Pácticas de Análisis Matemático con Julia





Tabla de contenidos

Ρı	efacio	3
	Licencia	. 3
1	Introducción	5
	1.1 El gestor de paquetes de Julia	6
	1.2 Operadores aritméticos	. 7
	1.3 Operadores de comparación	. 7
	1.4 Operadores booleanos	. 8
	1.5 Funciones de redondeo	. 8
	1.6 Funciones de división	. 9
	1.7 Funciones para el signo y el valor absoluto	. 10
	1.8 Raíces, exponenciales y logaritmos	. 11
	1.9 Funciones trigonométricas	. 12
	1.10 Funciones trigonométricas inversas	. 13
	1.11 Precedencia de operadores	. 14
	1.12 Definición de variables	
2	Sucesiones de números reales	16
	2.1 Ejercicios propuestos	. 27
3	Funciones elementales	30
	3.1 Ejercicios propuestos	. 48
4	Límites de funciones reales	51
	4.1 Ejercicios propuestos	. 69
5	Derivadas de funciones reales	74
	5.1 Ejercicios propuestos	. 97
6	Series de números reales	100
	6.1 Ejercicios propuestos	120

Prefacio

¡Bienvenido a Prácticas de Análisis Matemático con Julia!

Este libro presenta una recopilación de prácticas de Análisis Matemático en una y varias variables reales con el lenguaje de programación Julia, con problemas aplicados a las Ciencias y las Ingenierías.

No es un libro para aprender a programar con Julia, ya que solo enseña el uso del lenguaje y de algunos de sus paquetes para resolver problemas de Cálculo tanto numérico como simbólico. Para quienes estén interesados en aprender a programar en este Julia, os recomiendo leer este manual de Julia.

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento – No comercial – Compartir bajo la misma licencia 3.0 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/.

Con esta licencia eres libre de:

- Copiar, distribuir y mostrar este trabajo.
- Realizar modificaciones de este trabajo.

Bajo las siguientes condiciones:

- Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

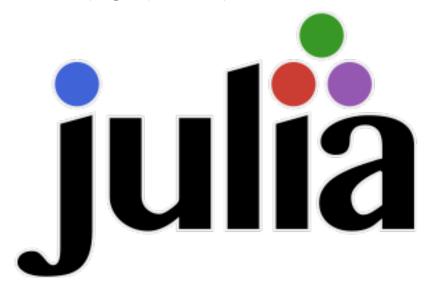
Estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Julia es un lenguaje de programación especialmente orientado al cálculo numérico y el análisis de datos. Julia permite además realizar cálculos simbólicos y dispone de una gran biblioteca de paquetes con aplicaciones en muy diversas áreas de las Matemáticas como Cálculo, Álgebra, Geometría, Matemática Discreta o Estadística.



La ventaja de Julia frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, MATLAB o Sage radica en su potencia de cálculo y su velocidad (equiparable al lenguaje C), lo que lo hace ideal para manejar grandes volúmenes de datos o realizar tareas que requieran largos y complejos cálculos. Además, es software libre por lo que resulta ideal para introducirlo en el aula como soporte computacional para los modelos matemáticos sin coste alguno.

En el siguiente enlace se explica el procedimiento de instalación de Julia.

Existen también varios entornos de desarrollo online que permiten ejecutar código en Julia sin necesidad de instalarlo en nuestro ordenador, como por ejemplo Replit, Cocalc o Codeanywhere.

El objetivo de esta práctica es introducir al alumno en la utilización de este lenguaje, enseñándole a realizar las operaciones básicas más habituales en Cálculo.

Para arrancar el REPL^(REPL es el acrónimo de Read, Evaluate, Print and Loop, que describe el funcionamiento del compilador de Julia) de julia basta con abrir una terminal y teclear julia.

1.1 El gestor de paquetes de Julia

Julia viene con varios paquetes básicos preinstalados, como por ejemplo el paquete LinearAlgebra que define funciones básicas del Álgebra Lineal, pero en estas prácticas utilizaremos otros muchos paquetes que añaden más funcionalidades que no vienen instalados por defecto y tendremos que instalarlos aparte. Julia tiene un potente gestor de paquetes que facilita la búsqueda, instalación, actualización y eliminación de paquetes.

Por defecto el gestor de paquetes utiliza el repositorio de paquetes oficial pero se pueden instalar paquetes de otros repositorios.

Para entrar en el modo de gestión de paquetes hay que teclear]. Esto produce un cambio en el *prompt* del REPL de Julia.

Los comandos más habituales son:

- add p: Instala el paquete p en el entorno activo de Julia.
- update: Actualiza los paquetes del entorno activo de Julia.
- status: Muestra los paquetes instalados y sus versiones en el entorno activo de Julia
- remove p: Elimina el paquete p del entorno activo de Julia.

Para instalar el paquete SymPy para cálculo simbólico basta con teclear add Sympy. (@v1.7) pkg> add SymPy Updating registry at `~/.julia/registries/General.toml` Resolving package versions... Updating `~/.julia/environments/v1.7/Project.toml` [24249f21] + SymPy v1.1.6

Updating `~/.julia/environments/v1.7/Manifest.toml`

[3709ef60] + CommonEq v0.2.0 [38540f10] + CommonSolve v0.2.1

[438e738f] + PyCall v1.93.1

[24249f21] + SymPy v1.1.6

1.2 Operadores aritméticos.

El uso más simple de Julia es la realización de operaciones aritméticas como en una calculadora. En Julia se utilizan los siguientes operadores.

Operador	Descripción
x + y	Suma
х - у	Resta
x * y	Producto
х / у	División
x ÷ y	Cociente división entera
х % у	Resto división entera
x ^ y	Potencia

1.3 Operadores de comparación

Operador	Descripción
==	Igualdad
!=,	Desigualdad
<	Menor que
<=,	Menor o igual que
>	Mayor que

Operador	Descripción
>=,	Mayor o igual que

1.4 Operadores booleanos

Operador	Descripción
!x	Negación
x && y	Conjunción (y)
x y	Disyunción (o)

Existen también un montón de funciones predefinidas habituales en Cálculo.

1.5 Funciones de redondeo

Función	Descripción
round(x)	Devuelve el entero más próximo a x
<pre>round(x, digits = n)</pre>	Devuelve al valor más próximo a ${\tt x}$ con ${\tt n}$
	decimales
floor(x)	Redondea x al próximo entero menor
ceil(x)	Redondea x al próximo entero mayor
trunc(x)	Devuelve la parte entera de ${\bf x}$

```
i Ejemplo
  julia> round(2.7)
  3.0
  julia> floor(2.7)
  2.0
  julia> floor(-2.7)
  -3.0
  julia> ceil(2.7)
  3.0
  julia> ceil(-2.7)
  -2.0
  julia> trunc(2.7)
  2.0
  julia> trunc(-2.7)
  -2.0
  julia> round(2.5)
  2.0
  julia> round(2.786, digits = 2)
  2.79
```

1.6 Funciones de división

Función	Descripción
div(x,y), x÷y	Cociente de la división entera
fld(x,y)	Cociente de la división entera redondeado hacia abajo
cld(x,y)	Cociente de la división entera redondeado hacia arriba
rem(x,y), x%y	Resto de la división entera. Se cumple $x == div(x,y)*y +$
	rem(x,y)
mod(x,y)	Módulo con respecto a y. Se cumple $x == fld(x,y)*y + mod(x,y)$
gcd(x,y)	Máximo común divisor positivo de x, y,

Función	Descripción
lcm(x,y)	Mínimo común múltiplo positivo de x, y,

```
i Ejemplo

julia> div(5,3)
1

julia> cld(5,3)
2

julia> 5%3
2

julia> -5%3
-2

julia> mod(5,3)
2

julia> mod(-5,3)
1

julia> gcd(12,18)
6

julia> lcm(12,18)
36
```

1.7 Funciones para el signo y el valor absoluto

Función	Descripción
abs(x)	Valor absoluto de x
sign(x)	Devuelve -1 si x es positivo, -1 si es negativo y 0 si es 0.

```
i Ejemplo

julia> abs(2.5)
2.5

julia> abs(-2.5)
2.5

julia> sign(-2.5)
-1.0

julia> sign(0)
0

julia> sign(2.5)
1.0
```

1.8 Raíces, exponenciales y logaritmos

Función	Descripción
$sqrt(x), \sqrt{x}$	Raíz cuadrada de x
cbrt(x), x	Raíz cúbica de x
exp(x)	Exponencial de x
log(x)	Logaritmo neperiano de \mathbf{x}
log(b,x)	Logaritmo en base \mathtt{b} de \mathtt{x}
log2(x)	Logaritmo en base 2 de \mathbf{x}
log10(x)	Logaritmo en base 10 de x

```
i Ejemplo
  julia> sqrt(4)
  2.0
  julia> cbrt(27)
  3.0
  julia> exp(1)
  2.718281828459045
  julia> exp(-Inf)
  0.0
  julia> log(1)
  0.0
  julia> log(0)
  -Inf
  julia > log(-1)
  ERROR: DomainError with -1.0:
  log will only return a complex result if called with a complex argument.
  julia > log(-1+0im)
  0.0 + 3.141592653589793im
  julia > log2(2^3)
  3.0
```

1.9 Funciones trigonométricas

Función	Descripción
hypot(x,y)	Hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos x e y
sin(x)	Seno del ángulo x en radianes
sind(x)	Seno del ángulo x en grados
cos(x)	Coseno del ángulo x en radianes
cosd(x)	Coseno del ángulo x en grados

Función	Descripción
tan(x)	Tangente del ángulo ${\bf x}$ en radianes
tand(x)	Tangente del ángulo \mathbf{x} en grados
sec(x)	Secante del ángulo \mathbf{x} en radianes
csc(x)	Cosecante del ángulo x en radianes
cot(x)	Cotangente del ángulo ${\tt x}$ en radianes

```
i Ejemplo
  julia> sin(/2)
  1.0
  julia> cos(/2)
  6.123233995736766e-17
  julia> cosd(90)
  0.0
  julia> tan(/4)
  0.99999999999999
  julia> tand(45)
  1.0
  julia> tan(/2)
  1.633123935319537e16
  julia> tand(90)
  Inf
  julia> sin(/4)^2 + cos(/4)^2
  1.0
```

1.10 Funciones trigonométricas inversas

Función	Descripción
asin(x)	Arcoseno (inversa del seno) de x en radianes
asind(x)	Arcoseno (inversa del seno) de x en grados

Función	Descripción
acos(x)	Arcocoseno (inversa del coseno) de x en radianes
acosd(x)	Arcocoseno (inversa del coseno) de x en grados
atan(x)	Arcotangente (inversa de la tangente) de x en radianes
atand(x)	Arcotangente (inversa de la tangente) de x en grados
asec(x)	Arcosecante (inversa de la secante) de x en radianes
acsc(x)	Arcocosecante (inversa de la cosecante) de x en radianes
acot(x)	Arcocotangente (inversa de la cotangente) de ${\tt x}$ en radianes

```
i Ejemplo

julia> asin(1)
1.5707963267948966

julia> asind(1)
90.0

julia> acos(-1)
3.141592653589793

julia> atan(1)
0.7853981633974483

julia> atand(tan(/4))
45.0
```

1.11 Precedencia de operadores

A la hora de evaluar una expresión aritmética, Julia evalúa los operadores según el siguiente orden de prioridad (de mayor a menor prioridad).

Categoría Operadores	Asociatividad
Funciones exp, log, sin, etc.	
Exponenciación	Derecha
Unarios + - √	Derecha
Fracciones //	Izquierda
Multiplicación∕ % & \ ÷	Izquierda
Adición + -	Izquierda
Comparaciones >= <= == != !==	

Categoría Operadores	Asociatividad
Asignaciones += -= *= /= //= ^= ÷= %= = &=	Derecha

Cuando se quiera evaluar un operador con menor prioridad antes que otro con mayor prioridad, hay que utilizar paréntesis.

```
i Ejemplo

julia> 1 + 4 ^ 2 / 2 - 3
6.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / 2 - 3
5.5

julia> (1 + 4) ^ 2 / 2 - 3
9.5

julia> 1 + 4 ^ 2 / (2 - 3)
-15.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / (2 - 3)
-17.0
```

1.12 Definición de variables

Para definir variables se pueden utilizar cualquier carácter Unicode. Los nombres de las variables pueden contener más de una letra y, en tal caso, pueden usarse también números, pero siempre debe comenzar por una letra. Así, para Julia, la expresión xy, no se interpreta como el producto de la variable x por la variable y, sino como la variable xy. Además, se distingue entre mayúsculas y minúsculas, así que no es lo mismo xy que xy.

2 Sucesiones de números reales

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

Ejercicio 2.1. Dar los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

```
a. (2n+1)_{n=1}^{\infty}
```

i Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 10 usando compresiones de arrays.

```
    Solución

x(n) = 2n + 1
    print([x(n) for n = 1:10])

[3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21]
```

b.
$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

```
Solución
```

```
# Como reales
x(n) = 1 / n
print([x(n) for n = 1:10])
# Como racionales
x(n) = 1//n
print([x(n) for n = 1:10])
```

Rational{Int64}[1//1, 1//2, 1//3, 1//4, 1//5, 1//6, 1//7, 1//8, 1//9, 1//10]

c.
$$((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$$

Solución

```
x(n) = (-1)^n
print([x(n) for n = 1:10])
```

[-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]

d.
$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

Solución

```
x(n) = (1 + 1 / n)^n
print([x(n) for n = 1:10])
```

[2.0, 2.25, 2.3703703703703702, 2.44140625, 2.488319999999994, 2.5216263717421135, 2.5

e.
$$x_1=1$$
y $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Solución

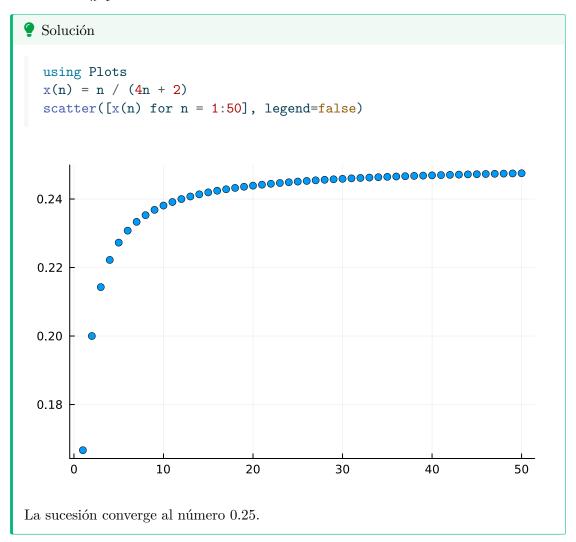
```
x(n) = n == 1 ? 1 : sqrt(1+x(n-1))
print([x(n) for n = 1:10])
```

Real[1, 1.4142135623730951, 1.5537739740300374, 1.5980531824786175, 1.6118477541252516]

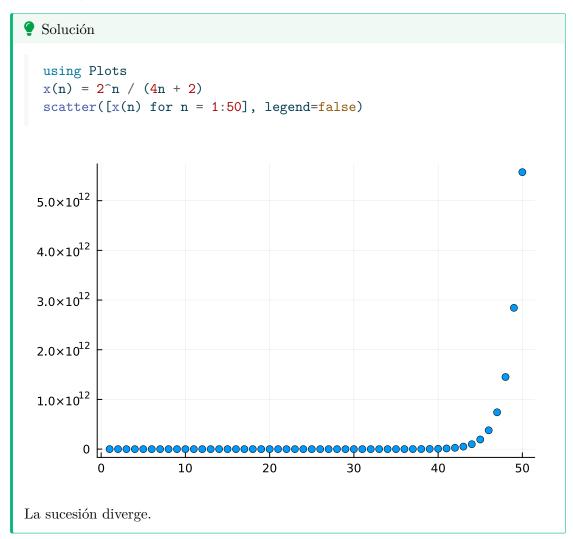
Ejercicio 2.2. Dibujar en una gráfica los 50 primeros términos de las siguientes sucesiones y deducir si son convergentes o no. En el caso de que sean convergentes, dar un valor aproximado de su límite.

