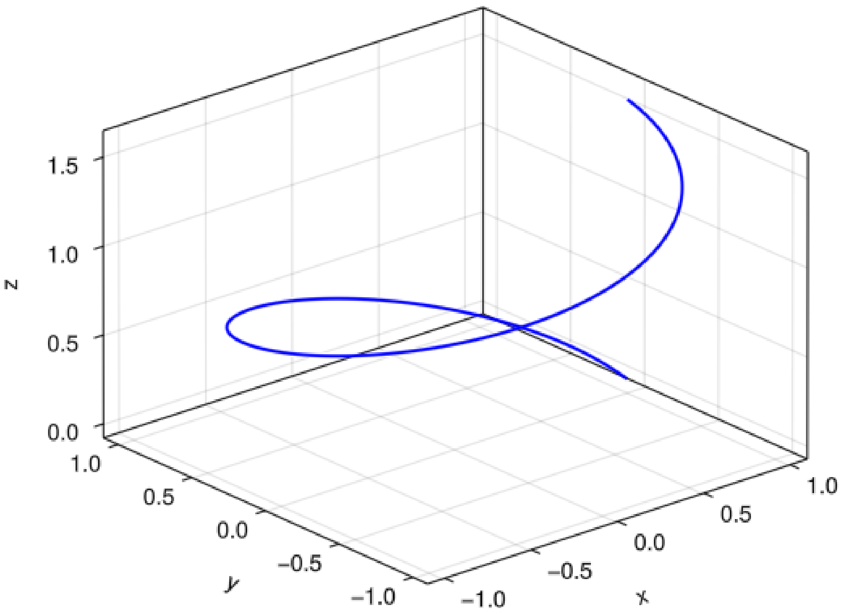
8.8 Plots

```
g(t) = [cos(t), sin(t), t/4]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
xs = [g(t)[1] for t in ts]
ys = [g(t)[2] for t in ts]
zs = [g(t)[3] for t in ts]
Plots.plot(xs, ys, zs, aspect_ratio = :equal, xlabel = "X", ylabel = "Y", zlabel =
```



8.9 Makie

```
using GLMakie
g(t) = [cos(t), sin(t), t/4]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point3.(g.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1])
lines!(ax, points, linewidth = 2, color = :blue)
fig
```



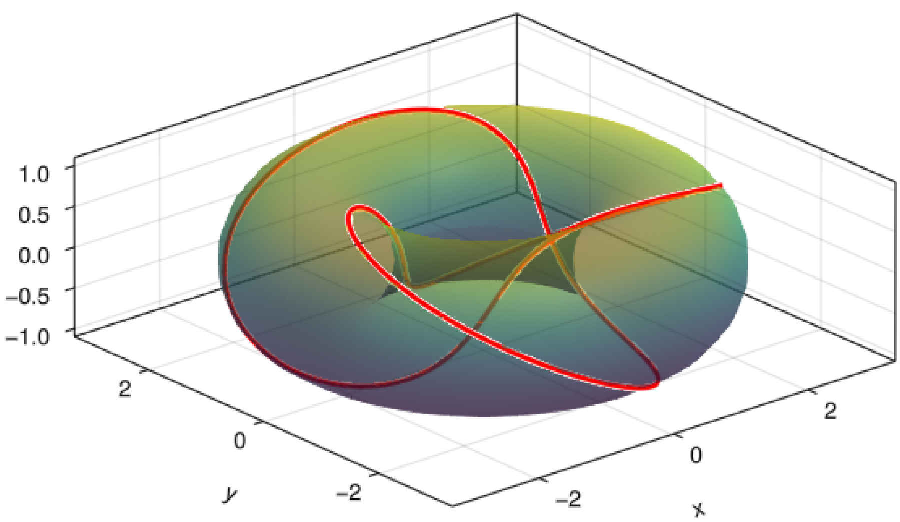
Ejercicio 8.4. Un nudo tórico es un nudo que se forma mediante una trayectoria que gira sobre la superficie de un toro en $\mathbb{R}^3$. La función vectorial que define este tipo de nudos sobre un toro de ecuación $(r-2)^2+z^2=1$ es $\mathbf{f}(t)=((2+\cos(qt))\cos(pt),(2+\cos(qt))Frsen(pt),-Frsen(qt))$, donde p y q son dos enteros primos entre si y $t\in[0,2\pi]$.

a. Dibujar el nudo tórico con $p=2$ y $q=3$.

Solución

Usando el paquete `Makie`.

```
using GLMakie
# Definimos las ecuaciones paramétricas del toro.
U = LinRange(-pi, pi, 100)
V = LinRange(-pi, pi, 20)
x1 = [2cos(u) + cos(u) * cos(v) for u in U, v in V]
y1 = [2sin(u) + sin(u) * cos(v) for u in U, v in V]
z1 = [sin(v) for u in U, v in V]
# Inicializamos la figura y los ejes.
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = (3, 3, 1))
# Dibujamos el toro.
Makie.surface!(ax, x1, y1, z1; colormap = :viridis, transparency = true, alpha = 0
# Definimos la función vectorial de nudo tórico.
f(t) = [(2+cos(3t))cos(2t), (2+cos(3t))sin(2t), -sin(3t)]
# Generamos los puntos de la trayectoria del nudo tórico.
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point3.(f.(ts))
# Dibujamos el nudo tórico.
lines!(ax, points, linewidth = 3, color = :red)
fig
```



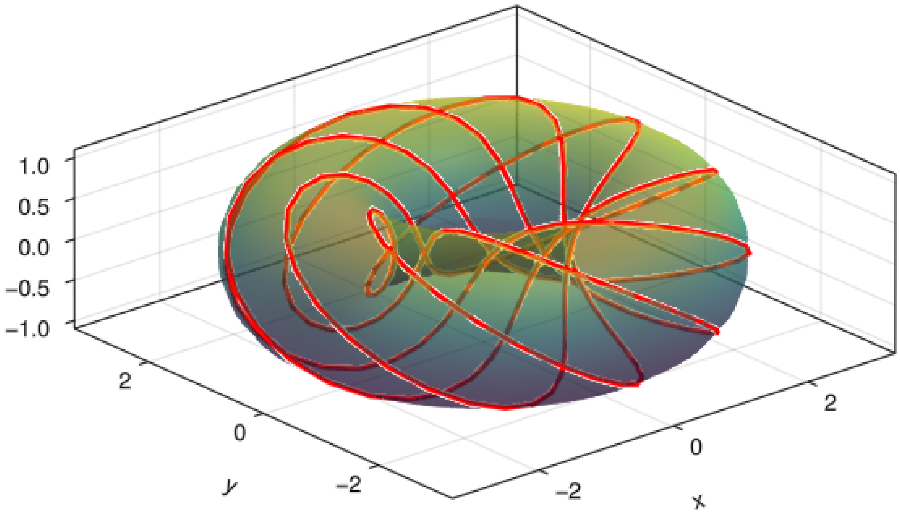
b. Definir una función para crear nudos tóricos con parámetros p y q para los enteros que definen el toro y un parámetro opcional booleano `toro`, para dibujar el toro o no.

Solución

```
using GLMakie
"""
    nudo_torico(ax, p, q, toro)

Función dibuja un nudo tórico de parámetros p, q sobre los ejes ax. Si el parámetr
"""
function nudo_torico(ax::Axis3, p::Int64, q::Int64, toro::Bool = true)
    if toro
        alpha = 0.5
    else
        alpha = 0
    end
    # Definimos las ecuaciones paramétricas del toro.
    U = LinRange(-pi, pi, 100)
    V = LinRange(-pi, pi, 20)
    x1 = [2cos(u) + cos(u) * cos(v) for u in U, v in V]
    y1 = [2sin(u) + sin(u) * cos(v) for u in U, v in V]
    z1 = [sin(v) for u in U, v in V]
    # Dibujamos el toro en los ejes.
    Makie.surface!(ax, x1, y1, z1; colormap = :viridis, transparency = true, alpha
    # Definimos la función vectorial de nudo tórico.
    f(t) = [(2+cos(q*t))cos(p*t), (2+cos(q*t))sin(p*t), -sin(q*t)]
    # Generamos los puntos de la trayectoria del nudo tórico.
    ts = range(0, 2pi, length = 200)
    points = Point3.(f.(ts))
    # Dibujamos el nudo tórico.
    lines!(ax, points, linewidth = 3, color = :red)
end

fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = (3, 3, 1))
nudo_torico(ax, 5, 9, true)
fig
```



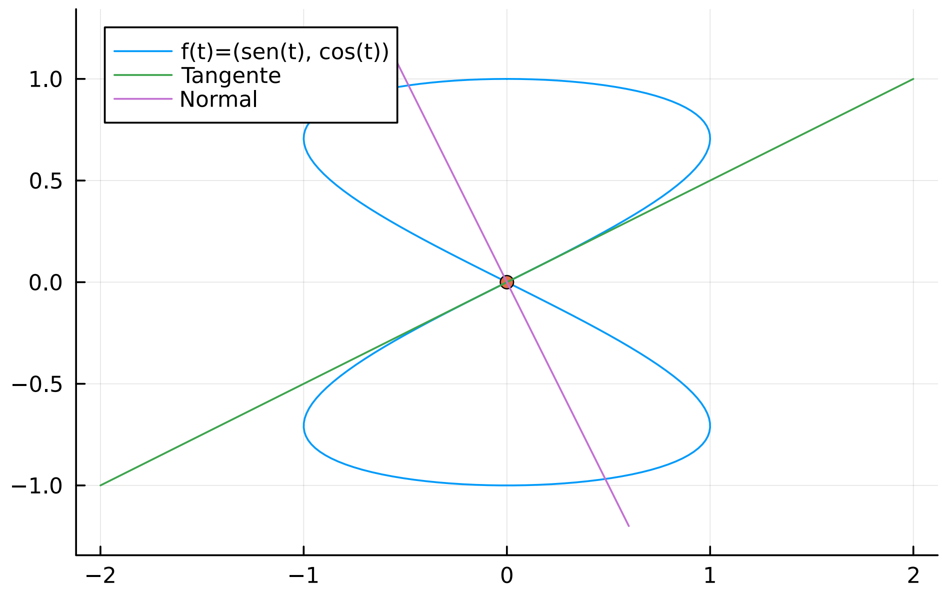
Ejercicio 8.5.

a. Calcular las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la trayectoria $\mathbf{f}(t) = (Frsen(2t), \cos(t))$ en el punto correspondiente a $t = \pi/2$ y dibujarlas.

> **Ayuda**
>
> La ecuación de la recta tangente a la trayectoria de la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ en el instante $t = a$ es $\mathbf{f}(a) + \mathbf{f}'(a)t$.

Solución

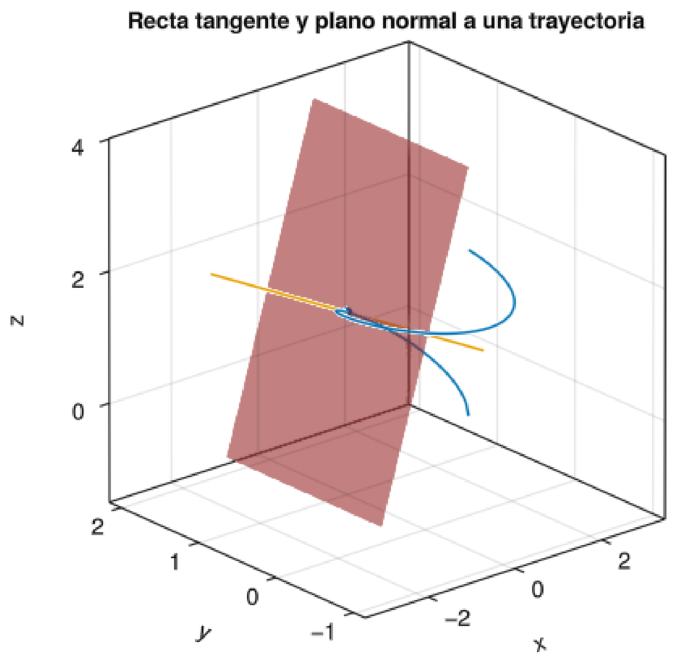
```
using SymPy, Plots
@syms t::real
# Definimos la función vectorial.
f(t) = [sin(2t), cos(t)]
# Instante
a = pi/2
# Dibujamos la trayectoria.
Plots.plot(f(t)..., 0, 2pi, aspect_ratio = :equal, label = "f(t)=(sen(t), cos(t))")
# Dibujamos el punto de tangencia.
Plots.scatter!([f(a)[1]],[f(a)[2]], label = "")
# Calculamos la derivada en el punto.
df = subs.(diff.(f(t)), t=>a)
# Calculamos la ecuación de la recta tangente.
tl(t) = f(a) + df * t
# Dibujamos la recta tangente.
Plots.plot!(tl(t)..., -1, 1, label = "Tangente")
# Calculamos la ecuación de la recta normal.
nl(t) = f(a) - [df[2],-df[1]] * t
Plots.plot!(nl(t)..., -0.6, 0.6, label = "Normal")
```



b. Calcular las ecuaciones de las recta tangente y el plano normal a la trayectoria $\mathbf{g}(t) = (\cos(t), Frsen(t), \sqrt{t})$ en punto correspondiente a $t = \pi$ y dibujarlas.

