# Pácticas de Análisis Matemático con Julia

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

# Tabla de contenidos

# Prefacio

¡Bienvenido a Prácticas de Análisis Matemático con Julia!

Este libro presenta una recopilación de prácticas de Análisis Matemático en una y varias variables reales con el lenguaje de programación Julia, con problemas aplicados a las Ciencias y las Ingenierías.

No es un libro para aprender a programar con Julia, ya que solo enseña el uso del lenguaje y de algunos de sus paquetes para resolver problemas de Cálculo tanto numérico como simbólico. Para quienes estén interesados en aprender a programar en este Julia, os recomiendo leer este manual de Julia.

## Licencia

# 1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Julia es un lenguaje de programación especialmente orientado al cálculo numérico y el análisis de datos. Julia permite además realizar cálculos simbólicos y dispone de una gran biblioteca de paquetes con aplicaciones en muy diversas áreas de las Matemáticas como Cálculo, Álgebra, Geometría, Matemática Discreta o Estadística.

La ventaja de Julia frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, MATLAB o Sage radica en su potencia de cálculo y su velocidad (equiparable al lenguaje C), lo que lo hace ideal para manejar grandes volúmenes de datos o realizar tareas que requieran largos y complejos cálculos. Además, es software libre por lo que resulta ideal para introducirlo en el aula como soporte computacional para los modelos matemáticos sin coste alguno.

En el siguiente enlace se explica el procedimiento de instalación de Julia.

Existen también varios entornos de desarrollo online que permiten ejecutar código en Julia sin necesidad de instalarlo en nuestro ordenador, como por ejemplo Replit, Cocalc o Codeanywhere.

El objetivo de esta práctica es introducir al alumno en la utilización de este lenguaje, enseñándole a realizar las operaciones básicas más habituales en Cálculo.

## 1.1 El REPL de Julia

Para arrancar el REPL^(REPL es el acrónimo de Read, Evaluate, Print and Loop, que describe el funcionamiento del compilador de Julia) de julia basta con abrir una terminal y teclear `julia`.

```
prompt> julia
               _
   _       _ _(_)_     |  Documentation: https://docs.julialang.org
  (_)     | (_) (_)    |
   _ _   _| |_  __ _   |  Type "?" for help, "]?" for Pkg help.
  | | | | | | |/ _` |  |
  | | |_| | | | (_| |  |  Version 1.7.3 (2022-05-06)
 _/ |\__'_|_|_|\__'_|  |  Official https://julialang.org/ release
|__/                   |

julia>
```

## 1.2 El gestor de paquetes de Julia

Julia viene con varios paquetes básicos preinstalados, como por ejemplo el paquete `LinearAlgebra` que define funciones básicas del Álgebra Lineal, pero en estas prácticas utilizaremos otros muchos paquetes que añaden más funcionalidades que no vienen instalados por defecto y tendremos que instalarlos aparte. Julia tiene un potente gestor de paquetes que facilita la búsqueda, instalación, actualización y eliminación de paquetes.

Por defecto el gestor de paquetes utiliza el repositorio de paquetes oficial pero se pueden instalar paquetes de otros repositorios.

Para entrar en el modo de gestión de paquetes hay que teclear `]`. Esto produce un cambio en el *prompt* del REPL de Julia.

Los comandos más habituales son:

- `add p`: Instala el paquete `p` en el entorno activo de Julia.
- `update`: Actualiza los paquetes del entorno activo de Julia.
- `status`: Muestra los paquetes instalados y sus versiones en el entorno activo de Julia.

- `remove p`: Elimina el paquete `p` del entorno activo de Julia.

**Ejemplo**

Para instalar el paquete `SymPy` para cálculo simbólico basta con teclear `add Sympy`.

```
(@v1.7) pkg> add SymPy
    Updating registry at `~/.julia/registries/General.toml`
   Resolving package versions...
    Updating `~/.julia/environments/v1.7/Project.toml`
  [24249f21] + SymPy v1.1.6
    Updating `~/.julia/environments/v1.7/Manifest.toml`
  [3709ef60] + CommonEq v0.2.0
  [38540f10] + CommonSolve v0.2.1
  [438e738f] + PyCall v1.93.1
  [24249f21] + SymPy v1.1.6
```

## 1.3 Operadores aritméticos.

El uso más simple de Julia es la realización de operaciones aritméticas como en una calculadora. En Julia se utilizan los siguientes operadores.

| Operador | Descripción |
|---|---|
| `x + y` | Suma |
| `x - y` | Resta |
| `x * y` | Producto |
| `x / y` | División |
| `x ÷ y` | Cociente división entera |
| `x % y` | Resto división entera |
| `x ^ y` | Potencia |

## 1.4 Operadores de comparación

| Operador | Descripción |
|---|---|
| `==` | Igualdad |
| `!=`, | Desigualdad |
| `<` | Menor que |
| `<=`, | Menor o igual que |

| Operador | Descripción |
|---|---|
| `>` | Mayor que |
| `>=`, | Mayor o igual que |

## 1.5 Operadores booleanos

| Operador | Descripción |
|---|---|
| `!x` | Negación |
| `x && y` | Conjunción (y) |
| `x \|\| y` | Disyunción (o) |

Existen también un montón de funciones predefinidas habituales en Cálculo.

## 1.6 Funciones de redondeo

| Función | Descripción |
|---|---|
| `round(x)` | Devuelve el entero más próximo a `x` |
| `round(x, digits = n)` | Devuelve al valor más próximo a `x` con `n` decimales |
| `floor(x)` | Redondea `x` al próximo entero menor |
| `ceil(x)` | Redondea `x` al próximo entero mayor |
| `trunc(x)` | Devuelve la parte entera de `x` |

ℹ Ejemplo

```
julia> round(2.7)
3.0

julia> floor(2.7)
2.0

julia> floor(-2.7)
-3.0

julia> ceil(2.7)
3.0

julia> ceil(-2.7)
-2.0

julia> trunc(2.7)
2.0

julia> trunc(-2.7)
-2.0

julia> round(2.5)
2.0

julia> round(2.786, digits = 2)
2.79
```

## 1.7 Funciones de división

| Función | Descripción |
|---|---|
| `div(x,y)`, `x÷y` | Cociente de la división entera |
| `fld(x,y)` | Cociente de la división entera redondeado hacia abajo |
| `cld(x,y)` | Cociente de la división entera redondeado hacia arriba |
| `rem(x,y)`, `x%y` | Resto de la división entera. Se cumple `x == div(x,y)*y + rem(x,y)` |
| `mod(x,y)` | Módulo con respecto a `y`. Se cumple `x == fld(x,y)*y + mod(x,y)` |
| `gcd(x,y...)` | Máximo común divisor positivo de `x`, `y`,... |

| Función | Descripción |
|---|---|
| `lcm(x,y...)` | Mínimo común múltiplo positivo de `x`, `y`,... |

ℹ Ejemplo

```
julia> div(5,3)
1

julia> cld(5,3)
2

julia> 5%3
2

julia> -5%3
-2

julia> mod(5,3)
2

julia> mod(-5,3)
1

julia> gcd(12,18)
6

julia> lcm(12,18)
36
```

## 1.8 Funciones para el signo y el valor absoluto

| Función | Descripción |
|---|---|
| `abs(x)` | Valor absoluto de `x` |
| `sign(x)` | Devuelve -1 si `x` es positivo, -1 si es negativo y 0 si es 0. |

ℹ Ejemplo

```
julia> abs(2.5)
2.5

julia> abs(-2.5)
2.5

julia> sign(-2.5)
-1.0

julia> sign(0)
0

julia> sign(2.5)
1.0
```

## 1.9 Raíces, exponenciales y logaritmos

| Función | Descripción |
|---|---|
| `sqrt(x)`, `√x` | Raíz cuadrada de `x` |
| `cbrt(x)`, `x` | Raíz cúbica de `x` |
| `exp(x)` | Exponencial de `x` |
| `log(x)` | Logaritmo neperiano de `x` |
| `log(b,x)` | Logaritmo en base `b` de `x` |
| `log2(x)` | Logaritmo en base 2 de `x` |
| `log10(x)` | Logaritmo en base 10 de `x` |

Ejemplo

```
julia> sqrt(4)
2.0

julia> cbrt(27)
3.0

julia> exp(1)
2.718281828459045

julia> exp(-Inf)
0.0

julia> log(1)
0.0

julia> log(0)
-Inf

julia> log(-1)
ERROR: DomainError with -1.0:
log will only return a complex result if called with a complex argument.
...

julia> log(-1+0im)
0.0 + 3.141592653589793im

julia> log2(2^3)
3.0
```

## 1.10 Funciones trigonométricas

| Función | Descripción |
|---|---|
| `hypot(x,y)` | Hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos `x` e `y` |
| `sin(x)` | Seno del ángulo `x` en radianes |
| `sind(x)` | Seno del ángulo `x` en grados |
| `cos(x)` | Coseno del ángulo `x` en radianes |
| `cosd(x)` | Coseno del ángulo `x` en grados |

| Función | Descripción |
|---|---|
| `tan(x)` | Tangente del ángulo `x` en radianes |
| `tand(x)` | Tangente del ángulo `x` en grados |
| `sec(x)` | Secante del ángulo `x` en radianes |
| `csc(x)` | Cosecante del ángulo `x` en radianes |
| `cot(x)` | Cotangente del ángulo `x` en radianes |

**Ejemplo**

```
julia> sin( /2)
1.0

julia> cos( /2)
6.123233995736766e-17

julia> cosd(90)
0.0

julia> tan( /4)
0.9999999999999999

julia> tand(45)
1.0

julia> tan( /2)
1.633123935319537e16

julia> tand(90)
Inf

julia> sin( /4)^2 + cos( /4)^2
1.0
```

## 1.11 Funciones trigonométricas inversas

| Función | Descripción |
|---|---|
| `asin(x)` | Arcoseno (inversa del seno) de `x` en radianes |
| `asind(x)` | Arcoseno (inversa del seno) de `x` en grados |

| Función | Descripción |
|---|---|
| `acos(x)` | Arcocoseno (inversa del coseno) de `x` en radianes |
| `acosd(x)` | Arcocoseno (inversa del coseno) de `x` en grados |
| `atan(x)` | Arcotangente (inversa de la tangente) de `x` en radianes |
| `atand(x)` | Arcotangente (inversa de la tangente) de `x` en grados |
| `asec(x)` | Arcosecante (inversa de la secante) de `x` en radianes |
| `acsc(x)` | Arcocosecante (inversa de la cosecante) de `x` en radianes |
| `acot(x)` | Arcocotangente (inversa de la cotangente) de `x` en radianes |

**Ejemplo**

```
julia> asin(1)
1.5707963267948966

julia> asind(1)
90.0

julia> acos(-1)
3.141592653589793

julia> atan(1)
0.7853981633974483

julia> atand(tan( /4))
45.0
```

## 1.12 Precedencia de operadores

A la hora de evaluar una expresión aritmética, Julia evalúa los operadores según el siguiente orden de prioridad (de mayor a menor prioridad).

| Categoría | Operadores | Asociatividad |
|---|---|---|
| Funciones | `exp`, `log`, `sin`, etc. | |
| Exponenciación | `^` | Derecha |
| Unarios | `+ - √` | Derecha |
| Fracciones | `//` | Izquierda |
| Multiplicación | `* / % & \ ÷` | Izquierda |
| Adición | `+ - \|` | Izquierda |
| Comparaciones | `> < >= <= == != !==` | |

| Categoría | Operadores | Asociatividad |
|---|---|---|
| Asignaciones | `= += -= *= /= //= ^= ÷= %= \|= &=` | Derecha |

Cuando se quiera evaluar un operador con menor prioridad antes que otro con mayor prioridad, hay que utilizar paréntesis.

Ejemplo

```
julia> 1 + 4 ^ 2 / 2 - 3
6.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / 2 - 3
5.5

julia> (1 + 4) ^ 2 / 2 - 3
9.5

julia> 1 + 4 ^ 2 / (2 - 3)
-15.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / (2 - 3)
-17.0
```

## 1.13 Definición de variables

Para definir variables se pueden utilizar cualquier carácter Unicode. Los nombres de las variables pueden contener más de una letra y, en tal caso, pueden usarse también números, pero siempre debe comenzar por una letra. Así, para Julia, la expresión `xy`, no se interpreta como el producto de la variable $x$ por la variable $y$, sino como la variable $xy$. Además, se distingue entre mayúsculas y minúsculas, así que no es lo mismo $xy$ que $xY$.

# 2 Sucesiones de números reales

## 2.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

**Ejercicio 2.1.** Dar los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a. $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$

> **Ayuda**
>
> Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 10 usando compresiones de arrays.

> **Solución**
>
> ```
> x(n) = 2n + 1
> print([x(n) for n = 1:10])
> ```
>
> ```
> [3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21]
> ```

b. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

```
# Como reales
x(n) = 1 / n
print([x(n) for n = 1:10])
# Como racionales
x(n) = 1//n
print([x(n) for n = 1:10])
```

```
[1.0, 0.5, 0.3333333333333333, 0.25, 0.2, 0.16666666666666666, 0.14285714285714285, 0.1
```

```
Rational{Int64}[1//1, 1//2, 1//3, 1//4, 1//5, 1//6, 1//7, 1//8, 1//9, 1//10]
```

c. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

Solución

```
x(n) = (-1)^n
print([x(n) for n = 1:10])
```

```
[-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]
```

d. $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

```
x(n) = (1 + 1 / n)^n
print([x(n) for n = 1:10])
```

```
[2.0, 2.25, 2.3703703703703702, 2.44140625, 2.4883199999999994, 2.5216263717421135, 2.5
```

e. $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

```
x(n) = n == 1 ? 1 : sqrt(1+x(n-1))
print([x(n) for n = 1:10])
```

```
Real[1, 1.4142135623730951, 1.5537739740300374, 1.5980531824786175, 1.6118477541252516,
```

**Ejercicio 2.2.** Dibujar en una gráfica los 50 primeros términos de las siguientes sucesiones y deducir si son convergentes o no. En el caso de que sean convergentes, dar un valor aproximado de su límite.