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior. Después usar la función scatter del paquete Plots para dibujar el array de términos.

a.
$$\left(\frac{n}{4n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$$



b.
$$\left(\frac{2^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

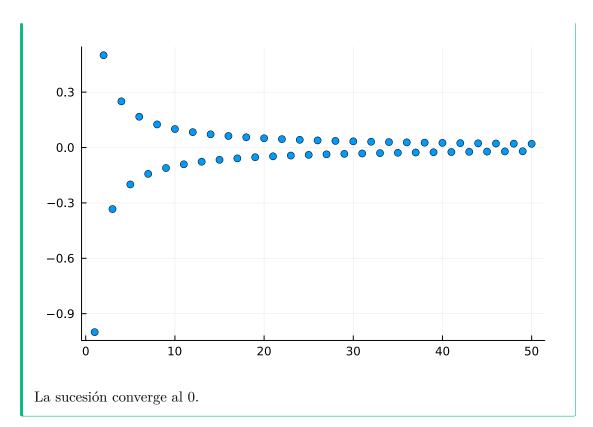


c.
$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

```
Solución

using Plots
x(n) = (-1)^n / n
```

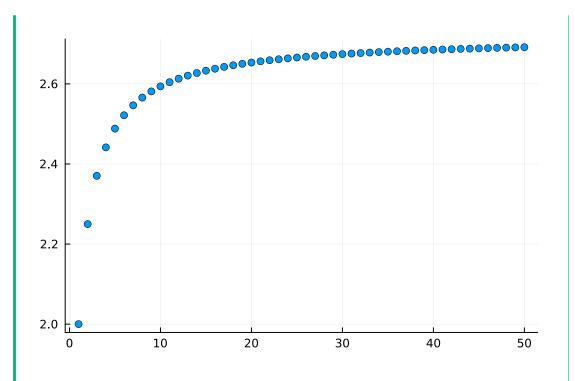
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)



d.
$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

```
Solución

using Plots
x(n) = (1 + 1 / n)^n
scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```

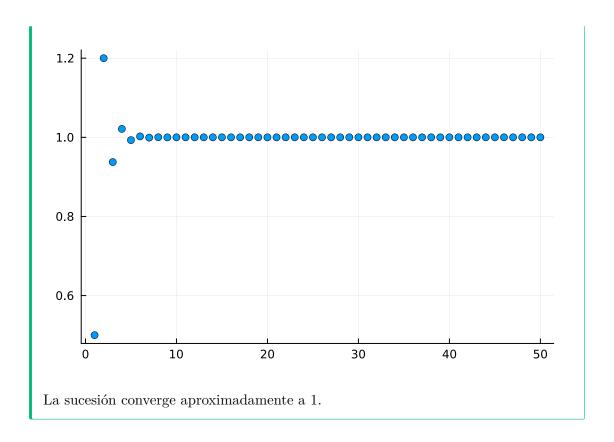


La sucesión converge aproximadamente a 2.7.

e.
$$x_1=0.5$$
y $x_{n+1}=\frac{3}{2+x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Solución

```
using Plots x(n) = n == 1 ? 0.5 : 3/(2+x(n-1)) scatter([x(n) for n = 1:50], legend=false)
```



Ejercicio 2.3. Calcular el límite, si existe, de las siguiente sucesiones.

a. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

i Ayuda

Definir una función para el término general usar la función limit del paquete SymPy para calcular el límite de la sucesión.

```
Solución

using SymPy
    @syms n::(integer, positive) # Declaración de la variable simbólica n.
    x(n) = 1/n
    limit(x(n), n=>oo)
```

```
b. ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}
```

```
Solución

@syms n::(integer, positive)
x(n) = (-1)^n
limit(x(n), n=>00)
NaN
```

```
c. \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}
```

```
    Solución

    Osyms n::(integer, positive)
    x(n) = (1 + 1 / n)^n
    limit(x(n), n=>oo)

e
```

Ejercicio 2.4. En el siglo III A.C Arquímedes usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia (y de paso el valor de π). La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

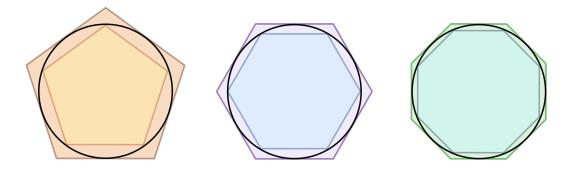


Figura 2.1: Aproximación del área de una circunferencia mediante polígonos regulares

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

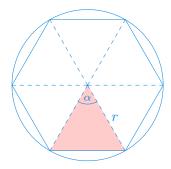


Figura 2.2: Descomposición de un hexágono en triángulos

En el caso de los polígonos inscritos dentro de la circunferencia, como dos de los lados siempre coinciden con el radio de la circunferencia r, el área del polígono de n lados puede calcularse con la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2} n r^2 Frsen\left(\frac{360}{n}\right)$$

a. Calcular el área de los polígonos de 10^i lados, para $i=1,\dots,6$ tomando r=1.

```
Solución

a(n) = n*sind(360/n)/2
print([a(10^i) for i = 1:6])
```

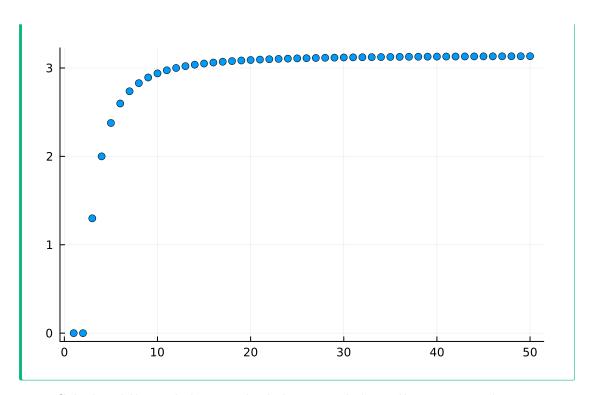
b. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de las areas de los polígonos

[2.938926261462366, 3.1395259764656687, 3.1415719827794755, 3.141592446881286, 3.141592

b. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de las areas de los polígonos tomando r=1.

```
Solución

using Plots
a(n) = n*sind(360/n)/2
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



c. Calcular el límite de la sucesión de las areas de los polígonos tomando r=1.

```
Solución

using SymPy
    @syms n::(integer, positive)
    a(n) = n*sin(2pi/n)/2
    limit(a(n), n=>oo)

3.14159265358979
```

d. Usando el resultado anterior, calcular el area del círculo de radio r.

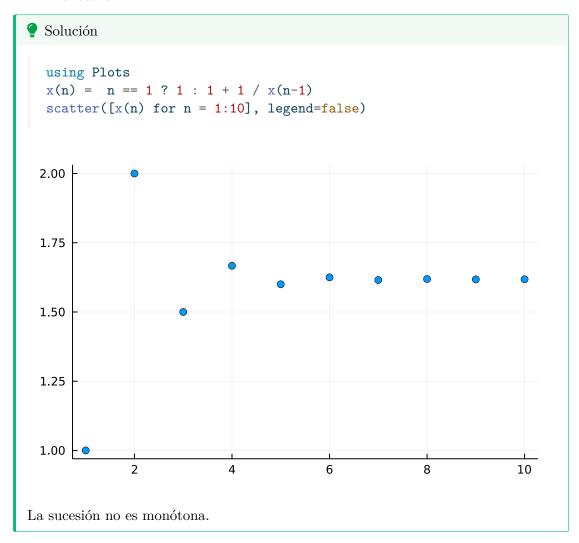
```
Solución

using SymPy
    @syms n::(integer, positive), r
    a(n) = n*r^2*sin(2pi/n)/2
    limit(a(n), n=>oo)

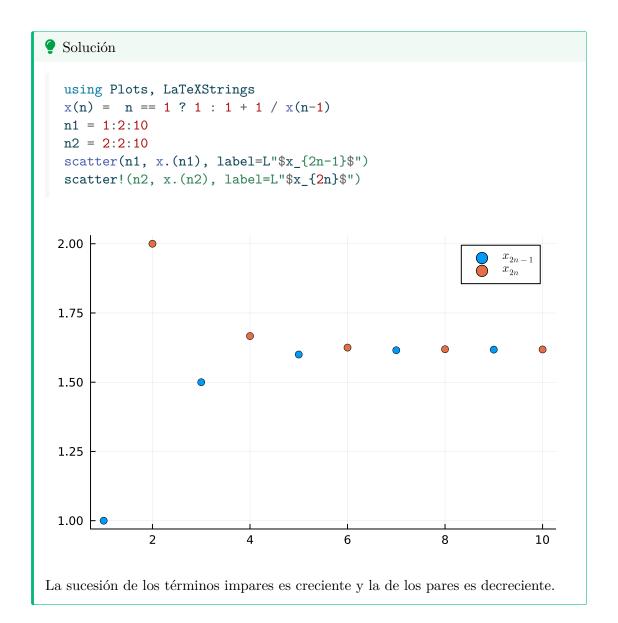
3.14159265358979r²
```

Ejercicio 2.5. Dada la sucesión $x_1=1$ y $x_{n+1}=1+\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N},$ se pide:

a. Dibujar la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión. ¿Es una sucesión monótona?



b. Dibujar la gráfica de los 5 primeros términos de las subsucesiones con los términos pares e impares. ¿Son monótonas?



2.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.6. Calcular el décimo término de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

Ejercicio 2.7. Calcular los 10 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ y averiguar hacia dónde converge.
$\square \ 0.5$
\square 1.5
\square 0
\square No converge
\Box 1
Ejercicio 2.8. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la sucesión $x_1=3$ y $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}.$ insert image here
Ejercicio 2.9. A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$; crees que la sucesión converge? \square Si \square No
Ejercicio 2.10. A la vista de la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$, ¿crees que la sucesión converge? \square Si \square No
Ejercicio 2.11. A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión dada por $x_1=1$ y $x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$ $\forall n\in\mathbb{N},$ ¿crees que la sucesión converge? \Box Si \Box No

Ejercicio 2.12. ¿Cuál es el límite de la sucesión $\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

*Hint: *

Introducir hasta 5 decimales

3 Funciones elementales

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using Plots # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using SymPy # Para el cálculo simbólico.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

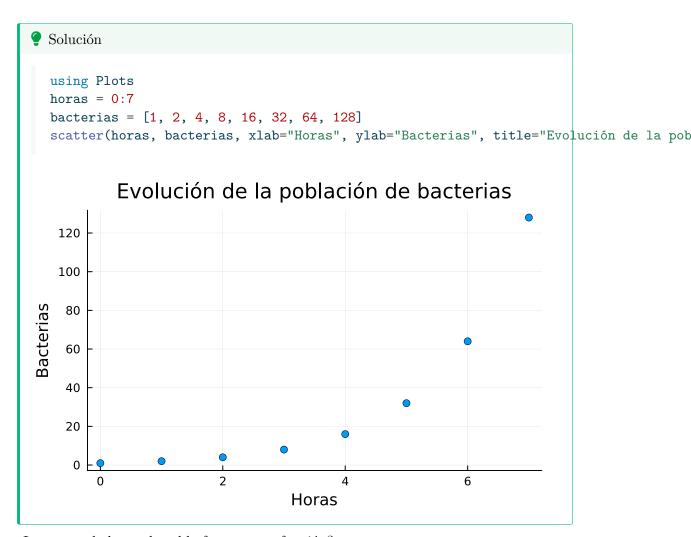
Ejercicio 3.1. La siguiente tabla contiene el número de bacterias en un cultivo cada hora que pasa.

	ъ .
Horas	Bacterias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

Dibujar una gráfica con la evolución del la población de bacterias.

i Ayuda

Definir los valores de las horas en un vector x y el número de bacterias en otro y y luego utilizar la función scatter(x,y) del paquete Plots para dibujar una gráfica de puntos.



¿Los pares dados en la tabla forman una función?

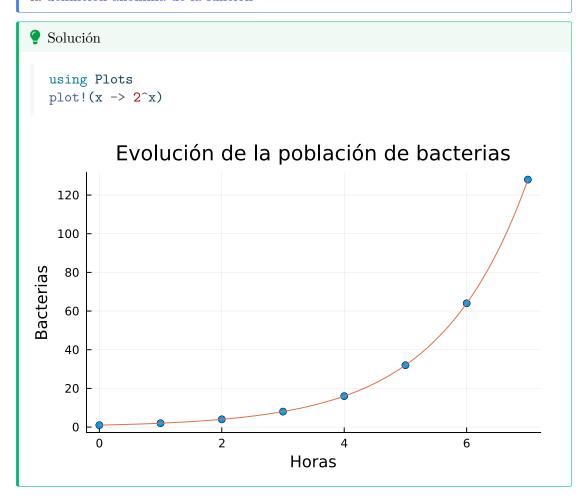
Solución

Si, porque para cada hora hay a lo sumo un número de bacterias con el que se relaciona.

¿Qué fórmula crees que explica la evolución del número de bacterias en función de las horas que pasan? Dibuja en la gráfica anterior la función con esa fórmula.

i Ayuda

Para añadir una nueva gráfica a una anterior se añade un signo de exclamación! a la función de graficación. Para una gráfica de líneas, utilizar la función plot! del paquete Plots, pasándole el nombre de la función si se ha definido previamente o



Ejercicio 3.2. En el lanzamiento vertical de un objeto, la posición que ocupa el objeto en cada instante t, viene dado por la función

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

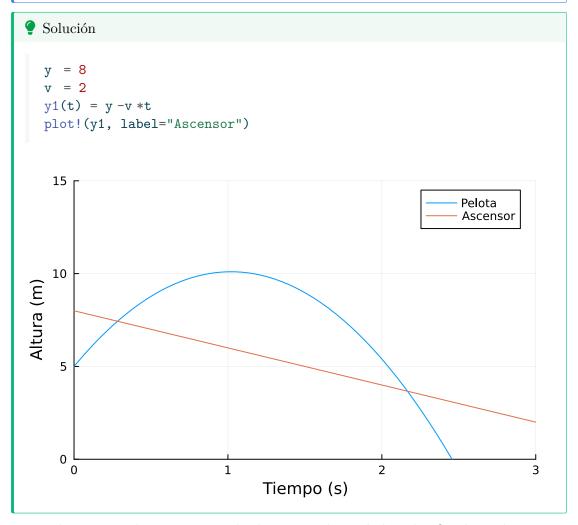
donde y_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial con que se lanza, y g es la aceleración de la gravedad. Una pelota se lanza verticalmente desde la ventada de un edificio a 5 m de altura, con una velocidad inicial de 10 m/s. Dibujar la gráfica de la posición de la pelota en función del tiempo, tomando una aceleración de la gravedad $g=-9.8~\mathrm{m/s^2}$.