Solución

```
using SymPy, LinearAlgebra, GLMakie
@syms x, y, z, t::real
# Definimos la función vectorial.
g(t) = [cos(t), sin(t), sqrt(t)]
# Instante
a = pi/2
# Dibujamos la trayectoria.
ts = range(0, 2pi, 200)
points = Point3.(g.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], title = "Recta tangente y plano normal a una trayectoria", as
lines!(ax, points)
# Dibujamos el punto de tangencia.
Makie.scatter!([Point3(g(a))])
# Calculamos la derivada en el punto.
dg = subs.(diff.(g(t)), t=>a)
# Calculamos la ecuación de la recta tangente.
tl(t) = g(a) + dg * t
# Dibujamos la recta tangente.
pointstl = Point3.(tl.(range(-pi, pi, 2)))
lines!(ax, pointstl)
# Calculamos la ecuación del plano normal
np(x,y) = solve(dot(([x, y, z] - g(a)),dg), z)[1]
xs = range(-1, 1, 2)
ys = range(0, 2, 2)
zs = [np(x,y) for x in xs, y in ys]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs, colormap = ["red"], alpha = 0.5, transparency = tru
fig
```



Ejercicio 8.6. Dada una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ en $\mathbb{R}^3$, el *plano osculador* de la trayectoria de $\mathbf{f}(t)$ en $t = a$ es el plano definido por los vectores tangente $\mathbf{T}(a)$ y normal $\mathbf{N}(a)$.

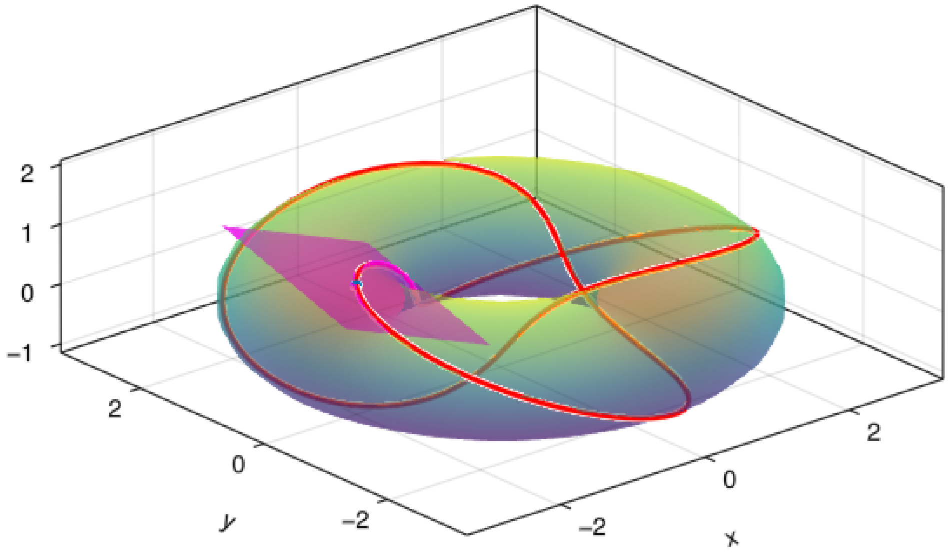
Calcular y dibujar el plano osculador de la función vectorial del nudo tórico del apartado a del ejercicio Ejercicio 8.4 en el punto correspondiente a $t = \pi/2$.

Solución

Usando el paquete `Makie`.

```
using SymPy, LinearAlgebra, GLMakie
@syms x, y, z, t::real
# Definimos las ecuaciones paramétricas del toro.
U = LinRange(-pi, pi, 100)
V = LinRange(-pi, pi, 20)
x1 = [2cos(u) + cos(u) * cos(v) for u in U, v in V]
y1 = [2sin(u) + sin(u) * cos(v) for u in U, v in V]
z1 = [sin(v) for u in U, v in V]
# Inicializamos la figura y los ejes.
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = (3, 3, 1))
# Dibujamos el toro.
Makie.surface!(ax, x1, y1, z1; colormap = :viridis, shading = false, transparency = tru
# Definimos la función vectorial de nudo tórico.
f(t) = [(2+cos(3t))cos(2t), (2+cos(3t))sin(2t), -sin(3t)]
# Generamos los puntos de la trayectoria del nudo tórico.
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point3.(f.(ts))
# Dibujamos el nudo tórico.
lines!(ax, points, linewidth = 3, color = :red)
# Punto
a = pi/2
# Dibujamos el punto.
Makie.scatter!(ax, [Point3(f(a))])
# Vector tangente unitario.
Tan(t) = diff.(f(t)) / norm(diff.(f(t)))
Ta = subs.(Tan(t), t=>a)
# Vector normal unitario.
Norm(t) = diff.(Tan(t)) / norm(diff.(Tan(t)))
Na = subs.(Norm(t), t=>a)
# Calculamos la ecuación del plano osculador.
po(x,y) = solve(dot(([x, y, z] - f(a)), cross(Ta, Na)), z)[1]
xs = range(-3, -1, 2)
ys = range(-1, 1, 2)
zs = [po(x,y) for x in xs, y in ys]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs, colormap = ["magenta"], alpha = 0.8, transparency = true
fig
```

```
Warning: `shading = false` is not valid. Use `automatic`, `NoShading`, `FastShading`
@ Makie ~/.julia/packages/Makie/fyNiH/src/lighting.jl:243
```



Ejercicio 8.7. Para construir un cuaderno de 30 cm de altura se utiliza una espiral de alambre con radio 1 cm y una distancia entre cada dos vueltas consecutivas $\pi/4$ cm. Dibujar la espiral y calcular la cantidad de alambre necesaria para cada cuaderno.

Ayuda

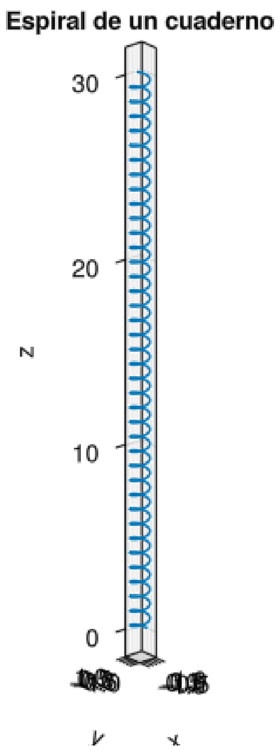
La longitud de la trayectoria de una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ en el intervalo $t \in [a, b]$ se calcula mediante la integral

$$\int_a^b |\mathbf{f}'(t)|\, dt$$

Solución

Dibujamos primero la espiral.

```julia
using SymPy, GLMakie
@syms t::real
# Definimos la función vectorial.
f(t) = [cos(t), sin(t), t/8]
# Calculamos el número de revoluciones.
h = solve(f(t)[3]-30)[1]
# Dibujamos la trayectoria.
ts = range(0, h, 2000)
points = Point3.(f.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], title = "Espiral de un cuaderno", aspect = (1, 1, 30))
lines!(ax, points)
fig
```



A continuación calculamos la longitud de la espiral.

```julia
using LinearAlgebra
# Calculamos longitud de la trayectoria
N(integrate(norm(diff.(f(t))), (t, 0, h)))
```

```
241.8677324489565
```

Ejercicio 8.8. Dibujar función de curvatura de campana de Gauss correspondiente a la función de densidad de una distribución normal estándar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

¿En qué puntos la curvatura es nula? ¿Dónde la curvatura es máxima localmente?

Ayuda

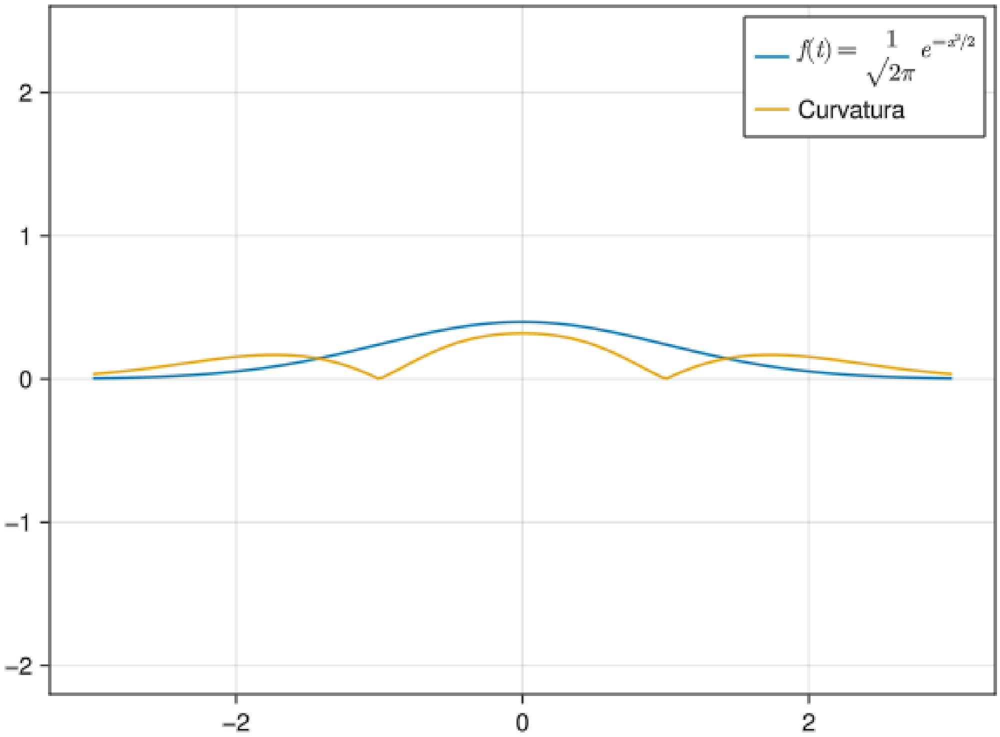
La curvatura de la gráfica de una función real $f(x)$ se calcula mediante la fórmula

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f''(x)^2)^{3/2}}.$$

Solución

Dibujamos primero la gráfica de la función y la de la función curvatura.

```
using SymPy, GLMakie
@syms x::real
# Definimos la función.
f(x) = 1/sqrt(2pi) * exp(-x^2/2)
# Dibujamos la gráfica de la función.
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], autolimitaspect = 1)
lines!(ax, -3..3, f, label = L"$f(t)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$")
fig
# Calculamos la segunda derivada de la función.
df2 = diff(f(x), x, 2)
# Calculamos la función de curvatura.
k(x) = abs(df2(x)) / (1 + df2(x)^2)^(3/2)
# Definimos una serie de puntos de la función curvatura.
xs = range(-3, 3, 200)
points = Point2.(xs, k.(xs))
# Dibujamos la función de curvatura
lines!(ax, points, label = "Curvatura")
# Añadimos la leyenda
axislegend()
fig
```



Ahora calculamos los puntos con curvatura máxima y mínima localmente.

```
# Calculamos los puntos que anulan la curvatura.
solve(k(x),x)
# Calculamos los puntos críticos de la curvatura.
# solve(diff(k(x)), x) No encuentra la solución, así que buscamos la solución numéricam
using Roots
println("Máximo local en x = $(find_zero(diff(k(x)), -2))")
println("Máximo local en x = $(find_zero(diff(k(x)), 0))")
println("Máximo local en x = $(find_zero(diff(k(x)), 2))")
```

```
Máximo local en x = -1.7320508075688774
Máximo local en x = 0.0
Máximo local en x = 1.7320508075688774
```

Ejercicio 8.9. La *torsión* de una trayectoria de una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ en el espacio real $\mathbb{R}^3$ mide la intensidad con la que una curva se sale del plano osculador y se calcula con la fórmula

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t))\mathbf{f}'''(t)}{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|^2}$$

Definir una función para la curvatura y y otra para la torsión de la trayectoria de la función vectorial $\mathbf{h}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + Frsen(t)\mathbf{j} + \cos(t)\mathbf{k}$, y utilizarla para calcular la curvatura y la torsión en los instantes $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/2$.

Solución

Calculamos primero la curvatura.

```
using SymPy, LinearAlgebra
"""
    curvatura(h, a)

Calcula la curvatura de la trayectoria de una función vectorial h en el punto a.
"""
function curvatura(f, a)
    @syms t::real
    # Calculamos la primera derivada.
    df(t) = diff.(f(t))
    # Calculamos la segunda derivada.
    df2(t) = diff.(df(t))
    # Calculamos la curvatura
    k(t) = norm(cross(df(t), df2(t))) / norm(df(t))^3
    return N(subs(k(t), t=>a))
end

f(t) = [cos(2t), sin(t), cos(t)]
println("Curvatura en t=0: $(curvatura(f, 0))")
println("Curvatura en t= /4: $(curvatura(f, pi/4))")
println("Curvatura en t= /2: $(curvatura(f, pi/2))")
println("Curvatura en t=3 /4: $(curvatura(f, 3pi/4))")
```

```
Curvatura en t=0: 4.123105625617661
Curvatura en t= /4: 0.2
Curvatura en t= /2: 4.123105625617661
Curvatura en t=3 /4: 0.2
```

Y ahora calculamos la torsión.

```julia
using SymPy, LinearAlgebra
"""
    torsion(h, a)

Calcula la torsion de la trayectoria de una función vectorial h en el punto a.
"""
function torsion(f, a)
    @syms t::real
    # Calculamos la primera derivada.
    df(t) = diff.(f(t))
    # Calculamos la segunda derivada.
    df2(t) = diff.(df(t))
    # Calculamos la tercera derivada.
    df3(t) = diff.(df2(t))
    # Calculamos la torsión.
     (t) = dot(cross(df(t), df2(t)), df3(t)) / norm(cross(df(t), df2(t)))^2
    return N(subs( (t), t=>a))
end

println("Torsión en t=0: $(torsion(f, 0))")
println("Torsión en t= /4: $(torsion(f, pi/4))")
println("Torsión en t= /2: $(torsion(f, pi/2))")
println("Torsión en t=3 /4: $(torsion(f, 3pi/4))")
```

```
Torsión en t=0: 0
Torsión en t= /4: -1.2000000000000002
Torsión en t= /2: -4.3222828205200695e-17
Torsión en t=3 /4: 1.2000000000000002
```

Ejercicio 8.10. Se lanza una pelota desde la terraza de un edificio de altura h con una rapidez inicial r y un ángulo sobre el horizonte θ. Estudiar la trayectoria que describe la pelota suponiendo que la única fuerza que actúa sobre ella es la de la gravedad.

a. Definir una función para calcular la función vectorial de la posición de la pelota tomando como parámetros la altura del edificio, la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento.