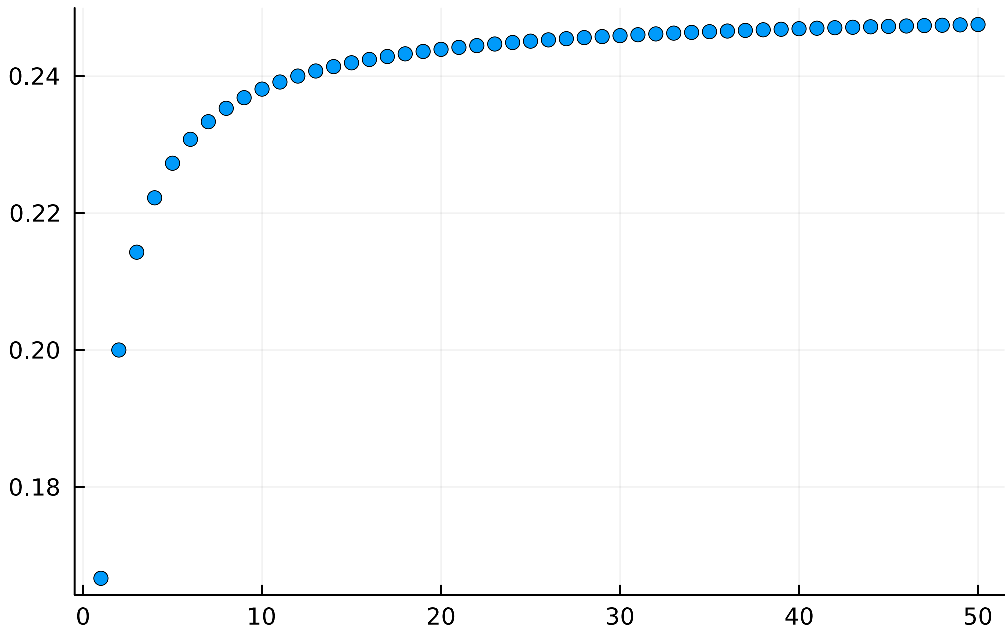
**Ayuda**

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior. Después usar la función `scatter` del paquete `Plots` para dibujar el array de términos.

a. $\left(\frac{n}{4n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

**Solución**

```
using Plots
x(n) = n / (4n + 2)
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```

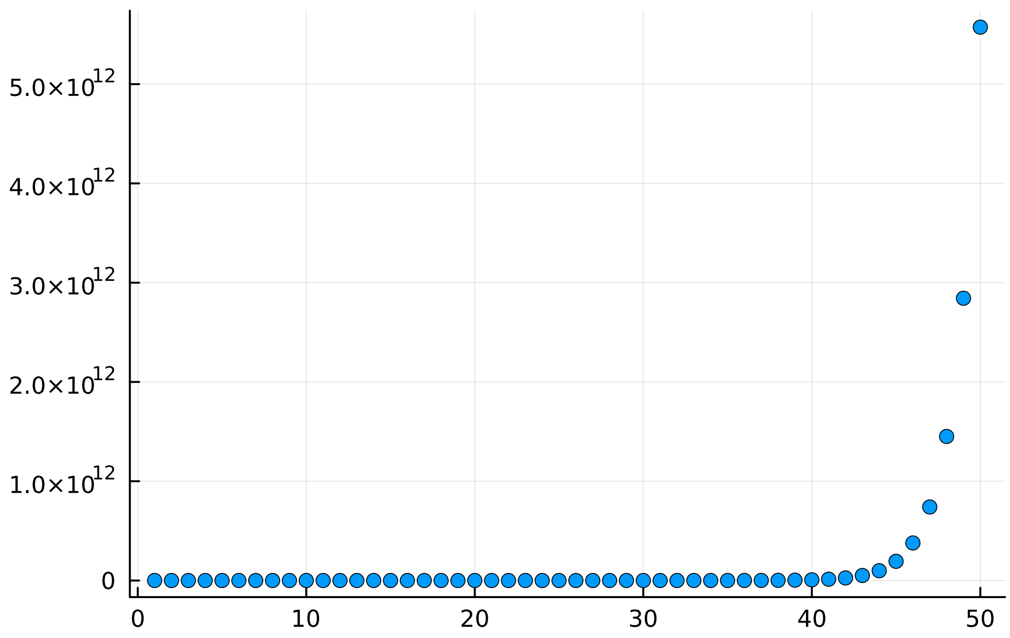



La sucesión converge al número 0.25.

b. $\left(\frac{2^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

```julia
using Plots
x(n) = 2^n / (4n + 2)
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```

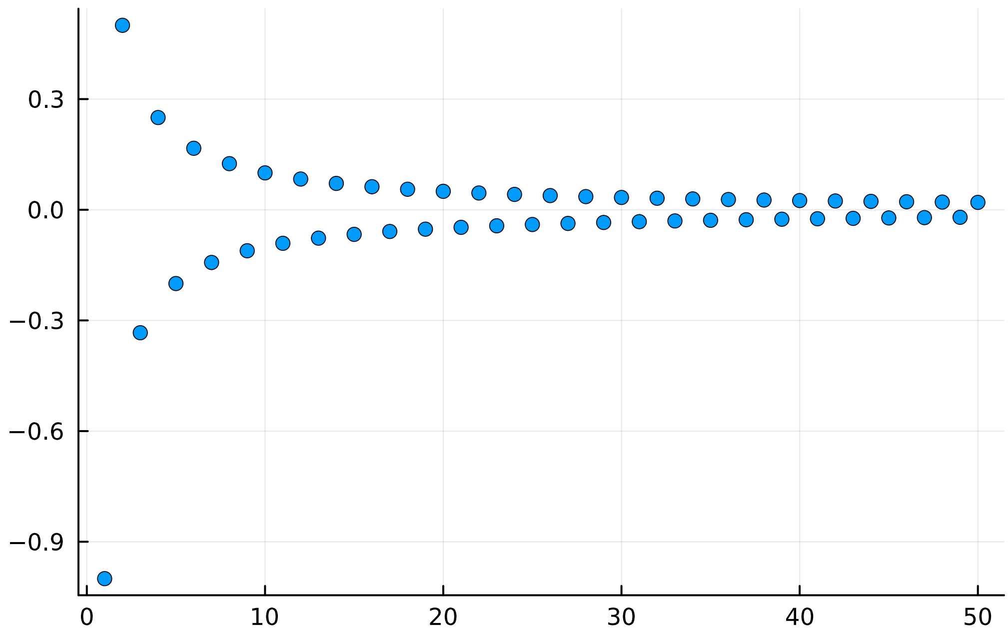



La sucesión diverge.

c. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

```julia
using Plots
x(n) = (-1)^n / n
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```

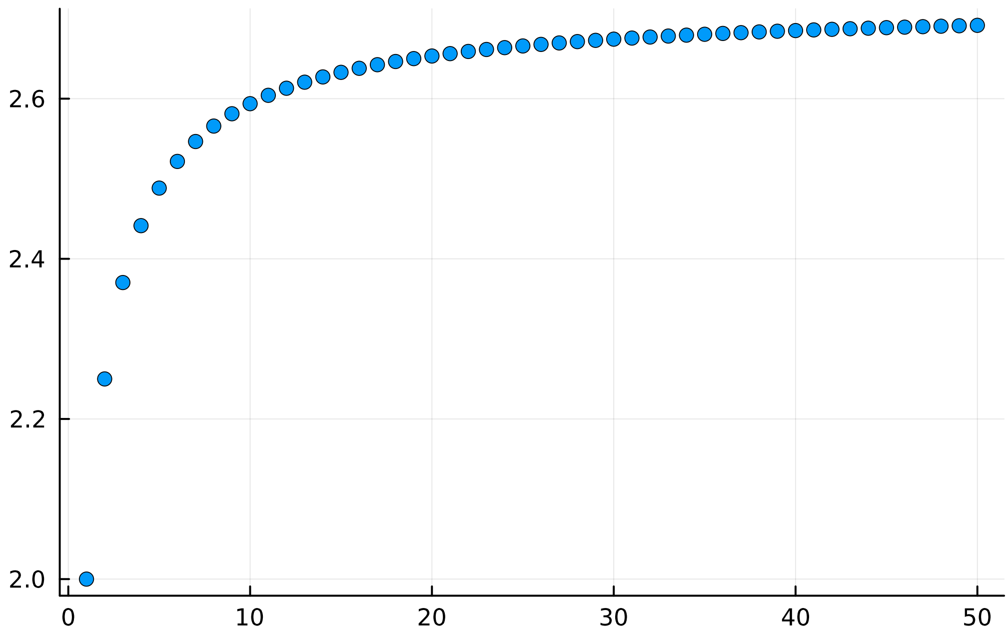



La sucesión converge al 0.

d. $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

```
using Plots
x(n) = (1 + 1 / n)^n
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```

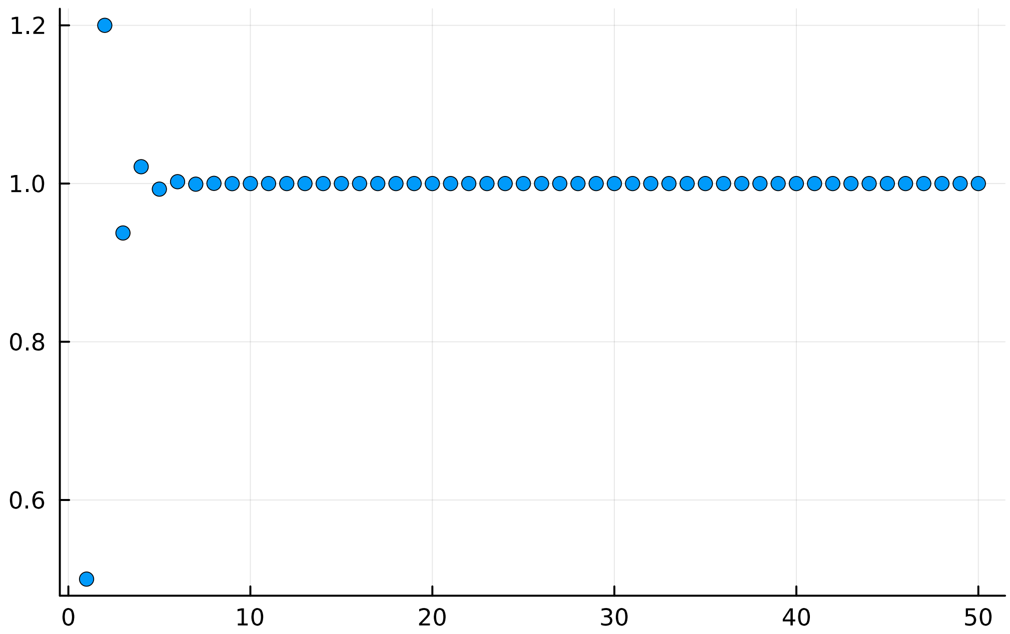



La sucesión converge aproximadamente a 2.7.

e. $x_1 = 0.5$ y $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

```
using Plots
x(n) =  n == 1 ? 0.5 : 3/(2+x(n-1))
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```




La sucesión converge aproximadamente a 1.

**Ejercicio 2.3.** Calcular el límite, si existe, de las siguiente sucesiones.

a. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Ayuda

Definir una función para el término general usar la función `limit` del paquete `SymPy` para calcular el límite de la sucesión.

Solución

```
using SymPy
@syms n::(integer, positive)  # Declaración de la variable simbólica n.
x(n) = 1/n
limit(x(n), n=>oo)
```

0

b. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

Solución

```
@syms n::(integer, positive)
x(n) = (-1)^n
limit(x(n), n=>oo)
```

NaN

c. $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$

Solución

```
@syms n::(integer, positive)
x(n) = (1 + 1 / n)^n
limit(x(n), n=>oo)
```

$e$

**Ejercicio 2.4.** En el siglo III A.C Arquímedes usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia (y de paso el valor de $\pi$). La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

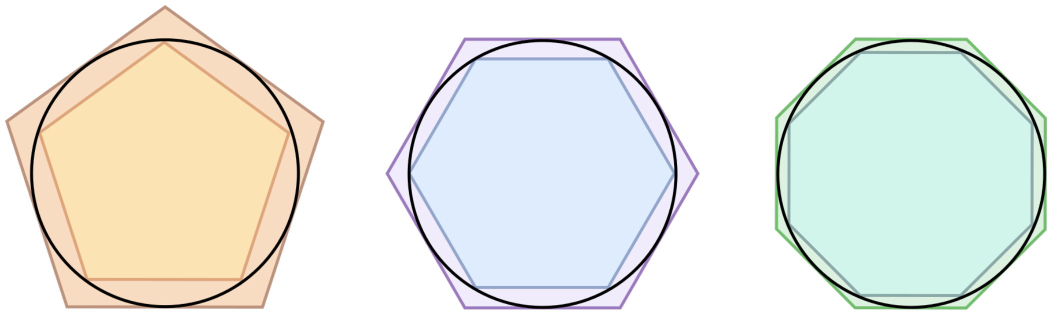


Figura 2.1: Aproximación del área de una circunferencia mediante polígonos regulares

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

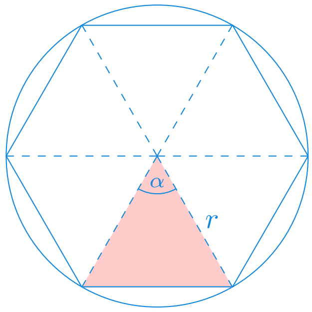



Figura 2.2: Descomposición de un hexágono en triángulos

En el caso de los polígonos inscritos dentro de la circunferencia, como dos de los lados siempre coinciden con el radio de la circunferencia $r$, el área del polígono de $n$ lados puede calcularse con la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2} n r^2 Frsen\left(\frac{360}{n}\right)$$

a. Calcular el área de los polígonos de $10^i$ lados, para $i = 1, \ldots, 6$ tomando $r = 1$.

Solución

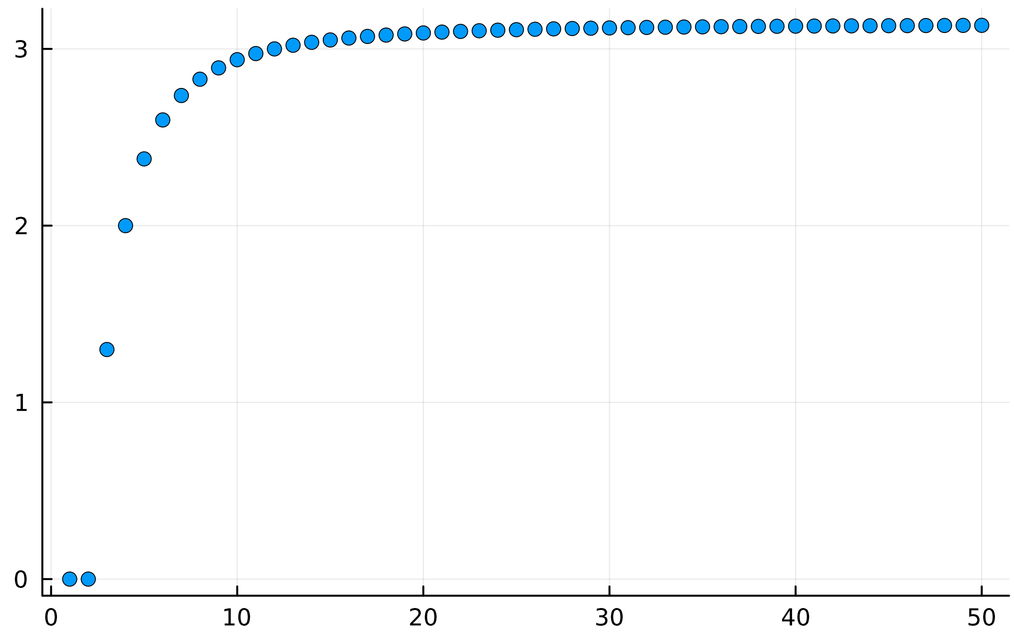
```
a(n) = n*sind(360/n)/2
print([a(10^i) for i = 1:6])
```

```
[2.938926261462366, 3.1395259764656687, 3.1415719827794755, 3.141592446881286, 3.141592
```

b. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de las areas de los polígonos tomando $r = 1$.

Solución

```
using Plots
a(n) = n*sind(360/n)/2
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```




c. Calcular el límite de la sucesión de las areas de los polígonos tomando $r = 1$.