Declarar t como una variable simbólica usando el paquete SymPy , definir después las constantes y_0, v_0 y g, y luego definir la función y(t) mediante la fórmula dada. Para dibujar la gráfica de la función, usar la función plot pasándole el nombre de la función. Como no tienen sentido los instantes negativos, ni las posiciones negativas, restringir la ventana de graficación a valores de t y de y positivos usando los parámetros xlim e ylim.

```
Solución
  using Plots, SymPy
  @vars t
           #Declaramos t como una variable simbólica
    = 5
  v = 10
  const gravedad = -9.8 #Declaramos la gravedad como una constante
  y0(t) = y + v * t + \frac{1}{2} * gravedad * t^2
  plot(y0, xlims=(0,3), ylims=(0,15), label="Pelota", xlab="Tiempo (s)", ylab="Altura
   15
                                                                 Pelota
   10
Altura (m)
    0
                            1
                                                   2
                                                                         3
                                  Tiempo (s)
```

Al mismo tiempo que se lanza la pelota, un ascensor exterior baja por la fachada del mismo edificio desde una altura de 8 m con una velocidad constante de 5 m/s. Dibujar la gráfica de la posición del ascensor junto a la gráfica de la pelota.

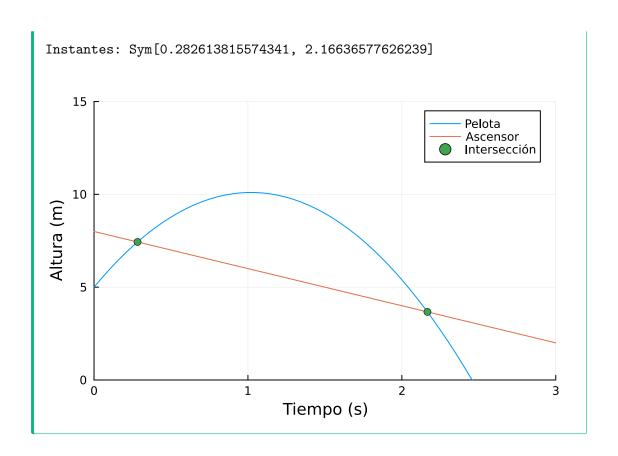
La función que define la posición del ascensor que baja desde una altura y_1 con una velocidad constante v_1 en cada instante t es $y(t)=y_1-v_1t$.



¿En qué instantes el ascensor estará a la misma altura de la pelota? Dibujar los puntos correspondientes a esos instantes en la gráfica anterior.

```
    Solución

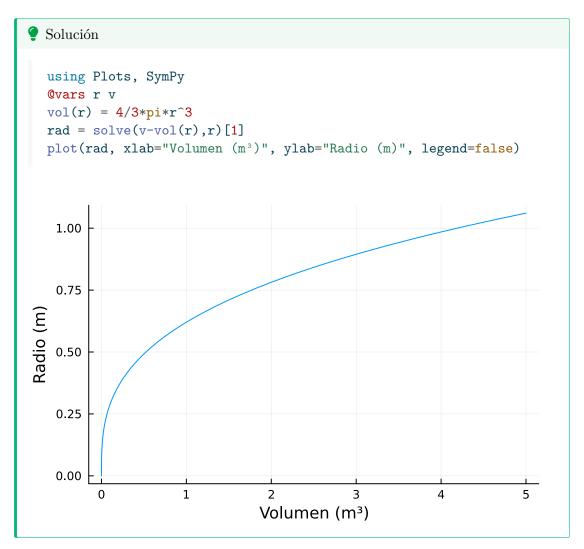
sol = solve(y0(t)-y1(t))
    print("Instantes: ", sol)
    scatter!(sol, y1.(sol), label="Intersección")
```



Ejercicio 3.3. El volumen de un globo esférico depende del radio según la función $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calcular la función que expresa el radio en función del volumen y dibujar su gráfica.

Declarar las variables simbólicas ${\tt r}$ y ${\tt v}$ usando el paquete ${\tt SymPy}$ y definir la función ${\tt vol}({\tt r})$ que expresa el volumen del globo en función del radio.

Después utilizar la función solve del paquete symPy para despejar r de la ecuación v-vol(r)=0.

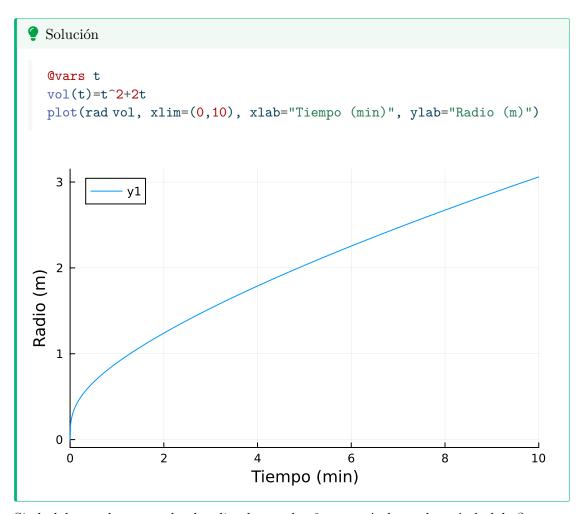


Si empezamos a introducir helio en el globo de manera que su volumen a los t minutos viene dado por la función $v(t) = t^2 + 2t$, dibujar la gráfica de la función que da el radio en cada instante.

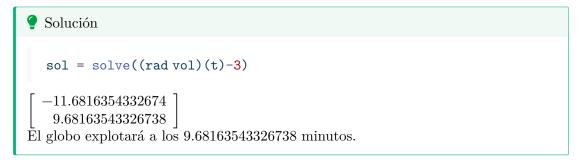
i Ayuda

Declarar las variables simbólicas t
 usando el paquete SymPy y definir la función vol(t) que expresa el volumen del globo en función del tiempo.

Después utilizar a el operador de composición \circ para componer la función del volumen con la función del radio.



Si el globo explota cuando el radio alcanza los 3 m, ¿cuándo explotará el globo?



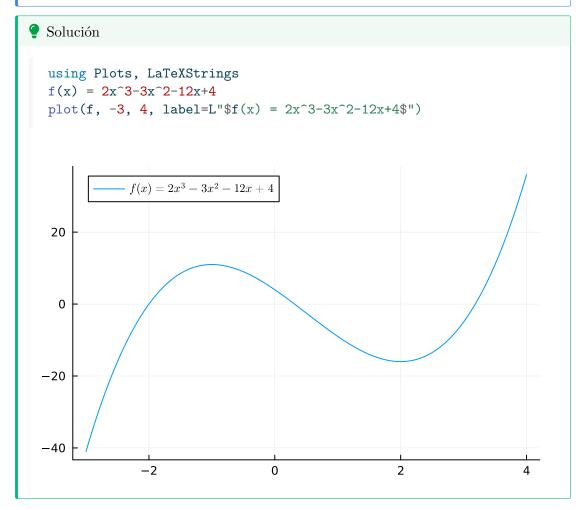
Ejercicio 3.4. Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

en el intervalo [-3,4] y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

i Ayuda

Definir la función y usar la función plot del paquete Plots.



a. Dominio

Solución

 $Dom(f)=\mathbb{R}$

b. Imagen

$$Im(f)=\mathbb{R}$$

c. Raíces

Solución

```
using SymPy
@syms x
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
raices = solve(f(x)) # Solución exacta
print(raices)
N(raices) # Solución aproximada con decimales

Sym[-2, 7/4 - sqrt(33)/4, sqrt(33)/4 + 7/4]

3-element Vector{Real}:
-2
```

- $0.3138593383654928350373471329452676704449338855043019080750306323585\\24819635648$
- 3.186140661634507164962652867054732329555066114495698091924969367641475180364343

Hay tres raíces en x = -2, x = 0.31 y x = 3.19 aproximadamente.

d. Signo

Solución

```
Intervalos con f(x) negativa: (-\infty, -2) \cup (0.31, 3.19).
Intervalos con f(x) positiva: (-2, 0.31) \cup (3.19, \infty).
```

e. Crecimiento

Solución

```
Intervalos con f(x) creciente: (-\infty, -1) \cup (2, \infty).
Intervalos con f(x) decreciente: (-1, 2).
```

f. Extremos

Máximo relativo en x=-1 y el valor máximo es f(-1)=11. Mínimo relativo en x=2 y el valor del mínimo es f(2)=-16.

g. Concavidad

Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(0.5, \infty)$. Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty, 0.5)$.

h. Puntos de inflexión

Solución

Punto de inflexión en x = 0.5.

Ejercicio 3.5. Dibujar la gráfica de la función

$$g(t) = \frac{t^4 + 19t^2 - 5}{t^4 + 9t^2 - 10}$$

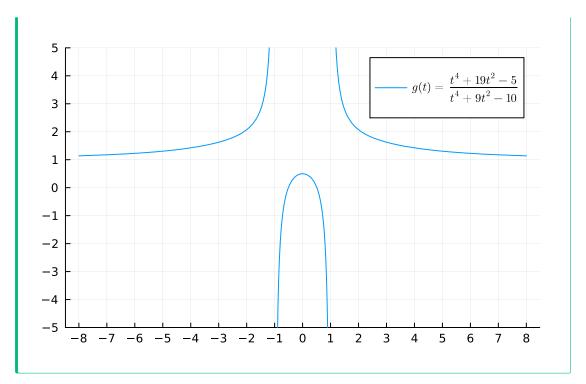
en el intervalo [-8, 8] y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

i Ayuda

Usar la función plot como en el ejercicio anterior con el parámetro aspect_ratio=1.0 para que los ejes tengan la misma escala.

Para respetar las discontinuidades autilizar la función rangeclamp() del paquete MTH229.

Solución



a. Dominio. ¿Qué pasa si aplicamos la función a algún valor fuera de su dominio?

Solución

 $Dom(f) = \mathbb{R} \ \{-1,1\}$

(Inf, Inf)

Como se observa, al aplicar la función a -1 y 1 se obtiene ∞ .

b. Imagen

Solución

$$Im(f) = \mathbb{R} \ (0.5, 1]$$

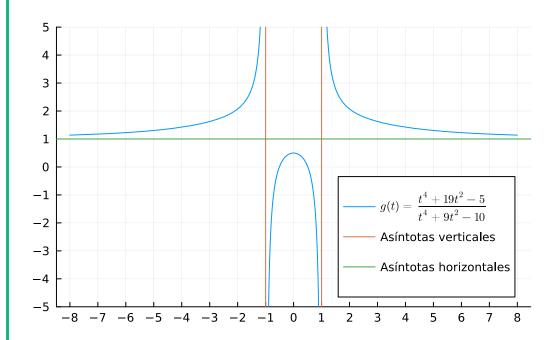
c. Asíntotas. Dibujarlas.

i Ayuda

Buscar las asíntotas verticales en los puntos fuera del dominio de la función. Para dibujar asíntotas verticales usar la función vline del paquete Plots, y para dibujar las asíntotas horizontales usar la función hline.

Solución

vline!([-1,1], label="Asíntotas verticales")
hline!([1], label="Asíntotas horizontales", legend=:bottomright)



Asíntotas verticales en x = -1 y x = 1.

Asíntotas horizontales en y = 1.

No hay asíntotas oblicuas.

d. Raíces

Solución

Hay dos raíces en x=-0.5 y x=0.5 aproximadamente.

e. Signo

Intervalos con f(x) positiva: $(-\infty, -1) \cup (-0.5, 0.5) \cup (1, \infty)$. Intervalos con f(x) negativa: $(-1, -0.5) \cup (0.5, 1)$.

e. Crecimiento

Solución

Intervalos con f(x) creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Intervalos con f(x) decreciente: $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

f. Extremos

Solución

Máximo relativo en x=0 y el valor máximo es g(0)=0.5. No hay mínimos relativos.

g. Concavidad

Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Intervalos de concavidad hacia abajo: (-1, 1).

h. Puntos de inflexión

Solución

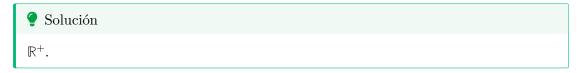
No hay puntos de inflexión.

Ejercicio 3.6. Dibujar la gráficas de las siguientes funciones exponenciales 2^x , e^x , 0.5^x , 0.7^x y responder a las siguientes preguntas comparando las gráficas.

a. ¿Cuál es el dominio de una función exponencial?



b. ¿Cuál es la imagen de una función exponencial?



c. ¿Cómo es el crecimiento de una función exponencial?

 a^x es creciente si a>1 y decreciente si 0< a<1.

d. ¿Tienen extremos una función exponencial?

Solución

No

e. ¿Cómo es la curvatura de una función exponencial?

Solución

Es cóncava hacia arriba.

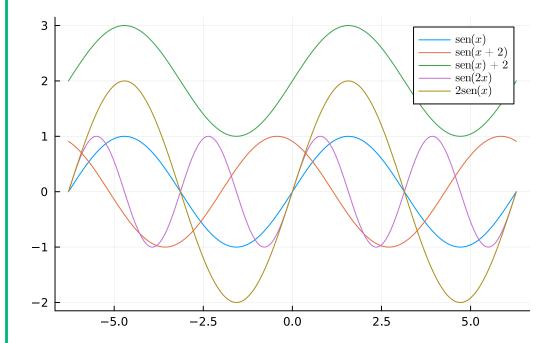
Ejercicio 3.7. Dibujar la gráficas de las funciones trigonométricas Frsen(x), Frsen(x+2), Frsen(x)+2, Frsen(2x) y 2Frsen(x), y completar la siguiente tabla estudiando su periodo y amplitud.

Función	Periodo	Amplitud
$\overline{Frsen(x)}$		
Frsen(x+2)		
Frsen(x) + 2		
Frsen(2x)		
2Frsen(x)		

¿Qué conclusiones sacas?

i Ayuda

El periodo es el mínimo intervalo en el que la gráfica de la función se repite, y la amplitud es la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función.



Función	Periodo	Amplitud
$\overline{Frsen(x)}$	2π	1
Frsen(x+2)	2π	1
Frsen(x) + 2	2π	1
Frsen(2x)	π	1
2Frsen(x)	2π	2

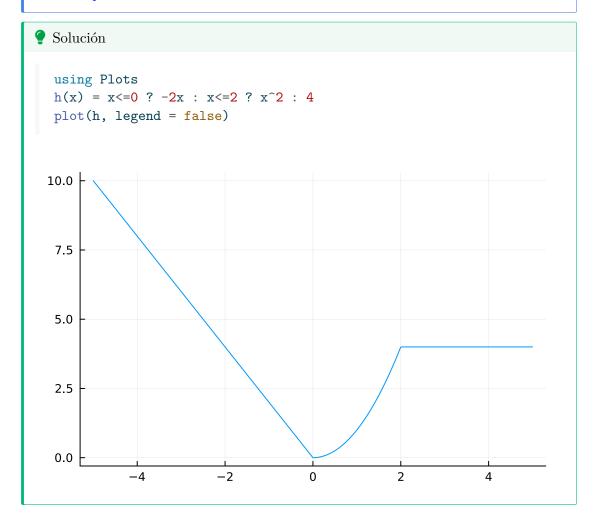
Se observa que al sumar una constante a la función seno o a su argumento, el periodo y la amplitud no cambian. Sin embargo, si se multiplica por una constante el seno, cambia la amplitud, y si se multiplica su argumento, cambia el periodo.