Solución

```
using SymPy
"""
    pelota(h, r,  )

Devuelve un vector con las componentes de la función vectorial que define la posic
"""
function pelota(h, r,  )
    @syms t::positive
    # Constante con al aceleración de la gravedad
    g = 9.81
    # Velocidad inicial.
    v  = [r*cos( ), r*sin( )]
    # Aceleración constante
    a(t) = [Sym(0), -Sym(g)]
    # Obtenemos el vector velocidad integrando la aceleración.
    v(t) = integrate.(a(t), t) + v
    # Obtenemos el vector posición integrando el vector velocidad.
    return integrate.(v(t), t) + [0, h]
end
```

```
pelota
```

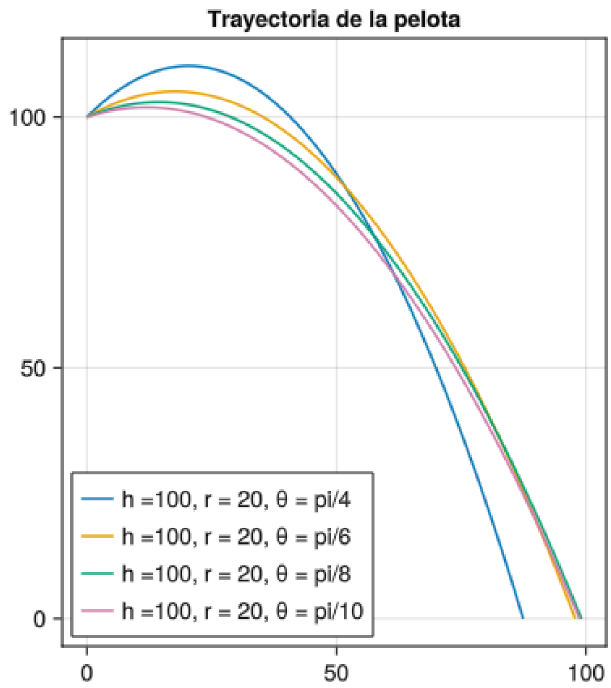
b. Construir una función para dibujar la gráfica de la trayectoria de la pelota tomando como parámetros la altura del edificio, la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento.

Solución

```
using GLMakie
"""
    trayectoria_pelota(ax, h, r,  )

Dibuja sobre los ejes ax la gráfica de la trayectoria de una pelota lanzada desde
"""
function trayectoria_pelota!(ax, h, r,  )
    @syms t::positive
    # Lambdificamos la expresión de la función vectorial para poder llamarla con p
    f = lambdify(pelota(h, r,  ))
    # Calculamos el instante en el que la pelota toca el suelo.
    t  = solve(f(t)[2], t)[1]
    # Definimos un rango de valores desde 0 hasta el instante en que la pelota toc
    ts = range(0, t , 200)
    # Obtenemos los puntos de la trayectoria.
    points = Point2.(f.(ts))
    # Dibujamos la trayectoria.
    lines!(ax, points, label = "h =$(h), r = $(r),   = $( )")
    return ax
end

fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], title = "Trayectoria de la pelota", aspect = DataAspect())
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/4)
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/6)
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/8)
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/10)
# Añadimos la leyenda
axislegend(position = :lb)
fig
```



c. Si se lanza la pelota a nivel del suelo, con una rapidez de 20 m/s ¿para qué ángulo se alcanzará una mayor distancia? ¿Y si se lanza desde 100 m de altura?

Solución

Calculamos primero el ángulo para una altura 0.

```
@syms  , t:: positive
# Definimos la función vectorial.
f(t) = pelota(0, 20,  )
# Calculamos el instante en que la pelota toca el suelo.
t  = solve(f(t)[2], t)[1]
# Calculamos los puntos críticos de la derivada de la posición horizontal de la pe
solve(diff(subs(f(t)[1], t=>t ),  ))
```

```
2-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
 -0.785398163397448
  0.785398163397448
```

Y ahora para una altura de 100 m.

```julia
using Roots
@syms  , t:: positive
# Definimos la función vectorial.
f(t) = pelota(100, 20,  )
# Definimos la función vectorial.
t  = solve(f(t)[2], t)[2]
# Calculamos los puntos críticos de la derivada de la posición horizontal de la pe
find_zero(diff(subs(f(t)[1], t=>t ),  ), 0.5)
```

```
0.3903970673218906
```

d. Determinar las componentes tangencial y normal del vector aceleración, para una altura de 100 m, una rapidez de 20 m/s y un ángulo $\pi/4$. Comprobar que la componente tangencial de la aceleración se anula en el mismo instante en el que la componente normal es máxima y cuando la pelota alcanza la máxima altura.

Ayuda

La componente tangencial del vector aceleración se puede calcular con la fórmula

$$a_T(t) = |\mathbf{v}(t)|' = \frac{\mathbf{f}'(t)\mathbf{f}''(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}.$$

Y la componente normal mediante la fórmula

$$a_N(t) = \kappa(t)|\mathbf{v}(t)|^2 = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|}.$$

Si la trayectoria no es en el plano real, se pueden aplicar estas fórmulas añadiendo una tercera componente nula.

Solución

Calculamos primero la componente tangencial del vector aceleración.

```julia
using LinearAlgebra
@syms t::positive
# Creamos la función vectorial
f(t) = pelota(100, 20, PI/4)
# Añadimos una tercera componente nula para estar en el espacio real.
f3 = push!(f(t), 0)
# Calculamos la primera derivada (vector velocidad).
df = diff.(f3, t)
# Calculamos la segunda derivada (vector aceleración).
df2 = diff.(df, t)
# Calculamos la componente tangencial del vector aceleración.
at = dot(df, df2) / norm(df)
```

$$\frac{96.2361t-98.1\sqrt{2}}{\sqrt{100\left(0.981t-\sqrt{2}\right)^2+200}}$$

Y a continuación la componente normal.

```julia
an = norm(cross(df, df2)) / norm(df)
```

$$\frac{138.734350468801}{\sqrt{100\left(0.981t-\sqrt{2}\right)^2+200}}$$

Ahora calculamos el instante en el que se anula la componente tangencial.

```julia
solve(at)
```

```
1-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
 1.44160403911630
```

Finalmente comprobamos que es el mismo instante en el que la componente normal de la aceleración es máxima.

```julia
# Instante en el que la componente normal de la acelaración es máxima.
solve(diff(an))
```

```
1-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
 1.44160403911630
```

Y comprobamos también que coincide con el instante en que la pelota alcanza la máxima altura.

```julia
solve(diff(f(t)[2]))
```

```
1-element Vector{Sym{PyCall.PyObject}}:
 1.44160403911630
```

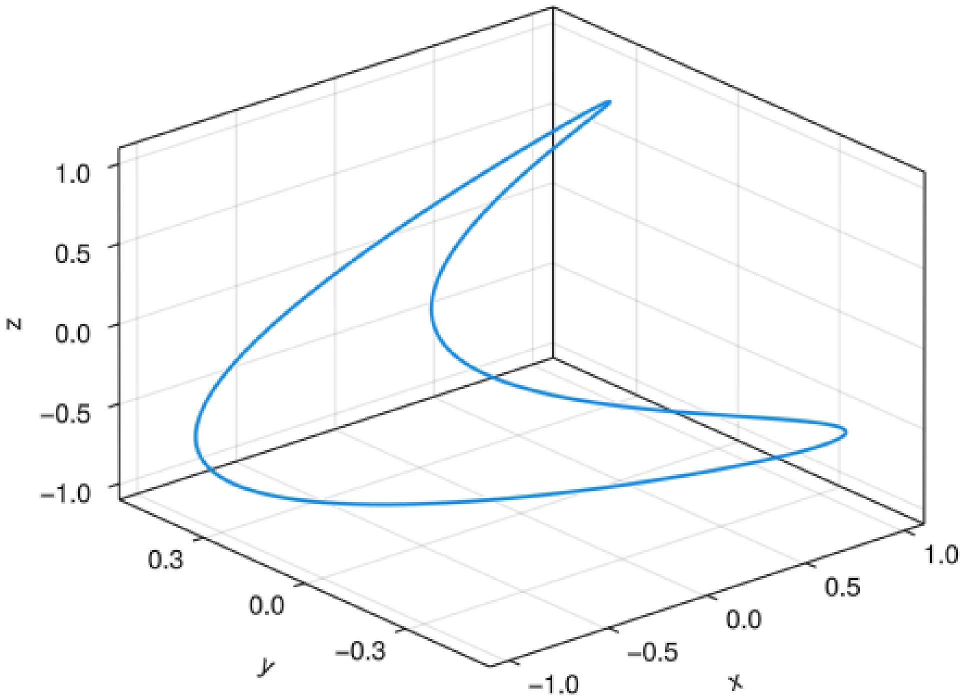
8.10 Ejercicios propuestos

Ejercicio 8.11. Calcular el módulo del producto vectorial de los vectores $(-\pi, \sqrt{2}, 1)$ y $(\sqrt{3}, -e, -2)$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 8.12. ¿A qué función vectorial le corresponde la trayectoria siguiente?



☐

$$f(t) = (\cos(2t), \cos(t)/2, Frsen(t/2))$$

☐ Las otras opciones son falsas.

☐

$$f(t) = (Frsen(t), \cos(2t), \cos(t)/2)$$

☐

$$f(t) = (Frsen(2t), \cos(t)/2, Frsen(t))$$

☐

$$f(t) = (Frsen(t)/2, \cos(2t), \cos(t))$$

Ejercicio 8.13. Un mosquito sigue la trayectoria de la función $f(t) = (\cos(t), t/2, \ln(t+1))$. Si en el instante $t = 1$ se sale por la tangente a la trayectoria, ¿a qué distancia del origen de coordenadas estará el mosquito en el instante $t = 2$?

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 8.14. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la del plano normal a la trayectoria de la función $g(t) = (\cos(t-1), \ln(\sqrt{t}), t^2)$ en el instante $t = 1$?

☐
$$2x - z = 1$$

☐
$$\frac{1}{4}y - z = 1$$

☐ Las otras opciones son falsas.

☐
$$x + \frac{1}{2}y - z = 0$$

☐
$$x + y + z = 2$$

Ejercicio 8.15. Un avión sigue la trayectoria de la función $h(t) = (2t^2 + t, Frsen(t) + 2cos(t), e^{-t/2})$.

a. ¿Qué distancia habrá recorrido desde instante $t = 1$ hasta el instante $t = 5$?

   *Hint: *

   Introducir hasta 5 decimales

b. ¿Cuál será la curvatura de la trayectoria en el instante $t = 2$?

   *Hint: *

   Introducir hasta 5 decimales

c. ¿Cuál será la torsión de la trayectoria en el instante $t = 2$?

   *Hint: *

   Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 8.16. Un coche circula por una circuito elíptico cuya trayectoria viene dada por la función vectorial $f(t) = (400\cos(10t), 100Frsen(10t))$, donde t está dado en minutos y las coordenadas de f en metros.

a. Calcular la rapidez del vehículo en el instante $t = \pi$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

b. Calcular el módulo del vector aceleración en el mismo instante.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

c. Calcular la componente tangencial del vector aceleración en ese instante.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

d. Calcular la componente normal del vector aceleración en ese instante.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

e. Suponiendo que los neumáticos no proporcionan ningún agarre (por ejemplo porque hay hielo en la carretera), ¿Cuál es el mínimo ángulo que debería tener el peralte de la curva en este instante para que el coche no se salga del circuito? Tómese una aceleración debida a la gravedad de 9.8 m/s^2.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

9 Derivadas de funciones de varias variables

9.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
using Makie, GLMakie # Para el dibujo de gráficas en 3d.
using ImplicitPlots # Para el dibujo de gráficas de funciones implícitas.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
using LinearAlgebra # Para el módulo y el producto escalar de vectores.
```

Ejercicio 9.1. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones.

a. $f(x, y) = 2x + 3y$.

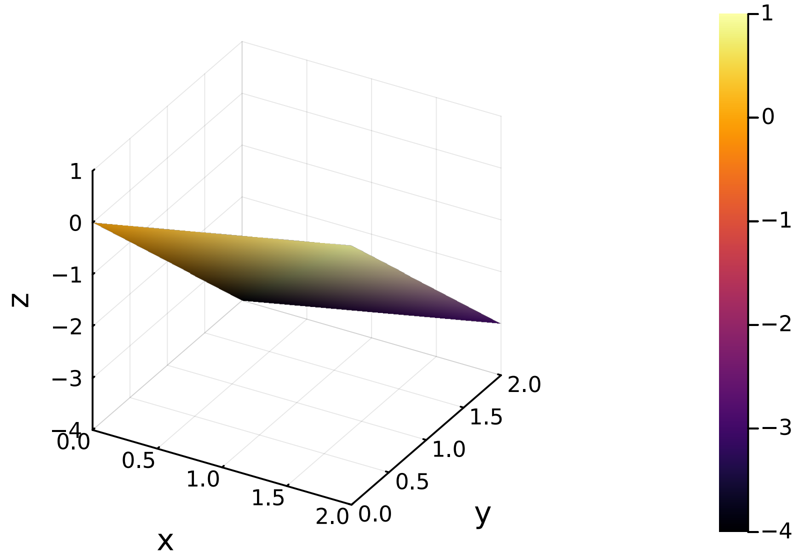
Ayuda

Usar la función `surface` del paquete `Plots` o la función `surface` del paquete `Makie` para representar superficies de funciones de dos variables.

Solución

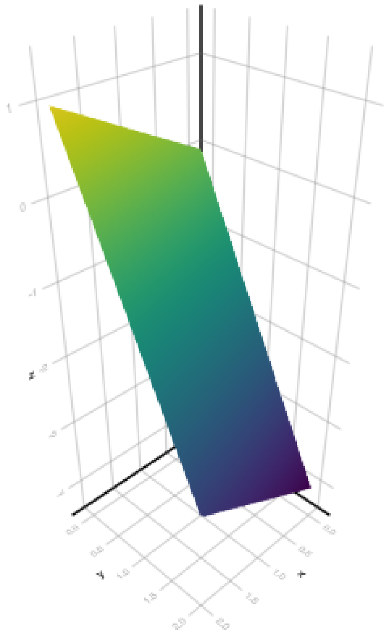
9.2 Plots