Solución

```
using SymPy
@syms n::(integer, positive)
a(n) = n*sin(2pi/n)/2
limit(a(n), n=>oo)
```

3.14159265358979

d. Usando el resultado anterior, calcular el area del círculo de radio $r$.

Solución

```
using SymPy
@syms n::(integer, positive), r
a(n) = n*r^2*sin(2pi/n)/2
limit(a(n), n=>oo)
```

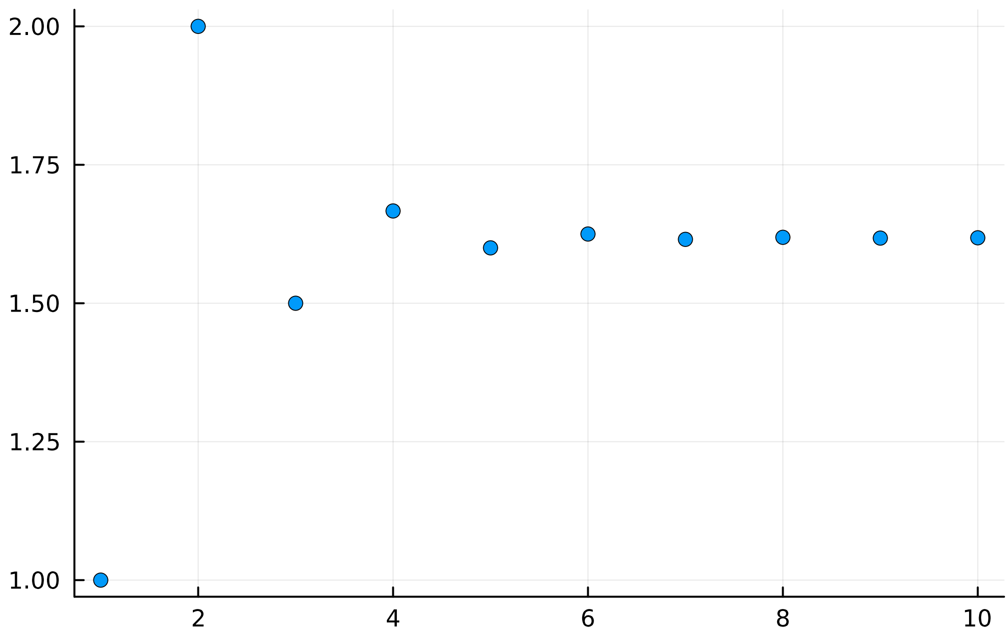
$3.14159265358979r^2$

**Ejercicio 2.5.** Dada la sucesión $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se pide:

a. Dibujar la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión. ¿Es una sucesión monótona?

Solución

```julia
using Plots
x(n) =  n == 1 ? 1 : 1 + 1 / x(n-1)
scatter([x(n) for n = 1:10], legend=false)
```

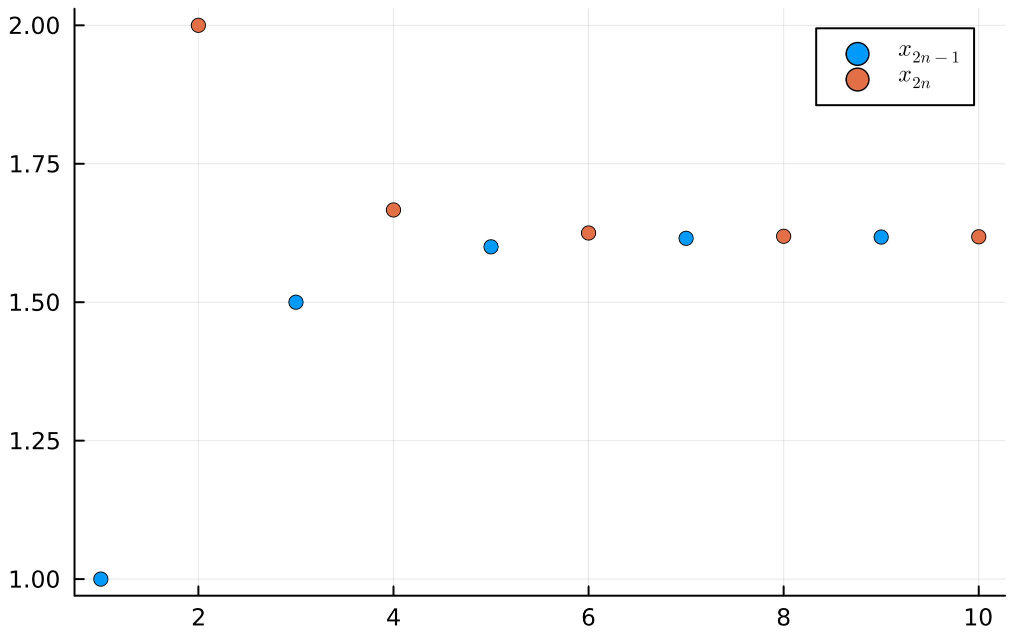



La sucesión no es monótona.

b. Dibujar la gráfica de los 5 primeros términos de las subsucesiones con los términos pares e impares. ¿Son monótonas?

Solución

```
using Plots, LaTeXStrings
x(n) =  n == 1 ? 1 : 1 + 1 / x(n-1)
n1 = 1:2:10
n2 = 2:2:10
scatter(n1, x.(n1), label=L"$x_{2n-1}$")
scatter!(n2, x.(n2), label=L"$x_{2n}$")
```




La sucesión de los términos impares es creciente y la de los pares es decreciente.

## 2.2 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 2.6.** Calcular el décimo término de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 2.7.** Calcular los 10 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ y averiguar hacia dónde converge.

☐ No converge

☐ 0.5

☐ 1

☐ 1.5

☐ 0

**Ejercicio 2.8.** ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la sucesión $x_1 = 3$ y $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

insert image here

**Ejercicio 2.9.** A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$, ¿crees que la sucesión converge?

☐ Si

☐ No

**Ejercicio 2.10.** A la vista de la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$, ¿crees que la sucesión converge?

☐ Si

☐ No

**Ejercicio 2.11.** A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión dada por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ¿crees que la sucesión converge?

☐ Si

☐ No

**Ejercicio 2.12.** ¿Cuál es el límite de la sucesión $\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

# 3 Funciones elementales

## 3.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs()  # Para obtener gráficos interactivos.
using SymPy # Para el cálculo simbólico.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

**Ejercicio 3.1.** La siguiente tabla contiene el número de bacterias en un cultivo cada hora que pasa.

| Horas | Bacterias |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |

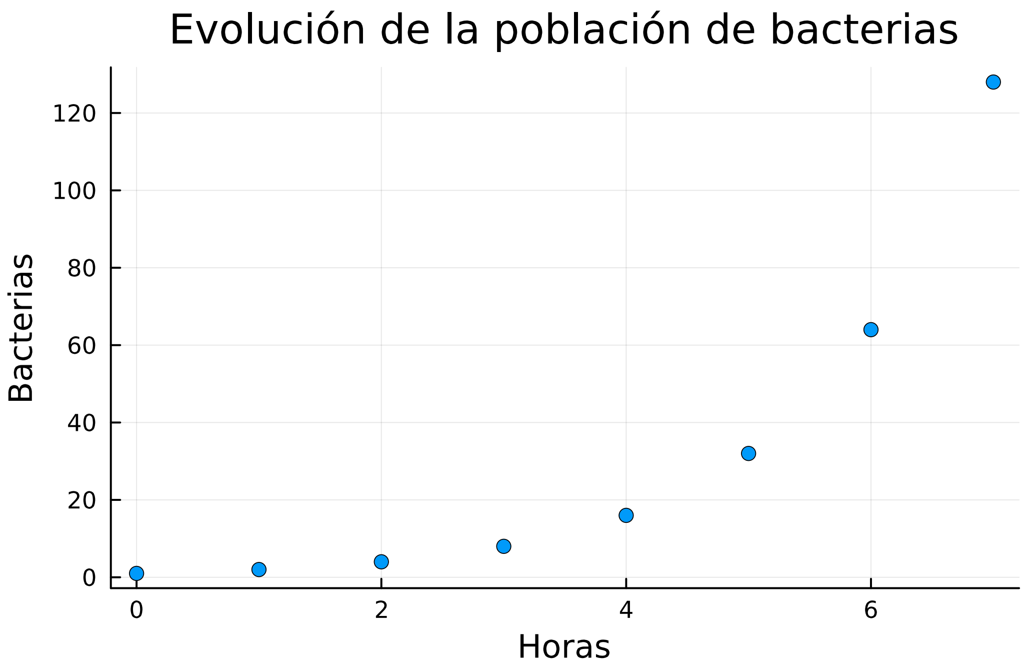
Dibujar una gráfica con la evolución del la población de bacterias.

**Ayuda**

Definir los valores de las horas en un vector `x` y el número de bacterias en otro `y` y luego utilizar la función `scatter(x,y)` del paquete `Plots` para dibujar una gráfica de puntos.

Solución

```
using Plots
horas = 0:7
bacterias = [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]
scatter(horas, bacterias, xlab="Horas", ylab="Bacterias", title="Evolución de la pob
```




¿Los pares dados en la tabla forman una función?

Solución

Si, porque para cada hora hay a lo sumo un número de bacterias con el que se relaciona.

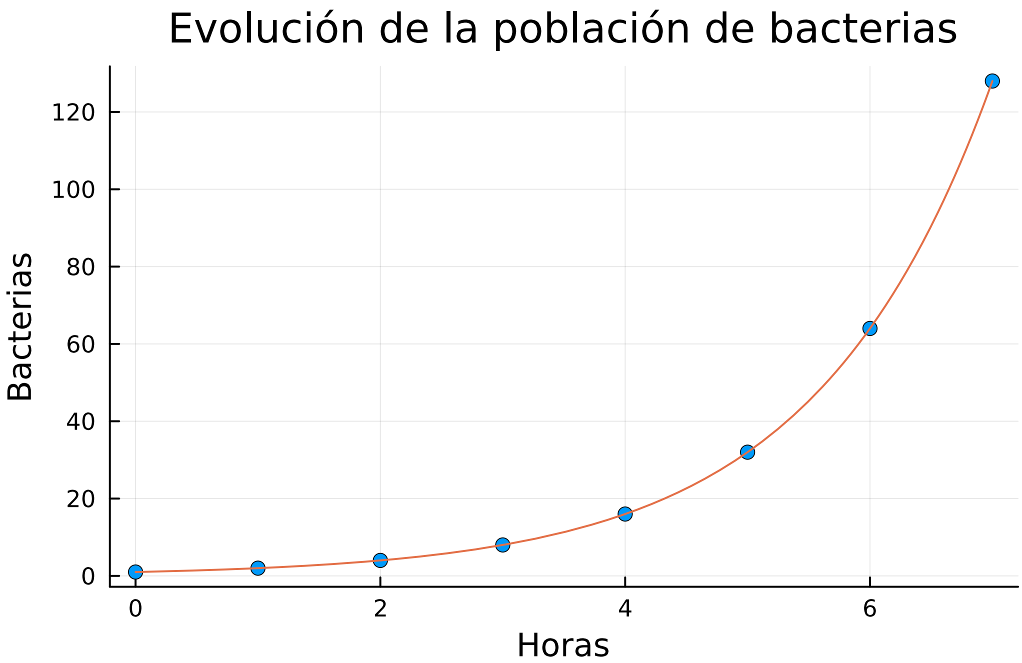
¿Qué fórmula crees que explica la evolución del número de bacterias en función de las horas que pasan? Dibuja en la gráfica anterior la función con esa fórmula.

Ayuda

Para añadir una nueva gráfica a una anterior se añade un signo de exclamación `!` a la función de graficación. Para una gráfica de líneas, utilizar la función `plot!` del paquete `Plots`, pasándole el nombre de la función si se ha definido previamente o la definición anónima de la función

Solución

```julia
using Plots
plot!(x -> 2^x)
```




**Ejercicio 3.2.** En el lanzamiento vertical de un objeto, la posición que ocupa el objeto en cada instante $t$, viene dado por la función

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

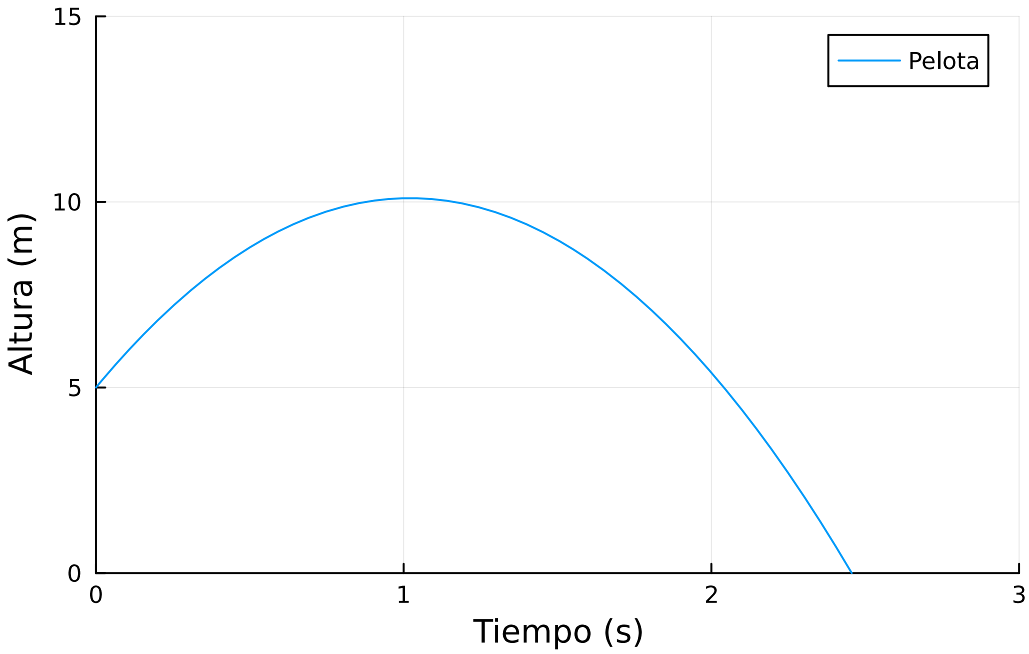
donde $y_0$ es la altura inicial del objeto, $v_0$ la velocidad inicial con que se lanza, y $g$ es la aceleración de la gravedad. Una pelota se lanza verticalmente desde la ventada de un edificio a 5 m de altura, con una velocidad inicial de 10 m/s. Dibujar la gráfica de la posición de la pelota en función del tiempo, tomando una aceleración de la gravedad $g = -9.8$ m/s².