Ejercicio 3.8. Dibujar la gráfica de la función a trozos

$$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 0; \\ x^2 & \text{si } 0 < x \le 2; \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

i Ayuda

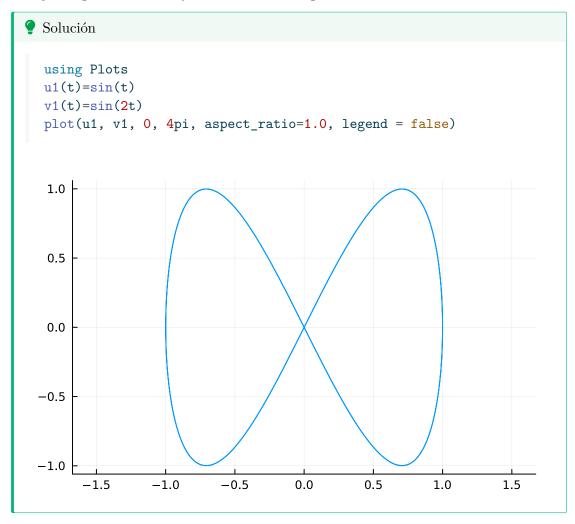
Usar el operador condicional anidado.



Ejercicio 3.9. Una hormiga se mueve sobre el plano real de manera que en cada instante t su posición viene dada por las funciones

$$\begin{cases} x = Frsen(t) \\ y = Frsen(2t) \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de la trayectoria de la hormiga.



3.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.10. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen dominio \mathbb{R} e imagen $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$?

	$1/x^2$
	x
	$x^4 - 2x^3 + 4x$
	$\sqrt(x)$
	2^x
(Select one or mor	
	Dibujar las gráficas de las funciones logarítmicas $\ln(x)$, $\log_2(x)$ y ar a las siguientes preguntas.
a. ¿Cuál es el c	lominio de una función logarítmica?
	$\mathbb{R}\{0\}$
☐ Las otras opo	ciones son falsas.
	\mathbb{R}^+
	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
	\mathbb{R}
b. ¿Cuál es la i	magen de una función logarítmica?
	\mathbb{R}^+
П	$\mathbb R$
	\mathbb{R}^-
	$\mathbb{R}_{-}\{0\}$
☐ Las otras opo	ciones son falsas.

c. ¿Cómo es el crecimiento la función logarítmica $\log_a(x)?$
\square Decreciente si $0 < a < 1$
\Box Creciente si $0 < a < 1$
\Box Creciente si $a < 1$
\Box Creciente si $a > 1$
(Select one or more)
d. ¿Cómo es la concavidad la función logarítmica $\log_a(x)?$
\Box Cóncava hacia arriba si $0 < a < 1$
\Box Cóncava hacia arriba si $a>1$
\Box Cóncava hacia abajo si $0 < a < 1$
\Box Cóncava hacia abajo si $a<1$
(Select one or more)
Ejercicio 3.12. ¿Cuál es el periodo y la amplitud de la función $2\cos(x/2)$?
$\square \ 2 \ \ \mathrm{y} \ 2$
$\square \ 2 \ \ \mathrm{y} \ 1$
\square y 2
\square 4 y 2
\square 4 y 1

Ejercicio 3.13. ¿Cuál de las gráficas corresponde a la siguiente función paramétrica?

$$f(t) = \begin{cases} Frsen(2t) - \cos(t) \\ Frsen(t) + \cos(t) \end{cases}$$

insert image here

4 Límites de funciones reales

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

Ejercicio 4.1. Sea la función $f(x) = x^2$.

a. Estudiar la tendencia de f cuando x se aproxima a 3 por la derecha, evaluando la función en $x=3+\frac{1}{10i}$ para $i=1,\ldots,10$.

i Ayuda

Definir la función y aplicar la función a los valores de x indicados usando compresiones de arrays.

Solución

```
f(x) = x^2

a = 3

print([f(a+1/10i) for i = 1:10])
```

[9.61000000000001, 9.30249999999998, 9.20111111111111, 9.150625, 9.1204, 9.1002777777]

La función tiende a 9.

b. Estudiar la tendencia de f cuando x se aproxima a 3 por la izquierda, evaluando la función en $x=3-\frac{1}{10i}$ para $i=1,\ldots,10$.

```
print([f(a-1/10i) for i = 1:10])
```

[8.41, 8.7025, 8.801111111111112, 8.850625, 8.8804, 8.90027777777777, 8.91448979591836

La función también tiende a 9.

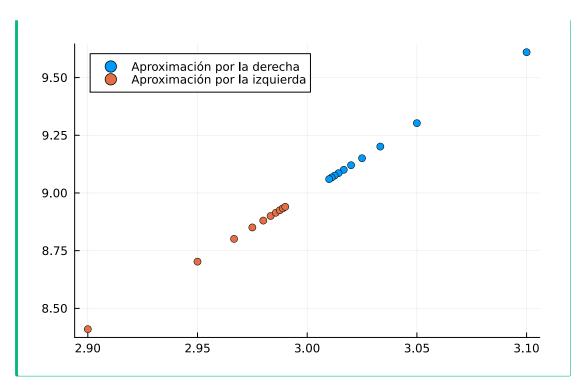
c. Dibujar la gráfica de los valores de f evaluados en los apartados anteriores diferenciando la tendencia por la izquierda de la tendencia por la derecha.

i Ayuda

Definir un vector con los valores de x y otro con los valores correspondientes de f(x) y usar la función scatter del paquete Plots, pasandole los dos vectores.

Solución

```
xd = [a+1/10i for i=1:10]
scatter(xd, f.(xd), label="Aproximación por la derecha")
xi = [a-1/10i for i=1:10]
scatter!(xi, f.(xi), label="Aproximación por la izquierda", legend=:topleft)
```



d. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de f en x=3.

i Ayuda

Declarar la variable simbólica x con **@vars** imponiento la restricción real=true, definir la función y usar la función **limit** del paquete SymPy para calcular los límites laterales de la función. Para el límite por la izquierda indicar el parámetro dir="-" y para el límite por la derecha dir="+".

Ejercicio 4.2. Sea la función $g(x) = (1+x)^{1/x}$.

a. Estudiar la tendencia de g cuando x se aproxima a 0 por la derecha, evaluando la función en $x=\frac{1}{10^i}$ para $i=1,\dots,10$.

```
Solución
g(x) = (1+x)^{(1/x)}
a = 0
print([g(a+1/10^{i}) \text{ for } i = 1:10])
```

[2.5937424601000023, 2.7048138294215285, 2.7169239322355936, 2.7181459268249255, 2.7182

La función tiende a e.

b. Estudiar la tendencia de g cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, evaluando la función en $x=-\frac{1}{10^i}$ para $i=1,\ldots,10$.

```
Solución
```

```
print([g(a-1/10^i) for i = 1:10])
```

[2.867971990792441, 2.7319990264290284, 2.7196422164428524, 2.71841775501015, 2.7182954

La función también tiende a e.

c. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de g en x=0.

```
@ Solución

@vars x real=true
li = limit(g(x), x=>0, dir="-")
println("Límite por la izquierda: ", li)
ld = limit(g(x), x=>0, dir="+")
```

println("Límite por la derecha: ", ld)

Límite por la izquierda: E Límite por la derecha: E

Ejercicio 4.3. Considérese la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2}.$$

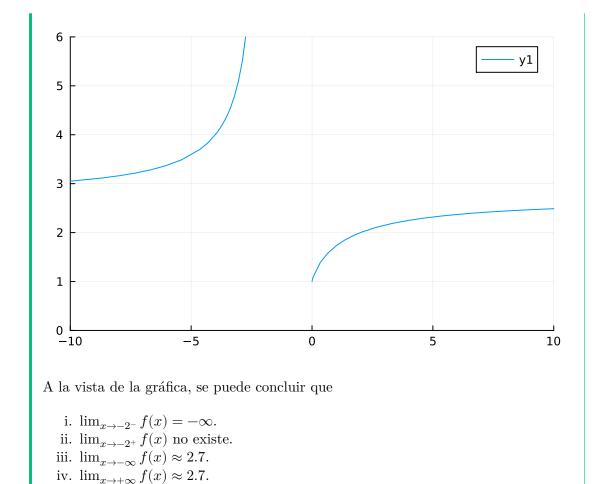
- a. Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites:
- b. $\lim_{x \to -2^{-}} f(x)$
- c. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$
- d. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
- e. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
- f. $\lim_{x\to 2} f(x)$
- g. $\lim_{x\to 0} f(x)$

i Ayuda

Utilizar la función plot! del paquete Plots. Usar los parámetros xlims=(a,b) para restringir la región de dibujo al intervalo (a,b) del eje x, y ylims=(c,d) para restringir la región de dibujo al intervalo (c,d) del eje y.

Solución

```
using Plots f(x) = (1+2/x)^{(x/2)} plot(f, xlims=(-10,10), ylims=(0,6))
```



b. Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?

v. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$. vi. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

```
Límite por la izquieda en -2: oo

Límite por la izquieda en -2:

-oo

Límite en -w: E

Límite en w: E

Límite en 2: 2

Límite en 0:
```

Precaución

Aunque Julia calcula el límite en -2 por la derecha y el límite en 0, a la vista de la gráfica, estos límites en realidad no existen, ya que la función no está definida en el intervalo de [-2,0].

Ejercicio 4.4. Calcular los siguientes límites

a. $\lim_{x\to 0} Frsen\left(\frac{1}{x}\right)$

② Solución using SymPy ②vars x real=true limit(sin(1/x), x=>0) ⟨-1,1⟩ Como no se obtiene un valor concreto, sino un rango de valores, el límite no existe.

b. $\lim_{x\to 0} xFrsen\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución limit(x*sin(1/x), x=>0) 0

c. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} Frsen(x)$

```
    Solución
    limit(^(-x)*sin(x), x=>oo)
    0
```

```
c. \lim_{x \to a} \frac{Frsen(x) - Frsen(a)}{x - a}
```

```
② Solución

②vars a real=true
limit((sin(x)-sin(a))/(x-a), x=>a)

cos(a)
```

Ejercicio 4.5. Calcular el valor de las siguientes funciones en los puntos dados y su límite. Corroborar los límites obtenidos gráficamente.

a.
$$f(x) = \frac{Frsen(x)}{x}$$
 en $x = 0$.

Solución

La función f no está definida en x=0 de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

```
f(x)=\sin(x)/x
f(0)
```

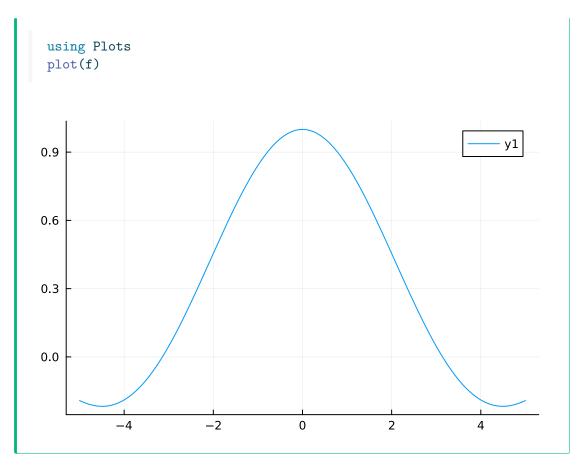
NaN

Ahora calculamos el límite de f en 0.

```
@vars x real=true
f(x)=sin(x)/x
limit(f(x), x=>0)
```

1

Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de f en un entorno de 0.



b.
$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x - \pi/2}$$
 en $x = \pi/2$.

La función f no está definida en x=0 de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

$$g(x)=\cos(x)/(x-pi/2)$$
$$g(pi/2)$$

Inf

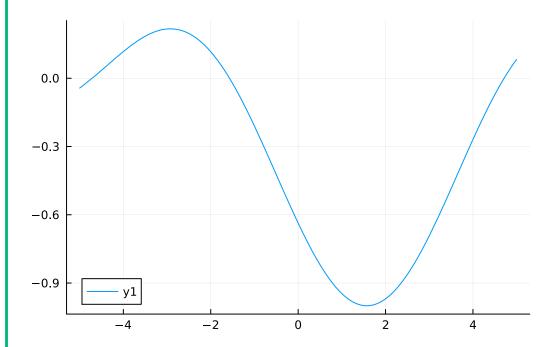
Como se puede observar, se obtiene ∞ en lugar de indeterminado. La razón está en la representación de los números reales mediante números con coma flotante, de manera que $\pi/2$ se redondea al número de coma flotante más próximo, y al aplicar el coseno se obtiene un número muy próximo a 0 pero distinto de 0. Ahora calculamos el límite de g en $\pi/2$.

```
limit(g(x), x=>pi/2)
```

 ∞

Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de g en un entorno de $\pi/2$.

```
using Plots
plot(g)
```



Como se puede apreciar gráficamente el la tendencia de g en $\pi/2$ es -1 y no el valor obtenido con el cálculo del límite. De nuevo el problema está en la aproximación de pi como un real en coma flotante. Afortunadamente el paquete SymPy permite definir una constante como simbólica para evitar su conversión a número en coma flotante, usando la función Sym(). Repetimos la definición de la función y el cálculo de nuevo convirtiendo π en una constante simbólica.

```
g(x)=\cos(x)/(x-Sym(pi)/2)
limit(g(x), x=>Sym(pi)/2)
```

-1

Ejercicio 4.6. Considérese la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - 2} & \text{si } x \le 0; \\ \frac{x^2}{2x - 6} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

a. Dibujar la gráfica de g y determinar gráficamente si existen asíntotas.

i Ayuda

Para respetar las discontinuidades utilizar la función rangeclamp() del paquete MTH229.

A la vista de la gráfica, se observa que g tiene una asíntota vertical en x=3, una

asíntota horizontal y=1 en $-\infty$ y parece que también hay una asíntota oblicua en ∞ .

b. Calcular las asíntotas verticales de g y dibujarlas.

Solución

Estudiamos primero el dominio para ver dónde no está definida la función. Como tanto la rama negativa como la positiva son funciones racionales, hay que ver los puntos que anulan el denominador.

```
println("Puntos fuera del dominio de la rama negativa: ", solve(x-2)) println("Puntos fuera del dominio de la rama positiva: ", solve(2x-6))
```

Puntos fuera del dominio de la rama negativa: Sym[2] Puntos fuera del dominio de la rama positiva: Sym[3]

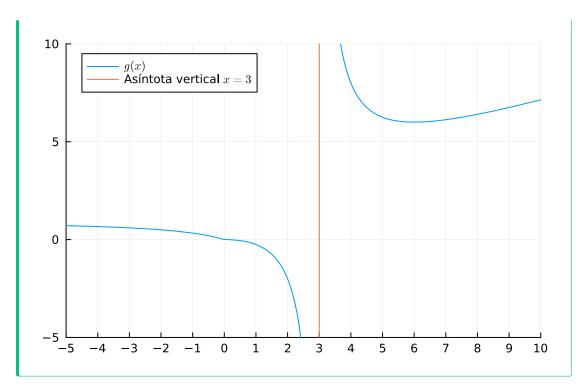
Así pues la rama negativa está definida en todos \mathbb{R}^- y la rama positiva en \mathbb{R}^+ {3}. Es en este último punto donde g puede tener asíntota vertical, así que estudiamos los límites laterales.

```
println("Límte en 3 por la izquierda: ", limit(g(x), x=>3, dir="-")) println("Límte en 3 por la derecha: ", limit(g(x), x=>3, dir="+"))
```

```
Límte en 3 por la izquierda: -oo
Límte en 3 por la derecha: oo
```

Por tanto, g tiene una asíntota vertical en x=3.

```
vline!([3], label = L"Asíntota vertical $x=3$")
```



c. Calcular las asíntotas horizontales de g.

```
Solución

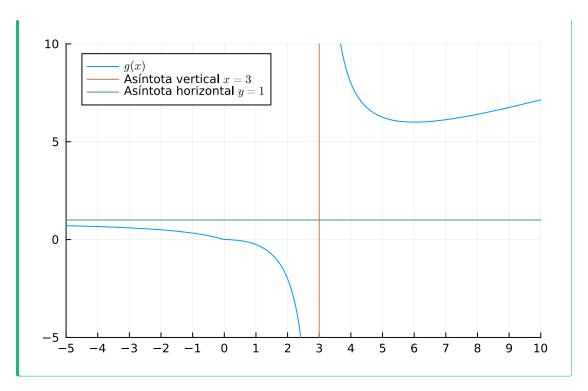
Estudiamos los límites en el infinito.

println("Límite en -w: ", limit(g1(x), x=>-oo))
println("Límite en w: ", limit(g2(x), x=>oo))

Límite en -w: 1
Límite en w: oo

Por tanto, g tiene una asíntota horizontal g = 1 en -\infty.

hline!([1], label = L"Asíntota horizontal $y=1$")
```



d. Calcular las asíntotas oblicuas de g.