```
using Plots
f(x, y) = x/2 - 2y
xs = ys = range(0, 2, 2)
Plots.surface(xs, ys, f, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z")
```



9.3 Makie

```
using GLMakie
f(x, y) = x/2 - 2y
xs = ys = range(0, 2, 2)
Makie.surface(xs, ys, f)
```

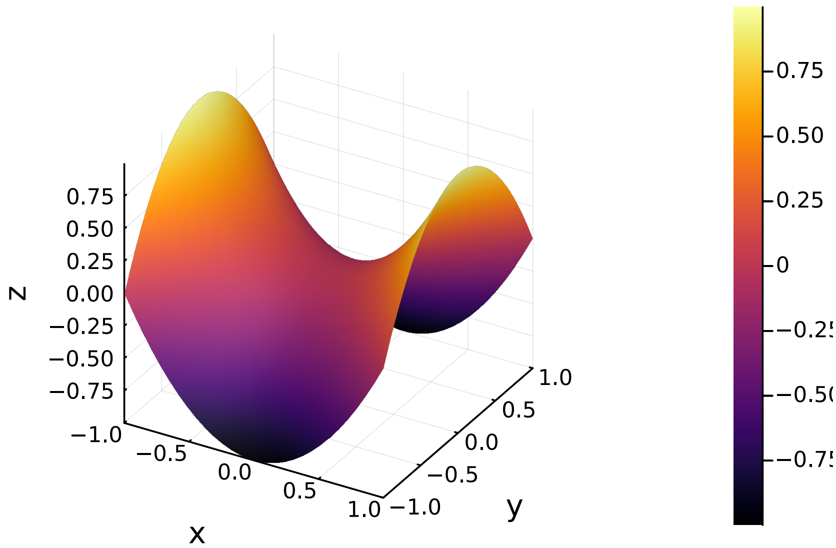


b. $g(x) = x^2 - y^2$.

Solución

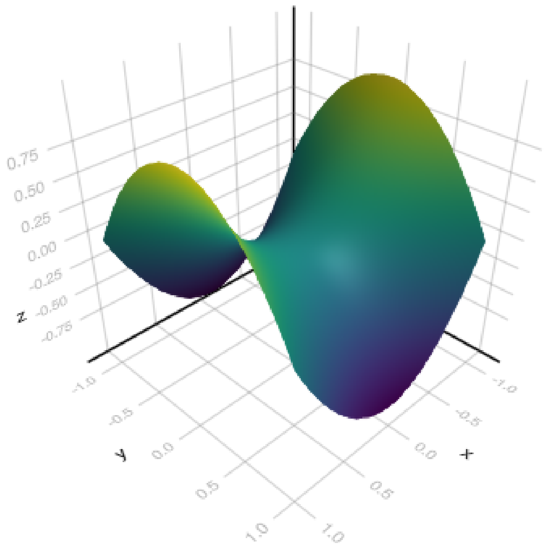
9.4 Plots

```
using Plots
g(x, y) = x^2-y^2
xs = ys = range(-1, 1, 30)
Plots.surface(xs, ys, g, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z")
```



9.5 Makie

```
using GLMakie
g(x, y) = x^2 - y^2
xs = ys = range(-1, 1, 30)
Makie.surface(xs, ys, g)
```

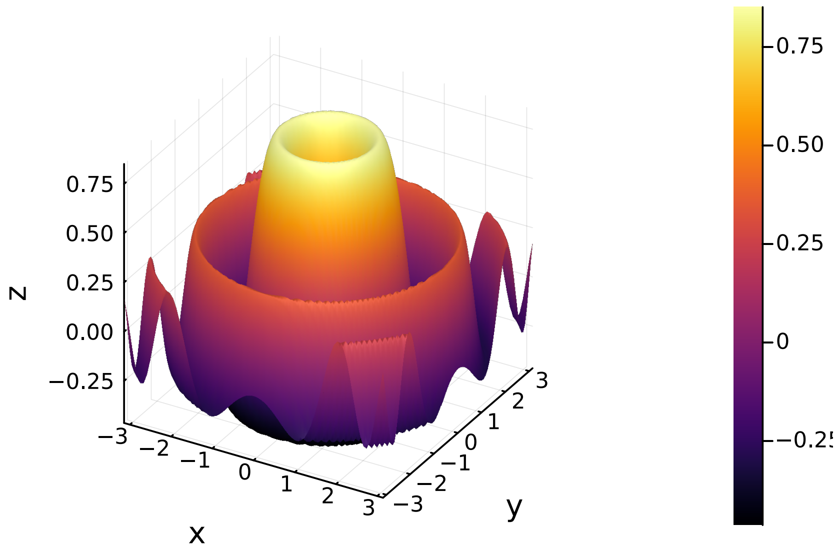


c. $h(x) = \dfrac{Frsen(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Solución

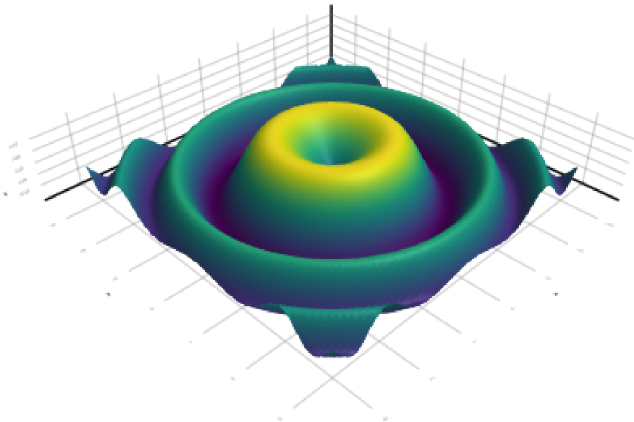
9.6 Plots

```
using Plots
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Plots.surface(xs, ys, h, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z")
```



9.7 Makie

```
using GLMakie
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Makie.surface(xs, ys, h)
```



Ejercicio 9.2. Dibujar las curvas de nivel de las siguientes funciones.

a. $f(x, y) = 2x + 3y$.

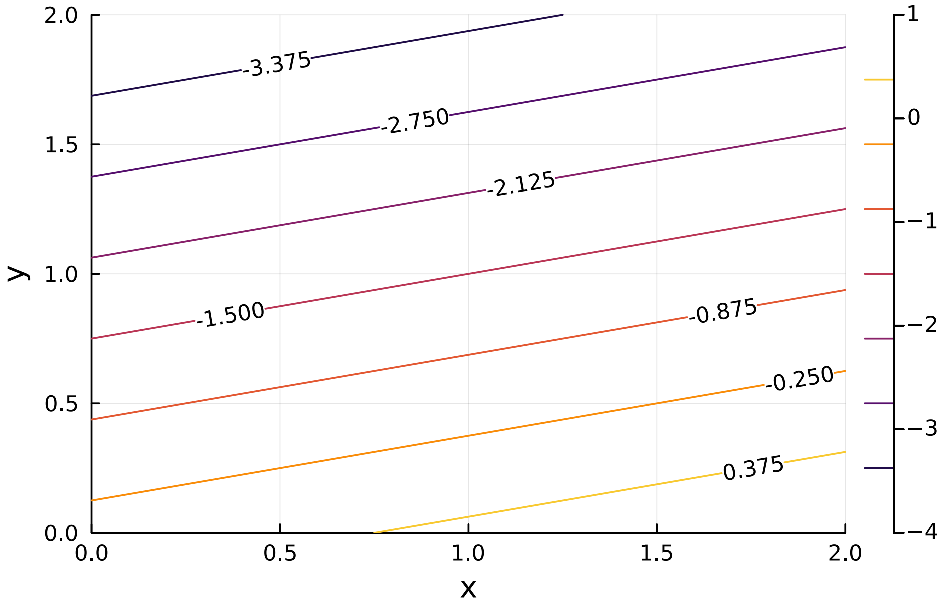
Ayuda

Usar la función `contour` del paquete `Plots` o la función `contour` del paquete `Makie` para representar curvas de nivel de funciones de dos variables.

Solución

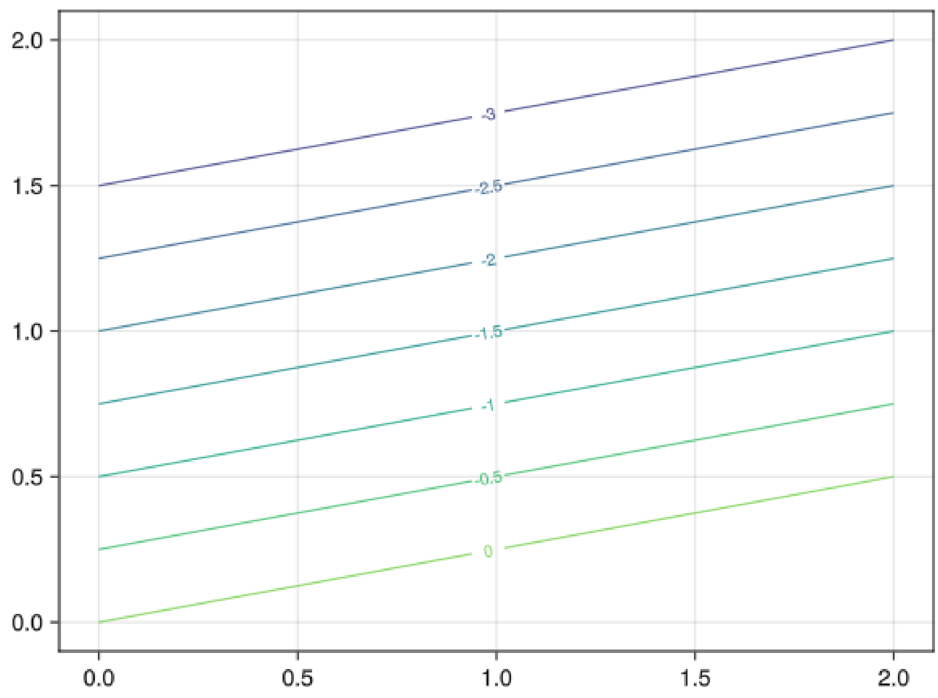
9.8 Plots

```
using Plots
f(x, y) = x/2 - 2y
xs = ys = range(0, 2, 50)
Plots.contour(xs, ys, f, levels = 7, xlab = "x", ylab = "y", clabels = true)
```



9.9 Makie

```
using GLMakie
f(x, y) = x/2 - 2y
xs = ys = range(0, 2, 50)
Makie.contour(xs, ys, f, labels = true,  levels = 0:-0.5:-3)
```

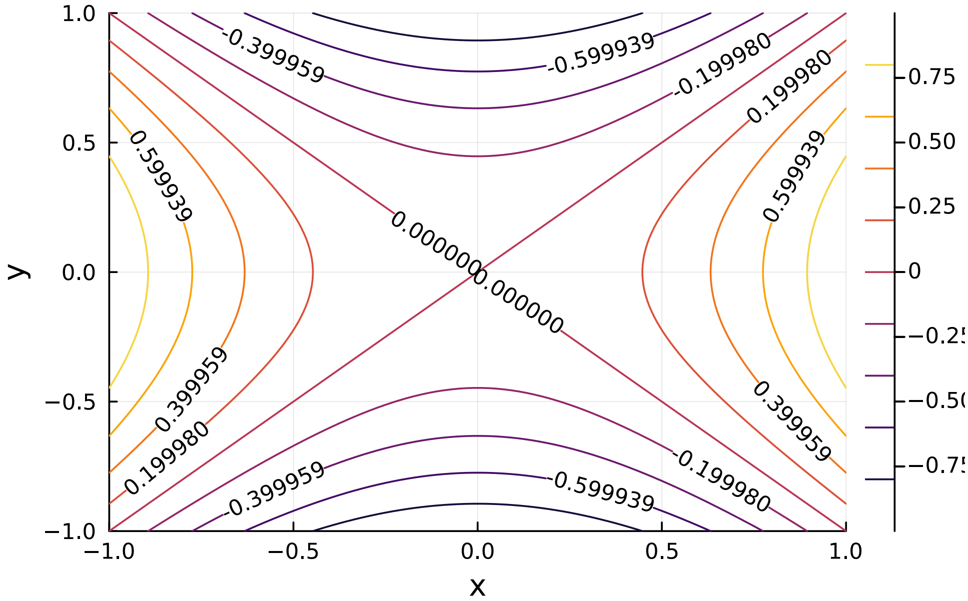


b. $g(x) = x^2 - y^2$.

Solución

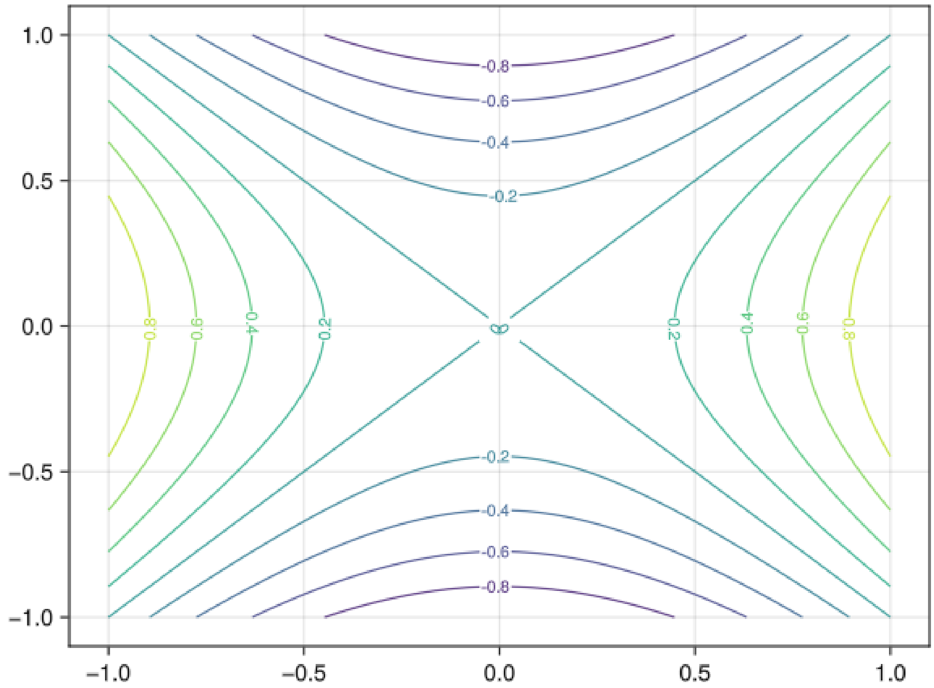
9.10 Plots