**Ayuda**

Declarar $t$ como una variable simbólica usando el paquete SymPy, definir después las constantes $y_0$, $v_0$ y $g$, y luego definir la función $y(t)$ mediante la fórmula dada. Para dibujar la gráfica de la función, usar la función `plot` pasándole el nombre de la función. Como no tienen sentido los instantes negativos, ni las posiciones negativas, restringir la ventana de graficación a valores de $t$ y de $y$ positivos usando los parámetros `xlim` e `ylim`.

**Solución**

```
using Plots, SymPy
@vars t  #Declaramos t como una variable simbólica
y  = 5
v  = 10
const gravedad = -9.8  #Declaramos la gravedad como una constante
y0(t) = y +v *t+ 1/2*gravedad*t^2
plot(y0, xlims=(0,3), ylims=(0,15), label="Pelota", xlab="Tiempo (s)", ylab="Altura
```



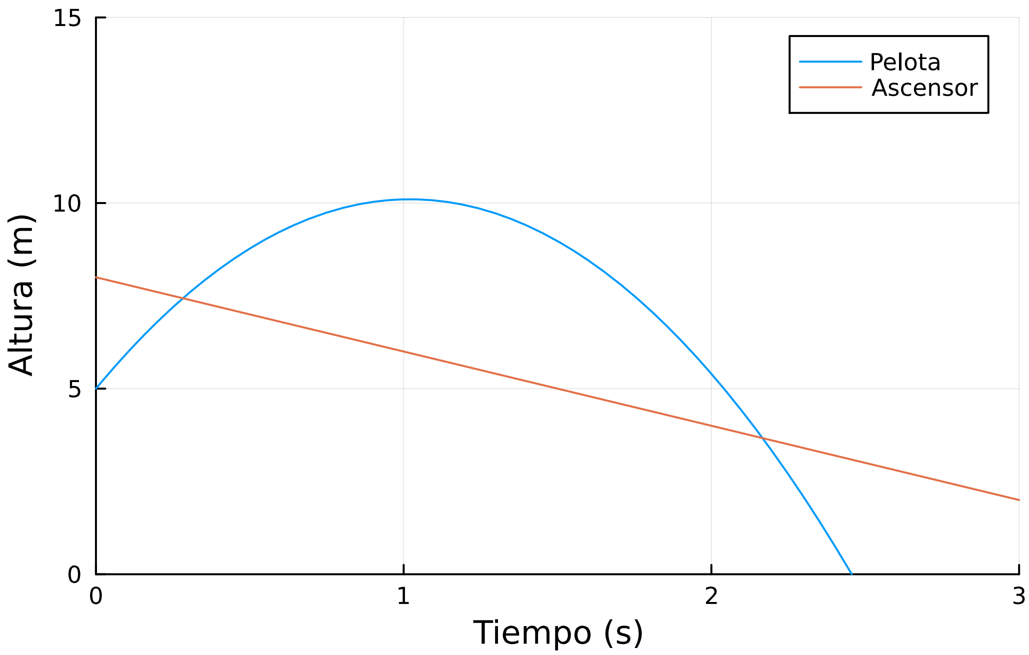

Al mismo tiempo que se lanza la pelota, un ascensor exterior baja por la fachada del mismo edificio desde una altura de 8 m con una velocidad constante de 5 m/s. Dibujar la gráfica de la posición del ascensor junto a la gráfica de la pelota.

ℹ Ayuda

La función que define la posición del ascensor que baja desde una altura $y_1$ con una velocidad constante $v_1$ en cada instante $t$ es $y(t) = y_1 - v_1 t$.

Solución

```
y  = 8
v  = 2
y1(t) = y -v *t
plot!(y1, label="Ascensor")
```

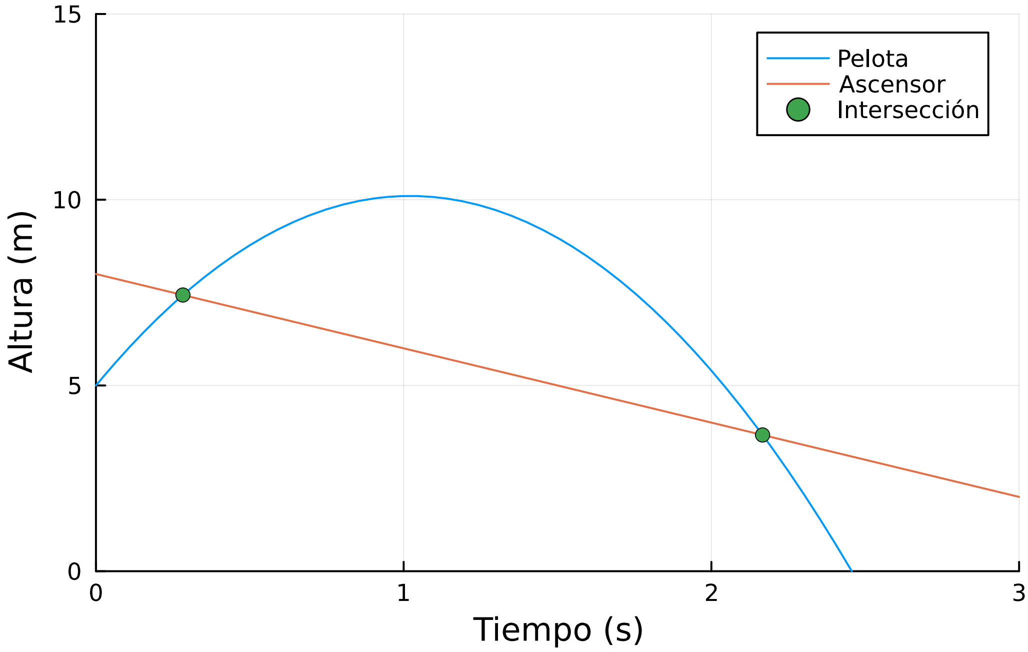



¿En qué instantes el ascensor estará a la misma altura de la pelota? Dibujar los puntos correspondientes a esos instantes en la gráfica anterior.

Solución

```
sol = solve(y0(t)-y1(t))
print("Instantes: ", sol)
scatter!(sol, y1.(sol), label="Intersección")
```

```
Instantes: Sym[0.282613815574341, 2.16636577626239]
```



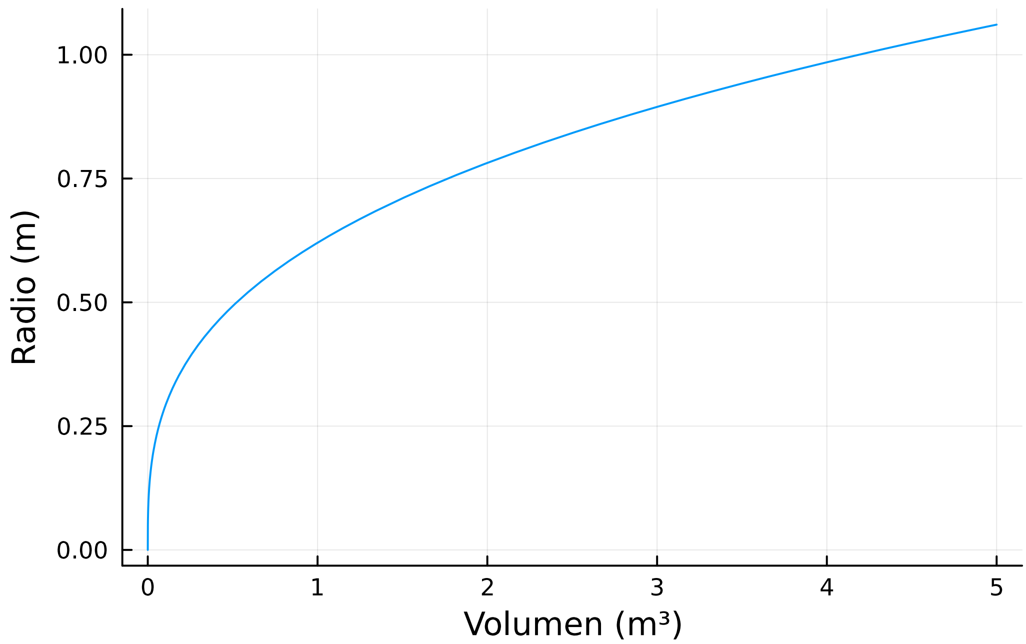

**Ejercicio 3.3.** El volumen de un globo esférico depende del radio según la función $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calcular la función que expresa el radio en función del volumen y dibujar su gráfica.

**Ayuda**

Declarar las variables simbólicas `r` y `v` usando el paquete `SymPy` y definir la función `vol(r)` que expresa el volumen del globo en función del radio.
Después utilizar la función `solve` del paquete `SymPy` para despejar `r` de la ecuación `v-vol(r)=0`.

💡 Solución

```
using Plots, SymPy
@vars r v
vol(r) = 4/3*pi*r^3
rad = solve(v-vol(r),r)[1]
plot(rad, xlab="Volumen (m³)", ylab="Radio (m)", legend=false)
```



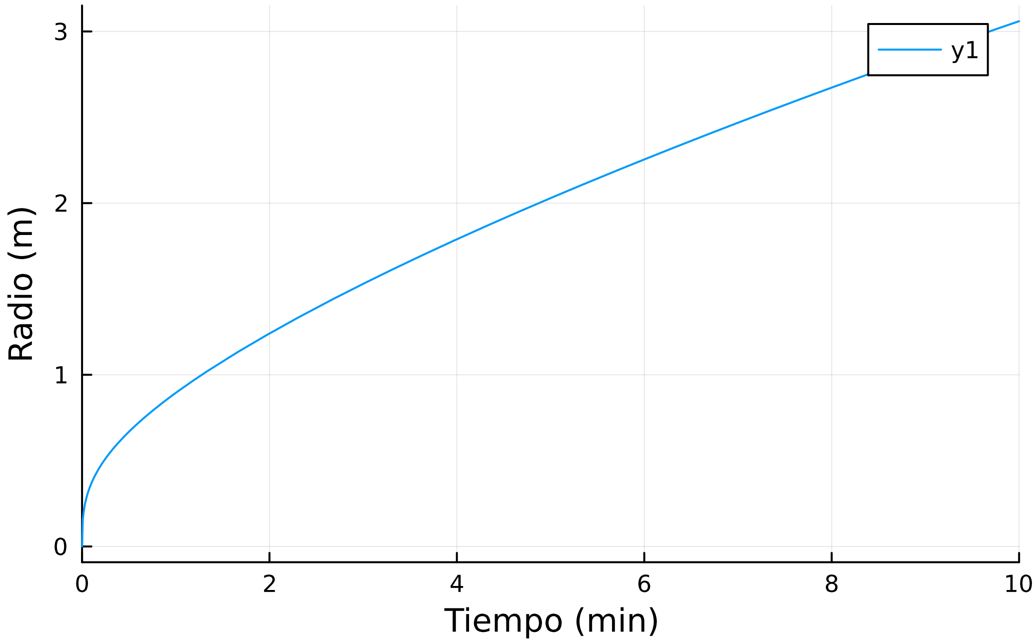

Si empezamos a introducir helio en el globo de manera que su volumen a los $t$ minutos viene dado por la función $v(t) = t^2 + 2t$, dibujar la gráfica de la función que da el radio en cada instante.

ℹ Ayuda

Declarar las variables simbólicas `t` usando el paquete `SymPy` y definir la función `vol(t)` que expresa el volumen del globo en función del tiempo.
Después utilizar a el operador de composición $\circ$ para componer la función del volumen con la función del radio.

Solución

```
@vars t
vol(t)=t^2+2t
plot(rad vol, xlim=(0,10), xlab="Tiempo (min)", ylab="Radio (m)")
```




Si el globo explota cuando el radio alcanza los 3 m, ¿cuándo explotará el globo?

Solución

```
sol = solve((rad vol)(t)-3)
```

$$\begin{bmatrix} -11.6816354332674 \\ 9.68163543326738 \end{bmatrix}$$

El globo explotará a los 9.68163543326738 minutos.

**Ejercicio 3.4.** Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

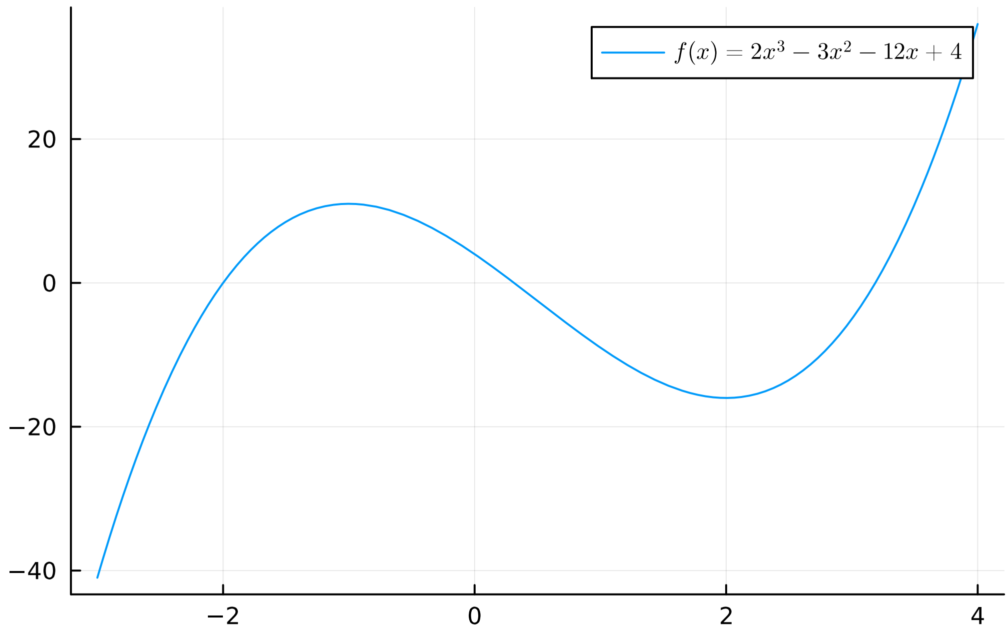
en el intervalo $[-3, 4]$ y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

**Ayuda**

Definir la función y usar la función `plot` del paquete `Plots`.