Solución

Estudiamos el límite en ∞ de $\frac{f(x)}{x}$ (en $-\infty$ no puede haber asíntota oblicua al haber asíntota horizontal).

$$limit(g2(x)/x, x=>00)$$

 $\frac{1}{2}$

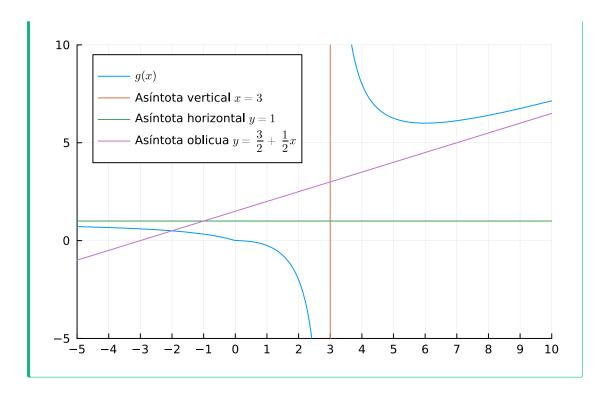
Por tanto, g tiene una asíntota oblicua con pendiente b=1/2 en ∞ . Para obtener el término independiente de la asíntota calculamos el límite en ∞ de $f(x)-\frac{1}{2}x$.

```
limit(g2(x)-x/2, x=>oo)
```

 $\frac{3}{2}$

Por tanto, g tiene una asíntota oblicua $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$.

```
plot!(3/2+x/2, label = L"Asíntota oblicua $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x$")
```



Ejercicio 4.7. Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{3x^2 + x} & \text{si } x \le 0, \\ \frac{Frtg(x) + a}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

 \downarrow Qué valor debe tomar a para que la función sea continua en todo su dominio?

i Ayuda

Calcular el límite en 0 por la izquierda de la función de la rama negativa, y el límite en 0 por la derecha de la función de la rama positiva. Después resolver la ecuación simbólica que resulta de igualar los dos límites. Para crear la ecuación simbólica debe utilizarse la función Eq() del paquete SymPy y después resolverla con la función solve().

```
    Solución

    Ovars x a real=true
    h1(x) = (2x^2-2x)/(3x^2+x)
    h2(x) = (tan(x)-a*x)/x
    11 = limit(h1(x), x=>0, dir="-")
    12 = limit(h2(x),x=>0, dir="+")
    solve(Eq(11,12))

[ 3 ]
```

Ejercicio 4.8. Representar gráficamente y clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

Para estudiar las discontinuidades de una función tenemos que estudiar los puntos que no están en el dominio y los puntos donde cambia la definición de la función en el caso de una función definida a trozos.

```
using Plots, MTH229, LaTeXStrings

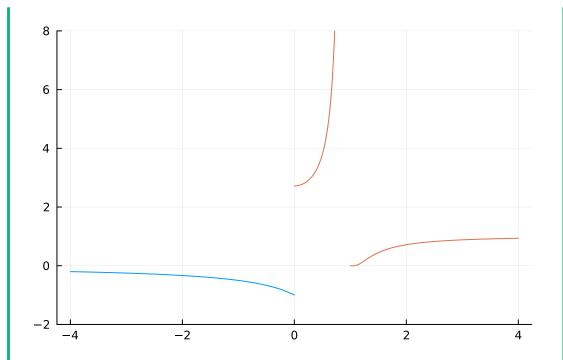
@syms x::real

f1(x) = (x+1)/(x^2-1)

f2(x) = 1/\exp(1/(x^2-1))

plot(f1, -4, 0, ylim=(-2,8), legend=false)

plot!(rangeclamp(f2), 0, 4)
```



Para determinar el dominio de la rama negativa, al ser una función racional, tenemos que ver los puntos que anulan el denominador.

```
solve(x^2-1)
```

$$\left[\begin{array}{c} -1\\1\end{array}\right]$$

Así pues, la función no está definida en x=-1 (la otra raíz queda fuera de la rama negativa). Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en x=-1.

```
println("Límite en -1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="-")) println("Límite en -1 por la derecha: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="+"))
```

Límite en -1 por la izquierda: -1/2 Límite en -1 por la derecha: -1/2

Como el límite existe, f tiene una discontinuidad evitable en x = -1.

Del mismo modo la rama positiva no está definida en x=1 ya que se anula el denominador del exponente de la función exponencial. Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en x=1.

```
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f2(x), x=>1, dir="-")) println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>1, dir="+"))  
Límite en 1 por la izquierda: oo Límite en 1 por la derecha:  
0  
Como los límites laterales son distintos, f tiene una discontinuidad de salto infinito en x=1.  
Finalmente, estudiamos los límites laterales en x=0, que es donde cambia la definición de la función.  
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=>0, dir="-")) println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>0, dir="+"))  
Límite en 1 por la izquierda: -1  
Límite en 1 por la derecha: E
```

Ejercicio 4.9. El teorema de Bolzano permite construir un algoritmo para encontrar raíces de una función continua en un intervalo [a,b] cuando f(a)f(b) < 0. Este algoritmo se conoce como el algoritmo de bisección y básicamente consiste en repetir los siguientes pasos:

- 1. Calcular el centro del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.
- 2. Si f(c) = 0, c es una raíz y se termina la búsqueda.
- 3. En caso contrario, si f(a)f(c) < 0 hacer b = c, y si no, hacer a = c.
- 4. Repetir la búsqueda.

Construir una función que implemente este algoritmo y utilizarlo para calcular una raíz de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 6x - 2$ en el intervalo [0, 1].

```
Solución
  function raices_biseccion(f, a, b, error=1e-10)
    if f(a) == 0 return(a) end
    if f(b) == 0 return(b) end
    if f(a) * f(b) > 0 error("Las imágenes de los extremos del intervalo no tienen sig
    c = (a+b)/2
    while abs(b-a) > error
      if f(c) == 0 return(c) end
      if f(a) * f(c) < 0
         b = c
      else
         a = c
      c = (a+b)/2
    end
    С
  end
  f(x)=x^5+3x^4-2x^3+6x-4
  print(raices_biseccion(f, 0, 1))
0.6496996753558051
```

4.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.10. En 1683 Jacob Bernouilli estudió la evolución del interés compuesto cuando el periodo de actualización se hacía cada vez más pequeño.

Si disponemos de $1 \in$ en una cuenta corriente que ofrece un 100% de interés anual, al cabo de un año tendremos $2 \in$ en la cuenta. Si la cuenta ofrece un interés del 50% cada 6 meses, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$
€.

Si la cuenta ofrece un interés del 25% cada trimestre, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.44140625 \in.$$

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del 1/12% mensual?

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del 1/365% diario?

*Hint: *

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta se actualiza de manera continua con un interés 1/x% cuando $x \to \infty$?

 \Box e

 e^{-1}

 \square 3

 \square 2.7182818284590

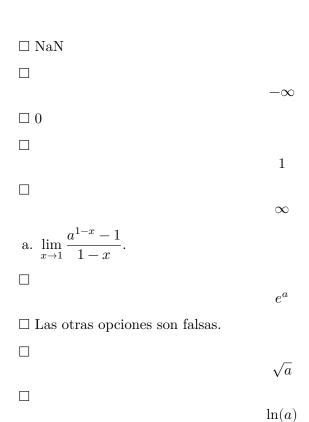
 e^2

Ejercicio 4.11. Calcular los siguientes límites.

a.
$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{Frsen(x)-\cos(x)}{1-Frtg(x)}.$$

b.
$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1}$$
.

$$c. \lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$$



Ejercicio 4.12. ¿Cuáles de las siguientes rectas son asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{3x+3}$?

1/a

$$y = \frac{x-1}{3}$$

$$y = 1$$

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$$

$$y = 3x + 1$$

$$x = -1$$
(Select one or more)

Ejercicio 4.13. ¿Cuándo debería valer la función $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ para que fuese continua en x = 0.

Ejercicio 4.14. Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x - 2 & \text{si } x \le 0, \\ \cos(x - \pi/2) + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

 \downarrow Qué valor debe tomar a para que la función sea continua en todo su dominio?

- __
- \square No hay ningún valor de de a que haga la función continua
- $-2 \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 4.15. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $g(x) = \frac{1}{e^{1/(x^2-1)}}$ en x = -1?

- □ Segunda especie
- □ Salto finito
- ☐ Es continua
- □ Salto infinito
- \square Evitable

Ejercicio 4.16. Calcular de forma aproximada con el algoritmo de bisección una solución de la ecuación $e^{-x} = \cos(x)$ en el intervalo [1, 2] con un error menor de 10^{-15} .

5 Derivadas de funciones reales

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using ImplicitPlots # Para dibujar curvas implícitas.
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.
using LaTeXStrings, Latexify # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

Ejercicio 5.1. Galileo Galilei trató de estudiar el movimiento de un cuerpo en caída libre con un experimento en el que midió la distancia recorrida cada segundo por una bola que caía por un plano inclinado.



Figura 5.1: Plano inclinado de Galileo.

La siguiente tabla recoge sus mediciones.

Tiempo (s)	Distancia (cm)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

a. Dibujar la gráfica que resulta de unir los puntos correspondientes a los pares de la tabla con segmentos. ¿Qué forma tiene la gráfica?

i Ayuda

Definir dos arrays con los valores del tiempo y la distancia y usar la función scatter del paquete Plots para dibujar los puntos y la función plots del paquete Plots para dibujar un diagrama de líneas uniendo los puntos.

```
Solución
  using Plots
  t = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
  d = [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36]
  scatter(t, d, legend=false)
  plt = plot!(t, d, linecolor="blue", xlab="Tiempo (s)", ylab="Distancia recorrida (cm
Distancia recorrida (cm)
    30
    20
    10
     0
                   1
                              2
                                         3
                                                     4
                                                               5
                                                                          6
                                    Tiempo (s)
Se aprecia que una forma parabólica.
```

b. Calcular la velocidad media (tasa de variación media) desde los instantes t=0,1,2 hasta el instante t=3 y dibujar la rectas secantes a la gráfica anterior en esos instantes. ¿Cómo es la tendencia de las velocidades medias?

i Ayuda

La tasa de variación media de una función f en un intervalo [a,b] viene dada por la fórmula

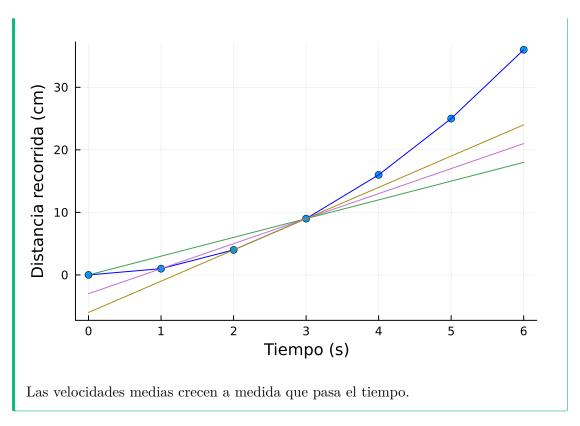
$$TVM(f, [a, b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

y la recta secante a la función f en el intervalo [a, b] tiene ecuación

$$y = f(a) + TVM(f, [a, b])(x - a).$$

Solución

```
# Función para el cálculo de la velocidad media en del instante i al instante j.
  tvm(i, j) = (d[j]-d[i])/(t[j]-t[i])
  # Cálculo de las velocidades medias.
  for i in 1:3
      println("Velocidad media desde el instante $(t[i]) al instante $(t[j]): $(tvm(i,
  end
  # Función para calcular la ecuación de la recta secante en los instantes i y j.
  secante(x, i, j) = d[i] + tvm(i, j) * (x - t[i])
  # Dibujo de las rectas secantes
  for i in 1:3
       plt = plot!(x -> secante(x,i,j))
  end
  plt
Velocidad media desde el instante 0 al instante 3: 3.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 1 al instante 3: 4.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 2 al instante 3: 5.0 cm/s
```

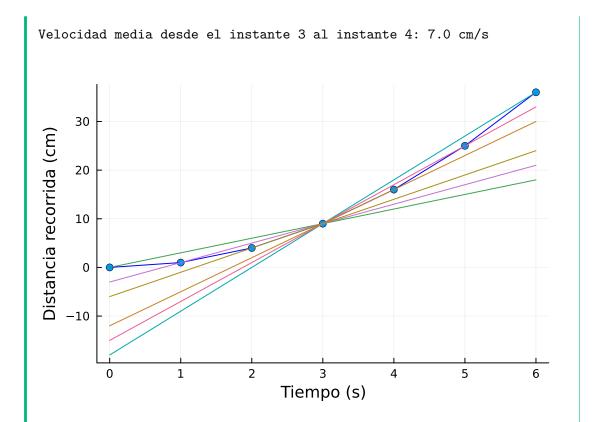


c. Calcular la velocidad media desde el instante t=3 hasta los instantes t=6,5,4 y dibujar la rectas secantes a la gráfica anterior en esos instantes. ¿Cómo es la tendencia de las velocidades medias? ¿Hacia dónde tiende la velocidad media cuando los aproximamos al instante t=3 con instantes menores y mayores?

```
Solución

i = 4
# Cálculo de las velocidades medias.
for j in 7:-1:5
        println("Velocidad media desde el instante $(t[i]) al instante $(t[j]): $(tvm(i, end
# Dibujo de las rectas secantes.
for j in 7:-1:5
        plt = plot!(x -> secante(x,i,j))
end
plt

Velocidad media desde el instante 3 al instante 6: 9.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 3 al instante 5: 8.0 cm/s
```



Las velocidades medias decrecen a medida que el tiempo decrece. Se puede deducir que las velocidades medias tienden a $6~\rm cm/s$ cuando los instantes se aproximan a $3~\rm s$.

d. Calcular la variación en la distancia recorrida cada segundo que pasa. ¿Cómo evoluciona la velocidad de la bola?

```
V = []
for i in 2:length(d)
    push!(v, d[i]-d[i-1])
    println("Velocidad media desde el instante $(t[i-1]) al instante
end

Velocidad media desde el instante 0 al instante 1: 1 cm/s
Velocidad media desde el instante 1 al instante 2: 3 cm/s
Velocidad media desde el instante 2 al instante 3: 5 cm/s
Velocidad media desde el instante 3 al instante 4: 7 cm/s
```

Velocidad media desde el instante 4 al instante 5: 9 cm/s

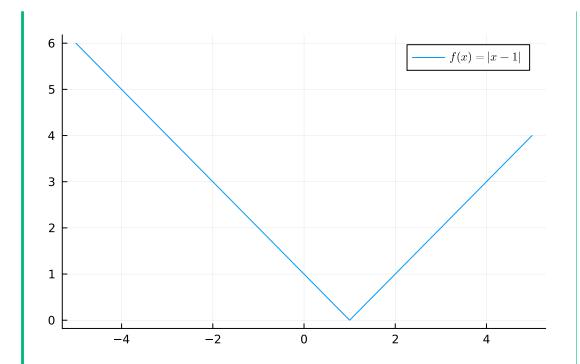
e. Calcular la variación en la velocidad cada segundo que pasa. ¿Cómo evoluciona la aceleración de la bola? ¿Qué conclusiones sacó Galileo sobre la aceleración de la bola?

```
for i in 2:length(v)
    println("Accleración media desde el instante $(t[i-1]) al instante $(t[i]): $(v[end))

Accleración media desde el instante 0 al instante 1: 2 cm/s
Accleración media desde el instante 1 al instante 2: 2 cm/s
Accleración media desde el instante 2 al instante 3: 2 cm/s
Accleración media desde el instante 3 al instante 4: 2 cm/s
Accleración media desde el instante 4 al instante 5: 2 cm/s
Se observa que la accleración es la misma. Galileo concluyó que la accleración de un cuerpo en caída libre era uniforme.
```

Ejercicio 5.2. Representar gráficamente la función f(x) = |x - 1| y estudiar su derivabilidad en el punto x = 1 haciendo uso de la definición de derivada.

```
wsing Plots, SymPy, LaTeXStrings
ovars x real=true
f(x) = abs(x-1)
display(plot(f(x), label=L"f(x)=|x-1|"))
println("Derivada por la izquierda: ", limit((f(x)-f(1))/(x-1), x=>1, dir="-"))
println("Derivada por la derecha: ", limit((f(x)-f(1))/(x-1), x=>1, dir="+"))
```



Derivada por la izquierda: -1 Derivada por la derecha: 1

Como la derivada por la izquierda y por la derecha no son iguales, la función no es derivable en x=1.