```
using Plots
g(x, y) = x^2 - y^2
xs = ys = range(-1, 1, 100)
Plots.contour(xs, ys, g, levels = 9, xlab = "x", ylab = "y", clabels = true)
```



9.11 Makie

```
using GLMakie
f(x, y) = x^2 - y^2
xs = ys = range(-1, 1, 100)
Makie.contour(xs, ys, f, labels = true,  levels = -1:0.2:1)
```

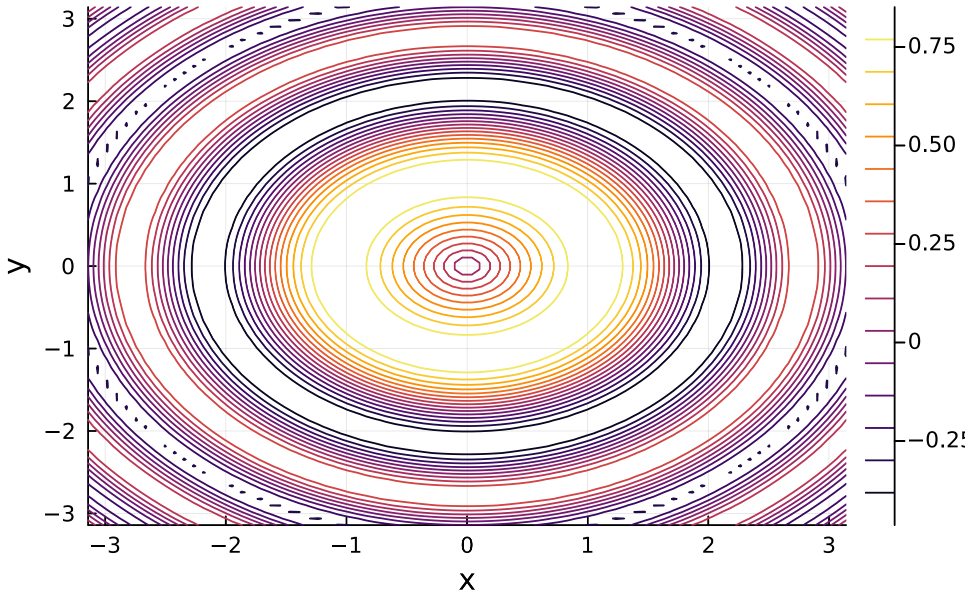


c. $h(x) = \dfrac{Frsen(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Solución

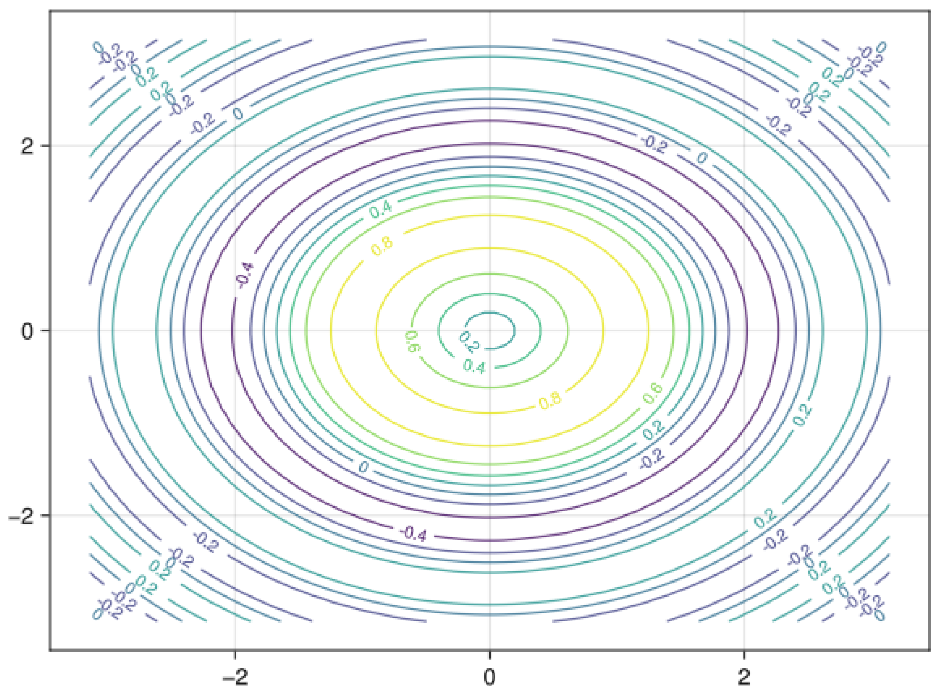
9.12 Plots

```
using Plots
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Plots.contour(xs, ys, h, xlab = "x", ylab = "y")
```



9.13 Makie

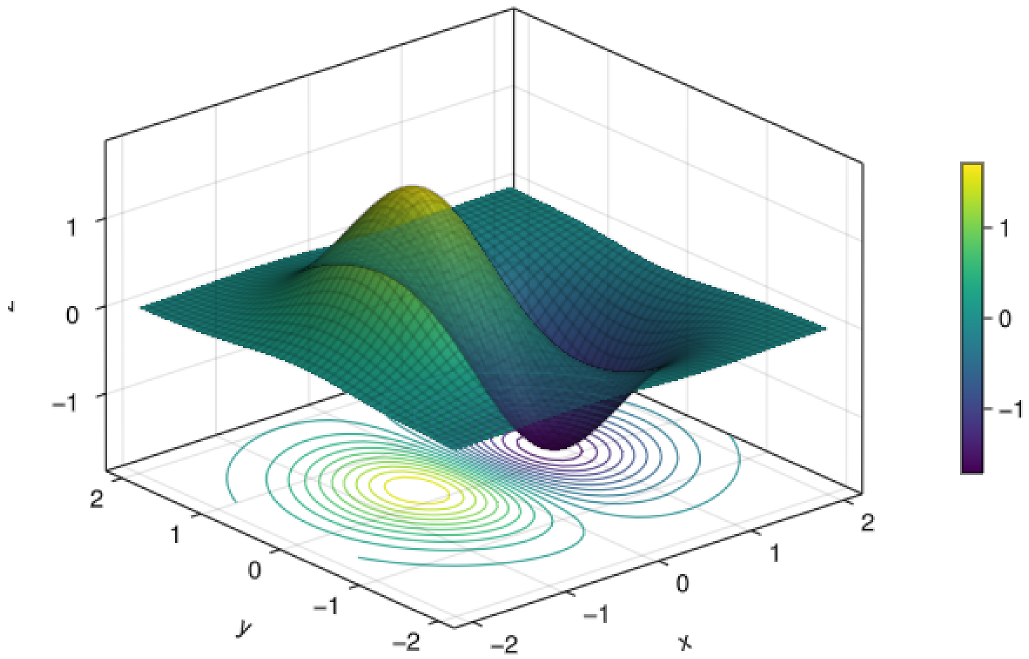
```
using GLMakie
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Makie.contour(xs, ys, h, labels = true,  levels = -1:0.2:1)
```



Ejercicio 9.3. Dibujar en una misma gráfica la superficie de la función $f(x, y) = -4xe^{-x^2-y^2}$ y sus curvas de nivel.

Solución

```
using GLMakie
f(x, y) = -4x*exp(-x^2-y^2)
xs = ys = range(-2, 2, 50)
zs = f.(xs, ys')
zmin = minimum(zs)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], )
surf = Makie.surface!(ax, xs, ys, zs, transparency = true)
Makie.wireframe!(ax, xs, ys, zs, color = (:black, 0.1), transparency = true)
Makie.contour!(ax, xs, ys, zs, levels = 20, transformation = (:xy, zmin), transparency=
Colorbar(fig[1, 2], surf, height = Relative(0.5))
fig
```



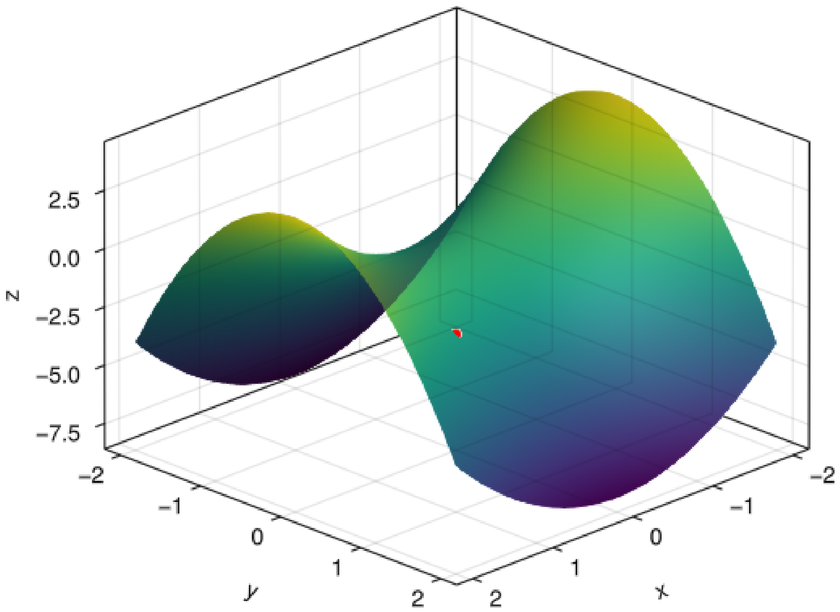
Ejercicio 9.4. Sea $f(x, y) = x^2 - 2y^2$.

a. Dibujar la gráfica y el punto $(1, 1, f(1, 1))$.

> **Ayuda**
>
> Usar la función `surface` del paquete `Makie` para representar superficies de funciones de dos variables.
> Usar la función `scatter` del paquete Makie para dibujar puntos.

Solución

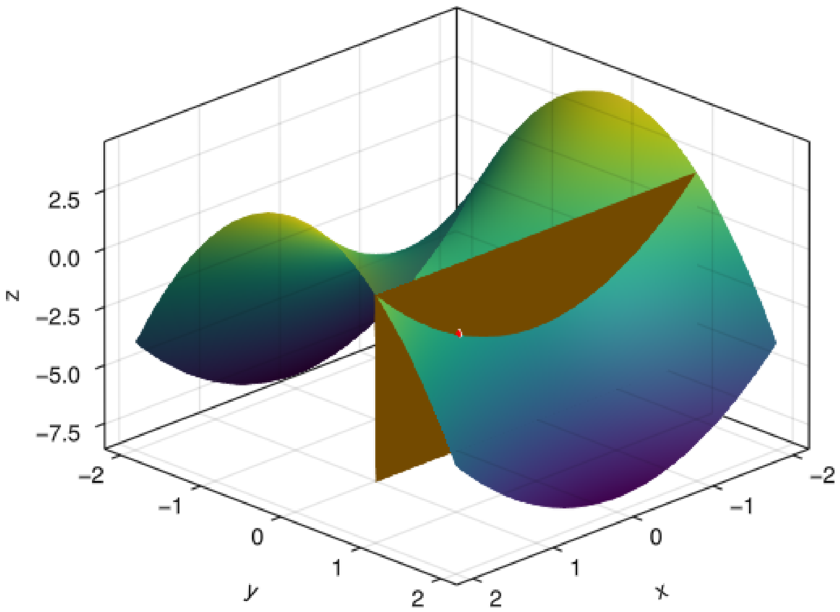
```
using GLMakie
f(x, y) = x^2 - 2y^2
xs = ys = range(-2, 2, 30)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], azimuth = pi/4)
Makie.surface!(ax, xs, ys, f, transparency = true)
Makie.scatter!(ax, Point3(1, 1, f(1,1)), color = :red)
fig
```



b. Dibujar el plano $y = 1$ sobre la superficie. ¿Cuál es la curva que resulta de la intersección del plano con la superficie? ¿Cómo es la pendiente de la tangente a esta curva en $x = 1$?

Solución