**Solución**

```
using Plots, LaTeXStrings
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
plot(f, -3, 4, label=L"$f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4$")
```




a. Dominio

**Solución**

$Dom(f) = \mathbb{R}$

b. Imagen

Solución

$Im(f) = \mathbb{R}$

c. Raíces

Solución

```julia
using SymPy
@syms x
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
raices = solve(f(x))  # Solución exacta
print(raices)
N(raices)  # Solución aproximada con decimales
```

```
Sym[-2, 7/4 - sqrt(33)/4, sqrt(33)/4 + 7/4]

3-element Vector{Real}:
 -2
  0.313859338365492835037347132945267670444933885504301908075030632358524819635648
  3.186140661634507164962652867054732329555066114495698091924969367641475180364343
```

Hay tres raíces en $x = -2$, $x = 0.31$ y $x = 3.19$ aproximadamente.

d. Signo

Solución

Intervalos con $f(x)$ negativa: $(-\infty, -2) \cup (0.31, 3.19)$.
Intervalos con $f(x)$ positiva: $(-2, 0.31) \cup (3.19, \infty)$.

e. Crecimiento

Solución

Intervalos con $f(x)$ creciente: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.
Intervalos con $f(x)$ decreciente: $(-1, 2)$.

f. Extremos

Solución

Máximo relativo en $x = -1$ y el valor máximo es $f(-1) = 11$.
Mínimo relativo en $x = 2$ y el valor del mínimo es $f(2) = -16$.

g. Concavidad

Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(0.5, \infty)$.
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty, 0.5)$.

h. Puntos de inflexión

Solución

Punto de inflexión en $x = 0.5$.

**Ejercicio 3.5.** Dibujar la gráfica de la función

$$g(t) = \frac{t^4 + 19t^2 - 5}{t^4 + 9t^2 - 10}$$

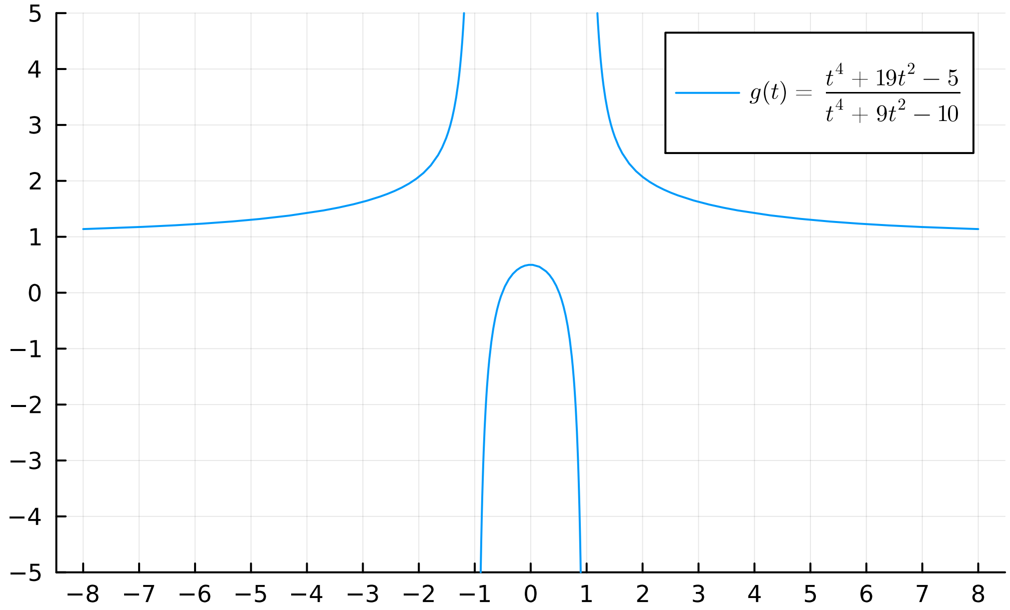
en el intervalo $[-8, 8]$ y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

Ayuda

Usar la función `plot` como en el ejercicio anterior con el parámetro `aspect_ratio=1.0` para que los ejes tengan la misma escala.
Para respetar las discontinuidades autilizar la función `rangeclamp()` del paquete `MTH229`.

Solución

```
g(t) = (t^4+19t^2-5) / (t^4+9t^2-10)
plot(rangeclamp(g), -8, 8, aspect_ratio=1.0, ylims=(-5,5) , xticks =Vector(-10:10),
```




a. Dominio. ¿Qué pasa si aplicamos la función a algún valor fuera de su dominio?

**Solución**

$Dom(f) = \mathbb{R} \ \ \{-1, 1\}$

```
g(-1), g(1)
```

```
(Inf, Inf)
```

Como se observa, al aplicar la función a $-1$ y $1$ se obtiene $\infty$.

b. Imagen

**Solución**

$Im(f) = \mathbb{R} \ \ (0.5, 1]$

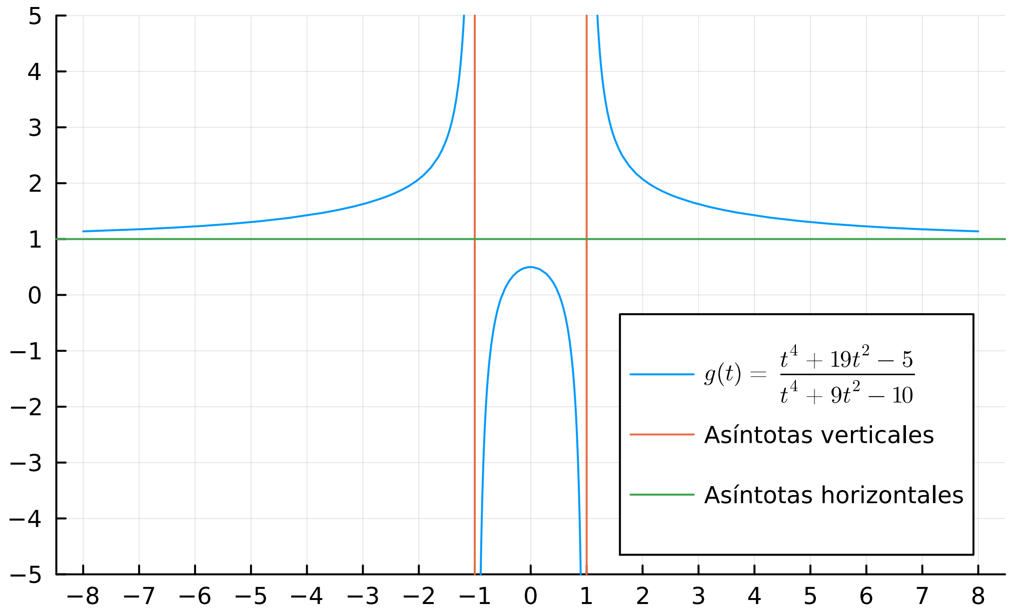
c. Asíntotas. Dibujarlas.

ℹ Ayuda

Buscar las asíntotas verticales en los puntos fuera del dominio de la función. Para dibujar asíntotas verticales usar la función `vline` del paquete `Plots`, y para dibujar las asíntotas horizontales usar la función `hline`.

Solución

```
vline!([-1,1], label="Asíntotas verticales")
hline!([1], label="Asíntotas horizontales", legend=:bottomright)
```




Asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.
Asíntotas horizontales en $y = 1$.
No hay asíntotas oblicuas.

d. Raíces

Solución

Hay dos raíces en $x = -0.5$ y $x = 0.5$ aproximadamente.

e. Signo

**Solución**

Intervalos con $f(x)$ positiva: $(-\infty, -1) \cup (-0.5, 0.5) \cup (1, \infty)$.
Intervalos con $f(x)$ negativa: $(-1, -0.5) \cup (0.5, 1)$.

e. Crecimiento

**Solución**

Intervalos con $f(x)$ creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.
Intervalos con $f(x)$ decreciente: $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

f. Extremos

**Solución**

Máximo relativo en $x = 0$ y el valor máximo es $g(0) = 0.5$.
No hay mínimos relativos.

g. Concavidad

**Solución**

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-1, 1)$.

h. Puntos de inflexión

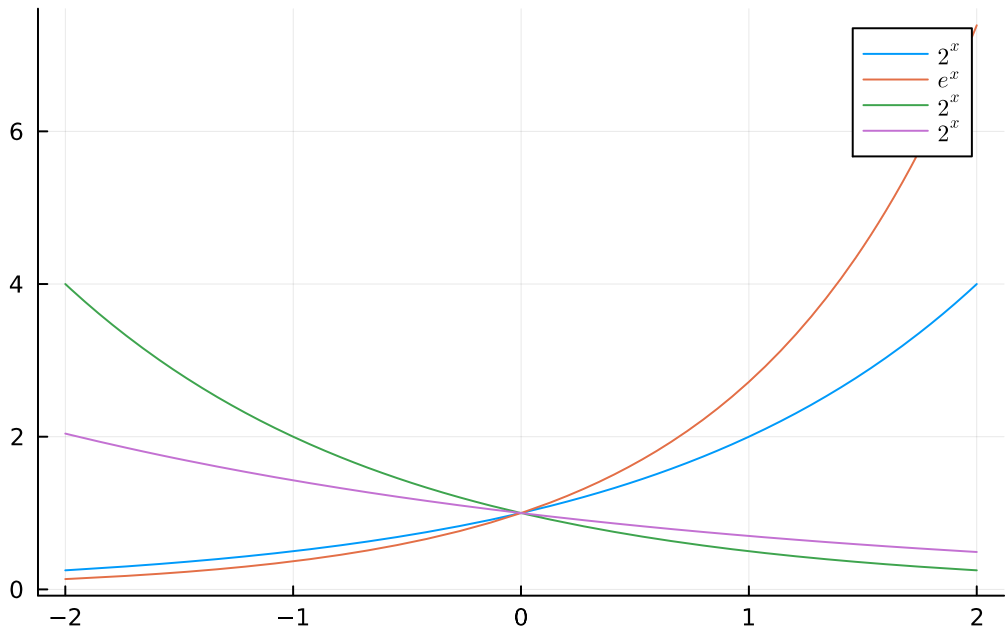
**Solución**

No hay puntos de inflexión.

**Ejercicio 3.6.** Dibujar la gráficas de las siguientes funciones exponenciales $2^x$, $e^x$, $0.5^x$, $0.7^x$ y responder a las siguientes preguntas comparando las gráficas.

Solución

```julia
using Plots, LaTeXStrings
plot(2^x, -2, 2, label=L"$2^x$")
plot!(exp(x), label=L"$e^x$")
plot!(0.5^x, label=L"$2^x$")
plot!(0.7^x, label=L"$2^x$")
```




a. ¿Cuál es el dominio de una función exponencial?

Solución

$\mathbb{R}$.

b. ¿Cuál es la imagen de una función exponencial?

Solución

$\mathbb{R}^+$.

c. ¿Cómo es el crecimiento de una función exponencial?

**Solución**

$a^x$ es creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$.

d. ¿Tienen extremos una función exponencial?

**Solución**

No

e. ¿Cómo es la curvatura de una función exponencial?

**Solución**

Es cóncava hacia arriba.

**Ejercicio 3.7.** Dibujar la gráficas de las funciones trigonométricas $Frsen(x)$, $Frsen(x+2)$, $Frsen(x)+2$, $Frsen(2x)$ y $2Frsen(x)$, y completar la siguiente tabla estudiando su periodo y amplitud.

| Función | Periodo | Amplitud |
|---|---|---|
| $Frsen(x)$ | | |
| $Frsen(x+2)$ | | |
| $Frsen(x)+2$ | | |
| $Frsen(2x)$ | | |
| $2Frsen(x)$ | | |

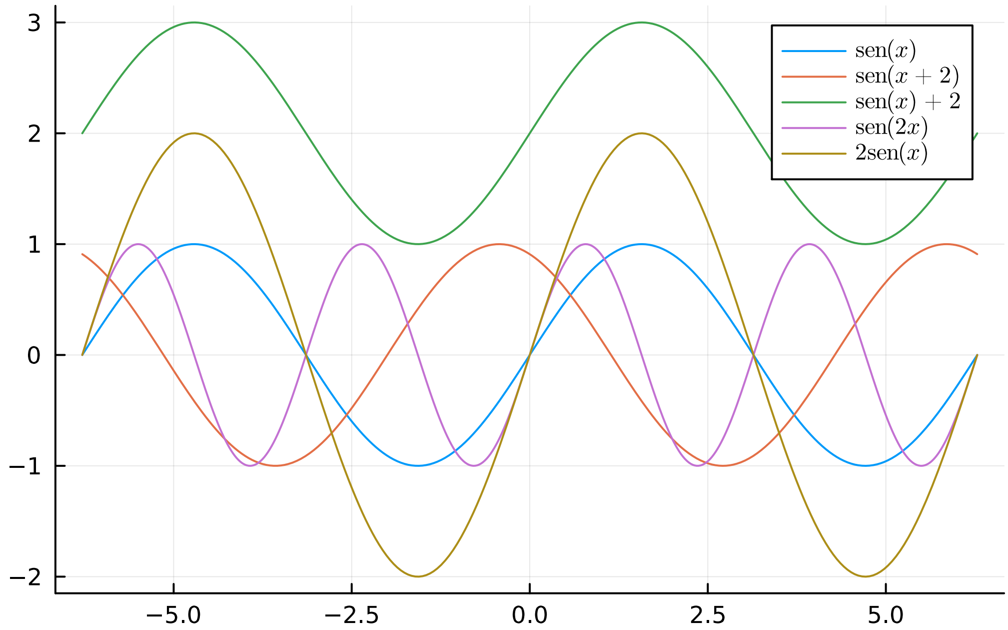
¿Qué conclusiones sacas?

**Ayuda**

El periodo es el mínimo intervalo en el que la gráfica de la función se repite, y la amplitud es la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función.

Solución

```
using Plots, LaTeXStrings
plot(sin(x), -2*pi, 2*pi, label=L"$\operatorname{sen}(x)$")
plot!(sin(x+2), label=L"$\operatorname{sen}(x+2)$")
plot!(sin(x)+2, label=L"$\operatorname{sen}(x)+2$")
plot!(sin(2x), label=L"$\operatorname{sen}(2x)$")
plot!(2sin(x), label=L"$2\operatorname{sen}(x)$")
```




| Función | Periodo | Amplitud |
|---|---|---|
| $Frsen(x)$ | $2\pi$ | 1 |
| $Frsen(x+2)$ | $2\pi$ | 1 |
| $Frsen(x)+2$ | $2\pi$ | 1 |
| $Frsen(2x)$ | $\pi$ | 1 |
| $2Frsen(x)$ | $2\pi$ | 2 |

Se observa que al sumar una constante a la función seno o a su argumento, el periodo y la amplitud no cambian. Sin embargo, si se multiplica por una constante el seno, cambia la amplitud, y si se multiplica su argumento, cambia el periodo.