Ejercicio 5.3. Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

a. Dibujar la gráfica de f y dibujar las rectas secantes a f en los intervalos $[\frac{i}{10},1]$ para $i=0,\ldots,9$. ¿Hacia dónde tienden las pendientes de las rectas secantes?

```
Solución
   using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
   @vars x real=true
   f(x) = sqrt(x)
   plt = plot(f, 0, 2, ylims=(0,2.5), linewidth = 3, label=L"f(x)=\sqrt{x}", legend=:to
   secante(x, i, j) = f(i) + (f(j)-f(i))/(j-i) * (x - i)
   for i in 0:9
        sec = secante(x, i/10, 1)
        plt = plot!(sec, label =L"y=" * latexify(sec))
   end
   plt
  2.5
                f(x) = \sqrt{x}
                y = 1.0 \cdot x
                y = 0.759746926647958 \cdot x + 0.240253073352042
  2.0
                y = 0.690983005625053 \cdot x + 0.309016994374947
                y = 0.646110632135477 \cdot x + 0.353889367864523
                  = 0.612574113277207 \cdot x + 0.387425886722793
                y = 0.585786437626905 \cdot x + 0.414213562373095
                y = 0.563508326896291 \cdot x + 0.436491673103709
  1.5
                y = 0.544466578219748 \cdot x + 0.455533421780252
                y = 0.527864045000421 \cdot x + 0.472135954999579
                y = 0.513167019494862 \cdot x + 0.486832980505138
  1.0
  0.5
  0.0
                          0.5
       0.0
                                             1.0
                                                                1.5
                                                                                   2.0
Se deduce que las pendientes de las rectas secantes tienen a 0.5.
```

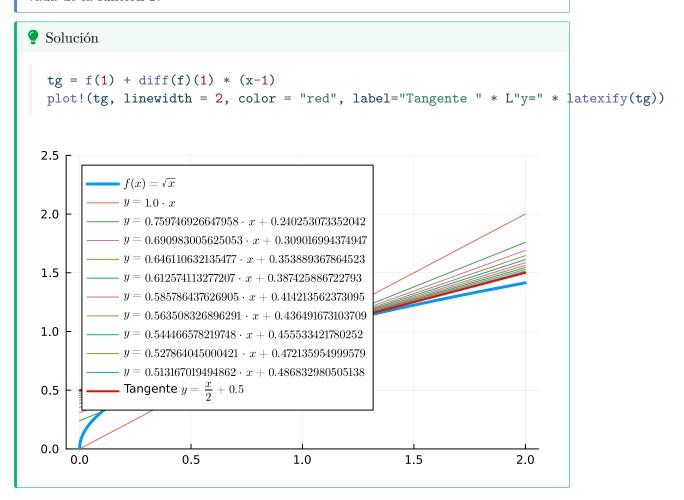
b. Dibujar la recta tangente a la gráfica de f en x=1.

i Ayuda

La ecuación de la recta tangente a la función f(x) en el punto a es y = f(a) + f'(a)(x-a).

Usar la función diff(f) del paquete SymPy para calcular simbólicamente la deri-

vada de la función f.



Ejercicio 5.4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones hasta el orden 4 y deducir la expresión de la derivada de orden n.

a.
$$f(x) = \ln(x+1)$$

i Ayuda

Usar la función diff(f,n) del paquete SymPy para calcular simbólicamente la derivada de grado n de la función f.

```
using SymPy
    Ovars x real=true
    f(x) = \log(x+1)
    println("Primera derivada: ", diff(f))
    println("Segunda derivada: ", diff(f,2))
    println("Tercera derivada: ", diff(f,3))
    println("Cuarta derivada: ", diff(f,4))

Primera derivada: 1/(x + 1)
Segunda derivada: -1/(x + 1)^2
Tercera derivada: 2/(x + 1)^3
Cuarta derivada: -6/(x + 1)^4
La derivada de orden n es f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}.
```

b. $f(x) = a^x$

```
Solución

using SymPy
@vars x a real=true
g(x) = a^x
println("Primera derivada: ", diff(g(x),x))
println("Segunda derivada: ", diff(g(x),x,2))
println("Tercera derivada: ", diff(g(x),x,3))
println("Cuarta derivada: ", diff(g(x),x,4))

Primera derivada: a^x*log(a)
Segunda derivada: a^x*log(a)^2
Tercera derivada: a^x*log(a)^3
Cuarta derivada: a^x*log(a)^4

La derivada de orden n es g^n = a^x \ln(a)^n.
```

c. h(x) = Frsen(x) + cos(x)

Ejercicio 5.5. Calcular y dibujar las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$ en x = 1.

i Ayuda

La ecuación de la recta tangente a una función f en el punto a es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

y la de la recta normal

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Solución using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify @vars x real=true $f(x) = \log(\operatorname{sqrt}(x+1))$ $plot(f, -1, 3, xlims=(-1,3), ylims=(-1,2), aspect_ratio=1, label=L"f(x)=\ln(\sqrt{x+})= ln(\sqrt{x+})= ln(\sq$ tg = f(1)+diff(f)(1)*(x-1)plot!(tg, label="Tangente "*L"y="*latexify(tg)) nm = f(1)-1/diff(f)(1)*(x-1)plot!(nm, label="Normal "*L"y="*latexify(nm)) 2 $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$ Tangente $y = rac{x}{4} + 0.0965735902799727$ - Normal $y=4.3\overset{ extstyle -}{4657359027997}-4\cdot x$ 1 0 1

Ejercicio 5.6. Sea la función
$$g(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + 1}$$
.

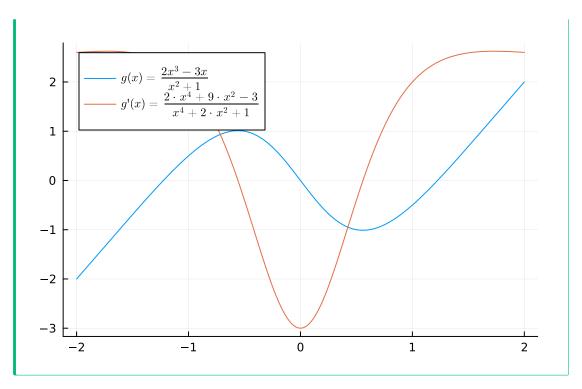
a. Dibujar la gráfica de g.

Solución using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify @vars x real=true $g(x)=(2x^3-3x)/(x^2+1)$ $plot(g, -2, 2, label=L"g(x)=\frac{2x^3-3x}{x^2+1}]$ plot(g, -2, 2, label=L"g(x)=\frac{2x^3-3x}{x^2+1}", legend=:topleft)

b. Calcular la derivada de g y dibujar su gráfica en la misma gráfica que la de g.

```
    Solución

plot!(diff(g), label=L"g'(x)="*latexify(simplify(diff(g))))
```



c. Calcular los puntos críticos de g.

i Ayuda

Los puntos críticos de una función son los puntos donde se anula la derivada.

Solución

N.(solve(diff(g)))

4-element Vector{Number}:

- - $0.5583347485961263326654828454569561179259924185641573901331644861 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 65948141242244881 \\ 6594814124244881 \\ 6594814124244881 \\ 6594814124244881 \\ 6594814124244881 \\ 6594814124244881 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 659481412424481 \\ 6594814124481 \\ 6594814124481 \\ 6594814124481 \\ 6594814124481 \\ 659481414144 \\ 6594814141 \\ 6594814141 \\ 6594814141 \\ 6594814141 \\ 6594814141 \\ 6594814 \\ 6594814 \\ 65$

Existen dos puntos críticos en x = -0.55 y x = 0.55 aproximadamente.

d. A la vista de los puntos críticos y de la gráfica de la función derivada, determinar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función.

i Ayuda

Una función f derivable en el punto a es creciente si y solo si f'(a) > 0 y decrecientes si y solo si f'(a) < 0.

Solución

La derivada es positiva en los intervalos $(-\infty, -0.55)$ y $(0.55, \infty)$, por lo que la función g es creciente en estos intervalos, y la derivada es negativa en el intervalo (-0.55, 0.55), por lo que la función g es decreciente en este intervalo.

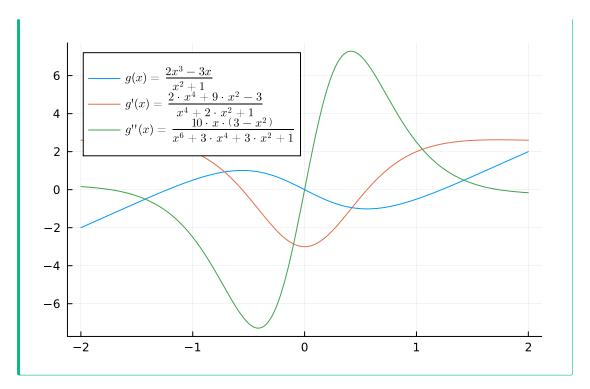
En el punto crítico x=-0.55 la derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha, por lo que, según el criterio de la primera derivada, la función g tiene un máximo relativo.

En el punto crítico x=0.55 la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha, por lo que, según el criterio de la primera derivada, la función g tiene un mínimo relativo.

e. Calcular segunda la derivada de g y dibujar su gráfica en la misma gráfica que la de g.

Solución

 $\texttt{plot!}(\texttt{diff}(\texttt{g,2}), \ \texttt{label=L"g''(x)="*latexify(simplify(diff(\texttt{g(x),x,2)})))}$



f. Calcular los puntos que anulan la segunda derivada de g.

Solución

N.(solve(diff(g, 2)))

3-element Vector{Real}:

0

- - $1.7320508075688772935274463415058723669428052538103806280558069794519\\33016908798$

Existen tres puntos donde se anula g''(x), en x=-1.73, x=0 y x=1.73 aproximadamente.

g. A la vista de las raíces de la gráfica de la segunda derivada, determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función g.

i Ayuda

Una función f dos veces derivable en el punto a es cóncava hacia arriba si y solo si f''(a) > 0 y cóncava hacia abajo si y solo si f''(a) < 0. Los puntos de inflexión de una función son los puntos donde cambia la concavidad.

Solución

La segunda derivada es positiva en los intervalos $(-\infty, -1, 73)$ y (0, 1.73), por lo que la función g es cóncava hacia arriba en esos intervalos, y la segunda derivada es negativa en los intervalos (-1.73, 0) y $(1.73, \infty)$, por lo que la función g es cóncava hacia abajo en esos intervalos.

gtiene tres puntos de inflexión en $x=1.73,\, x=0$ y x=1.73,donde cambia la concavidad de la función.

Ejercicio 5.7. Considérese la curva con ecuación $x^4 - x^2 + y^2 = 0$.

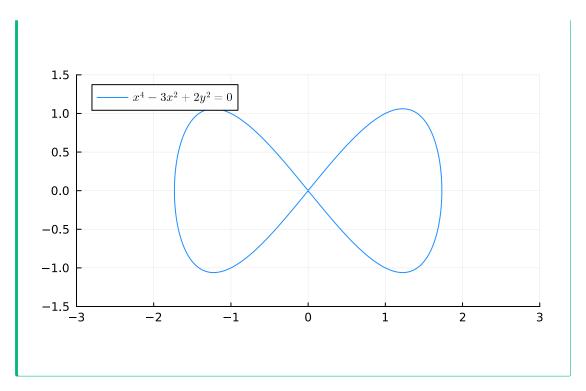
a. Dibujar la gráfica de la curva.

i Ayuda

Para dibujar curvas implícitas utilizar la función implicit_plot del paquete ImplicitPlots.

Solución

```
using ImplicitPlots, Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify @vars x y real=true f(x,y)=x^4-3x^2+2y^2 implicit_plot(f; xlims=(-3,3), ylims=(-1.5,1.5), label=L"x^4-3x^2+2y^2=0", legend=:t
```



b. Calcular la tasa de variación de y con respecto a x en el punto (1,1).

i Ayuda

Para realizar derivadas implícitas simbólicamente hay que definir una función simbólica con el comando @syms u() del paquete SymPy y reemplazar y por u(x) en la ecuación de la curva implícita.

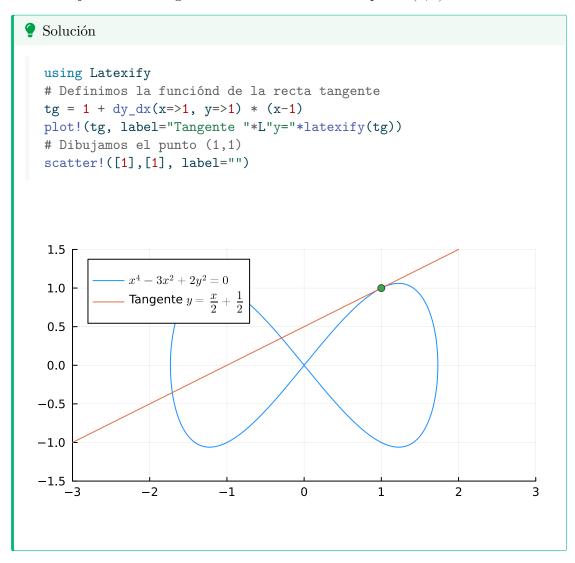
Después hay que hacer la derivada de ambos lados de la ecuación y finalmente hay que resolver la ecuación despejando la derivada de u(x).

```
Solución
```

```
# Declaramos una función simbólica
@syms u()
# Reemplazamos y por una función simbólica u(x).
ex1 = f(x,y)(y=>u(x))
# Calculamos la derivada de ambos lados de la ecuación y la resolvemos para la deriv
du_dx = solve(diff(ex1,x), diff(u(x),x))[1]
# Deshacemos el cambio y=u(x).
dy_dx = du_dx(u(x)=>y)
println("y'=", dy_dx)
```

```
y'=x*(3 - 2*x^2)/(2*y)
```

c. Dibujar la recta tangente a la curva anterior en el punto (1,1).



Ejercicio 5.8. Crear una función para calcular el polinomio de Taylor de grado n una función f en un punto a y utilizarla para dibujar los polinomios de Taylor de la función f(x) = Frsen(x) en a = 0 hasta el grado 5.

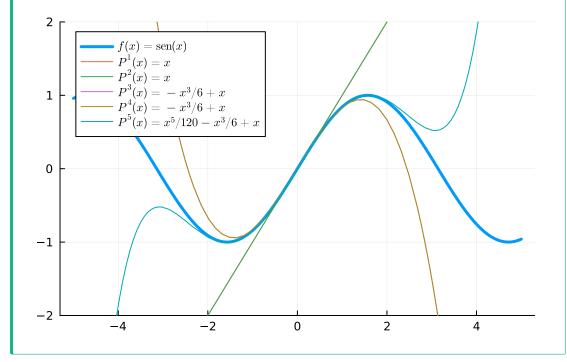
i Ayuda

La fórmula del polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto a es

$$P^n_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@vars x real=true
function taylor(f, a=0, n=2)
        sum(diff(f, x, i)(a)/factorial(i)*(x-a)^i for i=0:n)
end
f(x)=sin(x)
plt = plot(f, ylims=(-2,2), linewidth=3, label=L"f(x)=\operatorname{sen}(x)")
for i in 1:5
    pol = taylor(f(x), 0, i)
    plt = plot!(pol, label=latexstring("P^{$(i)}(x)=$(pol)"))
end
plt
```



Ejercicio 5.9. Calcular los polinomios de Taylor hasta grado 10 de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a.
$$f(x) = \cos(x)$$
 en $x = \pi/2$.

i Ayuda

Para calcular polinomios de Taylor utilizar la función series del paquete SymPy.

Solución

```
using SymPy 

<code>@vars</code> x real=true 

f(x) = \cos(x) 

series(f(x), x, Sym(pi)/2, 10) 

\frac{\pi}{2} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{6} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{120} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^7}{5040} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^9}{362880} - x + O\left((x-\frac{\pi}{2})^{10}; x \to \frac{\pi}{2}\right)
```

b.
$$g(x) = \ln(x)$$
 en $x = 1$

Solución

$$\begin{split} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \log(\mathbf{x}) \\ \mathbf{series}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x}, \ \mathbf{1}, \ \mathbf{10}) \\ -1 &- \frac{\left(x-1\right)^2}{2} + \frac{\left(x-1\right)^3}{3} - \frac{\left(x-1\right)^4}{4} + \frac{\left(x-1\right)^5}{5} - \frac{\left(x-1\right)^6}{6} + \frac{\left(x-1\right)^7}{7} - \frac{\left(x-1\right)^8}{8} + \frac{\left(x-1\right)^9}{9} + x + O\left(\left(x-1\right)^{10}; x \to 1\right) \end{split}$$

c.
$$h(x) = e^{Frsen(x)}$$
 en $x = 0$

Solución

$$\begin{aligned} & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \exp(\sin(\mathbf{x})) \\ & \text{series}(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{10}) \\ & 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} - \frac{x^6}{240} + \frac{x^7}{90} + \frac{31x^8}{5760} + \frac{x^9}{5670} + O\left(x^{10}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.10. Aproximar el número $\ln(1.2)$ mediante un polinomio de Taylor de grado 8 y dar una cota del error cometido. ¿Hasta qué grado habría que llegar para obtener un error menor de 10^{-10} ?

i Ayuda

El error en la aproximación de una función f(b) mediante un polinomio de Taylor de grado n en el punto a viene dado por el resto de Taylor, que en la forma de Lagrange es

$$R^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ con } x \in [a,b].$$

Solución

Utilizaremos un polinomio de MacLaurin de grado 5 para la función $f(x) = \ln(1 + x)$.

```
using SymPy
  @vars x real=true
pol = series(log(1+x), x, 0, 6).removeO()
println("Aproximación de ln(1.2): ", N(pol(0.2)))
```

Aproximación de ln(1.2): 0.1823306666666667

Para dar una cota del error cometido calculamos el resto de Taylor en la forma de Lagrange.

```
resto = diff(log(1+x), x, 6)/factorial(6)*0.2^6
println("Resto de Taylor de orden 6: ", resto)
println("Derivada del resto : ", diff(resto))
```

Como la derivada no se anula en el intervalo [1,2], no hay extremos relativos, y al ser una función continua en un intervalo cerrado, alcanza el máximo y mínimos absolutos en los extremos.

```
println("Cota del error: " , maximum(N(abs.([resto(0), resto(0.2)]))))
println("Error: ", abs(log(1.2)-pol(0.2)))
```

Cota del error: 1.066666666666667e-5

Error: 9.10987271207642e-6

Así pues, el error en la aproximación de $\ln(1.2)$ es menor que $1.06 \cdot 10^{-5}$. Para ver la fórmula general del resto de Taylor en la forma de Lagrange para un polinomio de Taylor de orden n, calculamos las primeras derivadas sucesivas.

```
println("Primera derivada: ", diff(log(1+x)))
println("Segunda derivada: ", diff(log(1+x), x, 2))
println("Tercera derivada: ", diff(log(1+x), x, 3))
println("Cuarta derivada: ", diff(log(1+x), x, 4))
```

Primera derivada: 1/(x + 1)Segunda derivada: $-1/(x + 1)^2$ Tercera derivada: $2/(x + 1)^3$ Cuarta derivada: $-6/(x + 1)^4$

Así pues, se deduce que la derivada de orden n es $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, de manera que el resto de Taylor de orden n es

$$|R_{f,0}^n(x)| = \left| (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n+1)!(x+1)^n} 0.2^{n+1} \right| = \left| \frac{0.2^{n+1}}{(n+1)n(x+1)^n} \right| \ x \in [0,0.2].$$

Como se trata de una función positiva y decreciente en el intervalo [0, 0.2], alcanza el máximo absoluto en el extremo inferior del intervalo, es decir, en x = 0, y por tanto se tiene,

$$|R_{f,1}^n(x)| \le \left| \frac{0.2^{n+1}}{(n+1)n} \right|.$$

Finalmente calculamos el primer número natural n tal que $|R_{f,1}^n(x)| < 10^{-10}$.

```
n=6
while 0.2^(n+1)/(n*(n+1)) > 10^-10
    n += 1
end
print(n)
```

11

Así pues, habría que llegar al grado 11.

5.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.11. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} Frsen(x)^2 & \text{si } x \le 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \le c, \\ \ln(x) & \text{si } c < x, \end{cases}$$

¿Para qué valores de a, b y c la función es derivable en todo \mathbb{R} ?

□ Para ningún valor.

$$a = \sqrt{e}, b = 0, c = \frac{1}{e}.$$

$$a = 1, b = 0, c = e.$$

$$a = 1, b = 1, c = 1.$$

$$a = \frac{1}{2e}, b = 0, c = e^{1/2}.$$

Ejercicio 5.12. ¿Cuál es la derivada de orden n de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$?

$$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i+1}{2^n} (x+1)^{-(2n+1)/2}.$$

$$\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^n}(x+1)^{-(2n-1)/2}.$$

$$\frac{(-1)^n n!}{2^n} (x+1)^{-n/2}.$$

$$\hfill \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i - 1}{2^n} (x+1)^{-(2n+1)/2}.$$

$$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i}{2^n} (x+1)^{-(2n+1)/2}.$$

Ejercicio 5.13. Dadas las funciones $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{2}}\right)$ y $g(x) = x^3 + 1$, ¿en qué puntos la recta normal a f y la recta tangente a g con paralelas?

Ejercicio 5.14. Calcular el máximo y el mínimo absoluto de la función $g(x)=\sqrt{x^4-3x^3+\frac{5}{2}x^2}$ en el intervalo [-0.5,1.5].

- a. Mínimo absoluto
- b. Máximo absoluto

Ejercicio 5.15. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas sobre la función $h(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$?

- \square Tiene un mínimo en x=1.
- \square Tiene un punto de inflexión en x=3.
- \square Tiene un máximo en x=1.
- \square Es cóncava hacia abajo en (1,3).
- \square Es decreciente en todo \mathbb{R} .

(Select one or more)

Ejercicio 5.16. Una cuerda de longitud l está sujeta en sus extremos en los puntos (0,0) y (a,b). De la cuerda cuelga un anillo. ¿En qué posición estará el anillo debido a la fuerza de gravedad suponiendo que l=10, a=3 y b=2?

i Ayuda

Puesto que la longitud de la cuerda es fija, del siguiente diagrama se deduce que las las posiciones (x, y) que puede ocupar el anillo vienen dadas por la ecuación

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2}$$

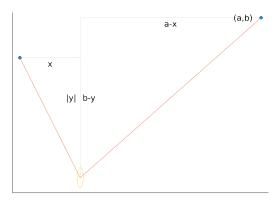


Figura 5.2: Descomposición en triángulos rectángulos de la posición que ocupa un anillo suspendido de una cuerda de tamaño l sujeta en sus extremos en los puntos (0,0) y (a,b).

Coordenada x

Coordenada y

Ejercicio 5.17. Calcular de manera aproximada el valor de Frsen(1/2) usando los siguientes polinomios de Taylor de la función f(x) = Frsen(x).

- a. Polinomio de Taylor de grado 20 en el punto $\pi/6$.
- b. Polinomio de MacLaurin de grado 100.
- c. ¿Qué polinomio da una mejor aproximación?
- □ El polinomio de MacLaurin de grado 100.
- \square El polinomio de Taylor de grado 20 en $\pi/6$.

6 Series de números reales

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.
using Plots # Para el dibujo de gráficas.
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

Ejercicio 6.1. La paradoja de la dicotomía de Zenon establece que para que un corredor pueda recorrer una distancia hasta la meta, primero tiene que recorrer la mitad de la distancia, después la mitad de la distancia restante, después la mitad de la distancia restante, y así hasta el infinito, por lo que, aparentemente, nunca llegaría a la meta.

La serie que calcula la distancia recorrida por el corredor es

$$\sum \frac{1}{2^n}$$

a. Calcular los 50 primeras sumas parciales de la serie.

i Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays. Usar la función cumsum para realizar sumas parciales.

```
Solución 1

N = 50
a(n) = 1/2^n
an = [a(n) for n = 1:N]
An = cumsum(an)

50-element Vector{Float64}:
0.5
```

```
0.75
0.875
0.9375
0.96875
0.984375
0.9921875
0.99609375
0.998046875
0.9990234375
```

- 0.99951171875 0.999755859375
- 0.9998779296875
- 0.9999999998181
- 0.999999999990905
- 0.9999999995453
- 0.99999999997726
- 0.99999999998863
- 0.99999999999432
- 0.99999999999716
- 0.99999999999858
- 0.9999999999999999
- 0.99999999999964
- 0.99999999999982
- 0.99999999999991

```
Solución 2
  N = 50
  a(n) = 1/2^n
  A(n) = sum(a, 1:n)
  An = [A(n) \text{ for } n = 1:N]
50-element Vector{Float64}:
 0.5
 0.75
 0.875
 0.9375
 0.96875
 0.984375
 0.9921875
 0.99609375
```

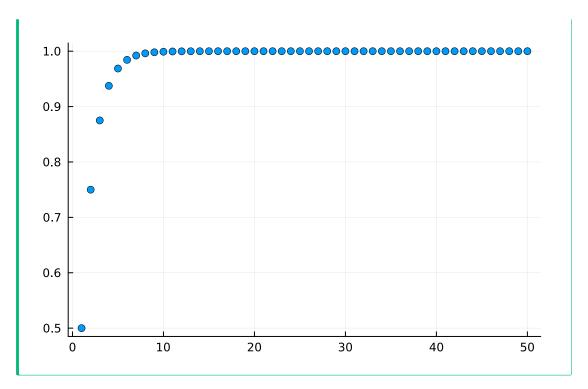
- 0.998046875
- 0.9990234375
- 0.99951171875
- 0.999755859375
- 0.9998779296875
- 0.99999999998181
- 0.999999999990905
- 0.99999999995453
- 0.99999999997726
- 0.99999999998863
- 0.99999999999432
- 0.99999999999716
- 0.99999999999858
- 0.9999999999999999
- 0.99999999999964
- 0.99999999999982
- 0.999999999999991
- 0.55555555555555555
- b. Dibujar en una gráfica las 50 primeras sumas parciales de la serie.

i Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 100 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior y usar la función cumsum para calcular las sumas parciales. Después usar la función scatter del paquete Plots para dibujar el array de las sumas parciales.

Solución

```
using Plots, LaTeXStrings
scatter(An, legend=false)
```



a. ¿Es cierto que el corredor nunca llegará a la meta?



No, porque la serie converge a 1.

Ejercicio 6.2. Calcular las 50 primeras sumas parciales de la serie $\sum \frac{1}{n!}$ empezando en n=0. ¿Cuántas cifras decimales del número e son correctas en la última suma parcial?

i Ayuda

Para que no se desborde cálculo del factorial deben usarse enteros de la clase BigInt.

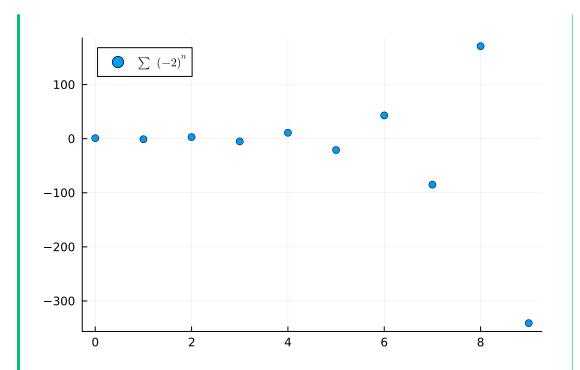
```
Solución 1

N = 50
a(n) = 1/factorial(big(n))
an = [a(n) for n = 0:N]
An = cumsum(an)
decimales = round(abs(log10(abs(-An[N]))))
println(An)
println("Cifras del número e correctas: $decimales")
```

Ejercicio 6.3. Dibujar una gráfica con los 10 primeros términos de las series geométricas $\sum r^n$ para r=-2, r=-1/2, r=1/2 y r=2. ¿Para qué valores de r crees que converge la serie?

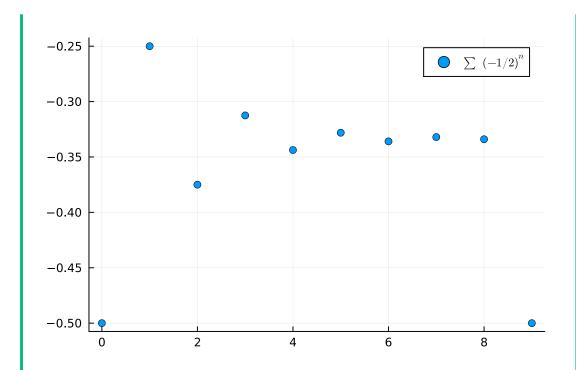
```
Solución

using Plots, LaTeXStrings
an = [(-2)^n for n = 0:9]
scatter(0:9, cumsum(an), label=L"$\sum (-2)^n$")
```



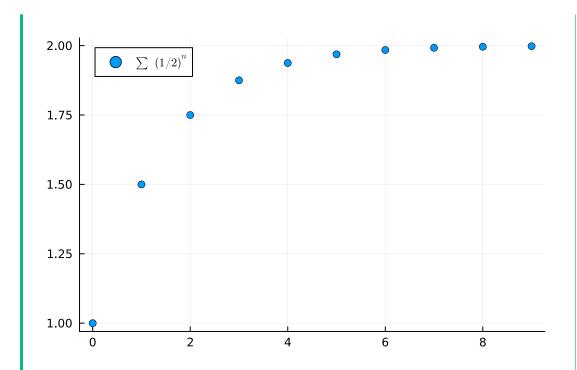
La serie diverge.

```
bn = [(-1/2)^n \text{ for } n = 1:9] \\ scatter(0:9, cumsum(bn), label=L"$\sum (-1/2)^n$")
```



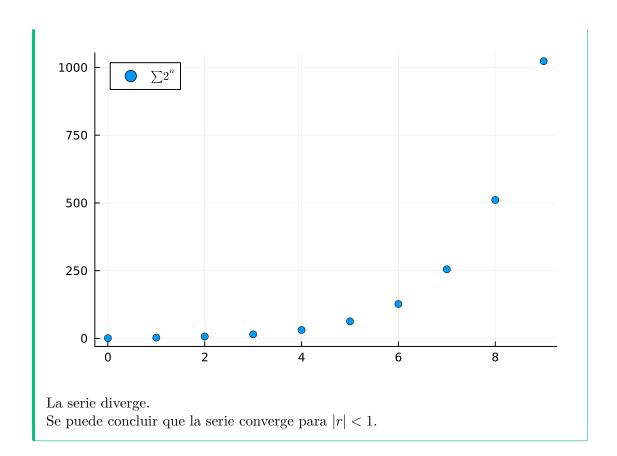
La serie converge.

```
cn = [(1/2)^n for n = 0:9]
scatter(0:9, cumsum(cn), label=L"\sum (1/2)^n")
```



La serie converge.

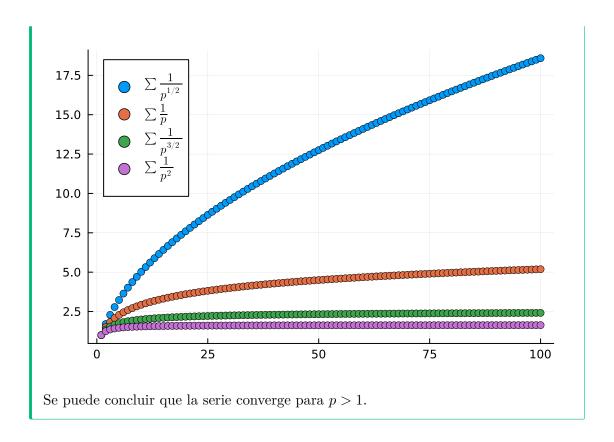
```
 \begin{array}{lll} dn = & [2^n \ for \ n = 0:9] \\  & \text{scatter(0:9, cumsum(dn), label=L"$\setminus sum 2^n$")} \\  \end{array}
```



Ejercicio 6.4. Dibujar en la misma gráfica los 100 primeros términos de las series $\sum \frac{1}{n^p}$ para p=1/2, p=1, p=3/2 y p=2.

iPara qué valores de p crees que la serie converge?

```
\begin{tabular}{ll} & \textbf{Solución} \\ & \textbf{using Plots, LaTeXStrings} \\ & \textbf{a}(n,p) = 1/n^p \\ & \textbf{an} = [\textbf{a}(n,1/2) \text{ for } n = 1:100] \\ & \textbf{scatter}(\textbf{cumsum}(\textbf{an}), \text{ label=L"}\$ \text{ frac}\{1\}\{p^{1/2}\}\), \text{ legend=:topleft}) \\ & \textbf{bn} = [\textbf{a}(n,1) \text{ for } n = 1:100] \\ & \textbf{scatter!}(\textbf{cumsum}(\textbf{bn}), \text{ label=L"}\$ \text{ frac}\{1\}\{p\}\$") \\ & \textbf{cn} = [\textbf{a}(n,3/2) \text{ for } n = 1:100] \\ & \textbf{scatter!}(\textbf{cumsum}(\textbf{cn}), \text{ label=L"}\$ \text{ sum } \text{ frac}\{1\}\{p^{3/2}\}\$") \\ & \textbf{dn} = [\textbf{a}(n,2) \text{ for } n = 1:100] \\ & \textbf{scatter!}(\textbf{cumsum}(\textbf{dn}), \text{ label=L"}\$ \text{ sum } \text{ frac}\{1\}\{p^2\}\$") \\ \end{tabular}
```



Ejercicio 6.5. Una suma parcial de cualquier serie convergente se puede utilizar como aproximación de la suma de la serie. La aproximación será mejor cuanto mayor sea el orden de la serie parcial, pero depende de la velocidad a la que la serie converja a su suma. En el caso de las series alternadas que converjan, el error en la estimación de la suma mediante la suma parcial de orden n siempre es menor o igual que el término de n de la sucesión correspondiente, es decir, para la serie alternada $\sum (-1)^n a_n$, se cumple que

$$\left|\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n - \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i\right| \leq a_n$$

Calcular la suma aproximada de las siguientes series alternadas con un error menor de 10^{-10} . ¿Cuál es la primera suma parcial que da esa aproximación?

a.
$$\sum \frac{(-1)^n}{n!}$$

```
error = 10^-10
  a(n) = (-1)^n/factorial(n)
  i = 0
  while abs(a(i)) >= error
        i += 1
  end
  println("Suma parcial de orden $i")
  println("Aproximación: $(sum(a, 0:i))")

Suma parcial de orden 14

Aproximación: 0.36787944117216204
```

```
b. \sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}
```

```
② Solución

error = 10^-10
a(n) = (-1)^n*log(n)/n^2
i = 2
while abs(a(i)) >= error
i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i")
println("Aproximación: $(sum(a, 2:i))")

Suma parcial de orden 357592
Aproximación: 0.10131657821350423
```

Ejercicio 6.6. Calcular hasta la suma funcional parcial de orden 9 de la serie de Maclaurin para la función Fractg(x). Deducir el término general de la serie y estudiar su radio de convergencia.

Se puede probar que esta serie también converge en x=1. Usar este hecho para calcular el valor de π con un error menor de 10^-8 .

i Ayuda

Para calcular polinomios de Taylor utilizar la función series del paquete SymPy. Para calcular el radio de convergencia utilizar el criterio de la razón para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias.

```
Solución
  using SymPy
  @vars x real=true
  p(n) = series(atan(x), x, 0, n+1).remove0()
  for i = 1:5
      println("Suma funcional parcial de grado $(2i-1): $(p(2i-1))")
  end
Suma funcional parcial de grado 1: x
Suma funcional parcial de grado 3: -x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 5: x^5/5 - x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 7: -x^7/7 + x^5/5 - x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 9: x^9/9 - x^7/7 + x^5/5 - x^3/3 + x
El término general de la serie es \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, y por tanto, se trata de una serie alternada.
  @vars n int=true
  c(n) = (-1)^{(n-1)}/(2n-1)
  limit(abs(c(n)/c(n+1)), n \Rightarrow Inf)
El radio de convergencia es R = 1, y por tanto la serie converge para -1 < x < 1.
En realidad, su dominio de convergencia es [-1, 1].
  error = 10^-8
  i = 0
  while abs(c(i)) >= error
       i += 1
  end
  println("Suma parcial de orden $i")
  println("Aproximación de : $(4*sum(c, 1:i))")
Suma parcial de orden 50000001
Aproximación de : 3.141592673589794
```

Ejercicio 6.7. La función de Bessel de orden 0 se obtiene a partir de la suma de la serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

Esta función sirve, entre otras cosas, para explicar la distribución de temperaturas en una lámina circular o las vibraciones de una membrana.

a. Calcular el radio de convergencia de la función de Bessel.

i Ayuda

Utilizar el criterio de la razón para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias.

Solución

```
using SymPy 

@vars n int=true
c(n) = (-1)^n*1/(2^(2n)*factorial(n)^2)
limit(abs(c(n)/c(n+1)), n => Inf)
```

 ∞

La serie converge para todo \mathbb{R} .

b. Dibujar en una misma gráfica la suma funcional parcial de orden 10 de la serie y la función de Bessel de orden 0.

i Ayuda

Usar el paquete Bessels para dibujar la función de Bessel de orden 0.

```
Solución
  using Plots, LaTeXStrings, Bessels
  @vars x real=true
  a(x,n) = (-1)^n/(2^(2n)*factorial(n)^2) * x^(2n)
  an = [a(x,n) \text{ for } n=0:N]
  An = sum(an)
  plot(An, -8, 8, ylims = (-1,1), label=L"$\sum_{n=0}^{10} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}} 
  plot!(besselj0, label = L"$J_0(x)$")
   1.0
   0.5
   0.0
 -0.5
 -1.0
                                                                6
               -6
                           -3
La serie converge para todo \mathbb{R}.
```

Ejercicio 6.8. Una serie de Fourier es una serie cuyo término general se construye combinando funciones sinusoidales simples (como senos y cosenos) que converge puntualmente a una función periódica continua. La forma general de una serie de Fourier es

$$a_0 + \sum a_n \cos \left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n Frsen\left(\frac{2n\pi}{T}t\right),$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier y T es el periodo.

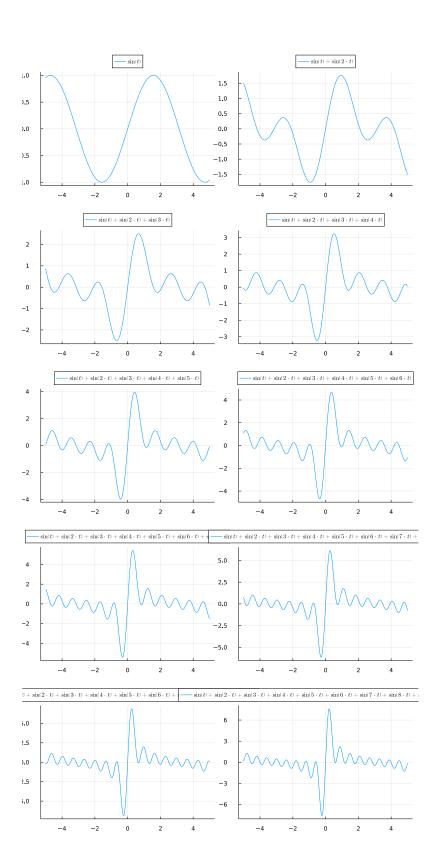
Las series de Fourier son muy útiles para aproximar funciones periódicas que describen las ondas, por lo que se utilizan a menudo para modelizar procesos que involucran sonido, imágenes o corriente eléctrica.

Dibujar las gráficas las 10 primeras sumas parciales de las siguientes series de Fourier y predecir hacia qué función convergen.

a. $\sum Frsen(nt)$

```
Solución

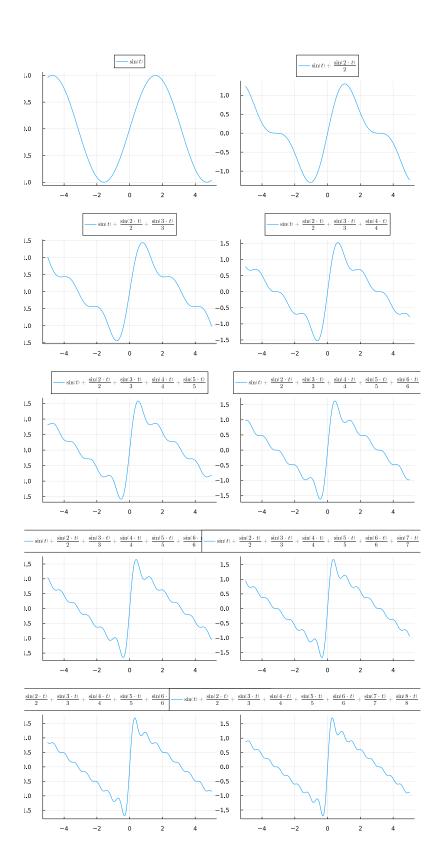
using Plots, SymPy, Latexify
Ovars t real=true
a(t,n) = sin(n*t)
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = [] # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```



Converge aproximadamente a la función de tipo pulso, que se anula en todo su dominio excepto en los puntos $x=2n\pi$ donde se produce discontinuidad de salto.

b. $\sum \frac{Frsen(nt)}{n}$

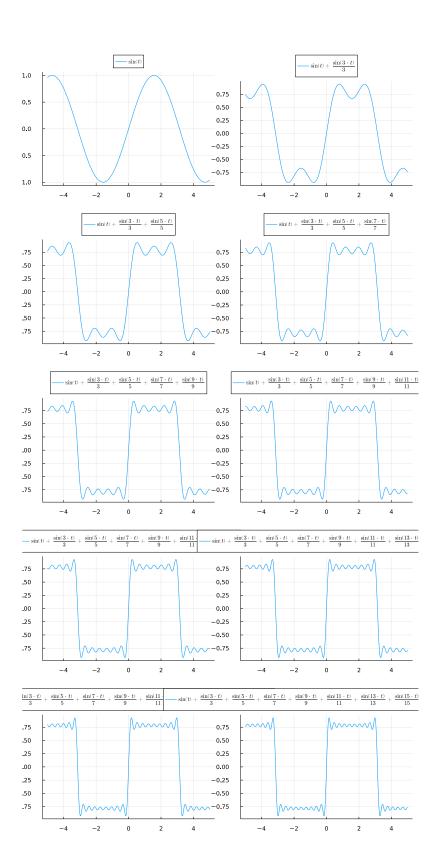
```
wsing Plots, SymPy, Latexify
vars t real=true
a(t,n) = sin(n*t)/n
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = [] # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```



Converge aproximadamente a la función de tipo diente de sierra con periodo 2π .

c. $\sum \frac{Frsen((2n-1)t)}{2n-1}$

```
Solución
  using Plots, SymPy, Latexify
  @vars t real=true
  a(t,n) = \sin((2n-1)t)/(2n-1)
  N = 10
  an = [a(t,n) \text{ for } n=1:N]
  An = cumsum(an)
  plots = [] # Array para guardar las gráficas
  for i in An
      push!(plots, plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
  end
  plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```



Converge aproximadamente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 & \text{si } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ -0.75 & \text{si } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \end{cases}$$

6.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.9. Calcular la suma parcial de orden 100 de las siguientes series (empezando en n = 1):

a.
$$\sum \frac{1}{n2^n}$$

*Hint: *

Introducir hasta 20 decimales

b.
$$\sum \frac{n!}{n^n}$$

*Hint: *

Introducir hasta 40 decimales

Ejercicio 6.10. Dibujar las 100 primeras sumas parciales de las siguientes series y determinar cuáles convergen.

$$\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$$

$$\sum \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\sum n!/n^n$$

$$\sum \frac{e^{1/n}}{n}$$

Ejercicio 6.11. ¿Hasta qué suma parcial de la serie de Maclaurin de la función e^x hay que llegar para aproximar el número \sqrt{e} con un error menor de 10^-50 ?

Ejercicio 6.12. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

a.
$$\sum \frac{(x-2)^n}{n5^n}$$

b.
$$\sum \frac{2^n(x-2)^n}{(n+2)!}$$

Ejercicio 6.13. La fuerza que ejerce la gravedad que actúa sobre un cuerpo de masa m a una altura h sobre la superficie de la Tierra viene dada por la fórmula

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra (tomar un radio medio 6371 km) y g es la aceleración de la gravedad (tomar 9.81 m/s^2). Expresar F como una serie de potencias de h/R y aplicar el teorema de la serie alternada para calcular el valor máximo de h para el que la aproximación clásica F=mg no difiere más de un 1% del valor real.

Ejercicio 6.14. ¿Cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la serie de Fourier

$$\sum (-1)^n \frac{Frsen((2n-1)t)}{(2n-1)^2} \ ?$$

insert image here