```
xs = [-2 -2; 2 2]
zs = [-6 2; -6 2]
ys = [1 1; 1 1]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs; colormap = [:orange])
fig
```



La curva resultante es la parábola $f(x) = x^2$. La pendiente de la recta tangente a esta curva en $x = 1$ vale 2.

c. Calcular la derivada parcial de f con respecto a x en el punto $(1, 1)$.

Solución

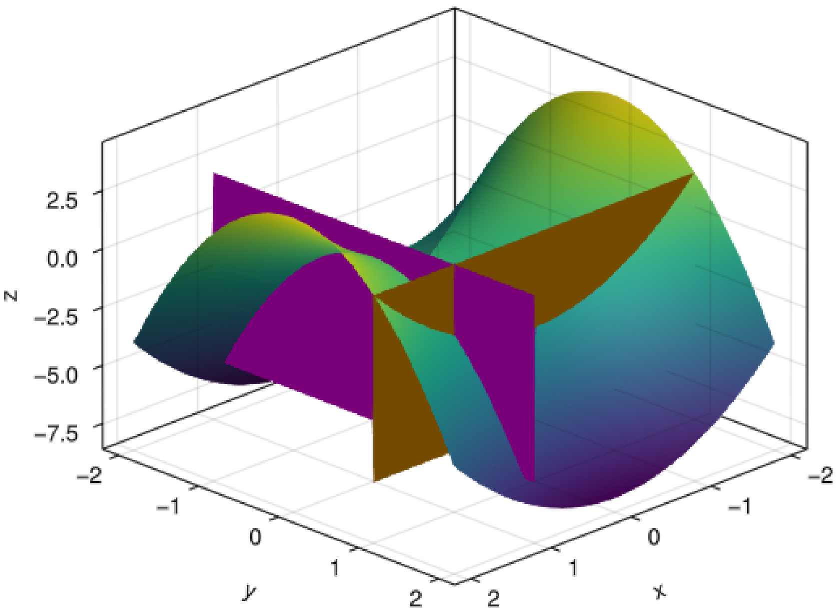
```
using SymPy
@syms x y
subs(diff(f(x,y), x), x => 1, y => 1)
```

2

d. Dibujar el plano $x = 1$ sobre la superficie. ¿Cuál es la curva que resulta de la intersección del plano con la superficie? ¿Cómo es la pendiente de la tangente a esta curva en $y = 1$?

Solución

```
ys = [-2 -2; 2 2]
zs = [-6 2; -6 2]
xs = [1 1; 1 1]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs; colormap = [:magenta])
fig
```



La curva resultante es la parábola $g(y) = -2y^2$. La pendiente de la recta tangente a esta curva en $y = 1$ vale -4.

e. Calcular la derivada parcial de f con respecto a y en el punto $(1, 1)$.

Solución

```
using SymPy
@syms x y
subs(diff(f(x,y), y), x => 1, y => 1)
```

-4

Ejercicio 9.5. La presión P de un gas perfecto depende de la temperatura T y del volumen que ocupa V según la función

$$P(T, V) = \frac{nRT}{V},$$

donde n y R son constantes positivas propias de cada gas.

a. Calcular la derivada parcial de la presión con respecto a la temperatura. ¿Cómo la interpretarías?

> Solución
>
> ```
> using SymPy
> @syms n R T V
> diff(n*R*T/V, T)
> ```
>
> $\frac{Rn}{V}$
>
> Como n, R y V son positivos, la derivada parcial es positiva, por lo que si se mantiene el volumen constante y empezamos a aumentar la temperatura, la presión aumentará.

b. Calcular la derivada parcial de la presión con respecto al volumen. ¿Cómo la interpretarías?

> Solución
>
> ```
> diff(n*R*T/V, V)
> ```
>
> $-\frac{RTn}{V^2}$
>
> Como n, R, T y V son positivos, la derivada parcial es negativa, por lo que si se mantiene la temperatura constante y empezamos a aumentar el volumen, la presión disminuirá.

Ejercicio 9.6. Dada la función $f(x, y) = e^{x+y} Frsen\left(\frac{x}{y}\right)$, calcular las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

a. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

> Solución
>
> ```
> using SymPy
> @syms x y
> f(x, y) = exp(x+y)sin(x/y)
> diff(f(x, y), x, y)
> ```
>
> $\left(-\frac{x\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} + \frac{x\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y^3} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y} - \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right) e^{x+y}$

b. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Solución

```
using SymPy
@syms x y
f(x, y) = exp(x+y)sin(x/y)
diff(f(x, y), y, x)
```

$$\left(-\frac{x\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} + \frac{x\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y^3} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y} - \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right) e^{x+y}$$

c. ¿Se cumple la igualdad de las derivadas cruzadas?

Solución

Si, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, porque ambas derivadas son continuas en todo su dominio.

Ejercicio 9.7. La función $f(x, y, z) = e^{-x-2y-3z}$ da la temperatura en cada posición (x, y, z) de una habitación.

a. Si un mosquito está en la posición $(1, 1, 1)$, ¿en qué dirección debe volar para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible? ¿Cuál será la tasa de variación de la temperatura si el mosquito se mueve en esa dirección?

Ayuda

Debe moverse en la dirección opuesta al vector gradiente de f.

Solución

9.14 Solución 1

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x y z
f(x, y, z) = exp(-x-2y-3z)
ex = diff.(f(x, y, z), [x, y, z])
 f = lambdify(ex, (x, y, z))
println("Dirección de máximo decrecimiento : $(- f(1, 1, 1))")
println("Tasa de variación en esa dirección: $(-norm( f(1, 1, 1)))")
```

```
Dirección de máximo decrecimiento : [0.0024787521766663585, 0.004957504353332717,
Tasa de variación en esa dirección: -0.009274641391805666
```

9.15 Solución 2

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x y z
f(x, y, z) = exp(-x-2y-3z)
ex = [diff(f(x,y,z), i) for i in (x, y, z)]
 f = lambdify(ex, (x, y, z))
println("Dirección de máximo decrecimiento : $(- f(1, 1, 1))")
println("Tasa de variación en esa dirección: $(-norm( f(1, 1, 1)))")
```

```
Dirección de máximo decrecimiento : [0.0024787521766663585, 0.004957504353332717,
Tasa de variación en esa dirección: -0.009274641391805666
```

b. Si el mosquito se mueve siguiendo la dirección del vector $(2, -1, 3)$, ¿la temperatura aumenta o disminuye? ¿Cuál será la tasa de variación de la temperatura en esa dirección?

Ayuda

La tasa de variación de la función viene dada por la derivada direccional de la función en el punto $(1, 1, 1)$ siguiendo la dirección del vector $(2, -1, 3)$.

Solución

```
dot( f(1, 1, 1), normalize([2, -1, 3]))
```

```
-0.005962269466160785
```

La temperatura disminuye.

Ejercicio 9.8. Calcular las ecuaciones de la recta normal y el plano tangente a la superficie $x + 2y - \ln(z) + 4 = 0$ en el punto $(0, -2, 1)$, y dibujarlos.

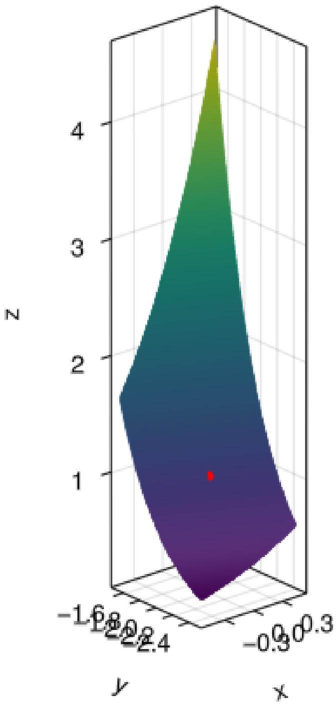
Ayuda

Usar la propiedad de que el vector gradiente de una función $f(x, y, z)$ es siempre normal a las curvas de nivel $f(x, y, z) = 0$.

Solución

Dibujamos primero la superficie.

```julia
using SymPy, GLMakie
f(x, y, z) = x + 2y - log(z) + 4
@syms x y z
f1 = lambdify(solve(f(x,y,z), z)[1])
xs = range(-0.5, 0.5, 30)
ys = range(-2.5, -1.5, 30)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = :data)
Makie.surface!(ax, xs, ys, f1)
Makie.scatter!(ax, Point3(0, -2, 1), color = :red)
fig
```



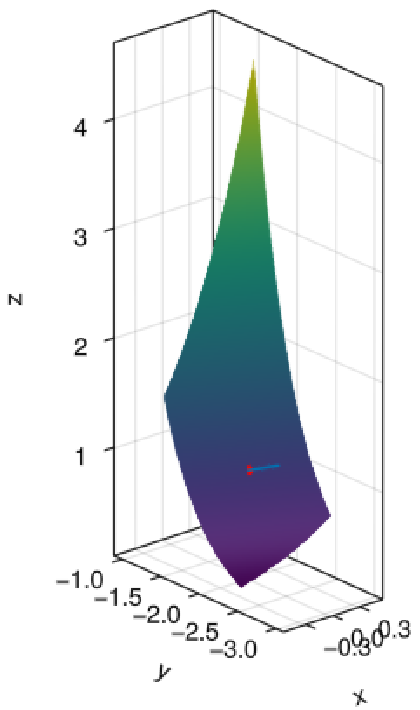
Calculamos primero la ecuación de la recta normal.

```julia
using SymPy
ex = diff.(f(x, y, z), [x, y, z])
 f = lambdify(ex, (x, y, z))
nl(t) = [0, -2, 1] + t* f(0, -2, 1)
@syms t
println("Ecuación de la recta normal $(nl(t))")
```

```
Ecuación de la recta normal Sym{PyCall.PyObject}[t, 2*t - 2, 1 - 1.0*t]
```

Y la dibujamos sobre la misma gráfica de la superficie.

```
ts = range(-0.5, 0.5, 2)
points = Point3.(nl.(ts))
Makie.lines!(ax, points)
fig
```



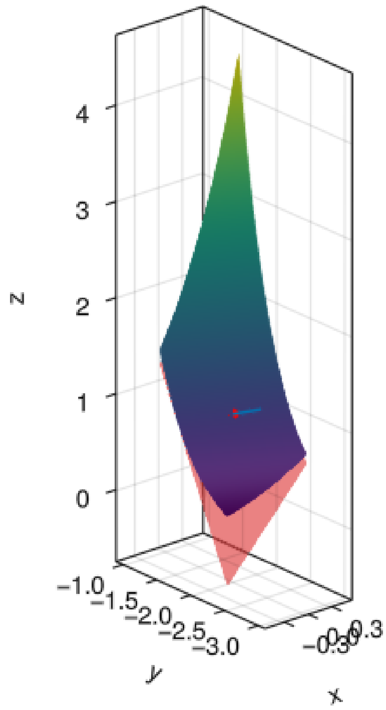
A continuación calculamos la ecuación del plano tangente.

```
using LinearAlgebra
tp(x,y) = solve(dot(([x, y, z] - [0, -2, 1]), f(0, -2, 1)), z)[1]
println("Ecuación del plano tangente z = $(tp(x,y))")
```

```
Ecuación del plano tangente z = x + 2.0*y + 5.0
```

Y finalmente lo dibujamos en la misma gráfica de la superficie.

```
Makie.surface!(ax, xs, ys, tp, colormap = ["red"], alpha = 0.5, transparency = true)
fig
```

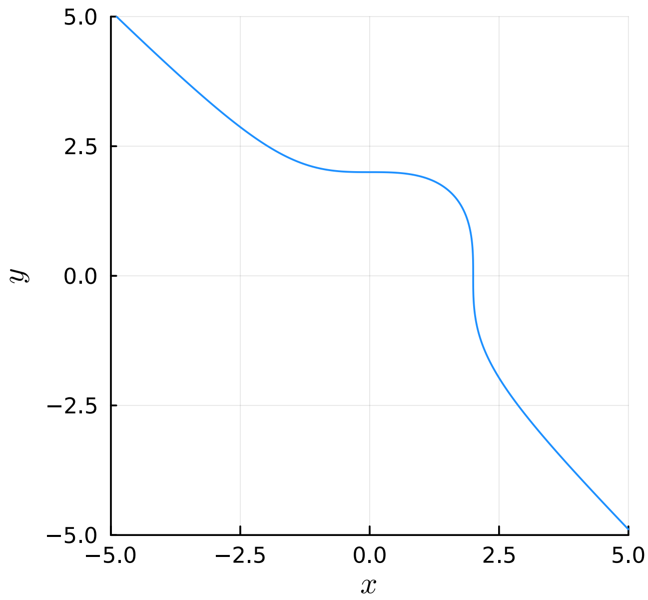


Ejercicio 9.9. La ecuación $x^3 + y^3 = 8$ define una curva implícita.

a. Dibujar la gráfica de la ecuación.

> **Ayuda**
>
> Usar la función `implicit_plot` del paquete `ImplicitPlots` para dibujar la gráfica de una función implícita definida por una ecuación.

> **Solución**
>
> ```
> using Plots, ImplicitPlots, LaTeXStrings
> f(x, y) = x^3 + y^3 - 8
> implicit_plot(f, xlab =  L"$x$", ylab = L"$y$", legend = false)
> ```



b. Calcular la derivada de y como función implícita de x.

Ayuda

La derivada de y como función implícita de x en la ecuación $f(x, y) = 0$ se puede calcular como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Solución

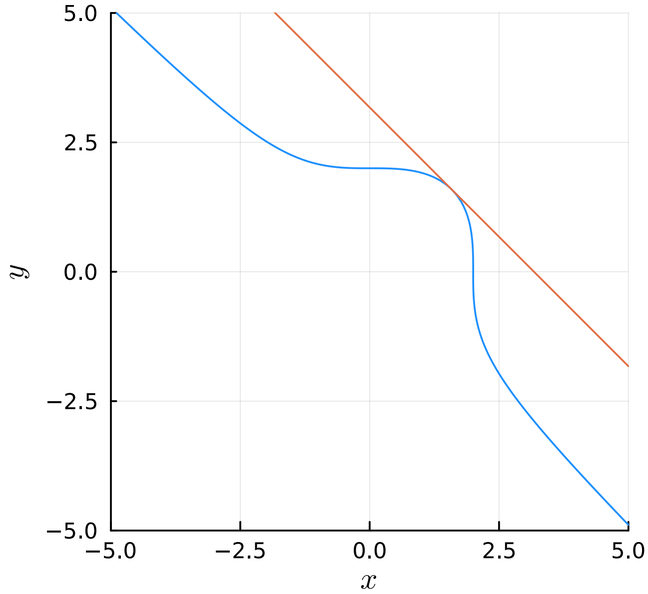
```
using SymPy
@syms x y
y = -diff(f(x, y), x) / diff(f(x, y), y)
```

$-\frac{x^2}{y^2}$

c. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva implícita en el punto $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})$.

💡 Solución