**Ejercicio 3.8.** Dibujar la gráfica de la función a trozos

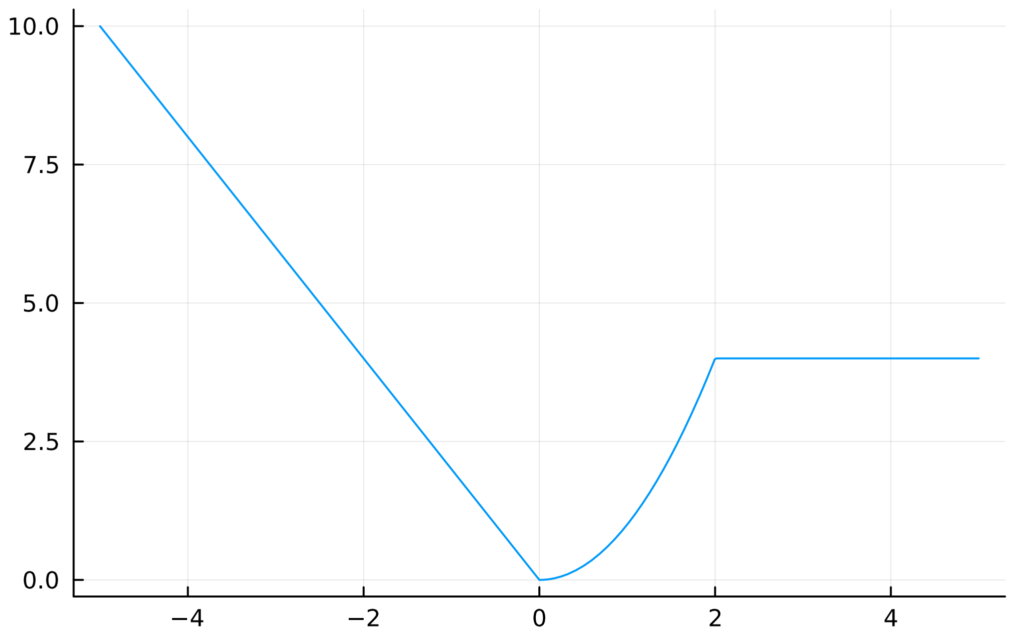
$$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2; \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

**Ayuda**

Usar el operador condicional anidado.

**Solución**

```
using Plots
h(x) = x<=0 ? -2x : x<=2 ? x^2 : 4
plot(h, legend = false)
```



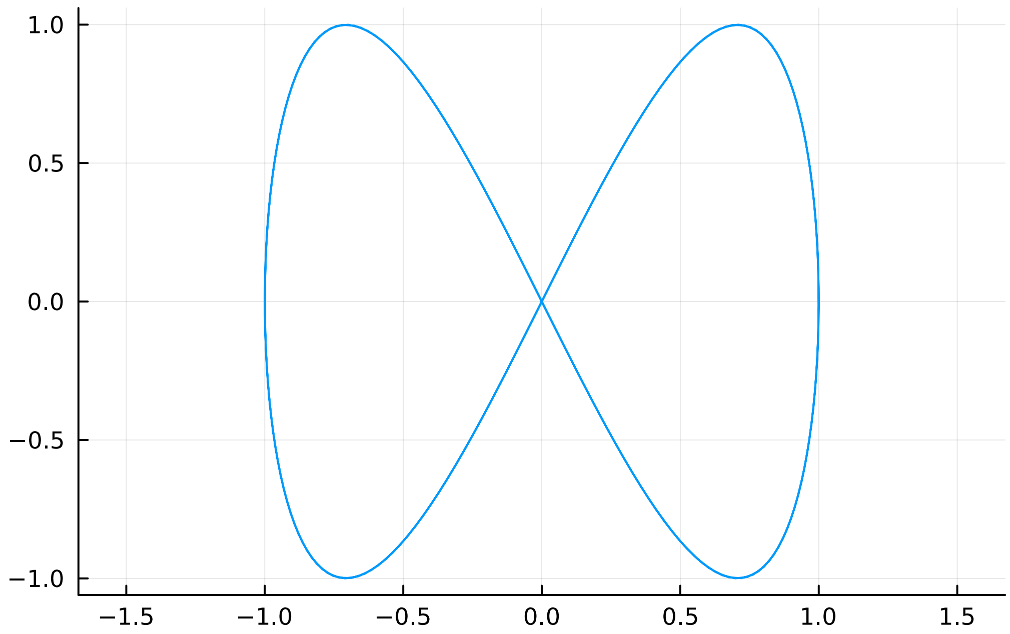

**Ejercicio 3.9.** Una hormiga se mueve sobre el plano real de manera que en cada instante $t$ su posición viene dada por las funciones

$$\begin{cases} x = Frsen(t) \\ y = Frsen(2t) \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de la trayectoria de la hormiga.

Solución

```
using Plots
u1(t)=sin(t)
v1(t)=sin(2t)
plot(u1, v1, 0, 4pi, aspect_ratio=1.0, legend = false)
```




## 3.2 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 3.10.** ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen dominio $\mathbb{R}$ e imagen $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$?

☐

$$|x|$$

☐

$$\sqrt(x)$$

☐

$$2^x$$

☐

$$x^4 - 2x^3 + 4x$$

☐

$$1/x^2$$

(*Select one or more*)

**Ejercicio 3.11.** Dibujar las gráficas de las funciones logarítmicas $\ln(x)$, $\log_2(x)$ y $\log_{0.5}(x)$ y contestar a las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es el dominio de una función logarítmica?

☐

$$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

☐

$$\mathbb{R}$$

☐

$$\mathbb{R} \quad \{0\}$$

☐

$$\mathbb{R}^+$$

☐ Las otras opciones son falsas.

b. ¿Cuál es la imagen de una función logarítmica?

☐

$$\mathbb{R} \quad \{0\}$$

☐

$$\mathbb{R}$$

☐ Las otras opciones son falsas.

☐

$$\mathbb{R}^-$$

☐

$$\mathbb{R}^+$$

c. ¿Cómo es el crecimiento la función logarítmica $\log_a(x)$?

☐ Creciente si $0 < a < 1$

☐ Creciente si $a < 1$

☐ Decreciente si $0 < a < 1$

☐ Creciente si $a > 1$

(*Select one or more*)

d. ¿Cómo es la concavidad la función logarítmica $\log_a(x)$?

☐ Cóncava hacia abajo si $a < 1$

☐ Cóncava hacia arriba si $0 < a < 1$

☐ Cóncava hacia abajo si $0 < a < 1$

☐ Cóncava hacia arriba si $a > 1$

(*Select one or more*)

**Ejercicio 3.12.** ¿Cuál es el periodo y la amplitud de la función $2\cos(x/2)$?

☐ 2 y 1

☐ y 2

☐ 2 y 2

☐ 4 y 2

☐ 4 y 1

**Ejercicio 3.13.** ¿Cuál de las gráficas corresponde a la siguiente función paramétrica?

$$f(t) = \begin{cases} Frsen(2t) - \cos(t) \\ Frsen(t) + \cos(t) \end{cases}$$

insert image here

# 4 Límites de funciones reales

## 4.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy  # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots  # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings  # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

**Ejercicio 4.1.** Sea la función $f(x) = x^2$.

a. Estudiar la tendencia de $f$ cuando $x$ se aproxima a 3 por la derecha, evaluando la función en $x = 3 + \frac{1}{10i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

> **Ayuda**
>
> Definir la función y aplicar la función a los valores de x indicados usando compresiones de arrays.

> **Solución**
>
> ```
> f(x) = x^2
> a = 3
> print([f(a+1/10i) for i = 1:10])
> ```
>
> ```
> [9.610000000000001, 9.302499999999998, 9.201111111111111, 9.150625, 9.1204, 9.1002777777
> ```
>
> La función tiende a 9.

b. Estudiar la tendencia de $f$ cuando $x$ se aproxima a 3 por la izquierda, evaluando la función en $x = 3 - \frac{1}{10i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

Solución

```julia
print([f(a-1/10i) for i = 1:10])
```

```
[8.41, 8.7025, 8.801111111111112, 8.850625, 8.8804, 8.900277777777777, 8.91448979591836
```

La función también tiende a 9.

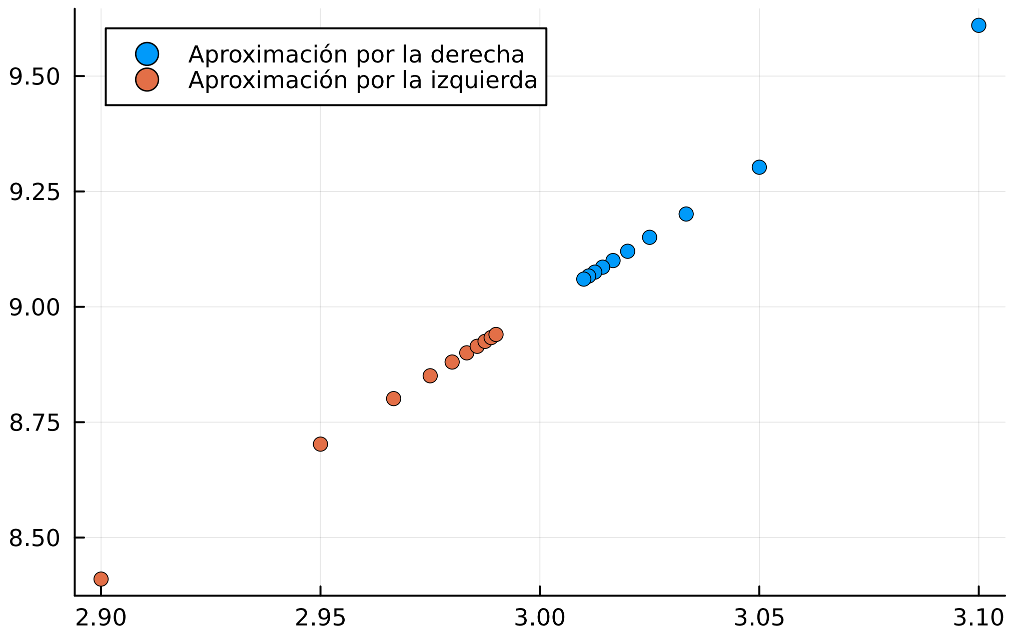
c. Dibujar la gráfica de los valores de $f$ evaluados en los apartados anteriores diferenciando la tendencia por la izquierda de la tendencia por la derecha.

Ayuda

Definir un vector con los valores de $x$ y otro con los valores correspondientes de $f(x)$ y usar la función `scatter` del paquete `Plots`, pasandole los dos vectores.

Solución

```julia
xd = [a+1/10i for i=1:10]
scatter(xd, f.(xd), label="Aproximación por la derecha")
xi = [a-1/10i for i=1:10]
scatter!(xi, f.(xi), label="Aproximación por la izquierda", legend=:topleft)
```




d. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de $f$ en $x = 3$.

**Ayuda**

Declarar la variable simbólica `x` con `@vars` imponiento la restricción `real=true`, definir la función y usar la función `limit` del paquete `SymPy` para calcular los límites laterales de la función. Para el límite por la izquierda indicar el parámetro `dir="-"` y para el límite por la derecha `dir="+"`.

**Solución**

```
@vars x real=true
li = limit(f(x), x=>3, dir="-")
println("Límite por la izquierda: ", li)
ld = limit(f(x), x=>3, dir="+")
println("Límite por la derecha: ", ld)
```

```
Límite por la izquierda: 9
Límite por la derecha: 9
```

**Ejercicio 4.2.** Sea la función $g(x) = (1 + x)^{1/x}$.

a. Estudiar la tendencia de $g$ cuando $x$ se aproxima a 0 por la derecha, evaluando la función en $x = \frac{1}{10^i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

Solución

```
g(x) = (1+x)^(1/x)
a = 0
print([g(a+1/10^i) for i = 1:10])
```

```
[2.5937424601000023, 2.7048138294215285, 2.7169239322355936, 2.7181459268249255, 2.718
```

La función tiende a $e$.

b. Estudiar la tendencia de $g$ cuando $x$ se aproxima a 0 por la izquierda, evaluando la función en $x = -\frac{1}{10^i}$ para $i = 1, \ldots, 10$.

Solución

```
print([g(a-1/10^i) for i = 1:10])
```

```
[2.867971990792441, 2.7319990264290284, 2.7196422164428524, 2.71841775501015, 2.7182954
```

La función también tiende a e.

c. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de $g$ en $x = 0$.

Solución

```
@vars x real=true
li = limit(g(x), x=>0, dir="-")
println("Límite por la izquierda: ", li)
ld = limit(g(x), x=>0, dir="+")
println("Límite por la derecha: ", ld)
```

```
Límite por la izquierda: E
Límite por la derecha: E
```

**Ejercicio 4.3.** Considérese la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2}.$$

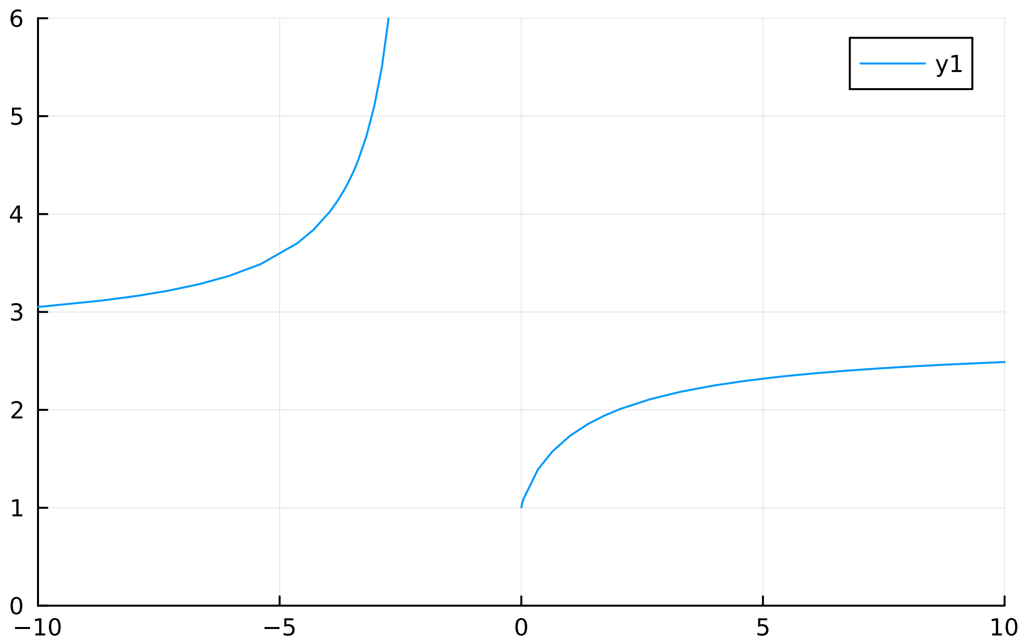
a. Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites:
b. $\lim_{x \to -2^-} f(x)$
c. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$
d. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
e. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
f. $\lim_{x \to 2} f(x)$
g. $\lim_{x \to 0} f(x)$

**Ayuda**

Utilizar la función `plot!` del paquete `Plots`. Usar los parámetros `xlims=(a,b)` para restringir la región de dibujo al intervalo $(a, b)$ del eje $x$, y `ylims=(c,d)` para restringir la región de dibujo al intervalo $(c, d)$ del eje $y$.

**Solución**

```
using Plots
f(x) = (1+2/x)^(x/2)
plot(f, xlims=(-10,10), ylims=(0,6))
```




A la vista de la gráfica, se puede concluir que

i. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$.
ii. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ no existe.
iii. $\lim_{x\to -\infty} f(x) \approx 2.7$.
iv. $\lim_{x\to +\infty} f(x) \approx 2.7$.
v. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.
vi. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

b. Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?

Solución

```
using SymPy
@vars x real=true
println("Límite por la izquieda en -2: ", limit(f(x), x=>-2, dir="-"))
println("Límite por la izquieda en -2: ", limit(f(x), x=>-2, dir="+"))
println("Límite en -∞: ", limit(f(x), x=>-oo))
println("Límite en ∞: ", limit(f(x), x=>oo))
println("Límite en 2: ", limit(f(x), x=>2))
println("Límite en 0: ", limit(f(x), x=>0))
```

```
Límite por la izquieda en -2: oo
Límite por la izquieda en -2:

-oo
Límite en -∞: E
Límite en ∞: E
Límite en 2: 2
Límite en 0:

1
```

> **Precaución**
>
> Aunque Julia calcula el límite en $-2$ por la derecha y el límite en 0, a la vista de la gráfica, estos límites en realidad no existen, ya que la función no está definida en el intervalo de $[-2, 0]$.

**Ejercicio 4.4.** Calcular los siguientes límites

a. $\lim_{x \to 0} Frsen\left(\frac{1}{x}\right)$

> **Solución**
>
> ```
> using SymPy
> @vars x real=true
> limit(sin(1/x), x=>0)
> ```
>
> $\langle -1, 1 \rangle$
> Como no se obtiene un valor concreto, sino un rango de valores, el límite no existe.

b. $\lim_{x \to 0} xFrsen\left(\frac{1}{x}\right)$

> **Solución**
>
> ```
> limit(x*sin(1/x), x=>0)
> ```
>
> 0

c. $\lim_{x \to \infty} e^{-x} Frsen(x)$

Solución

```
limit( ^(-x)*sin(x), x=>oo)
```

0

c. $\lim_{x \to a} \frac{Frsen(x) - Frsen(a)}{x-a}$

Solución

```
@vars a real=true
limit((sin(x)-sin(a))/(x-a), x=>a)
```

$\cos(a)$

**Ejercicio 4.5.** Calcular el valor de las siguientes funciones en los puntos dados y su límite. Corroborar los límites obtenidos gráficamente.

a. $f(x) = \frac{Frsen(x)}{x}$ en $x = 0$.

Solución

La función $f$ no está definida en $x = 0$ de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

```
f(x)=sin(x)/x
f(0)
```

```
NaN
```

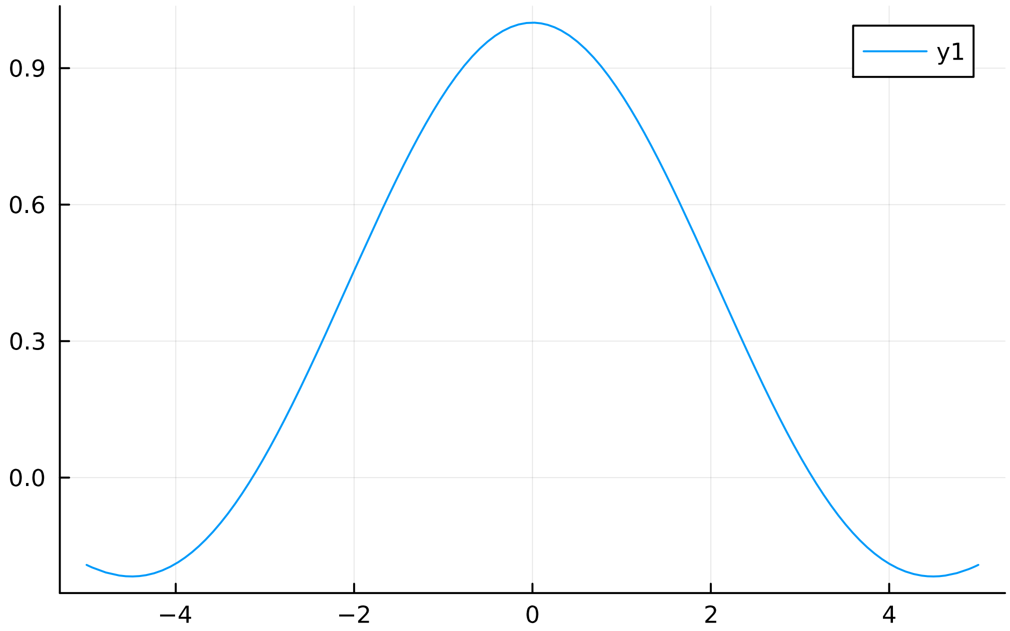
Ahora calculamos el límite de $f$ en 0.

```
@vars x real=true
f(x)=sin(x)/x
limit(f(x), x=>0)
```

1

Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de $f$ en un entorno de 0.

```julia
using Plots
plot(f)
```




b. $g(x) = \frac{\cos(x)}{x-\pi/2}$ en $x = \pi/2$.

Solución

La función $f$ no está definida en $x = 0$ de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

```julia
g(x)=cos(x)/(x-pi/2)
g(pi/2)
```

```
Inf
```

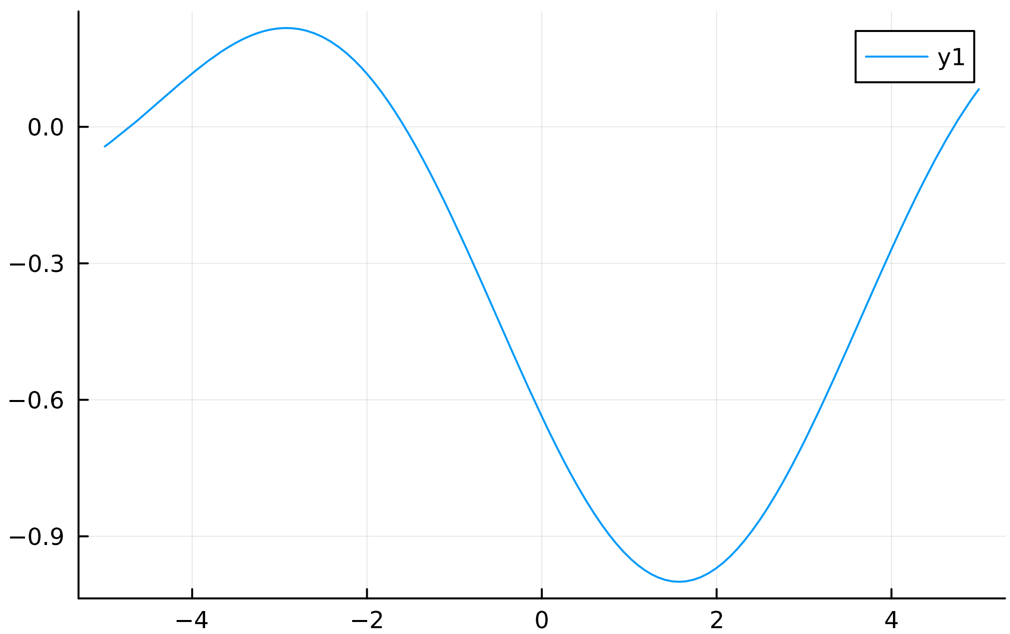
Como se puede observar, se obtiene $\infty$ en lugar de indeterminado. La razón está en la representación de los números reales mediante números con coma flotante, de manera que $\pi/2$ se redondea al número de coma flotante más próximo, y al aplicar el coseno se obtiene un número muy próximo a 0 pero distinto de 0.
Ahora calculamos el límite de $g$ en $\pi/2$.

```julia
limit(g(x), x=>pi/2)
```

$\infty$

Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de $g$ en un entorno de $\pi/2$.

```julia
using Plots
plot(g)
```




Como se puede apreciar gráficamente el la tendencia de $g$ en $\pi/2$ es $-1$ y no el valor obtenido con el cálculo del límite. De nuevo el problema está en la aproximación de *pi* como un real en coma flotante. Afortunadamente el paquete `SymPy` permite definir una constante como simbólica para evitar su conversión a número en coma flotante, usando la función `Sym()`. Repetimos la definición de la función y el cálculo de nuevo convirtiendo $\pi$ en una constante simbólica.

```julia
g(x)=cos(x)/(x-Sym(pi)/2)
limit(g(x), x=>Sym(pi)/2)
```

$-1$

**Ejercicio 4.6.** Considérese la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{2x-6} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

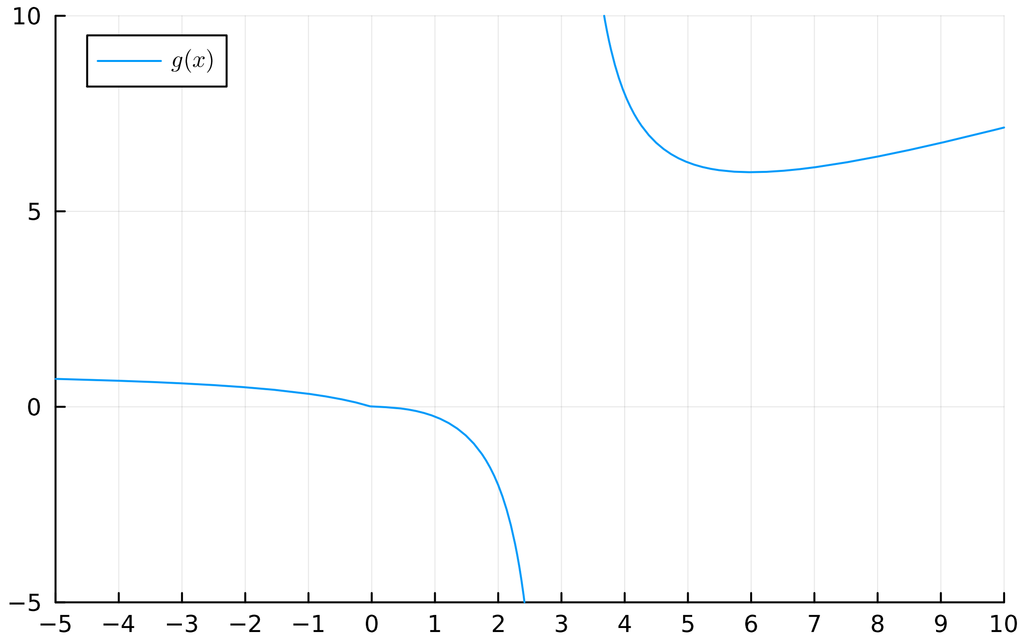
a. Dibujar la gráfica de $g$ y determinar gráficamente si existen asíntotas.

**Ayuda**

Para respetar las discontinuidades utilizar la función `rangeclamp()` del paquete `MTH229`.

**Solución**

```
using Plots, MTH229, LaTeXStrings
@vars x real=true
g1(x) = x/(x-2)
g2(x) = x^2/(2x-6)
g(x) = x<=0 ? g1(x) : g2(x)
plot(rangeclamp(g), xlims=(-5,10), ylims=(-5,10), xticks=-5:10, label = L"g(x)", leg
```




A la vista de la gráfica, se observa que $g$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$, una asíntota horizontal $y = 1$ en $-\infty$ y parece que también hay una asíntota oblicua en $\infty$.

b. Calcular las asíntotas verticales de $g$ y dibujarlas.

Solución

Estudiamos primero el dominio para ver dónde no está definida la función. Como tanto la rama negativa como la positiva son funciones racionales, hay que ver los puntos que anulan el denominador.

```
println("Puntos fuera del dominio de la rama negativa: ", solve(x-2))
println("Puntos fuera del dominio de la rama positiva: ", solve(2x-6))
```

```
Puntos fuera del dominio de la rama negativa: Sym[2]
Puntos fuera del dominio de la rama positiva: Sym[3]
```

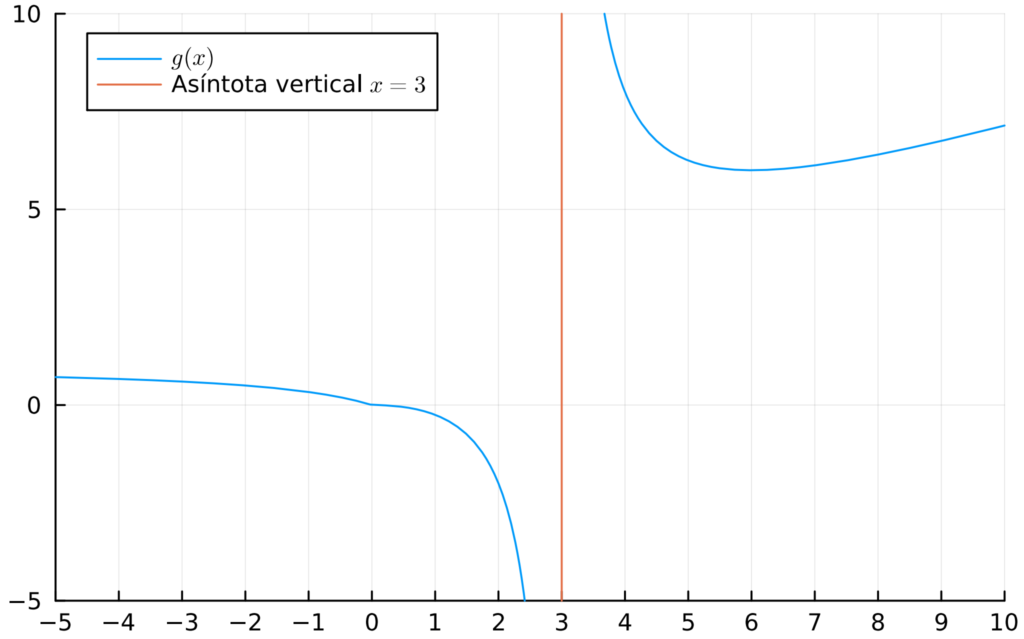
Así pues la rama negativa está definida en todos $\mathbb{R}^-$ y la rama positiva en $\mathbb{R}^+ \ \{3\}$. Es en este último punto donde $g$ puede tener asíntota vertical, así que estudiamos los límites laterales.

```
println("Límte en 3 por la izquierda: ", limit(g(x), x=>3, dir="-"))
println("Límte en 3 por la derecha: ", limit(g(x), x=>3, dir="+"))
```

```
Límte en 3 por la izquierda: -oo
Límte en 3 por la derecha: oo
```

Por tanto, $g$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

```
vline!([3], label = L"Asíntota vertical $x=3$")
```




c. Calcular las asíntotas horizontales de $g$.

Solución

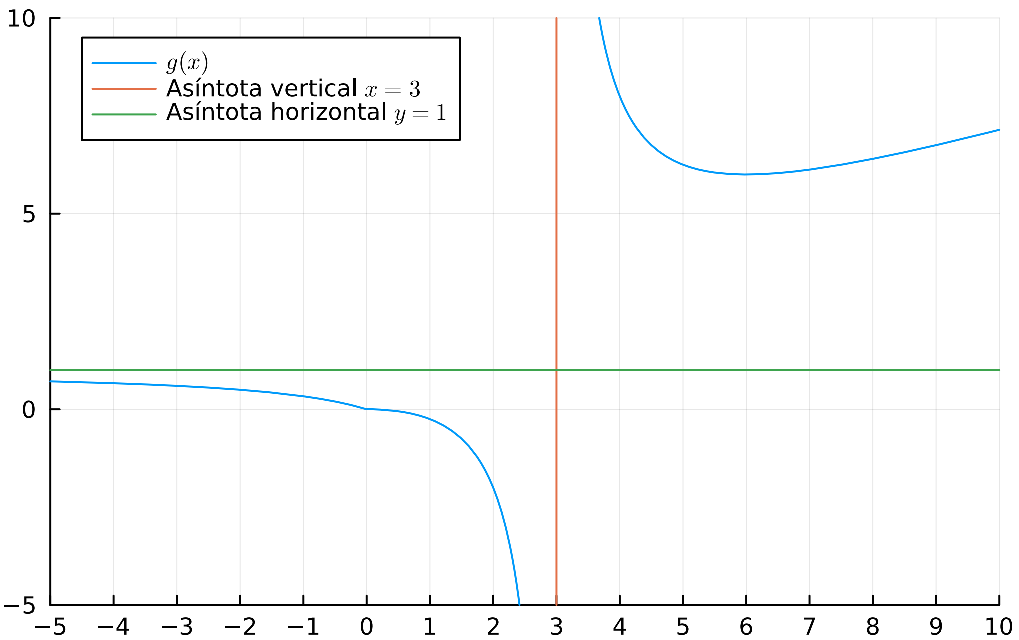
Estudiamos los límites en el infinito.

```
println("Límite en -∞: ", limit(g1(x), x=>-oo))
println("Límite en ∞: ", limit(g2(x), x=>oo))
```

```
Límite en -∞: 1
Límite en ∞: oo
```

Por tanto, $g$ tiene una asíntota horizontal $y = 1$ en $-\infty$.

```
hline!([1], label = L"Asíntota horizontal $y=1$")
```




d. Calcular las asíntotas oblicuas de $g$.

**Solución**

Estudiamos el límite en $\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ (en $-\infty$ no puede haber asíntota oblicua al haber asíntota horizontal).

```
limit(g2(x)/x, x=>oo)
```

$\frac{1}{2}$

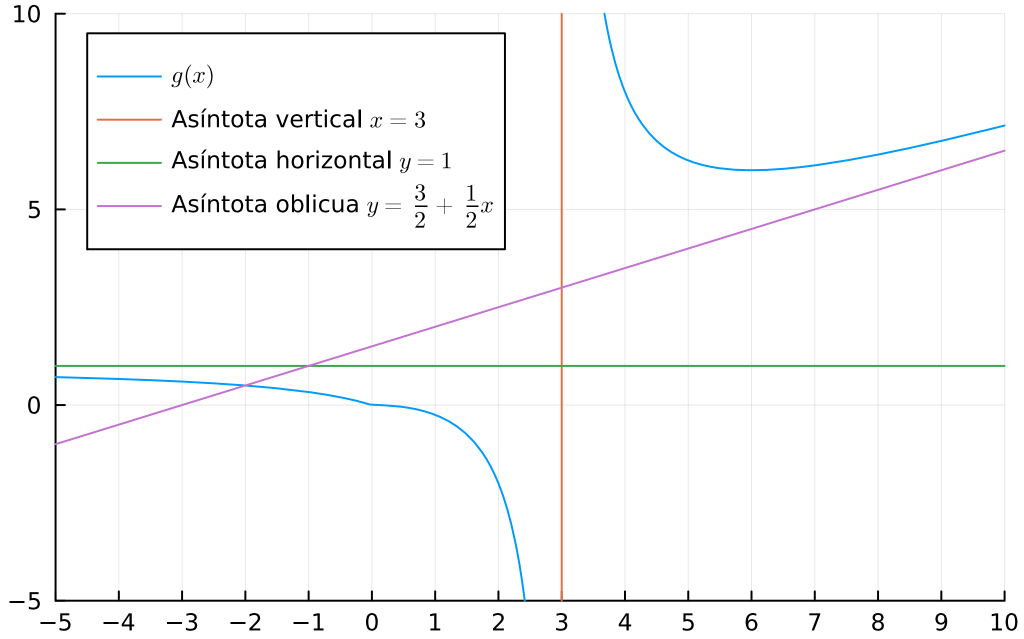
Por tanto, $g$ tiene una asíntota oblicua con pendiente $b = 1/2$ en $\infty$. Para obtener el término independiente de la asíntota calculamos el límite en $\infty$ de $f(x) - \frac{1}{2}x$.

```
limit(g2(x)-x/2, x=>oo)
```

$\frac{3}{2}$

Por tanto, $g$ tiene una asíntota oblicua $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$.

```
plot!(3/2+x/2, label = L"Asíntota oblicua $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x$")
```




**Ejercicio 4.7.** Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-2x}{3x^2+x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{Frtg(x)+a}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar $a$ para que la función sea continua en todo su dominio?

**Ayuda**

Calcular el límite en 0 por la izquierda de la función de la rama negativa, y el límite en 0 por la derecha de la función de la rama positiva. Después resolver la ecuación simbólica que resulta de igualar los dos límites. Para crear la ecuación simbólica debe utilizarse la función `Eq()` del paquete `SymPy` y después resolverla con la función `solve()`.

Solución

```
@vars x a real=true
h1(x) = (2x^2-2x)/(3x^2+x)
h2(x) = (tan(x)-a*x)/x
l1 = limit(h1(x), x=>0, dir="-")
l2 = limit(h2(x),x=>0, dir="+")
solve(Eq(l1,l2))
```

[ 3 ]

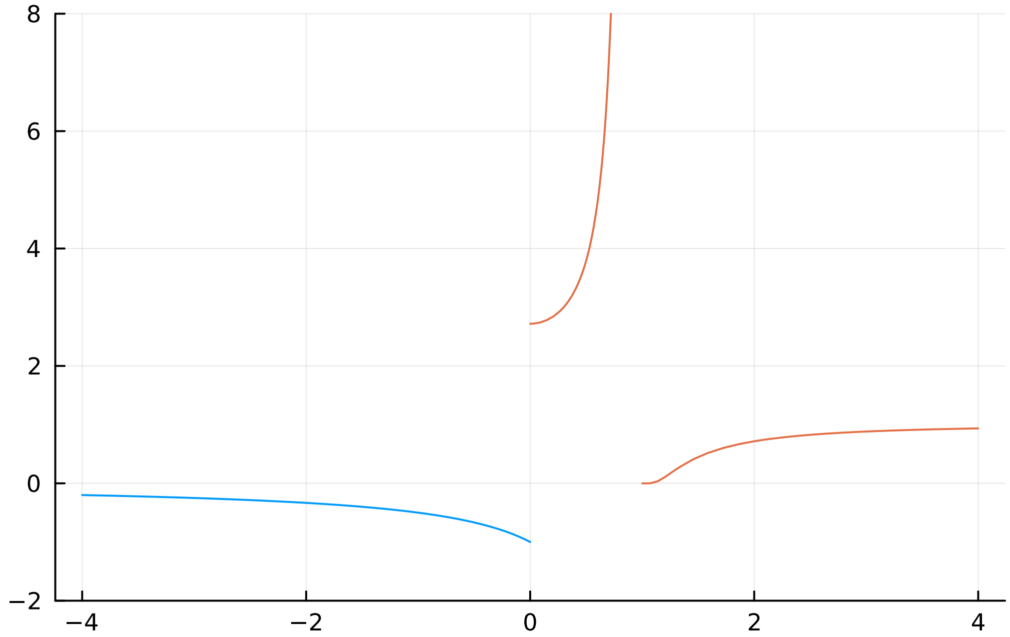
**Ejercicio 4.8.** Representar gráficamente y clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Solución

Para estudiar las discontinuidades de una función tenemos que estudiar los puntos que no están en el dominio y los puntos donde cambia la definición de la función en el caso de una función definida a trozos.

```
using Plots, MTH229, LaTeXStrings
@syms x::real
f1(x) = (x+1)/(x^2-1)
f2(x) = 1/exp(1/(x^2-1))
plot(f1, -4, 0, ylim=(-2,8), legend=false)
plot!(rangeclamp(f2), 0, 4)
```




Para determinar el dominio de la rama negativa, al ser una función racional, tenemos que ver los puntos que anulan el denominador.

```
solve(x^2-1)
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así pues, la función no está definida en $x = -1$ (la otra raíz queda fuera de la rama negativa). Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en $x = -1$.

```
println("Límite en -1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="-"))
println("Límite en -1 por la derecha: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="+"))
```

```
Límite en -1 por la izquierda: -1/2
Límite en -1 por la derecha:

-1/2
```

Como el límite existe, $f$ tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.
Del mismo modo la rama positiva no está definida en $x = 1$ ya que se anula el denominador del exponente de la función exponencial. Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en $x = 1$.

```julia
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f2(x), x=>1, dir="-"))
println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>1, dir="+"))
```

```
Límite en 1 por la izquierda: oo
Límite en 1 por la derecha:

0
```

Como los límites laterales son distintos, $f$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.
Finalmente, estudiamos los límites laterales en $x = 0$, que es donde cambia la definición de la función.

```julia
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=>0, dir="-"))
println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>0, dir="+"))
```

```
Límite en 1 por la izquierda: -1
Límite en 1 por la derecha: E
```

Como los límites laterales son distintos, $f$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

**Ejercicio 4.9.** El teorema de Bolzano permite construir un algoritmo para encontrar raíces de una función continua en un intervalo $[a, b]$ cuando $f(a)f(b) < 0$. Este algoritmo se conoce como el *algoritmo de bisección* y básicamente consiste en repetir los siguientes pasos:

1. Calcular el centro del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Si $f(c) = 0$, $c$ es una raíz y se termina la búsqueda.
3. En caso contrario, si $f(a)f(c) < 0$ hacer $b = c$, y si no, hacer $a = c$.
4. Repetir la búsqueda.

Construir una función que implemente este algoritmo y utilizarlo para calcular una raíz de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 6x - 2$ en el intervalo $[0, 1]$.

💡 Solución

```
function raices_biseccion(f, a, b, error=1e-10)
  if f(a) == 0 return(a) end
  if f(b) == 0 return(b) end
  if f(a) * f(b) > 0 error("Las imágenes de los extremos del intervalo no tienen sig
  c = (a+b)/2
  while abs(b-a) > error
    if f(c) == 0 return(c) end
    if f(a) * f(c) < 0
       b = c
    else
       a = c
    end
    c = (a+b)/2
  end
  c
end

f(x)=x^5+3x^4-2x^3+6x-4
print(raices_biseccion(f, 0, 1))
```

```
0.6496996753558051
```

## 4.2 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 4.10.** En 1683 Jacob Bernouilli estudió la evolución del interés compuesto cuando el periodo de actualización se hacía cada vez más pequeño.

Si disponemos de 1€ en una cuenta corriente que ofrece un 100% de interés anual, al cabo de un año tendremos 2€ en la cuenta. Si la cuenta ofrece un interés del 50% cada 6 meses, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25€.$$

Si la cuenta ofrece un interés del 25% cada trimestre, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.44140625€.$$

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del $1/12\%$ mensual?

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del $1/365\%$ diario?

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta se actualiza de manera continua con un interés $1/x\%$ cuando $x \to \infty$?

- ☐ 3
- ☐ $$e^2$$
- ☐ 2.7182818284590
- ☐ $$e^{-1}$$
- ☐ e

**Ejercicio 4.11.** Calcular los siguientes límites.

a. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{Frsen(x)-\cos(x)}{1-Frtg(x)}$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}$.

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x}$

☐

$$\infty$$

☐

$$-\infty$$

☐

$$1$$

☐ 0

☐ NaN

a. $\lim_{x\to 1} \dfrac{a^{1-x}-1}{1-x}$.

☐

$$1/a$$

☐

$$\ln(a)$$

☐

$$e^a$$

☐

$$\sqrt{a}$$

☐ Las otras opciones son falsas.

**Ejercicio 4.12.** ¿Cuáles de las siguientes rectas son asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{3x+3}$?

☐

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$$

☐

$$y = 3x + 1$$

☐

$$y = \frac{x-1}{3}$$

☐

$$y = 1$$

☐

$$x = -1$$

(*Select one or more*)

**Ejercicio 4.13.** ¿Cuándo debería valer la función $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ para que fuese continua en $x = 0$.

**Ejercicio 4.14.** Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x - 2 & \text{si } x \leq 0, \\ \cos(x - \pi/2) + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar $a$ para que la función sea continua en todo su dominio?

☐
$$-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

☐
$$-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

☐
$$2 - \sqrt{2}$$

☐
$$-2$$

☐ No hay ningún valor de de $a$ que haga la función continua

**Ejercicio 4.15.** ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $g(x) = \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}}$ en $x = -1$?

☐ Salto infinito

☐ Salto finito

☐ Es continua

☐ Evitable

☐ Segunda especie

**Ejercicio 4.16.** Calcular de forma aproximada con el algoritmo de bisección una solución de la ecuación $e^{-x} = \cos(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ con un error menor de $10^{-15}$.