```
x  = y  = 2^(2/3)
tan = lambdify(y  + subs(y , y => y , x => x )*(x-x ))
Plots.plot!(tan)
```

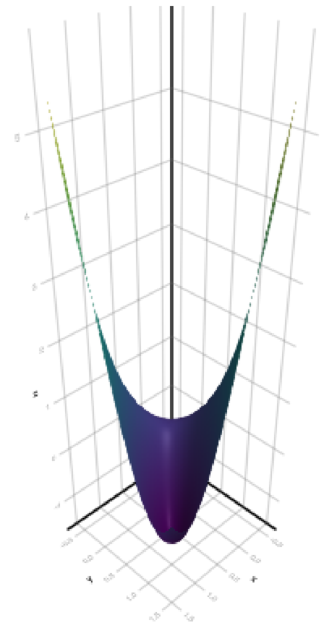


Ejercicio 9.10. La función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ determina la concentración de una sustancia z en función de las concentraciones de otras dos x e y en una reacción química.

a. Representar la gráfica de la función.

💡 Solución

```
using GLMakie
f(x, y) = x^3+y^3-3x*y
xs = ys = range(-0.5, 1.5, 30)
Makie.surface(xs, ys, f)
```



b. Calcular los puntos críticos de la función.

Ayuda

Los puntos críticos son los puntos que anulan el gradiente. Para resolver el sistema de ecuaciones que resulta de igualar el vector gradiente al vector nulo se pueden utilizar las funciones `linsolve` (para sistemas lineales) o `nonlinsolve` (para sistemas no lineales) del paquete `SymPy`.

Solución

```
using SymPy
@syms x y
nonlinsolve(diff.(f(x, y), (x, y)), (x, y))
```

```
Set{Sym} with 4 elements:
  (-1/2 - sqrt(3)*I/2, -1/2 + sqrt(3)*I/2)
  (0, 0)
  (-1/2 + sqrt(3)*I/2, -1/2 - sqrt(3)*I/2)
  (1, 1)
```

c. Determinar los extremos relativos y los puntos de silla. ¿Para qué concentraciones de x e y la concentración de z será mínima?

Ayuda

Para determinar los extremos relativos y los puntos de silla de una función de dos variables, hay que calcular el hessiano en los puntos críticos.

Solución

Definimos una función para el hessiano.

```
using LinearAlgebra
hes = lambdify(det(hessian(f(x,y), (x,y))))
```

```
#150 (generic function with 1 method)
```

Calculamos el hessiano en el punto crítico $(0,0)$.

```
hes(0,0)
```

```
-9
```

Como es negativo, en $(0,0)$ hay un punto de inflexión.
Calculamos el hessiano en el punto crítico $(1,1)$.

```
hes(1,1)
```

```
27
```

Como es positivo, existe un extremo relativo en $(1,1)$. Para ver si se trata de un máximo o mínimo calculamos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

```
fxx = lambdify(diff(f(x,y), x, x), (x,y))
fxx(1,1)
```

```
6
```

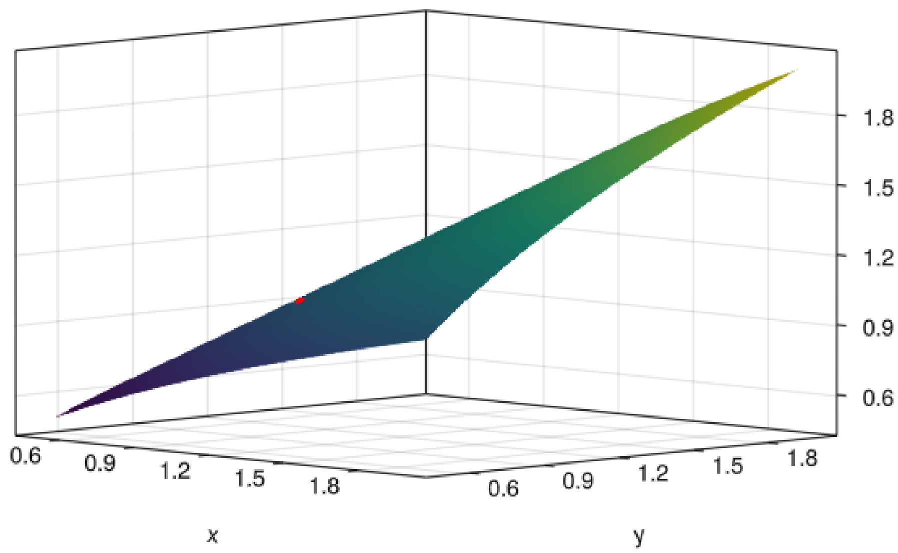
Como es positiva, en $(1,1)$ hay un mínimo. Así pues, la concentración de z será mínima cuando las concentraciones de x e y sean 1.

Ejercicio 9.11. Sea $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

a. Dibujar la gráfica de f y el punto $(1,1,f(1,1))$.

💡 Solución

```
using GLMakie
f(x, y) = sqrt(x*y)
a = b = 1
xs = ys = range(0.5, 2, 30)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], azimuth = -pi/4, elevation = 0.1)
Makie.surface!(ax, xs, ys, f)
Makie.scatter!(ax, Point3(a, b, f(a,b)), color = :red)
fig
```



b. Calcular el polinomio de Taylor de primer grado de f en el punto $(1,1)$ y representarlo gráficamente. Comprobar que se obtiene el plano tangente a la superficie de f en el punto $(1,1)$.

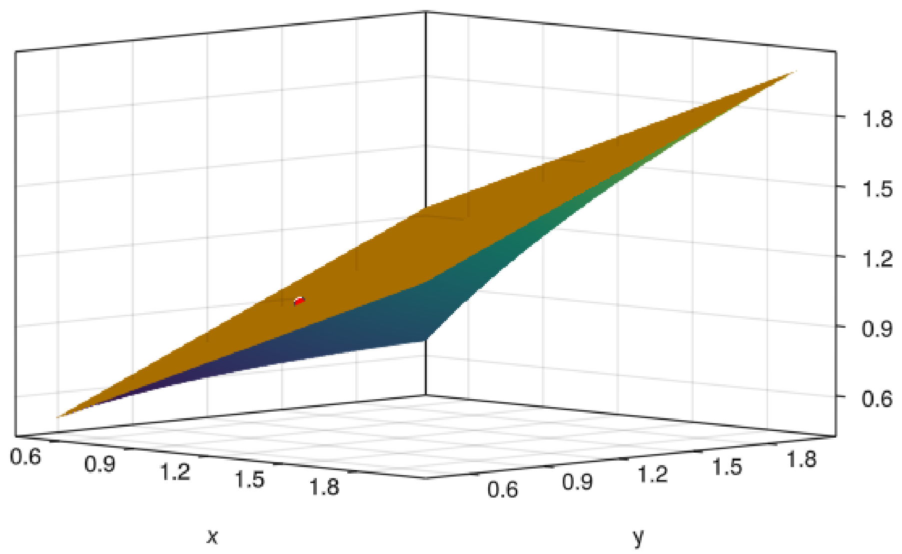
ℹ Ayuda

La fórmula del polinomio de Taylor de primer grado de la función $f(x,y)$ en el punto (a,b) es

$$P^1(x,y) = f(a,b) + \nabla f(a,b)(x-a, y-b).$$

Solución

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x, y
ex = diff.(f(x, y), [x, y])
 f = lambdify(ex, (x, y))
p1(s,t) = f(a, b) + dot( f(a, b), [s-a, t-b])
Makie.surface!(ax, xs, ys, p1; colormap = [:orange], transparency = true)
fig
```



c. Utilizar el polinomio anterior para calcular el valor aproximado de $\sqrt{1.01 \cdot 0.99}$. ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?

Solución

```
error = abs(f(1.01, 0.99) - p1(1.01, 0.99))
```

```
5.000125006249245e-5
```

d. Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de f en el punto $(1, 1)$ y representarlo gráficamente.

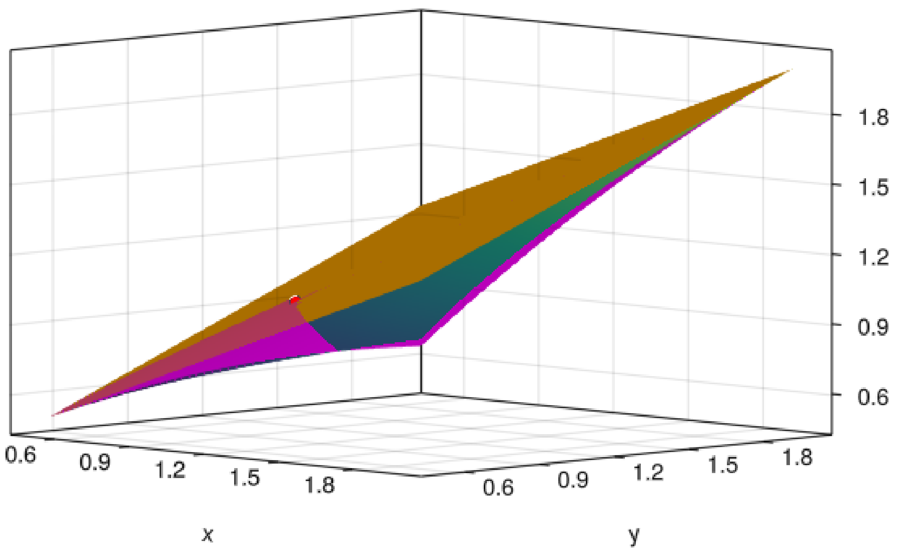
Ayuda

La fórmula del polinomio de Taylor de segundo grado de la función $f(x,y)$ en el punto (a,b) es

$$P^2(x,y) = f(a,b) + \nabla f(a,b)(x-a,y-b) + \frac{1}{2!}\nabla^2 f(a,b)(x-a,y-b)(x-a,y-b).$$

Solución

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x, y
 ²f = lambdify(hessian(f(x,y), (x, y)), (x, y))
p2(s,t) = f(a, b) + dot( f(a, b), [s-a, t-b]) + 1/2 * dot( ²f(a,b) * [s-a; t-b],  [
Makie.surface!(ax, xs, ys, p2; colormap = [:magenta], transparency = true)
fig
```



e. Utilizar el polinomio anterior para calcular el valor aproximado de $\sqrt{1.01 \cdot 0.99}$. ¿Cuál es error cometido en la aproximación? ¿Es mayor o menor que en la aproximación mediante el polinomio de Taylor de primer grado?

Solución

```
error = f(1.01, 0.99) - p2(1.01, 0.99)
```

```
-1.2500624979594477e-9
```

9.16 Ejercicios propuestos

Ejercicio 9.12. ¿Emparejar las siguientes funciones de dos variables con sus diagramas de contorno?

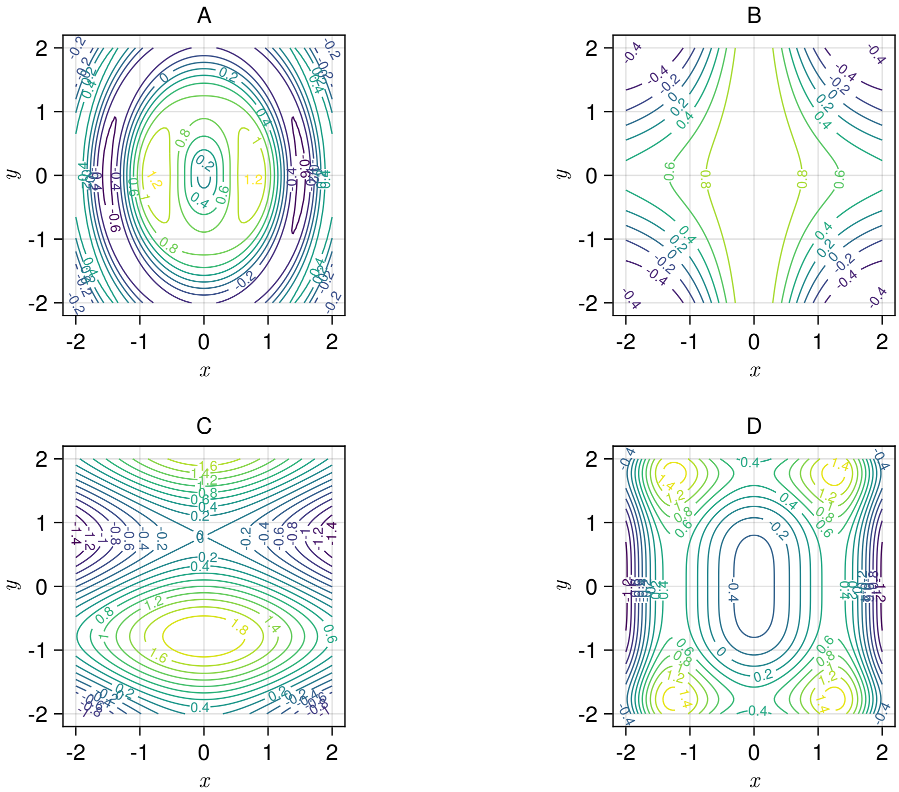


Figura 9.1: Curvas de nivel.

Empareja la función con su gráfica.

$$f(x,y) = \frac{Frsen(2x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

☐ D

☐ C

☐ A

☐ B

$(Select\ an\ answer)$

$$h(x,y) = \cos(x) - Frsen(2y)$$

☐ D

☐ C

☐ A

☐ B

$(Select\ an\ answer)$

$$i(x,y) = \frac{1}{2}(Frsen(x^2) - \cos(y^2))$$

☐ D

☐ C

☐ A

☐ B

$(Select\ an\ answer)$

$$g(x,y) = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x^2+1}}$$

☐ D

☐ C

☐ A

☐ B

$(Select\ an\ answer)$

Ejercicio 9.13. Dada la función

$$f(x, y, z) = \frac{\ln(\sqrt{\cos(x^2 y)})}{z^2},$$

calcular $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$ en el punto $(2, \pi, 1)$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 9.14. La velocidad de una reacción química típicamente depende de la temperatura y de la concentración de los reactivos. En una reacción de hidrólisis del acetato de etilo por hidróxido de sodio (NaOH) en una solución acuosa, la velocidad de reacción viene dada por la fórmula $R(t, a, s) = \frac{t}{3}\sqrt[3]{a^2 s^2}$, donde t es la temperatura de la reacción, a la concentración de acetato de etilo y s la concentración de hidróxido de sodio.

a. ¿En qué dirección debe cambiarse la temperatura y las concentraciones de los reactivos para que la velocidad de reacción aumente lo más rápidamente posible si la temperatura y las concentraciones actuales son the 40ºC, 0.4 mol/l y 0.5 mol/l respectivamente?

   Dirección de cambio de la temperatura: ____________

   Dirección de cambio del acetato de etilo: ____________

   Dirección de cambio del hidróxido de sodio: ____________

b. ¿Cómo cambiará la velocidad de reacción en ese instante si la temperatura disminuye al mismo ritmo que aumenta la concentración del acetato de etilo y la concentración de acetato de etilo aumenta la mitad de lo que aumenta la concentración del hidróxido de sodio?

   *Hint: *

   Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 9.15. La superficie $\frac{e^{z\cos(xy)}}{xz} = \frac{1}{e}$ define a z como función implícita $z = f(x, y)$.

a. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta en el punto $(1, \pi, 1)$?

   ☐ La variable z se mantiene constante cuando se incrementa x, si y se mantiene constante.

   ☐ Las otras opciones son falsas.

☐ La variable z aumenta $1/e$ unidades por cada unidad que aumente x, si y se mantiene constante.

☐ La variable z disminuye lo mismo que aumenta y, si x se mantiene constante.

☐ La variable z disminuye la mitad de lo que aumenta x, si y se mantiene constante.

b. ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en el punto $(1, \pi, 1)$?

☐
$$z = (\pi + 1)x - y$$

☐
$$z = x + y - (\pi + 2)$$

☐ Las otras opciones son falsas.

☐
$$z = \frac{3 - x}{2}$$

☐
$$z = 1 - x + \frac{y}{\pi}$$

Ejercicio 9.16. Dada la función $f(x, y) = -\dfrac{y}{9 + x^2 + y^2}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

☐ Tiene un máximo relativo en el punto $(3, -3)$.

☐ Tiene un máximo relativo en el punto $(0, -3)$ y un punto de silla en el punto $(0, 3)$.

☐ Tiene un máximo relativo en el punto $(0, -3)$ y un mínimo relativo en el punto $(0, 3)$.

☐ No tiene extremos relativos.

☐ Tiene un máximo relativo en el punto $(0, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(0, -3)$.

Ejercicio 9.17. Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $f(x, y) = Frsen(x/y)$ en el punto $(\pi/2, 1)$ y utilizarlo para calcular el valor aproximado de $f(1.5, 1)$.

*Hint: *

Introducir hasta 8 decimales

10 Integrales de funciones de varias variables

10.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico.
using HCubature # Para el cálculo numérico de integrales múltiples.
```

Ejercicio 10.1. Calcular el volumen de las siguientes figuras geométricas usando integrales múltiples.

> **Ayuda**
>
> Para calcular numéricamente integrales definidas de funciones de varias variables usar la función `hcubature` del paquete `HCubature`.

a. Un paralelogramo de base rectangular $[0,1] \times [0,5]$ y altura 10.

> **Solución**
>
> ```
> using HCubature
> f(x, y) = 10
> f(v) = f(v...)
> hcubature(f, [0,0], [1,5])
> ```
>
> ```
> (50.0, 7.105427357601002e-15)
> ```

b. Una cuña de base rectangular $[0,2] \times [0,5]$ y altura 10.

> **Solución**
>
> ```
> f(x, y) = 10x
> f(v) = f(v...)
> hcubature(f, [0,0], [1,5])
> ```

```
(25.0, 3.552713678800501e-15)
```

c. Un cilindro de base circular centrada en el origen con radio 1 y altura 10.

Solución

```
f(x, y) = x^2+y^2<1 ? 10 : 0
f(v) = f(v...)
hcubature(f, [-1,-1], [1,1])
```

```
(31.41598951201623, 4.6813472010342655e-7)
```

d. Una semiesfera centrada en el origen con radio 1.

Solución

```
f(x, y) = x^2+y^2<1 ? sqrt(1-x^2-y^2) : 0
f(v) = f(v...)
hcubature(f, [-1,-1], [1,1])
```

```
(2.0943951101375893, 3.12087277156216e-8)
```

Ejercicio 10.2. Calcular las siguientes integrales iteradas.

Ayuda

Para calcular la primitiva de una función se puede usar la función `integrate` del paquete `SymPy`.

a. $\int_0^1 \int_0^2 x + y \, dy \, dx$.

Solución

```
using SymPy
@syms x y
f(x, y) = x + y
integrate(f(x,y), (y, 0, 2), (x, 0, 1))
```

3

b. $\int_0^2 \int_0^1 x + y \, dx \, dy$.

Solución

```
integrate(f(x,y), (x, 0, 1), (y, 0, 2))
```

3

c. $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xyz\, dz\, dy\, dx$.

Solución

```
@syms z
f(x, y, z) = x * y * z
integrate(f(x,y,z), (z, 0, 3), (y, 0, 2), (x, 0, 1))
```

$\frac{9}{2}$

d. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 xyz\, dy\, dx\, dz$.

Solución

```
@syms z
f(x, y, z) = x * y * z
integrate(f(x,y,z), (y, 0, 2), (x, 0, 1), (z, 0, 3))
```

$\frac{9}{2}$

Ejercicio 10.3. Calcular las siguientes integrales dobles sobre las regiones dadas.

a. $\int_0^2 \int_0^{x/2} e^{x+y}\, dy\, dx$.

Solución

```
using SymPy
@syms x y
f(x, y) = exp(x+y)
integrate(f(x,y), (y, 0, x/2), (x, 0, 2))
```

$-e^2 + \frac{1}{3} + \frac{2e^3}{3}$

b. Calcular la integral anterior invirtiendo el orden de integración.

Solución

```
integrate(f(x,y), (x, 2y, 2), (y, 0, 1))
```

$-e^2 + \frac{1}{3} + \frac{2e^3}{3}$

c. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx$.

Solución

```
f(x, y) = x^2*y
integrate(f(x,y), (y, x, sqrt(x)), (x, 0, 1))
```

$\frac{1}{40}$

d. Calcular la integral anterior invirtiendo el orden de integración.

Solución

```
integrate(f(x,y), (x, y^2, y), (y, 0, 1))
```

$\frac{1}{40}$

e. $\int_0^1 \int_y^1 \cos(x^2) \, dx \, dy$.

Solución

```
f(x, y) = cos(x^2)
integrate(f(x,y), (x, y, 1), (y, 0, 1))
```

$$-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}\sin(1)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} + \frac{C\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{8\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}C\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{8\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Como la función $\cos(x^2)$ no tiene primitiva inmediata, el resultado aparece en función de a función de la integral de Fresnel. Sin embargo, resulta más sencillo calcular esta integral doble iterada invirtiendo el orden de integración, es decir, $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2) \, dy \, dx$.

```
integrate(f(x,y), (y, 0, x), (x, 0, 1))
```

$\frac{\sin(1)}{2}$

Ejercicio 10.4. Calcular los volúmenes que quedan por debajo de las funciones siguientes en las regiones dadas.

a. $x + 2y + 3z = 6$ en el primer octante.

Solución

```
using SymPy
@syms x y z
f(x, y) = solve(x+2y+3z-6, z)[1]
g(x) = solve(f(x,y), y)
integrate(f(x,y), (y, 0, g(x)), (x, 0, 6))
```

6

b. $f(x, y) = xy$ en $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Solución

```
using HCubature
f(x, y) = abs(x*y)
f(v) = f(v...)
hcubature(f, [-1,-1], [1,1])
```

```
(1.0, 0.0)
```

Ejercicio 10.5. Un balsa de residuos líquidos con forma elíptica de ecuación $2x^2+y^2 = 9$ tiene una profundidad dada por la función $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 10$. Calcular el volumen de la balsa.

Solución

```
using SymPy
@syms x y
# Función de la superficie
f(x, y) = x^2/2 + y^2/2 - 10
# Función de la región de integración
g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 9
# Límites de integración en y
soly = solve(g(x, y), y)
# Límites de integración en x
solx = solve(g(x, 0))
integrate(f(x, y), (y, soly[1], soly[2]), (x, solx[1], solx[2]))
```

$-\frac{1197\sqrt{2}\pi}{32}$

Ejercicio 10.6. Calcular el volumen comprendido entre las superficies de las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = 2x$.

Solución

```
using SymPy
@syms x y
f(x, y) = x^2 + y^2
g(x, y) = 2x
sol = solve(f(x,y)-g(x,y), y)
integrate(g(x,y)-f(x,y), (y, sol[1], sol[2]), (x, 0, 2))
```

$-\frac{\pi}{2}$

Ejercicio 10.7. Una tolva tiene forma cónica dada por la función $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ con altura 4 m. Calcular el volumen de la tolva y la cantidad de chapa necesaria para construirla.

Ayuda

El área de la superficie de una función $f(x, y)$ sobre una región R puede calcularse mediante la integral

$$A_R(f) = \int_R \sqrt{f'_x(x_i, y_j)^2 + f'_y(x_i, y_j)^2 + 1}\, dA.$$

Solución

Para calcular el volumen es más sencillo trabajar en coordenadas polares.

```
using SymPy
@syms x y r
f(x, y) = 2*sqrt(x^2+y^2)
g(r, ) = f(r*cos( ), r*sin( ))
solr = solve(g(r, )-4, r)
integrate(4 - g(r, )*r, (r, 0, solr[2]), ( , 0, 2PI))
```

$\frac{16\pi}{3}$

Para calcular en área de la superficie trabajamos en coordenadas rectangulares.

```
soly = solve(f(x,y)-4, y)
solx = solve(f(x,0)-4)
integrate(sqrt(diff(f(x,y), x)^2 + diff(f(x,y), y)^2 +1), (y, soly[1], soly[2]), (x, so
```

$4\sqrt{5}\pi$

Ejercicio 10.8. Una placa metálica delimitada por las curvas $y = 2-x^2$ e $y = -3+2x^2$ tiene una densidad dada por la función $d(x, y) = x^2y^2$.

a. Calcular la masa de la placa.

Ayuda

La masa de una región plana con densidad variable $\delta(x, y)$ se calcula mediante la integral.

$$\int_R \delta(x, y)\, dA.$$

Solución

```
using SymPy
@syms x y
d(x,y) = x^2 * y^2
g(x) = 2 - x^2
h(x) = -3 + 2x^2
sol = solve(g(x)-h(x), x)
m = integrate(d(x,y), (y, h(x), g(x)), (x, sol[1], sol[2]))
```

$\frac{460\sqrt{15}}{729}$

b. Calcular el centro de masas de la placa

Ayuda

Las coordenadas del centro de masas se obtienen mediante las siguientes integrales.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_R x\delta(x, y)\, dA}{\int_R \delta(x, y)\, dA}$$
$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_R y\delta(x, y)\, dA}{\int_R \delta(x, y)\, dA}$$

Solución

Calculamos primero la componente x del centro de masas.

```
# Momento con respecto a y
my = integrate(x*d(x,y), (y, h(x), g(x)), (x, sol[1], sol[2]))
# Centro de masas en x.
my / m
```

0

Y después la componente y del centro de masas.

```
# Momento con respecto a x
mx = integrate(y*d(x,y), (y, h(x), g(x)), (x, sol[1], sol[2]))
# Centro de masas en y.
mx / m
```

$-\frac{4159}{5313}$

10.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 10.9. Calcular la integral $\int_{-1}^{1}\int_{-2y}^{2} e^{x^2}\,dx\,dy$

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 10.10. Calcular el volumen de la región encerrada por las superficies $z^2 = 4-x$, $y^2 = 4-x$ y $x=0$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 10.11. Calcular el volumen encerrado por la superficie de la función $f(x,y) = \ln(\cos(x+y)+2)$ y el plano $z=0$ en la región delimitada por la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 10.12. Calcular el area de la superficie de la función $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ en el intervalo $[0,1]\times[0,1]$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 10.13. Calcular el centro de masas de la región plana delimitada por las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ con densidad $d(x, y) = \ln(x + 2y + 1)$.

Coordenada x

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Coordenada y

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales