

# Pácticas de Análisis Matemático con Julia



Alfredo Sánchez Alberca  
asalber@ceu.es  
<https://aprendeconalf.es>

# Tabla de contenidos

<b>Prefacio</b>	<b>3</b>
Licencia . . . . .	3
<b>1 Introducción</b>	<b>5</b>
1.1 El REPL de Julia . . . . .	6
1.2 El gestor de paquetes de Julia . . . . .	6
1.3 Operadores aritméticos. . . . .	7
1.4 Operadores de comparación . . . . .	7
1.5 Operadores booleanos . . . . .	8
1.6 Funciones de redondeo . . . . .	8
1.7 Funciones de división . . . . .	9
1.8 Funciones para el signo y el valor absoluto . . . . .	10
1.9 Raíces, exponenciales y logaritmos . . . . .	11
1.10 Funciones trigonométricas . . . . .	12
1.11 Funciones trigonométricas inversas . . . . .	13
1.12 Precedencia de operadores . . . . .	14
1.13 Definición de variables . . . . .	15
<b>2 Sucesiones de números reales</b>	<b>16</b>
2.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	16
2.2 Plots . . . . .	18
2.3 Makie . . . . .	19
2.4 Plots . . . . .	19
2.5 Makie . . . . .	20
2.6 Plots . . . . .	21
2.7 Makie . . . . .	22
2.8 Plots . . . . .	23
2.9 Makie . . . . .	24
2.10 Plots . . . . .	25
2.11 Makie . . . . .	26
2.12 Plots . . . . .	30
2.13 Makie . . . . .	30
2.14 Plots . . . . .	31
2.15 Makie . . . . .	32
2.16 Plots . . . . .	34
2.17 Makie . . . . .	35

2.18 Plots . . . . .	36
2.19 Makie . . . . .	37
2.20 Ejercicios propuestos . . . . .	38
<b>3 Funciones elementales</b>	<b>40</b>
3.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	40
3.2 Makie . . . . .	41
3.3 Plots . . . . .	41
3.4 Makie . . . . .	43
3.5 Plots . . . . .	43
3.6 Makie . . . . .	45
3.7 Plots . . . . .	46
3.8 Makie . . . . .	47
3.9 Plots . . . . .	47
3.10 Makie . . . . .	48
3.11 Plots . . . . .	49
3.12 Makie . . . . .	51
3.13 Plots . . . . .	51
3.14 Makie . . . . .	52
3.15 Plots . . . . .	53
3.16 Makie . . . . .	55
3.17 Plots . . . . .	55
3.18 Makie . . . . .	58
3.19 Plots . . . . .	59
3.20 Makie . . . . .	61
3.21 Plots . . . . .	61
3.22 Makie . . . . .	63
3.23 Plots . . . . .	64
3.24 Makie . . . . .	66
3.25 Plots . . . . .	67
3.26 Makie . . . . .	69
3.27 Plots . . . . .	69
3.28 Makie . . . . .	70
3.29 Plots . . . . .	71
3.30 Ejercicios propuestos . . . . .	72
<b>4 Límites de funciones reales</b>	<b>75</b>
4.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	75
4.2 Ejercicios propuestos . . . . .	92
<b>5 Derivadas de funciones reales</b>	<b>96</b>
5.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	96
5.2 Ejercicios propuestos . . . . .	118

<b>6 Series de números reales</b>	<b>122</b>
6.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	122
6.2 Ejercicios propuestos . . . . .	141
<b>7 Integrales de funciones reales</b>	<b>143</b>
7.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	143
7.2 Ejercicios propuestos . . . . .	164
<b>8 Funciones vectoriales</b>	<b>166</b>
8.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	166
8.2 Plots . . . . .	169
8.3 Makie . . . . .	170
8.4 Plots . . . . .	171
8.5 Makie . . . . .	171
8.6 Plots . . . . .	172
8.7 Makie . . . . .	173
8.8 Ejercicios propuestos . . . . .	193
<b>9 Derivadas de funciones de varias variables</b>	<b>196</b>
9.1 Ejercicios Resueltos . . . . .	196
9.2 Plots . . . . .	196
9.3 Makie . . . . .	197
9.4 Plots . . . . .	198
9.5 Makie . . . . .	199
9.6 Plots . . . . .	200
9.7 Makie . . . . .	201
9.8 Plots . . . . .	202
9.9 Makie . . . . .	203
9.10 Plots . . . . .	204
9.11 Makie . . . . .	205
9.12 Plots . . . . .	206
9.13 Makie . . . . .	207
9.14 Solución 1 . . . . .	215
9.15 Solución 2 . . . . .	215
9.16 Ejercicios propuestos . . . . .	227

# Prefacio

¡Bienvenido a Prácticas de Análisis Matemático con Julia!

Este libro presenta una recopilación de prácticas de Análisis Matemático en una y varias variables reales con el lenguaje de programación [Julia](#), con problemas aplicados a las Ciencias y las Ingenierías.

No es un libro para aprender a programar con Julia, ya que solo enseña el uso del lenguaje y de algunos de sus paquetes para resolver problemas de Cálculo tanto numérico como simbólico. Para quienes estén interesados en aprender a programar en este Julia, os recomiendo leer este [manual de Julia](#).

## Licencia

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento – No comercial – Compartir bajo la misma licencia 3.0 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>.

Con esta licencia eres libre de:

- Copiar, distribuir y mostrar este trabajo.
- Realizar modificaciones de este trabajo.

Bajo las siguientes condiciones:

- **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

# 1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Julia es un lenguaje de programación especialmente orientado al cálculo numérico y el análisis de datos. Julia permite además realizar cálculos simbólicos y dispone de una gran [biblioteca de paquetes](#) con aplicaciones en muy diversas áreas de las Matemáticas como Cálculo, Álgebra, Geometría, Matemática Discreta o Estadística.



La ventaja de Julia frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, MATLAB o Sage radica en su potencia de cálculo y su velocidad (equiparable al lenguaje C), lo que lo hace ideal para manejar grandes volúmenes de datos o realizar tareas que requieran largos y complejos cálculos. Además, es software libre por lo que resulta ideal para introducirlo en el aula como soporte computacional para los modelos matemáticos sin coste alguno.

En el siguiente enlace se explica el procedimiento de [instalación de Julia](#).

Existen también varios entornos de desarrollo online que permiten ejecutar código en Julia sin necesidad de instalarlo en nuestro ordenador, como por ejemplo [Replit](#), [Cocalc](#) o [Codeanywhere](#).

El objetivo de esta práctica es introducir al alumno en la utilización de este lenguaje, enseñándole a realizar las operaciones básicas más habituales en Cálculo.

## 1.1 El REPL de Julia

Para arrancar el REPL<sup>^</sup>(REPL es el acrónimo de Read, Evaluate, Print and Loop, que describe el funcionamiento del compilador de Julia) de julia basta con abrir una terminal y teclear **julia**.

## 1.2 El gestor de paquetes de Julia

Julia viene con varios paquetes básicos preinstalados, como por ejemplo el paquete **LinearAlgebra** que define funciones básicas del Álgebra Lineal, pero en estas prácticas utilizaremos otros muchos paquetes que añaden más funcionalidades que no vienen instalados por defecto y tendremos que instalarlos aparte. Julia tiene un potente gestor de paquetes que facilita la búsqueda, instalación, actualización y eliminación de paquetes.

Por defecto el gestor de paquetes utiliza el [repositorio de paquetes oficial](#) pero se pueden instalar paquetes de otros repositorios.

Para entrar en el modo de gestión de paquetes hay que teclear `]`. Esto produce un cambio en el *prompt* del REPL de Julia.

Los comandos más habituales son:

- **add p**: Instala el paquete **p** en el entorno activo de Julia.
  - **update**: Actualiza los paquetes del entorno activo de Julia.
  - **status**: Muestra los paquetes instalados y sus versiones en el entorno activo de Julia.

- `remove p`: Elimina el paquete p del entorno activo de Julia.

### Ejemplo

Para instalar el paquete SymPy para cálculo simbólico basta con teclear `add SymPy`.

```
(@v1.7) pkg> add SymPy
  Updating registry at `~/.julia/registries/General.toml`
  Resolving package versions...
    Updating `~/.julia/environments/v1.7/Project.toml`
[24249f21] + SymPy v1.1.6
    Updating `~/.julia/environments/v1.7/Manifest.toml`
[3709ef60] + CommonEq v0.2.0
[38540f10] + CommonSolve v0.2.1
[438e738f] + PyCall v1.93.1
[24249f21] + SymPy v1.1.6
```

## 1.3 Operadores aritméticos.

El uso más simple de Julia es la realización de operaciones aritméticas como en una calculadora. En Julia se utilizan los siguientes operadores.

Operador	Descripción
<code>x + y</code>	Suma
<code>x - y</code>	Resta
<code>x * y</code>	Producto
<code>x / y</code>	División
<code>x ÷ y</code>	Cociente división entera
<code>x % y</code>	Resto división entera
<code>x ^ y</code>	Potencia

## 1.4 Operadores de comparación

Operador	Descripción
<code>==</code>	Igualdad
<code>!=,</code>	Desigualdad
<code>&lt;</code>	Menor que
<code>&lt;=,</code>	Menor o igual que

Operador	Descripción
>	Mayor que
$\geq$ ,	Mayor o igual que

## 1.5 Operadores booleanos

Operador	Descripción
$!x$	Negación
$x \&& y$	Conjunción (y)
$x    y$	Disyunción (o)

Existen también un montón de funciones predefinidas habituales en Cálculo.

## 1.6 Funciones de redondeo

Función	Descripción
<code>round(x)</code>	Devuelve el entero más próximo a $x$
<code>round(x, digits = n)</code>	Devuelve al valor más próximo a $x$ con $n$ decimales
<code>floor(x)</code>	Redondea $x$ al próximo entero menor
<code>ceil(x)</code>	Redondea $x$ al próximo entero mayor
<code>trunc(x)</code>	Devuelve la parte entera de $x$

### Ejemplo

```
julia> round(2.7)
3.0

julia> floor(2.7)
2.0

julia> floor(-2.7)
-3.0

julia> ceil(2.7)
3.0

julia> ceil(-2.7)
-2.0

julia> trunc(2.7)
2.0

julia> trunc(-2.7)
-2.0

julia> round(2.5)
2.0

julia> round(2.786, digits = 2)
2.79
```

## 1.7 Funciones de división

Función	Descripción
<code>div(x,y), x÷y</code>	Cociente de la división entera
<code>fld(x,y)</code>	Cociente de la división entera redondeado hacia abajo
<code>cld(x,y)</code>	Cociente de la división entera redondeado hacia arriba
<code>rem(x,y), x%y</code>	Resto de la división entera. Se cumple $x == \text{div}(x,y)*y + \text{rem}(x,y)$
<code>mod(x,y)</code>	Módulo con respecto a y. Se cumple $x == \text{fld}(x,y)*y + \text{mod}(x,y)$
<code>gcd(x,y...)</code>	Máximo común divisor positivo de x, y,...
<code>lcm(x,y...)</code>	Mínimo común múltiplo positivo de x, y,...

Función	Descripción

### Ejemplo

```
julia> div(5,3)
1

julia> cld(5,3)
2

julia> 5%3
2

julia> -5%3
-2

julia> mod(5,3)
2

julia> mod(-5,3)
1

julia> gcd(12,18)
6

julia> lcm(12,18)
36
```

## 1.8 Funciones para el signo y el valor absoluto

Función	Descripción
<code>abs(x)</code>	Valor absoluto de $x$
<code>sign(x)</code>	Devuelve -1 si $x$ es positivo, -1 si es negativo y 0 si es 0.

### Ejemplo

```
julia> abs(2.5)
2.5

julia> abs(-2.5)
2.5

julia> sign(-2.5)
-1.0

julia> sign(0)
0

julia> sign(2.5)
1.0
```

## 1.9 Raíces, exponentiales y logaritmos

Función	Descripción
<code>sqrt(x)</code> , $\sqrt{x}$	Raíz cuadrada de $x$
<code>cbrt(x)</code> , $\sqrt[3]{x}$	Raíz cúbica de $x$
<code>exp(x)</code>	Exponencial de $x$
<code>log(x)</code>	Logaritmo neperiano de $x$
<code>log(b,x)</code>	Logaritmo en base $b$ de $x$
<code>log2(x)</code>	Logaritmo en base 2 de $x$
<code>log10(x)</code>	Logaritmo en base 10 de $x$

### Ejemplo

```
julia> sqrt(4)
2.0

julia> cbrt(27)
3.0

julia> exp(1)
2.718281828459045

julia> exp(-Inf)
0.0

julia> log(1)
0.0

julia> log(0)
-Inf

julia> log(-1)
ERROR: DomainError with -1.0:
log will only return a complex result if called with a complex argument.
...

julia> log(-1+0im)
0.0 + 3.141592653589793im

julia> log2(2^3)
3.0
```

## 1.10 Funciones trigonométricas

Función	Descripción
<code>hypot(x,y)</code>	Hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos x e y
<code>sin(x)</code>	Seno del ángulo x en radianes
<code>sind(x)</code>	Seno del ángulo x en grados
<code>cos(x)</code>	Coseno del ángulo x en radianes
<code>cosd(x)</code>	Coseno del ángulo x en grados

Función	Descripción
<code>tan(x)</code>	Tangente del ángulo $x$ en radianes
<code>tand(x)</code>	Tangente del ángulo $x$ en grados
<code>sec(x)</code>	Secante del ángulo $x$ en radianes
<code>csc(x)</code>	Cosecante del ángulo $x$ en radianes
<code>cot(x)</code>	Cotangente del ángulo $x$ en radianes

### Ejemplo

```
julia> sin( /2)
1.0

julia> cos( /2)
6.123233995736766e-17

julia> cosd(90)
0.0

julia> tan( /4)
0.9999999999999999

julia> tand(45)
1.0

julia> tan( /2)
1.633123935319537e16

julia> tand(90)
Inf

julia> sin( /4)^2 + cos( /4)^2
1.0
```

## 1.11 Funciones trigonométricas inversas

Función	Descripción
<code>asin(x)</code>	Arcoseno (inversa del seno) de $x$ en radianes
<code>asind(x)</code>	Arcoseno (inversa del seno) de $x$ en grados

Función	Descripción
<code>acos(x)</code>	Arcocoseno (inversa del coseno) de $x$ en radianes
<code>acosd(x)</code>	Arcocoseno (inversa del coseno) de $x$ en grados
<code>atan(x)</code>	Arcotangente (inversa de la tangente) de $x$ en radianes
<code>atand(x)</code>	Arcotangente (inversa de la tangente) de $x$ en grados
<code>asec(x)</code>	Arcosecante (inversa de la secante) de $x$ en radianes
<code>acsc(x)</code>	Arcocosecante (inversa de la cosecante) de $x$ en radianes
<code>acot(x)</code>	Arcocotangente (inversa de la cotangente) de $x$ en radianes

### Ejemplo

```
julia> asin(1)
1.5707963267948966

julia> asind(1)
90.0

julia> acos(-1)
3.141592653589793

julia> atan(1)
0.7853981633974483

julia> atand(tan( /4))
45.0
```

## 1.12 Precedencia de operadores

A la hora de evaluar una expresión aritmética, Julia evalúa los operadores según el siguiente orden de prioridad (de mayor a menor prioridad).

Categoría	Operadores	Asociatividad
Funciones	<code>exp, log, sin, etc.</code>	
Exponenciación		Derecha
Unarios	<code>+ - √</code>	Derecha
Fracciones	<code>//</code>	Izquierda
Multiplicación	<code>% &amp; \ ÷</code>	Izquierda
Adición	<code>+ -  </code>	Izquierda
Comparaciones	<code>&gt;= &lt;= == != !==</code>	

Categoría	Operadores	Asociatividad
Asignaciones	<code>+= -= *= /= //= ^= ÷= %=  = &amp;=</code>	Derecha

Cuando se quiera evaluar un operador con menor prioridad antes que otro con mayor prioridad, hay que utilizar paréntesis.

### Ejemplo

```
julia> 1 + 4 ^ 2 / 2 - 3
6.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / 2 - 3
5.5

julia> (1 + 4) ^ 2 / 2 - 3
9.5

julia> 1 + 4 ^ 2 / (2 - 3)
-15.0

julia> (1 + 4 ^ 2) / (2 - 3)
-17.0
```

## 1.13 Definición de variables

Para definir variables se pueden utilizar cualquier carácter [Unicode](#). Los nombres de las variables pueden contener más de una letra y, en tal caso, pueden usarse también números, pero siempre debe comenzar por una letra. Así, para Julia, la expresión `xy`, no se interpreta como el producto de la variable `x` por la variable `y`, sino como la variable `xy`. Además, se distingue entre mayúsculas y minúsculas, así que no es lo mismo `xy` que `xY`.

## 2 Sucesiones de números reales

### 2.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.  
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
using Makie # Para obtener gráficos interactivos.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

**Ejercicio 2.1.** Dar los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a.  $(2n + 1)_{n=1}^{\infty}$

 Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 10 usando [compresiones de arrays](#).

 Solución

```
a(n) = 2n + 1  
print([a(n) for n = 1:10])
```

```
[3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21]
```

b.  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

```
# Como reales  
a(n) = 1 / n  
print([a(n) for n = 1:10])  
# Como racionales  
a(n) = 1//n  
print([a(n) for n = 1:10])
```

```
[1.0, 0.5, 0.3333333333333333, 0.25, 0.2, 0.1666666666666666, 0.14285714285714285, 0.14285714285714285, 0.14285714285714285, 0.14285714285714285]  
Rational{Int64}[1//1, 1//2, 1//3, 1//4, 1//5, 1//6, 1//7, 1//8, 1//9, 1//10]
```

c.  $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

```
a(n) = (-1)^n  
print([a(n) for n = 1:10])
```

```
[-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]
```

d.  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

```
a(n) = (1 + 1 / n)^n  
print([a(n) for n = 1:10])
```

```
[2.0, 2.25, 2.3703703703703702, 2.44140625, 2.4883199999999994, 2.5216263717421135, 2.5555555555555554, 2.588235294117647, 2.6207234375, 2.6513651365136514, 2.679931744130714, 2.706415734274291, 2.730808398944924, 2.753137084989847, 2.7734375, 2.7917367049140625, 2.808032740685713, 2.821307344292491, 2.832542136234226, 2.841746535632915, 2.848872293507242, 2.8549333333333332, 2.85992593150958, 2.863856303508542, 2.866712388982991, 2.8685000000000002, 2.869183098867547, 2.86970563383029, 2.869980392156862, 2.870118864315095, 2.8701995207999994, 2.8702197894999995, 2.8702395621999996, 2.8702593380999997, 2.8702791169999998, 2.8702988980999999, 2.8703186812999999, 2.8703384665999998, 2.8703582539999997, 2.8703780434999996, 2.8703978340999995, 2.8704176258999994, 2.8704374188999993, 2.8704572129999992, 2.8704770072999991, 2.870496799799999, 2.8705165934999989, 2.8705363873999988, 2.8705561814999987, 2.8705759757999986, 2.8705957702999985, 2.8706155649999984, 2.8706353600999983, 2.8706551554999982, 2.8706749511999981, 2.870694747199998, 2.8707145434999979, 2.8707343400999978, 2.8707541369999977, 2.8707739342999976, 2.8707937318999975, 2.8708135297999974, 2.8708333279999973, 2.8708531264999972, 2.8708729252999971, 2.870892724399997, 2.8709125237999969, 2.8709323234999968, 2.8709521234999967, 2.8709719237999966, 2.8709917243999965, 2.8710115252999964, 2.8710313265999963, 2.8710511282999962, 2.8710709303999961, 2.871090732899996, 2.8711105357999959, 2.8711303390999958, 2.8711501427999957, 2.8711709468999956, 2.8711907513999955, 2.8712105563999954, 2.8712303617999953, 2.8712501675999952, 2.8712709737999951, 2.871290780399995, 2.8713105873999949, 2.8713303948999948, 2.8713502028999947, 2.8713701102999946, 2.8713900179999945, 2.8714109259999944, 2.8714318343999943, 2.8714527431999942, 2.8714736523999941, 2.871494561999994, 2.8715154718999939, 2.8715363811999938, 2.8715572907999937, 2.8715782006999936, 2.8715991108999935, 2.8716200213999934, 2.8716409321999933, 2.8716618432999932, 2.8716827546999931, 2.871703666399993, 2.8717245783999929, 2.8717454906999928, 2.8717664032999927, 2.8717873161999926, 2.8718082293999925, 2.8718291428999924, 2.8718500566999923, 2.8718709707999922, 2.8718918851999921, 2.871912799799992, 2.8719337146999919, 2.8719546300999918, 2.8719755457999917, 2.8719964617999916, 2.8720173780999915, 2.8720382946999914, 2.8720592115999913, 2.8720801287999912, 2.8721010462999911, 2.872121963999991, 2.8721428819999909, 2.8721638002999908, 2.8721847188999907, 2.8722056377999906, 2.8722265569999905, 2.8722474764999904, 2.8722683962999903, 2.8722893163999902, 2.8723102367999901, 2.872331157499990, 2.87235207849999, 2.87237299979999, 2.87239392139999, 2.87241484339999, 2.87243576569999, 2.87245668829999, 2.87247761119999, 2.87249853439999, 2.87251945789999, 2.87254038169999, 2.87256130579999, 2.87258223019999, 2.87260315489999, 2.87262408009999, 2.87264499569999, 2.87266591159999, 2.87268682779999, 2.87270774429999, 2.87272866099999, 2.87274957809999, 2.87277049549999, 2.87279141299999, 2.87281233079999, 2.87283324889999, 2.87285416729999, 2.87287508599999, 2.87289599509999, 2.87291690459999, 2.87293781449999, 2.87295872479999, 2.87297963539999, 2.87300054629999, 2.87302145749999, 2.87304236899999, 2.87306327079999, 2.87308417289999, 2.87310507529999, 2.87312597799999, 2.87314688099999, 2.87316778429999, 2.87318868799999, 2.87320959199999, 2.87323049639999, 2.87325140099999, 2.87327230589999, 2.87329321109999, 2.87331411659999, 2.87333502239999, 2.87335592859999, 2.87337683509999, 2.87339774189999, 2.87341864899999, 2.87343955639999, 2.87346046319999, 2.87348137029999, 2.87350227769999, 2.87352318539999, 2.87354409339999, 2.87356490169999, 2.87358571029999, 2.87360651919999, 2.87362732849999, 2.87364813799999, 2.87366894779999, 2.87368975789999, 2.87371056829999, 2.87373137899999, 2.87375218999999, 2.87377299129999, 2.87379379299999, 2.87381459499999, 2.87383539729999, 2.87385619989999, 2.87387699379999, 2.87389779799999, 2.87391859249999, 2.87393939729999, 2.87396019249999, 2.87398099809999, 2.87400179419999, 2.87402259059999, 2.87404338729999, 2.87406418429999, 2.87408498159999, 2.87410577919999, 2.87412657699999, 2.87414737509999, 2.87416817349999, 2.87418897219999, 2.87420977119999, 2.87423057049999, 2.87425136999999, 2.87427216979999, 2.87429296989999, 2.87431376999999, 2.87433456939999, 2.87435536919999, 2.87437616929999, 2.87439696969999, 2.87441776939999, 2.87443856939999, 2.87445936969999, 2.87448016999999, 2.87450096999999, 2.87452176999999, 2.87454256999999, 2.87456336999999, 2.87458416999999, 2.87460496999999, 2.87462576999999, 2.87464656999999, 2.87466736999999, 2.87468816999999, 2.87470896999999, 2.87472976999999, 2.87475056999999, 2.87477136999999, 2.87479216999999, 2.87481296999999, 2.87483376999999, 2.87485456999999, 2.87487536999999, 2.87489616999999, 2.87491696999999, 2.87493776999999, 2.87495856999999, 2.87497936999999, 2.87499999999999, 2.87501976999999, 2.87503956999999, 2.87505936999999, 2.87507916999999, 2.87509896999999, 2.87511876999999, 2.87513856999999, 2.87515836999999, 2.87517816999999, 2.87519796999999, 2.87521776999999, 2.87523756999999, 2.87525736999999, 2.87527716999999, 2.87529696999999, 2.87531676999999, 2.87533656999999, 2.87535636999999, 2.87537616999999, 2.87539596999999, 2.87541576999999, 2.87543556999999, 2.87545536999999, 2.87547516999999, 2.87549496999999, 2.87551476999999, 2.87553456999999, 2.87555436999999, 2.87557416999999, 2.87559396999999, 2.87561376999999, 2.87563356999999, 2.87565336999999, 2.87567316999999, 2.87569296999999, 2.87571276999999, 2.87573256999999, 2.87575236999999, 2.87577216999999, 2.87579196999999, 2.87581176999999, 2.87583156999999, 2.87585136999999, 2.87587116999999, 2.87589096999999, 2.87591076999999, 2.87593056999999, 2.87595036999999, 2.87597016999999, 2.87598996999999, 2.87599999999999, 2.87601976999999, 2.87603956999999, 2.87605936999999, 2.87607916999999, 2.87609896999999, 2.87611876999999, 2.87613856999999, 2.87615836999999, 2.87617816999999, 2.87619796999999, 2.87621776999999, 2.87623756999999, 2.87625736999999, 2.87627716999999, 2.87629696999999, 2.87631676999999, 2.87633656999999, 2.87635636999999, 2.87637616999999, 2.87639596999999, 2.87641576999999, 2.87643556999999, 2.87645536999999, 2.87647516999999, 2.87649496999999, 2.87651476999999, 2.87653456999999, 2.87655436999999, 2.87657416999999, 2.87659396999999, 2.87661376999999, 2.87663356999999, 2.87665336999999, 2.87667316999999, 2.87669296999999, 2.87671276999999, 2.87673256999999, 2.87675236999999, 2.87677216999999, 2.87679196999999, 2.87681176999999, 2.87683156999999, 2.87685136999999, 2.87687116999999, 2.87689096999999, 2.87691076999999, 2.87693056999999, 2.87695036999999, 2.87697016999999, 2.87698996999999, 2.87699999999999, 2.87701976999999, 2.87703956999999, 2.87705936999999, 2.87707916999999, 2.87709896999999, 2.87711876999999, 2.87713856999999, 2.87715836999999, 2.87717816999999, 2.87719796999999, 2.87721776999999, 2.87723756999999, 2.87725736999999, 2.87727716999999, 2.87729696999999, 2.87731676999999, 2.87733656999999, 2.87735636999999, 2.87737616999999, 2.87739596999999, 2.87741576999999, 2.87743556999999, 2.87745536999999, 2.87747516999999, 2.87749496999999, 2.87751476999999, 2.87753456999999, 2.87755436999999, 2.87757416999999, 2.87759396999999, 2.87761376999999, 2.87763356999999, 2.87765336999999, 2.87767316999999, 2.87769296999999, 2.87771276999999, 2.87773256999999, 2.87775236999999, 2.87777216999999, 2.87779196999999, 2.87781176999999, 2.87783156999999, 2.87785136999999, 2.87787116999999, 2.87789096999999, 2.87791076999999, 2.87793056999999, 2.87795036999999, 2.87797016999999, 2.87798996999999, 2.87799999999999, 2.87801976999999, 2.87803956999999, 2.87805936999999, 2.87807916999999, 2.87809896999999, 2.87811876999999, 2.87813856999999, 2.87815836999999, 2.87817816999999, 2.87819796999999, 2.87821776999999, 2.87823756999999, 2.87825736999999, 2.87827716999999, 2.87829696999999, 2.87831676999999, 2.87833656999999, 2.87835636999999, 2.87837616999999, 2.87839596999999, 2.87841576999999, 2.87843556999999, 2.87845536999999, 2.87847516999999, 2.87849496999999, 2.87851476999999, 2.87853456999999, 2.87855436999999, 2.87857416999999, 2.87859396999999, 2.87861376999999, 2.87863356999999, 2.87865336999999, 2.87867316999999, 2.87869296999999, 2.87871276999999, 2.87873256999999, 2.87875236999999, 2.87877216999999, 2.87879196999999, 2.87881176999999, 2.87883156999999, 2.87885136999999, 2.87887116999999, 2.87889096999999, 2.87891076999999, 2.87893056999999, 2.87895036999999, 2.87897016999999, 2.87898996999999, 2.87899999999999, 2.87901976999999, 2.87903956999999, 2.87905936999999, 2.87907916999999, 2.87909896999999, 2.87911876999999, 2.87913856999999, 2.87915836999999, 2.87917816999999, 2.87919796999999, 2.87921776999999, 2.87923756999999, 2.87925736999999, 2.87927716999999, 2.87929696999999, 2.87931676999999, 2.87933656999999, 2.87935636999999, 2.87937616999999, 2.87939596999999, 2.87941576999999, 2.87943556999999, 2.87945536999999, 2.87947516999999, 2.87949496999999, 2.87951476999999, 2.87953456999999, 2.87955436999999, 2.87957416999999, 2.87959396999999, 2.87961376999999, 2.87963356999999, 2.87965336999999, 2.87967316999999, 2.87969296999999, 2.87971276999999, 2.87973256999999, 2.87975236999999, 2.87977216999999, 2.87979196999999, 2.87981176999999, 2.87983156999999, 2.87985136999999, 2.87987116999999, 2.87989096999999, 2.87991076999999, 2.87993056999999, 2.87995036999999, 2.87997016999999, 2.87998996999999, 2.87999999999999, 2.88001976999999, 2.88003956999999, 2.88005936999999, 2.88007916999999, 2.88009896999999, 2.88011876999999, 2.88013856999999, 2.88015836999999, 2.88017816999999, 2.88019796999999, 2.88021776999999, 2.88023756999999, 2.88025736999999, 2.88027716999999, 2.88029696999999, 2.88031676999999, 2.88033656999999, 2.88035636999999, 2.88037616999999, 2.88039596999999, 2.88041576999999, 2.88043556999999, 2.88045536999999, 2.88047516999999, 2.88049496999999, 2.88051476999999, 2.88053456999999, 2.88055436999999, 2.88057416999999, 2.88059396999999, 2.88061376999999, 2.88063356999999, 2.88065336999999, 2.88067316999999, 2.88069296999999, 2.88071276999999, 2.88073256999999, 2.88075236999999, 2.88077216999999, 2.88079196999999, 2.88081176999999, 2.88083156999999, 2.88085136999999, 2.88087116999999, 2.88089096999999, 2.88091076999999, 2.88093056999999, 2.88095036999999, 2.8
```

**Ejercicio 2.2.** Dibujar en una gráfica los 50 primeros términos de las siguientes sucesiones y deducir si son convergentes o no. En el caso de que sean convergentes, dar un valor aproximado de su límite.

**Ayuda**

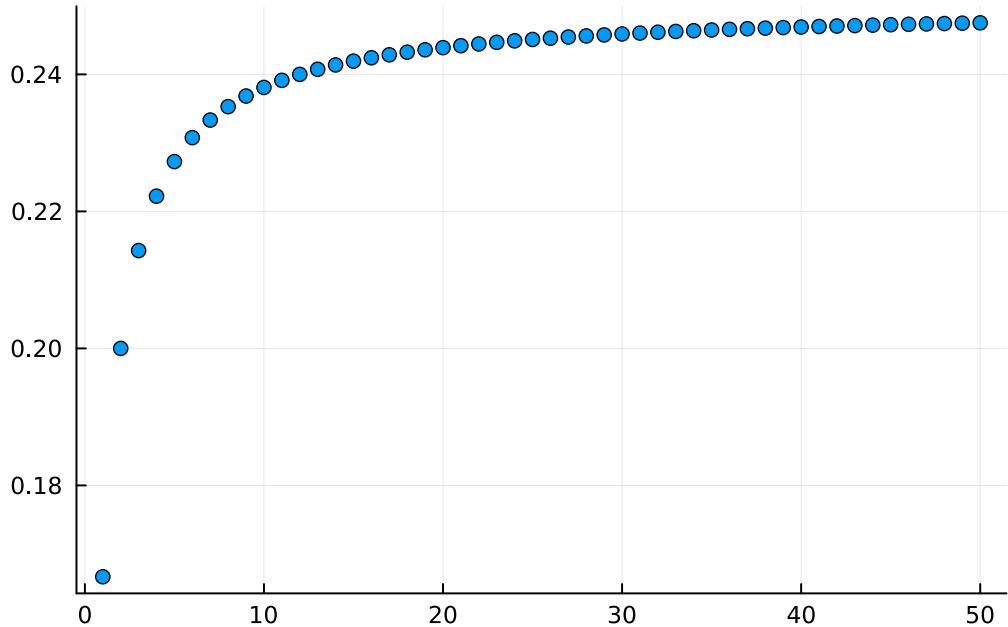
Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior. Después usar la función `scatter` del paquete `Plots`, o bien la función `scatter` del paquete `Makie`, para dibujar el array de términos.

a.  $\left(\frac{n}{4n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

**Solución**

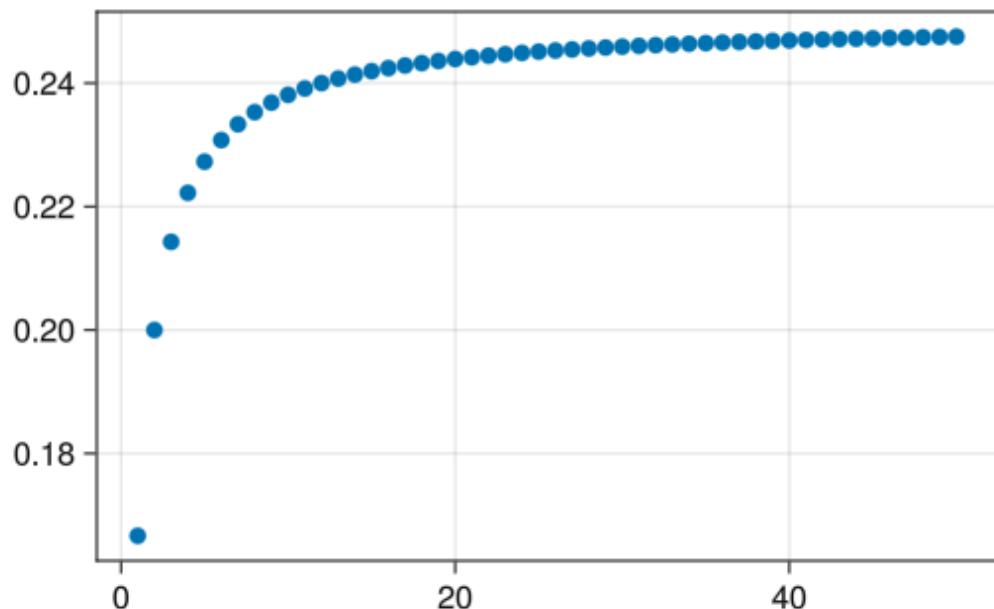
## 2.2 Plots

```
using Plots
a(n) = n / (4n + 2)
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



## 2.3 Makie

```
using GLMakie  
a(n) = n / (4n + 2)  
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



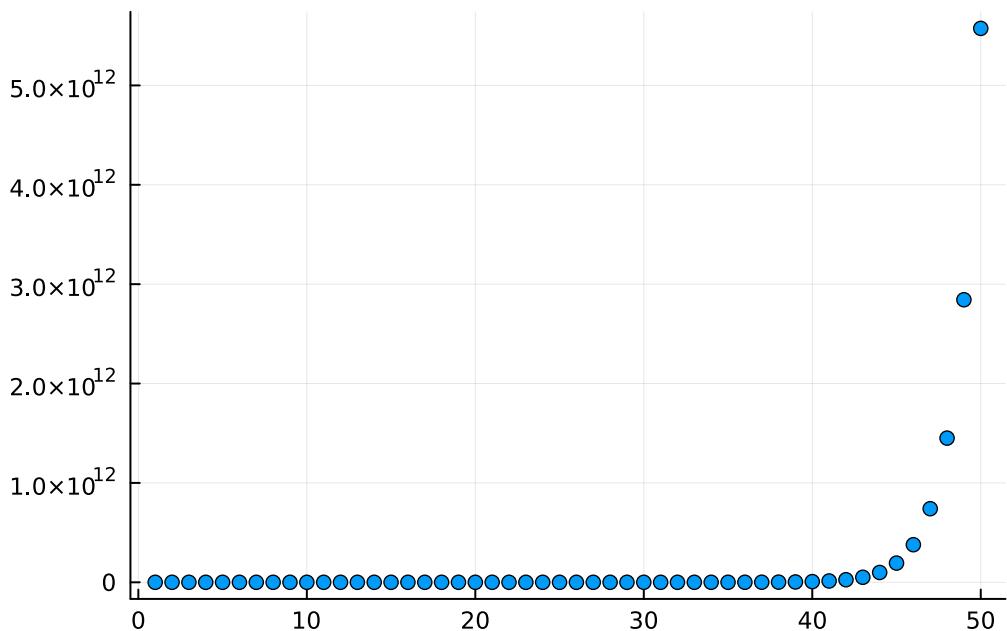
La sucesión converge al número 0.25.

b.  $\left(\frac{2^n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

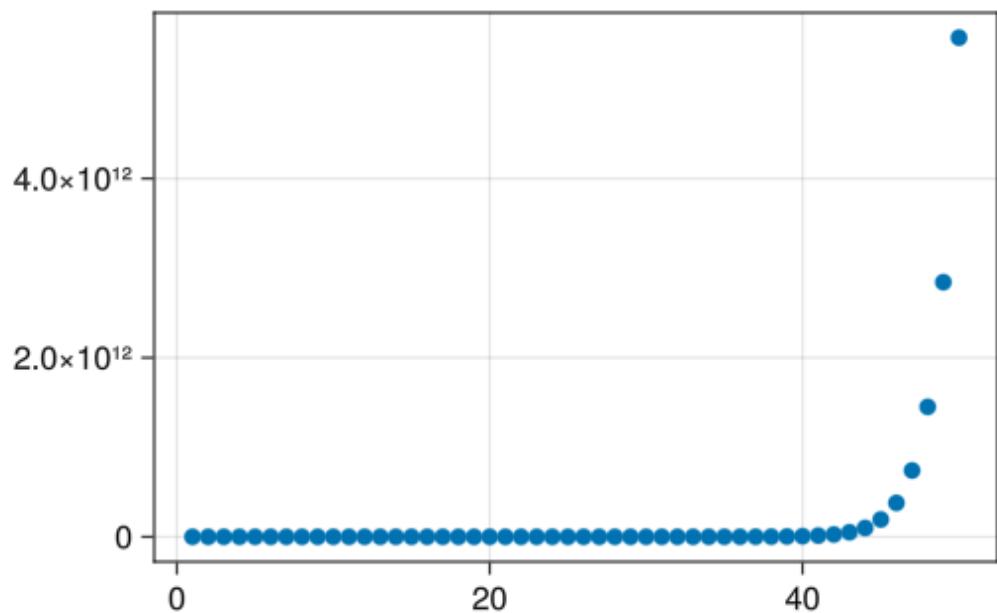
## 2.4 Plots

```
using Plots  
a(n) = 2^n / (4n + 2)  
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



## 2.5 Makie

```
using GLMakie
a(n) = 2^n / (4n + 2)
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



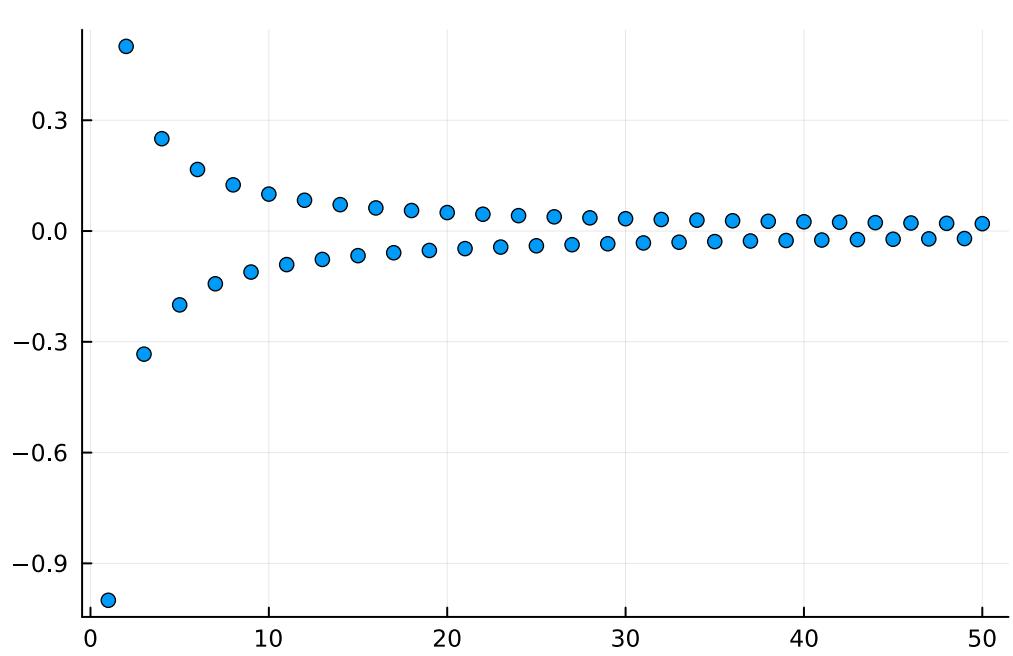
La sucesión diverge.

c.  $\left( \frac{(-1)^n}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

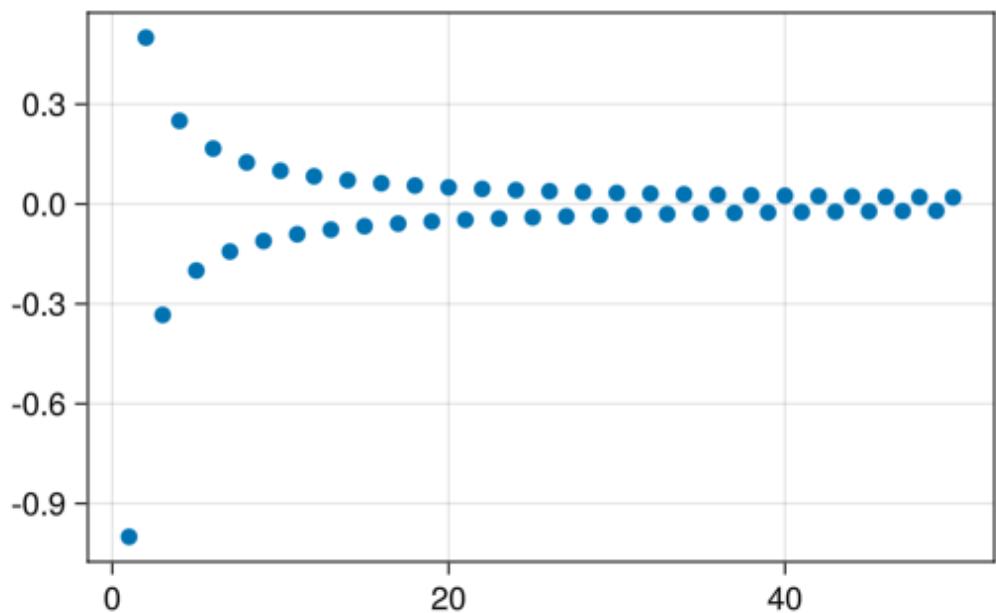
## 2.6 Plots

```
using Plots
a(n) = (-1)^n / n
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



## 2.7 Makie

```
using GLMakie
a(n) = (-1)^n / n
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



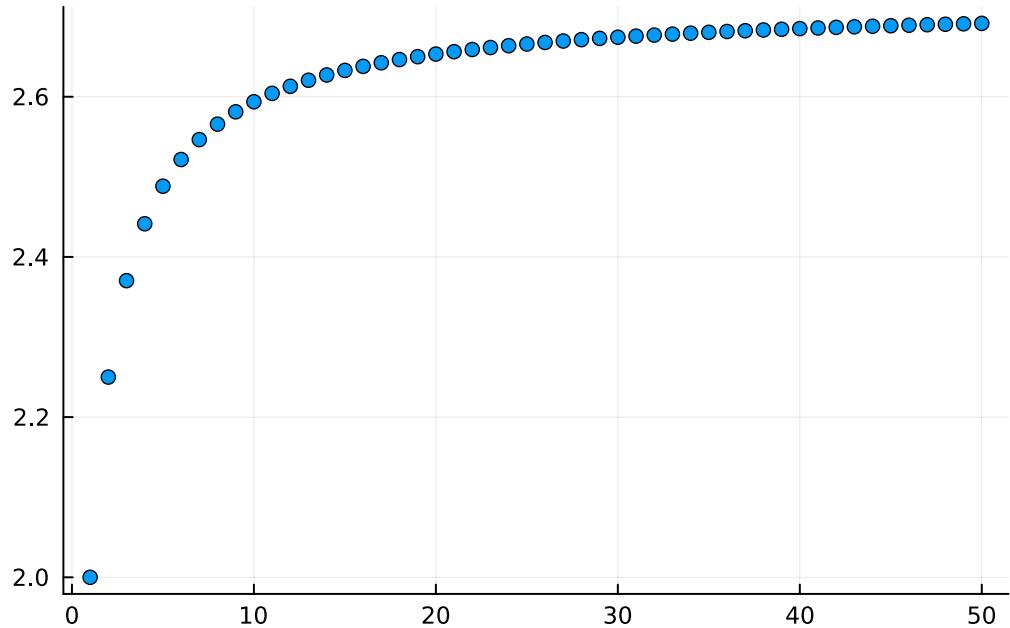
La sucesión converge al 0.

d.  $\left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$

💡 Solución

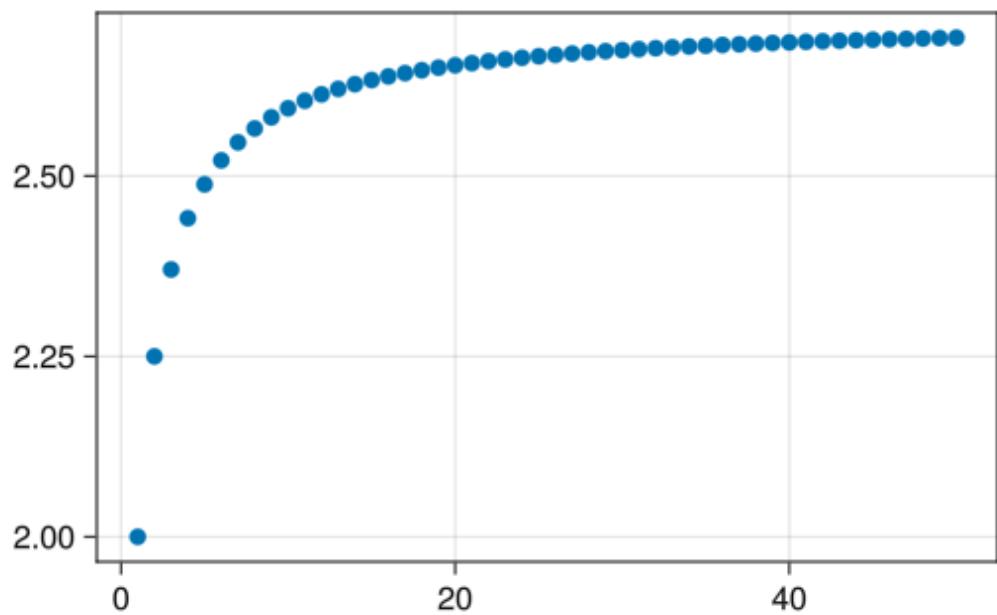
## 2.8 Plots

```
using Plots
a(n) = (1 + 1 / n)^n
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



## 2.9 Makie

```
using GLMakie
a(n) = (1 + 1 / n)^n
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



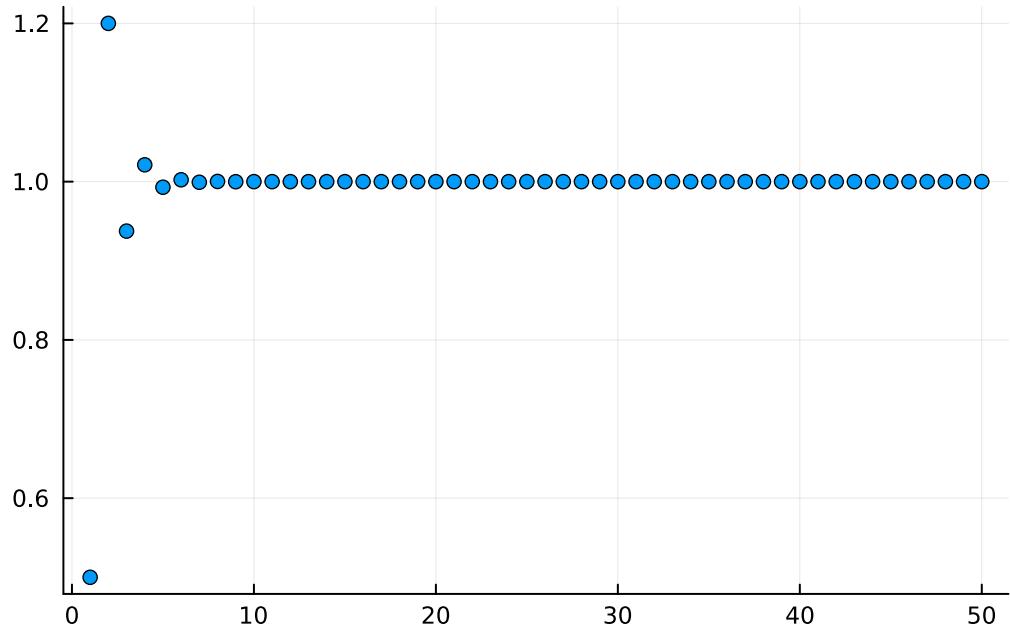
La sucesión converge aproximadamente a 2.7.

e.  $a_1 = 0.5$  y  $a_{n+1} = \frac{3}{2+a_n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución

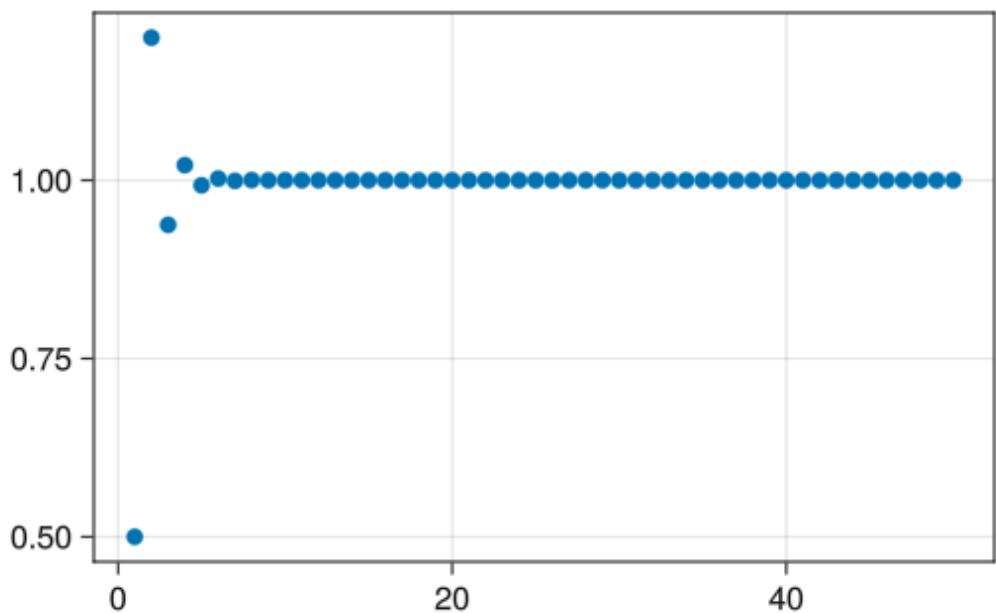
## 2.10 Plots

```
using Plots
a(n) = n == 1 ? 0.5 : 3/(2+a(n-1))
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



## 2.11 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n == 1 ? 0.5 : 3/(2+a(n-1))
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



La sucesión converge aproximadamente a 1.

**Ejercicio 2.3.** Calcular el límite, si existe, de las siguientes sucesiones.

a.  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

**i** Ayuda

Definir una función para el término general y usar la función `limit` del paquete SymPy para calcular el límite de la sucesión.

**💡** Solución

```
using SymPy
@syms n # Declaración de la variable simbólica n.
a(n) = 1/n
limit(a(n), n=>oo)
```

0

b.  $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

 Solución

```
@syms n  
a(n) = (-1)^n  
limit(a(n), n->oo)
```

NaN

c.  $\left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$

 Solución

```
@syms n  
a(n) = (1 + 1 / n)^n  
limit(a(n), n->oo)
```

e

**Ejercicio 2.4.** En el siglo III A.C Arquímedes usó el [método por agotamiento](#) para calcular el área encerrada por una circunferencia (y de paso el valor de  $\pi$ ). La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

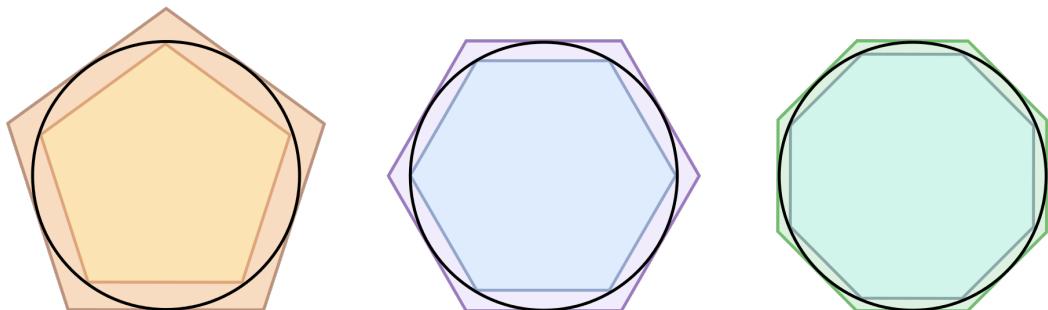


Figura 2.1: Aproximación del área de una circunferencia mediante polígonos regulares

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

En el caso de los polígonos inscritos dentro de la circunferencia, como dos de los lados siempre coinciden con el radio de la circunferencia  $r$ , el perímetro del polígono de  $n$  lados puede calcularse con la fórmula

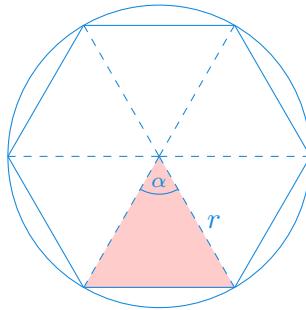


Figura 2.2: Descomposición de un hexágono en triángulos

$$p_n = 2nrFr\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

y el área puede calcularse con la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2}nr^2Fr\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

- a. Calcular el perímetro de los polígonos de  $10^i$  lados, para  $i = 1, \dots, 6$  tomando  $r = 1$ .

#### Solución

```
p(n) = 2n*sin(pi/n)
print([p(10^i) for i = 1:6])
```

[6.180339887498948, 6.282151815625658, 6.283174971759127, 6.28318520382533, 6.283185306]

- a. Calcular el área de los polígonos de  $10^i$  lados, para  $i = 1, \dots, 6$  tomando  $r = 1$ .

#### Solución

```
a(n) = n*sin(2*pi/n)/2
print([a(10^i) for i = 1:6])
```

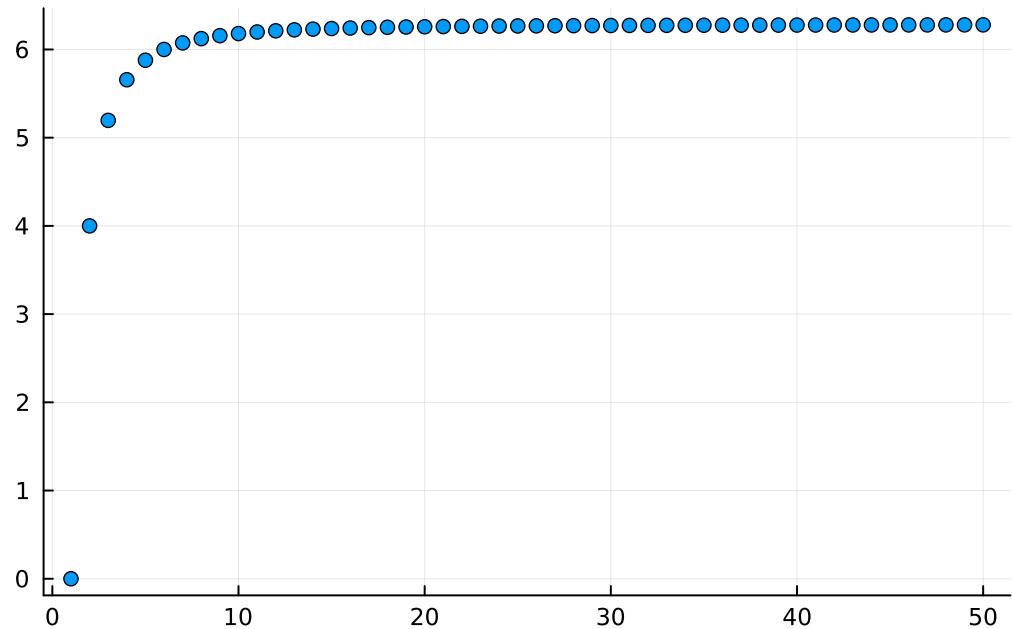
[2.938926261462366, 3.1395259764656687, 3.1415719827794755, 3.141592446881286, 3.141592653589793]

- a. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de los perímetros de los polígonos tomando  $r = 1$ .

💡 Solución

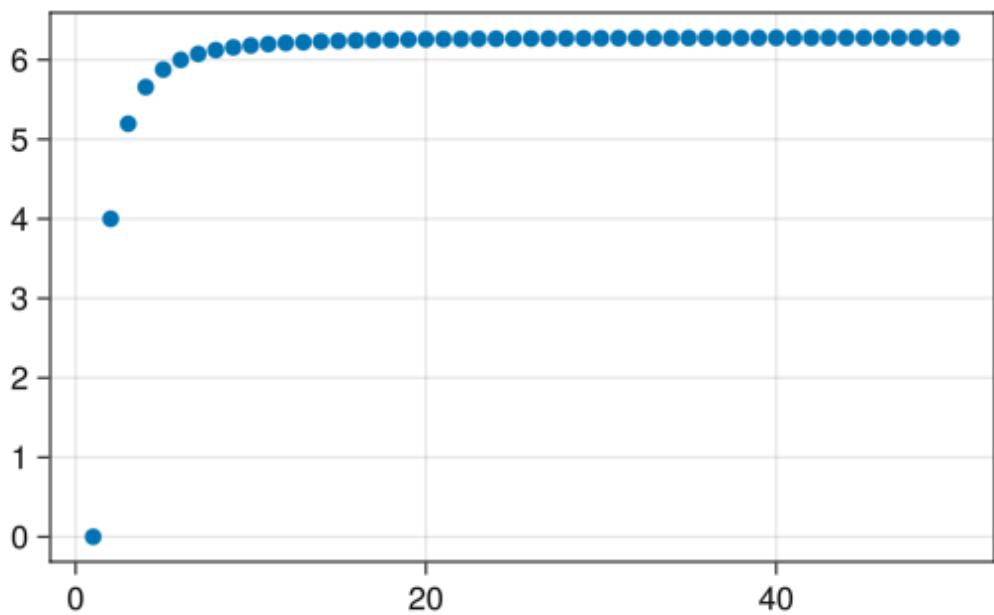
## 2.12 Plots

```
using Plots
a(n) = 2n*sin(pi/n)
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



## 2.13 Makie

```
using GLMakie
a(n) = 2n*sin(pi/n)
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```

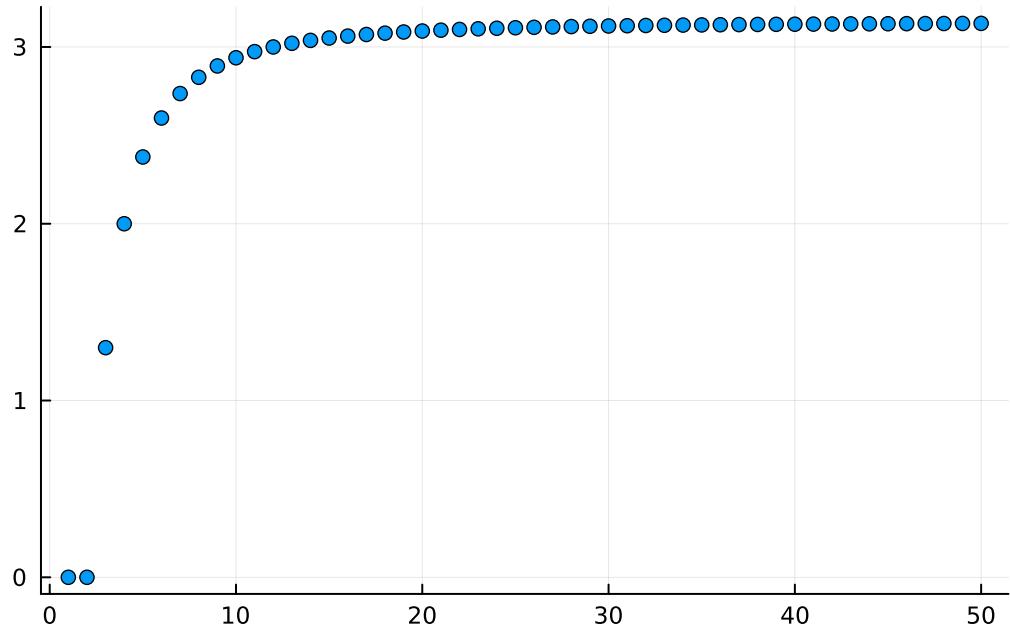


- b. Dibujar con los primeros 50 términos de la sucesión de las áreas de los polígonos tomando  $r = 1$ .

💡 Solución

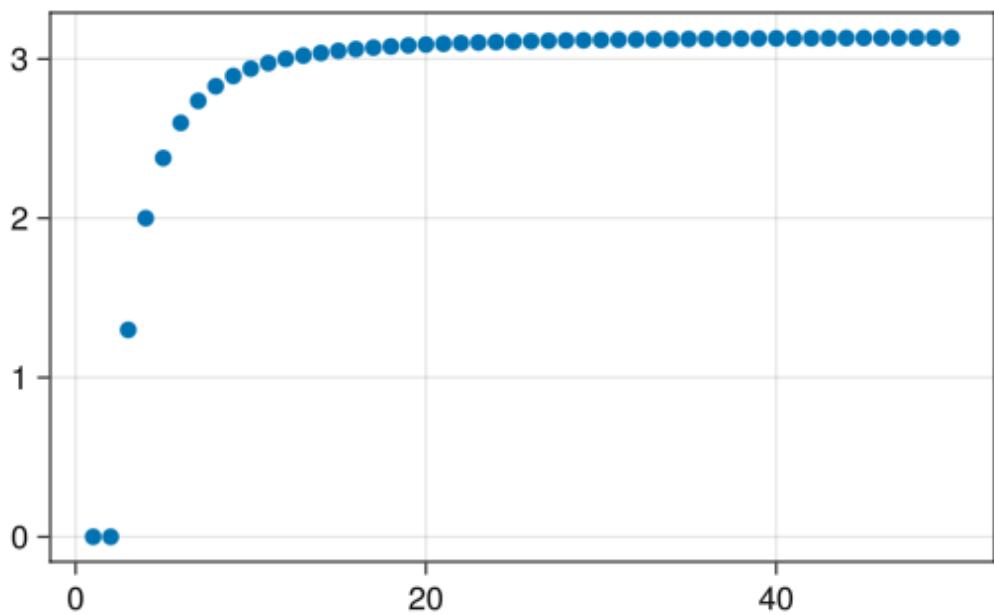
## 2.14 Plots

```
using Plots
a(n) = n*sin(2*pi/n)/2
scatter([a(n) for n = 1:50], legend=false)
```



## 2.15 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n*sin(2*pi/n)/2
Makie.scatter([a(n) for n = 1:50])
```



- a. Calcular el límite de la sucesión de los perímetros de los polígonos tomando  $r = 1$ .

💡 Solución

```
using SymPy
@syms n
a(n) = 2n*sin(PI/n) # Para cálculo simbólico es mejor utilizar la constante simbólica PI
limit(a(n), n=>oo)
```

$2\pi$

- a. Usando el resultado anterior, calcular el perímetro del círculo de radio  $r$ .

💡 Solución

```
using SymPy
@syms n, r
a(n) = 2n*r*sin(PI/n)
limit(a(n), n=>oo)
```

$2\pi r$

- a. Calcular el límite de la sucesión de las áreas de los polígonos tomando  $r = 1$ .

### 💡 Solución

```
using SymPy
@syms n
a(n) = n*sin(2*PI/n)/2
limit(a(n), n=>oo)
```

$\pi$

- a. Usando el resultado anterior, calcular el área del círculo de radio  $r$ .

### 💡 Solución

```
using SymPy
@syms n, r
a(n) = n*r^2*sin(2*pi/n)/2
limit(a(n), n=>oo)
```

$$\frac{628318530717959r^2}{2000000000000000}$$

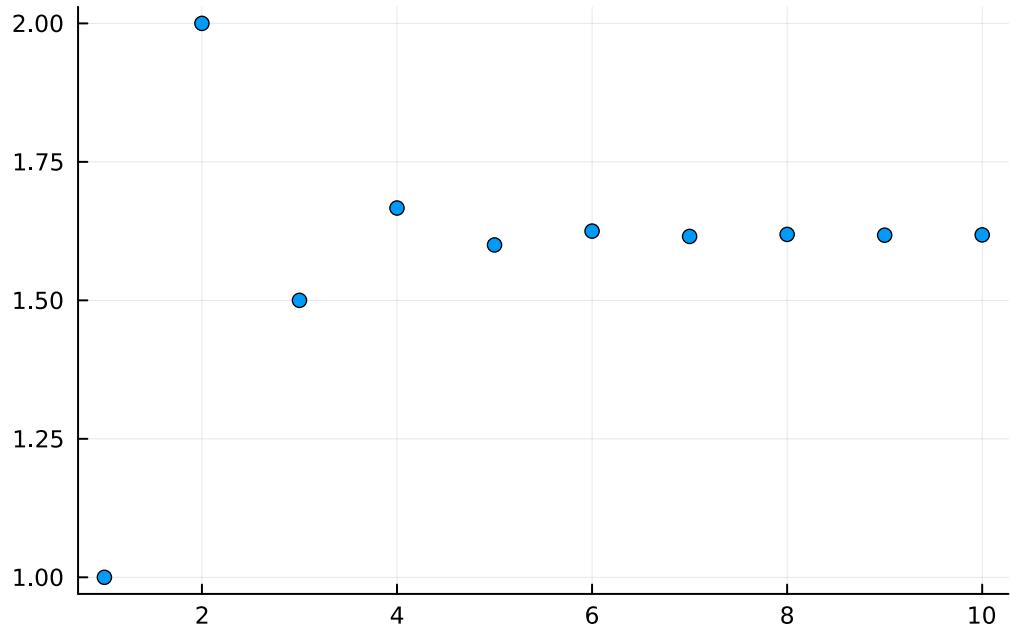
**Ejercicio 2.5.** Dada la sucesión  $a_1 = 1$  y  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \forall n \in \mathbb{N}$ , se pide:

- a. Dibujar la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión. ¿Es una sucesión monótona?

### 💡 Solución

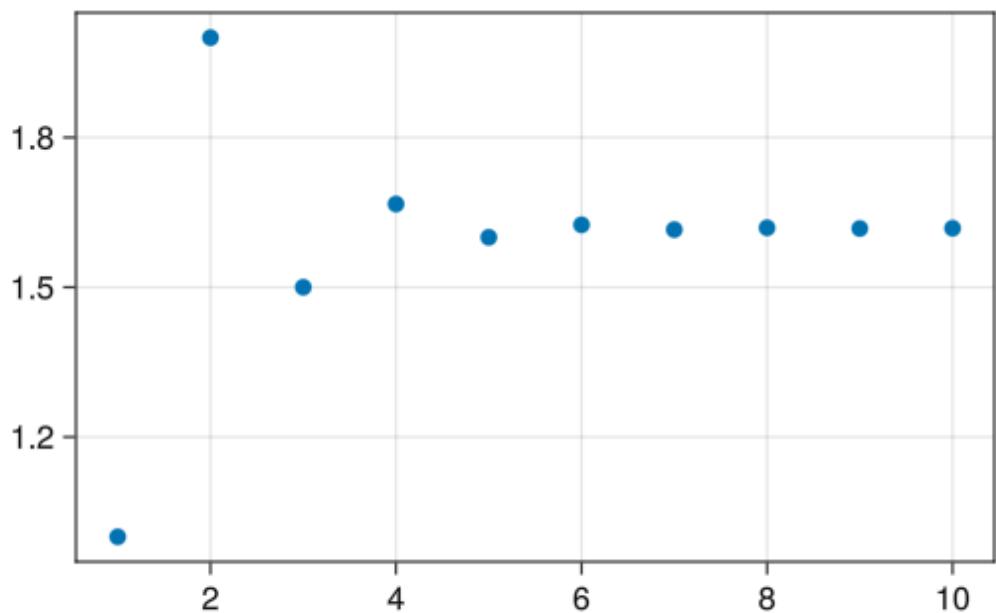
## 2.16 Plots

```
using Plots
a(n) = n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
scatter([a(n) for n = 1:10], legend=false)
```



## 2.17 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
Makie.scatter([a(n) for n = 1:10])
```



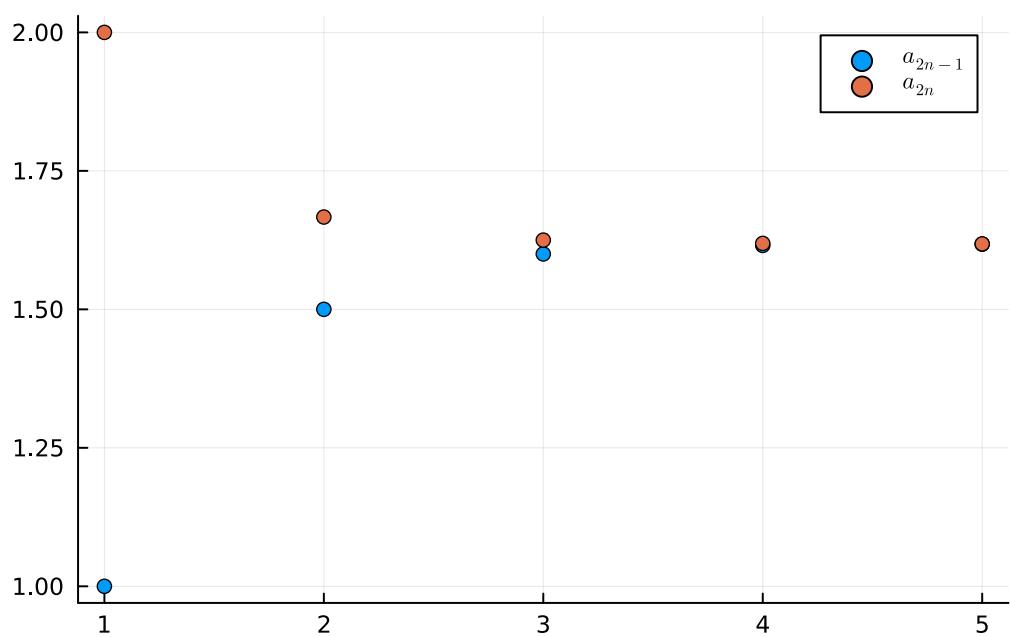
La sucesión no es monótona.

- b. Dibujar la gráfica de los 5 primeros términos de las subsucesiones con los términos pares e impares. ¿Son monótonas?

💡 Solución

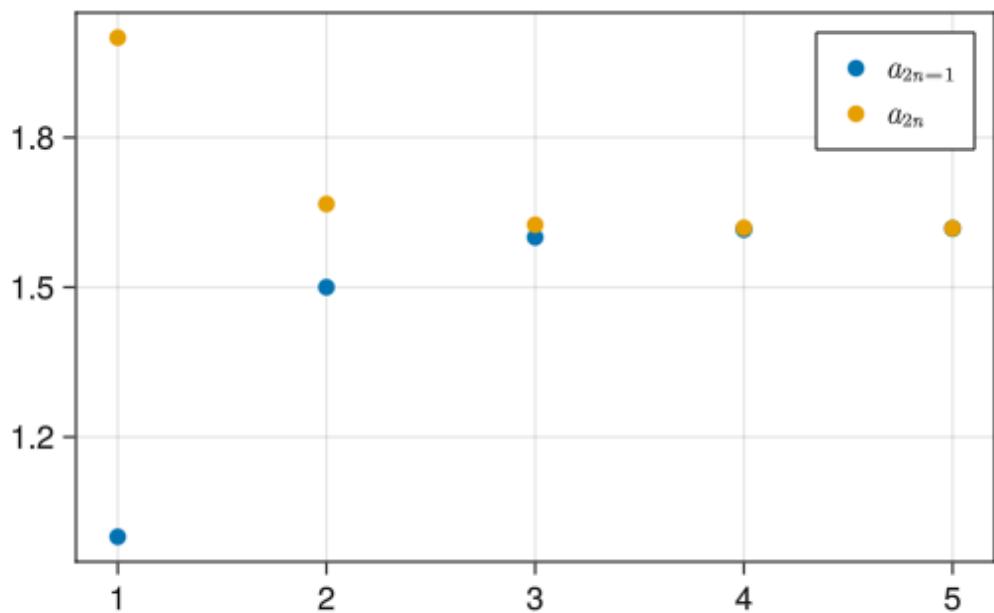
## 2.18 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
a(n) = n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
Plots.scatter([a(2i-1) for i=1:5], label = L"$a_{2n-1}$")
Plots.scatter!([a(2i) for i=1:5], label = L"$a_{2n}$")
```



## 2.19 Makie

```
using GLMakie
a(n) = n == 1 ? 1 : 1 + 1 / a(n-1)
fig, ax = Makie.scatter([a(2i-1) for i = 1:5], label = L"$a_{2n-1}$")
Makie.scatter!(ax,[a(2i) for i=1:5], label = L"$a_{2n}$")
axislegend()
fig
```



La sucesión de los términos impares es creciente y la de los pares es decreciente.

## 2.20 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 2.6.** Calcular el décimo término de la sucesión  $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 2.7.** Calcular los 10 primeros términos de la sucesión  $\left(\frac{3n^2+n}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$  y averiguar hacia dónde converge.

- 1
- No converge
- 0.5
- 0
- 1.5

**Ejercicio 2.8.** ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la sucesión  $a_1 = 3$  y  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .

insert image here

**Ejercicio 2.9.** A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión  $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ , ¿crees que la sucesión converge?

- Yes
- No

**Ejercicio 2.10.** A la vista de la gráfica de los 10 primeros términos de la sucesión  $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ , ¿crees que la sucesión converge?

- Yes
- No

**Ejercicio 2.11.** A la vista de la gráfica de los 20 primeros términos de la sucesión dada por  $a_1 = 1$  y  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ , ¿crees que la sucesión converge?

- Yes
- No

**Ejercicio 2.12.** ¿Cuál es el límite de la sucesión  $\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

# 3 Funciones elementales

## 3.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
using Makie # Para obtener gráficos interactivos.  
using SymPy # Para el cálculo simbólico.  
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.  
using Latexify # Para convertir expresiones a código LaTeX.
```

**Ejercicio 3.1.** La siguiente tabla contiene el número de bacterias en un cultivo cada hora que pasa.

Horas	Bacterias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

Dibujar una gráfica con la evolución del la población de bacterias.

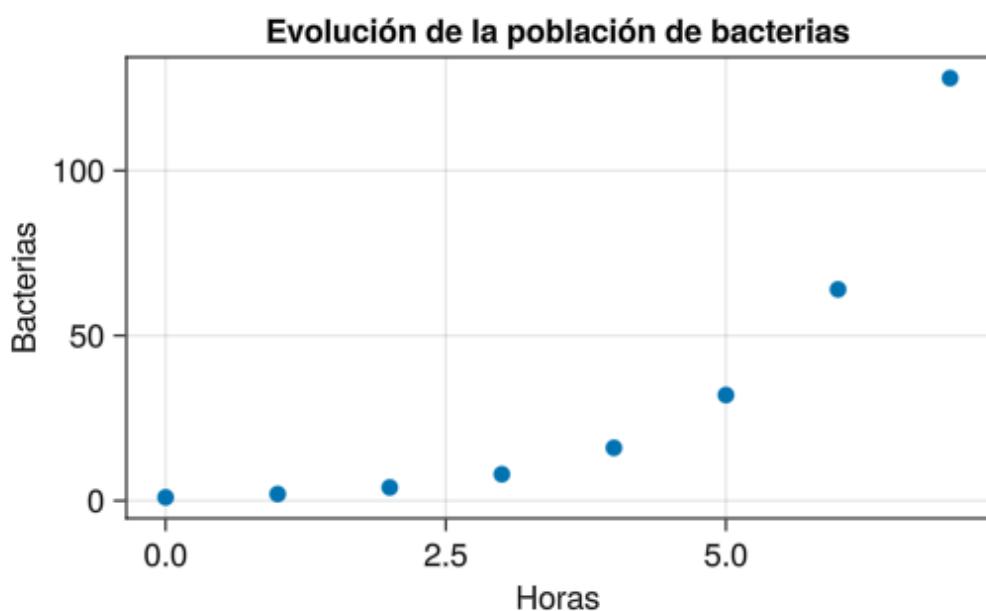
**i** Ayuda

Definir los valores de las horas en un vector `x` y el número de bacterias en otro `y` y luego utilizar la función `scater(x,y)` del paquete `Makie`, o `scatter(x,y)` del paquete `Plots` para dibujar una gráfica de puntos.

💡 Solución

## 3.2 Makie

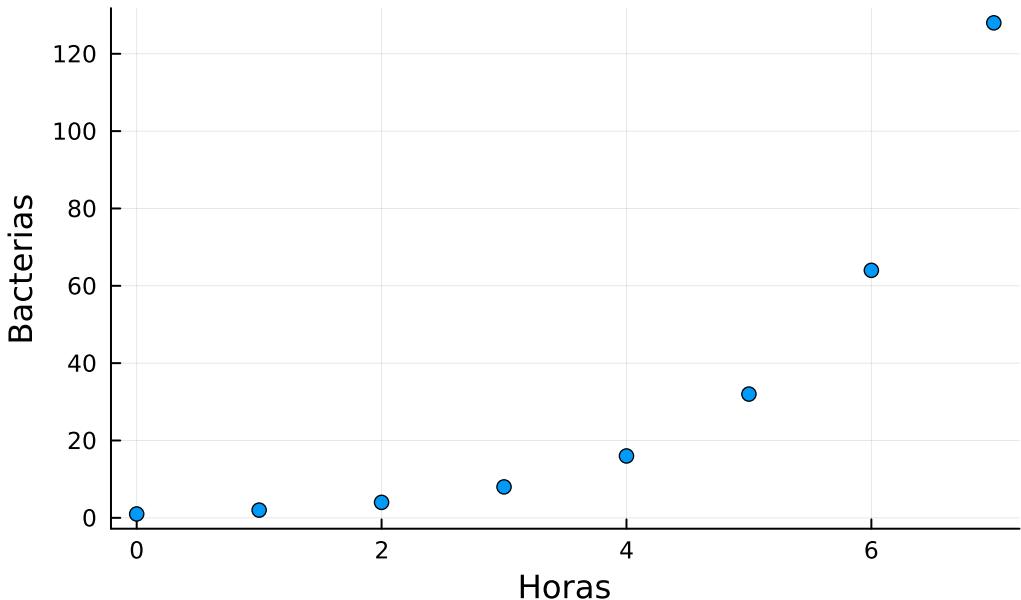
```
using GLMakie
horas = 0:7
bacterias = [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], xlabel="Horas", ylabel="Bacterias", title="Evolución de la población de bacterias")
Makie.scatter!(ax, horas, bacterias)
fig
```



## 3.3 Plots

```
using Plots
horas = 0:7
bacterias = [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]
Plots.scatter(horas, bacterias, xlab="Horas", ylab="Bacterias", title="Evolución de la población de bacterias")
```

## Evolución de la población de bacterias



¿Los pares dados en la tabla forman una función?

### Solución

Si, porque para cada hora hay a lo sumo un número de bacterias con el que se relaciona.

¿Qué fórmula crees que explica la evolución del número de bacterias en función de las horas que pasan? Dibuja en la gráfica anterior la función con esa fórmula.

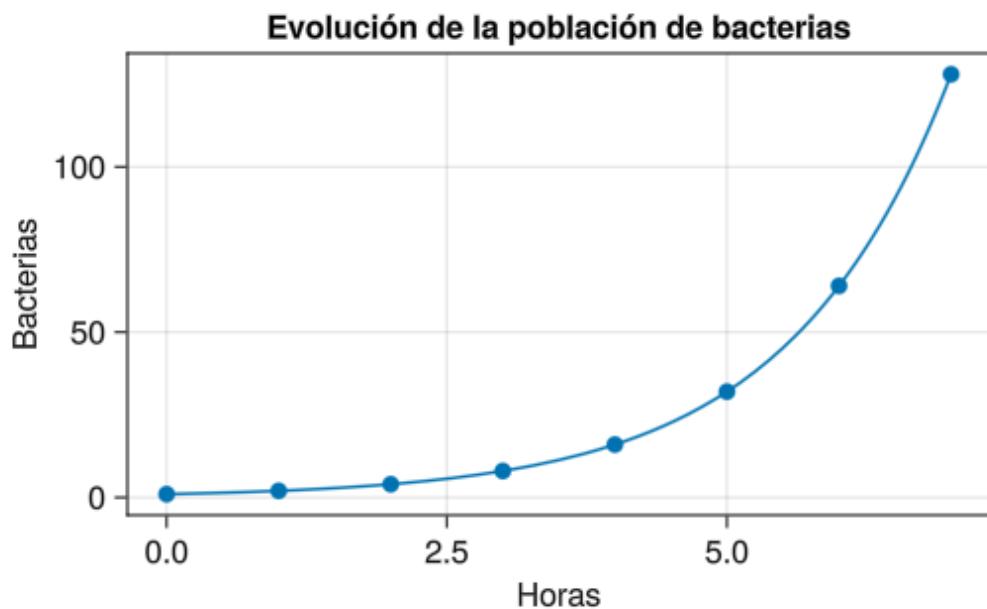
### Ayuda

Para añadir una nueva gráfica a una anterior se añade un signo de exclamación ! a la función de graficación. Para una gráfica de líneas, utilizar la función `lines!` del paquete `Makie`, o `plot!` del paquete `Plots`, pasándole el nombre de la función si se ha definido previamente o la [definición anónima de la función](#)

💡 Solución

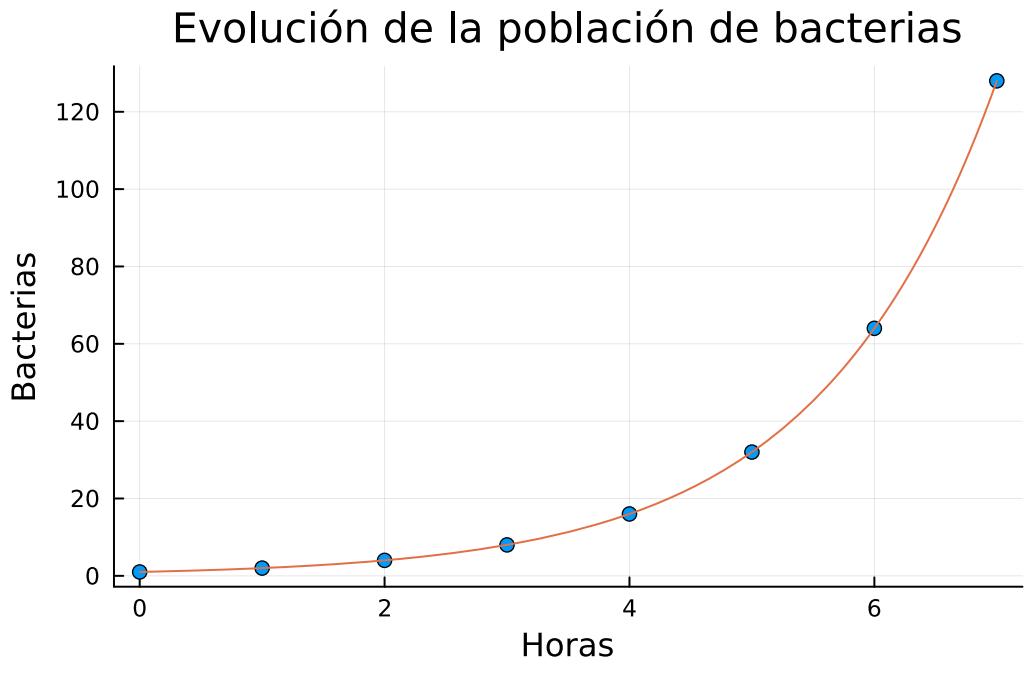
### 3.4 Makie

```
Makie.lines!(ax, 0..7, x -> 2^x)
fig
```



### 3.5 Plots

```
using Plots
Plots.plot!(x -> 2^x)
```



**Ejercicio 3.2.** En el lanzamiento vertical de un objeto, la posición que ocupa el objeto en cada instante  $t$ , viene dado por la función

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

donde  $y_0$  es la altura inicial del objeto,  $v_0$  la velocidad inicial con que se lanza, y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Una pelota se lanza verticalmente desde la ventada de un edificio a 5 m de altura, con una velocidad inicial de 10 m/s. Dibujar la gráfica de la posición de la pelota en función del tiempo, tomando una aceleración de la gravedad  $g = -9.8 \text{ m/s}^2$ .

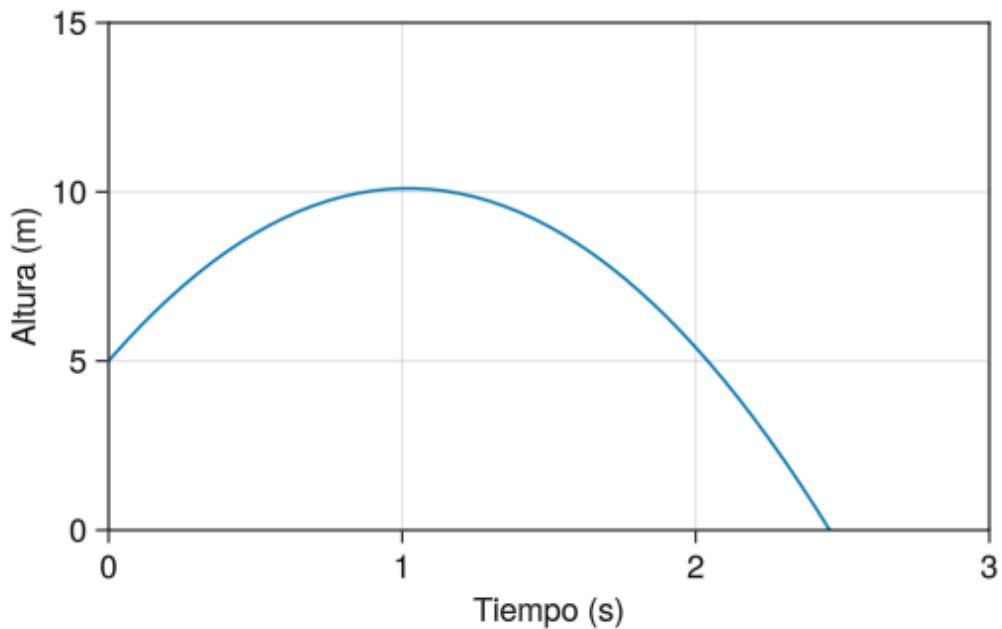
**i** Ayuda

Declarar  $t$  como una variable simbólica usando el paquete [SymPy](#), definir después las constantes  $y_0$ ,  $v_0$  y  $g$ , y luego definir la función  $y(t)$  mediante la fórmula dada. Para dibujar la gráfica de la función, usar la función [lines!](#) del paquete [Makie](#) o la función [plot](#) del paquete [Plots](#), pasándole el nombre de la función. Como no tienen sentido los instantes negativos, ni las posiciones negativas, restringir la ventana de graficación a valores de  $t$  y de  $y$  positivos usando los parámetros [xlim](#) e [ylim](#).

💡 Solución

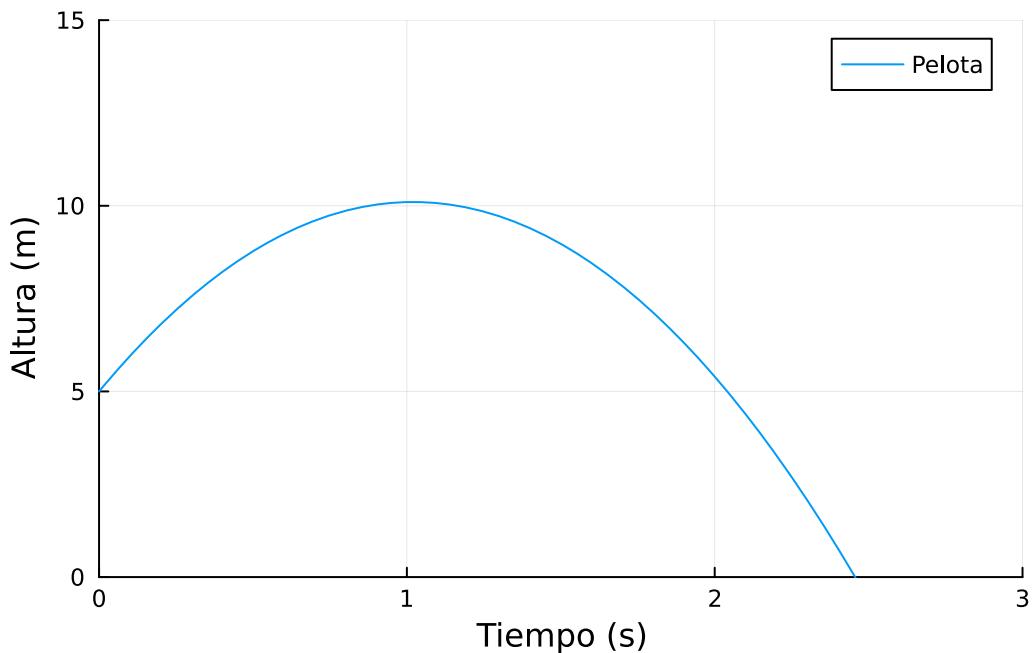
### 3.6 Makie

```
using Makie, SymPy
@syms t #Declaramos t como una variable simbólica
y = 5
v = 10
const gravedad = -9.8 #Declaramos la gravedad como una constante
y0(t) = y+v*t+ 1/2*gravedad*t^2
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], limits=(0, 3, 0, 15), xlabel="Tiempo (s)", ylabel="Altura (m)")
Makie.lines!(ax, 0..3, y0, label="Pelota")
fig
```



### 3.7 Plots

```
using Plots, SymPy
@syms t #Declaramos t como una variable simbólica
y = 5
v = 10
const gravedad = -9.8 #Declaramos la gravedad como una constante
y0(t) = y+v*t+ 1/2*gravedad*t^2
Plots.plot(y0, xlims=(0,3), ylims=(0,15), label="Pelota", xlab="Tiempo (s)", ylab="Altura (m)")
```



Al mismo tiempo que se lanza la pelota, un ascensor exterior baja por la fachada del mismo edificio desde una altura de 8 m con una velocidad constante de 2 m/s. Dibujar la gráfica de la posición del ascensor junto a la gráfica de la pelota.

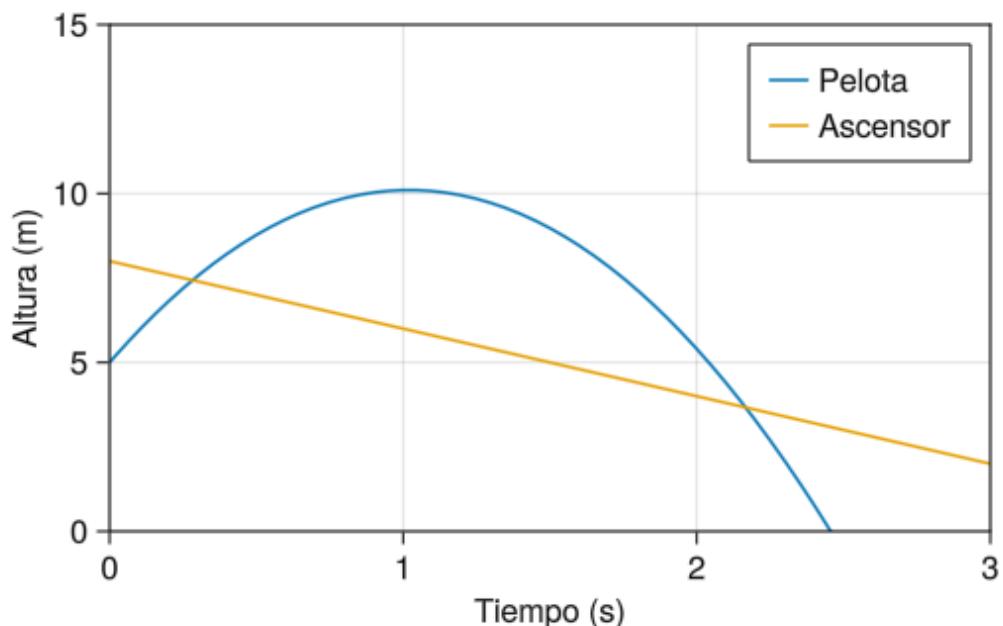
**i** Ayuda

La función que define la posición del ascensor que baja desde una altura  $y_1$  con una velocidad constante  $v_1$  en cada instante  $t$  es  $y(t) = y_1 - v_1 t$ .

 Solución

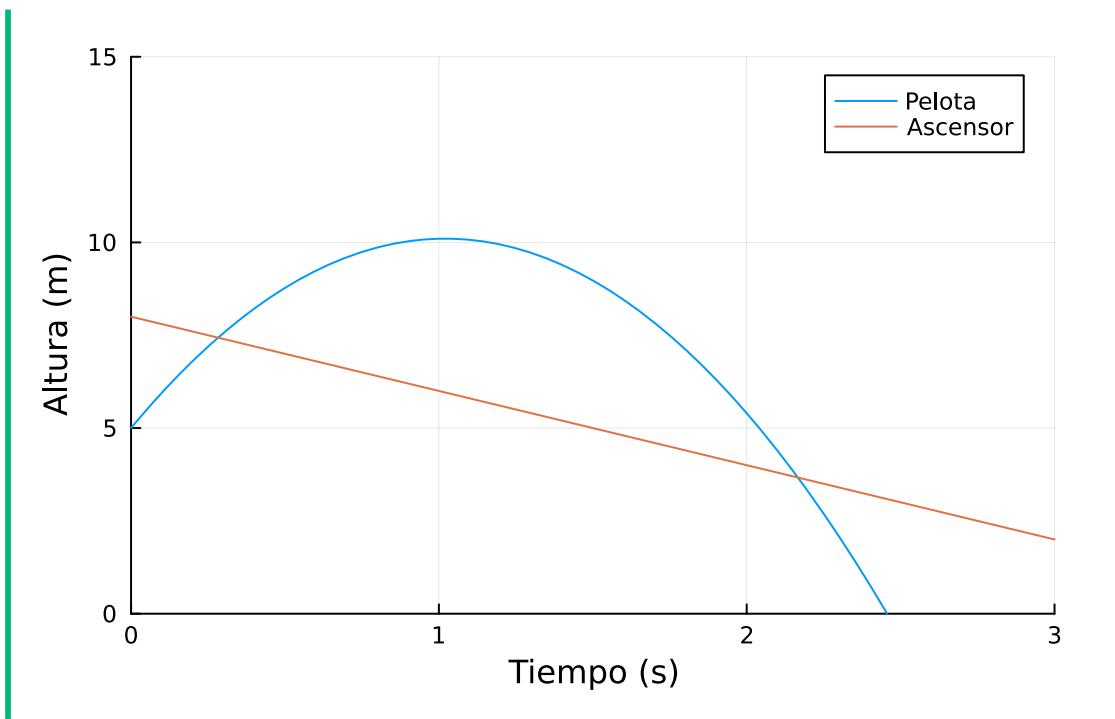
### 3.8 Makie

```
y = 8  
v = 2  
y1(t) = y - v *t  
Makie.lines!(ax, 0..3, y1, label="Ascensor")  
axislegend()  
fig
```



### 3.9 Plots

```
y = 8  
v = 2  
y1(t) = y - v *t  
Plots.plot!(y1, label="Ascensor")
```

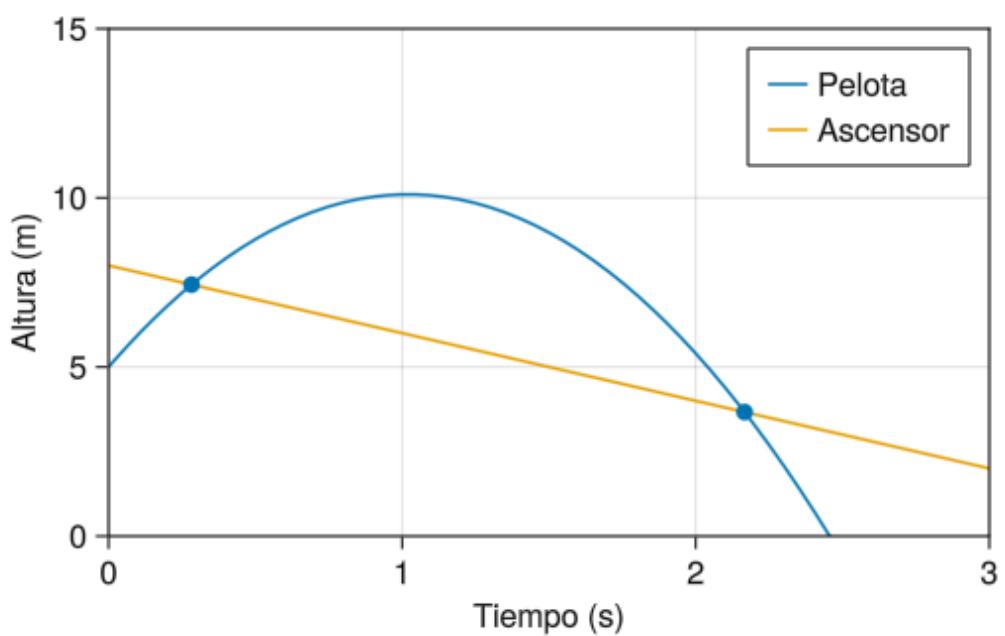


¿En qué instantes el ascensor estará a la misma altura de la pelota? Dibujar los puntos correspondientes a esos instantes en la gráfica anterior.

#### 💡 Solución

### 3.10 Makie

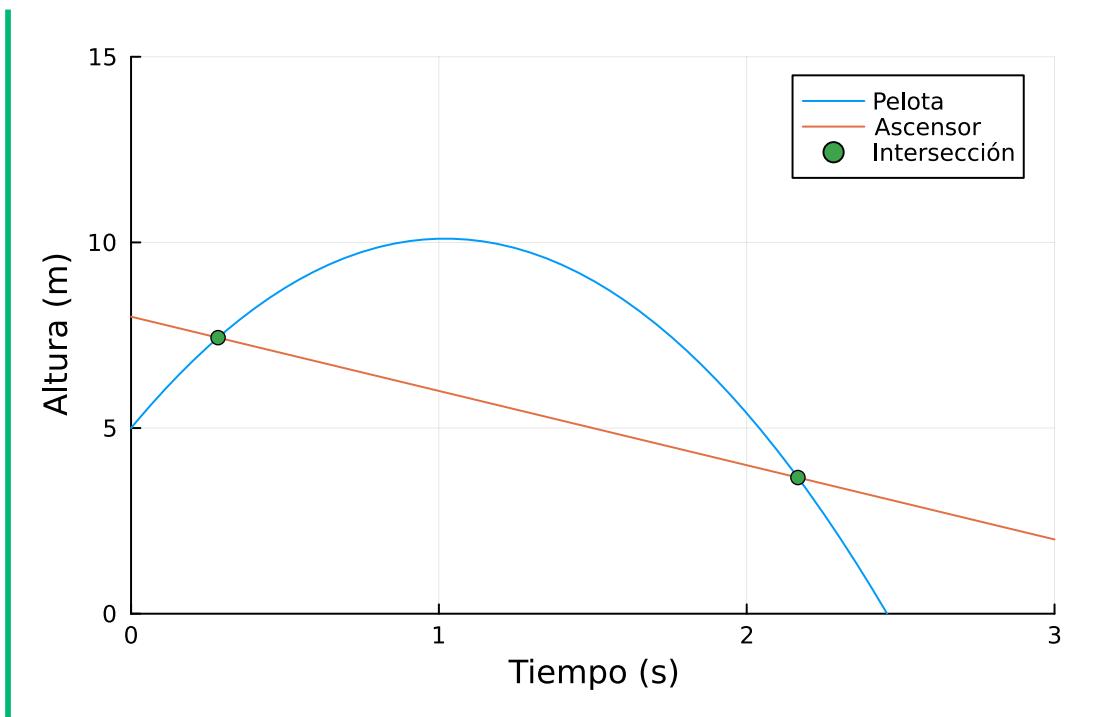
```
sol = N(solve(y0(t)-y1(t)))
Makie.scatter!(ax, sol, y1.(sol), label="Intersección")
fig
```



### 3.11 Plots

```
sol = solve(y0(t)-y1(t))
print("Instantes: ", sol)
Plots.scatter!(sol, y1.(sol), label="Intersección")
```

Instantes: Sym[0.282613815574341, 2.16636577626239]



**Ejercicio 3.3.** El volumen de un globo esférico depende del radio según la función  $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Calcular la función que expresa el radio en función del volumen y dibujar su gráfica.

**i** Ayuda

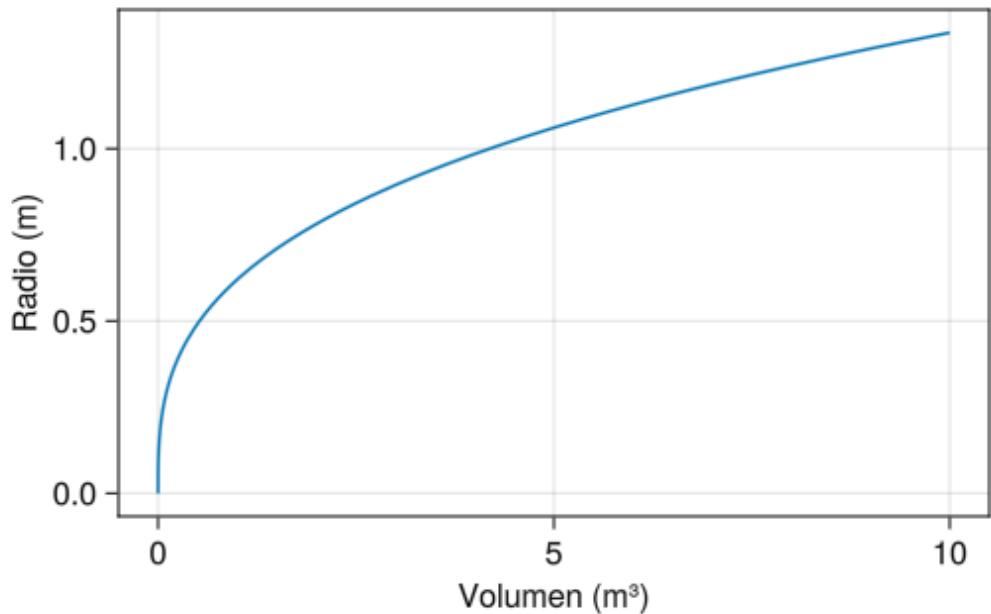
Declarar las variables simbólicas  $r$  y  $v$  usando el paquete SymPy y definir la función `vol(r)` que expresa el volumen del globo en función del radio.

Después utilizar la función `solve` del paquete SymPy para despejar  $r$  de la ecuación  $v-vol(r)=0$ .

 Solución

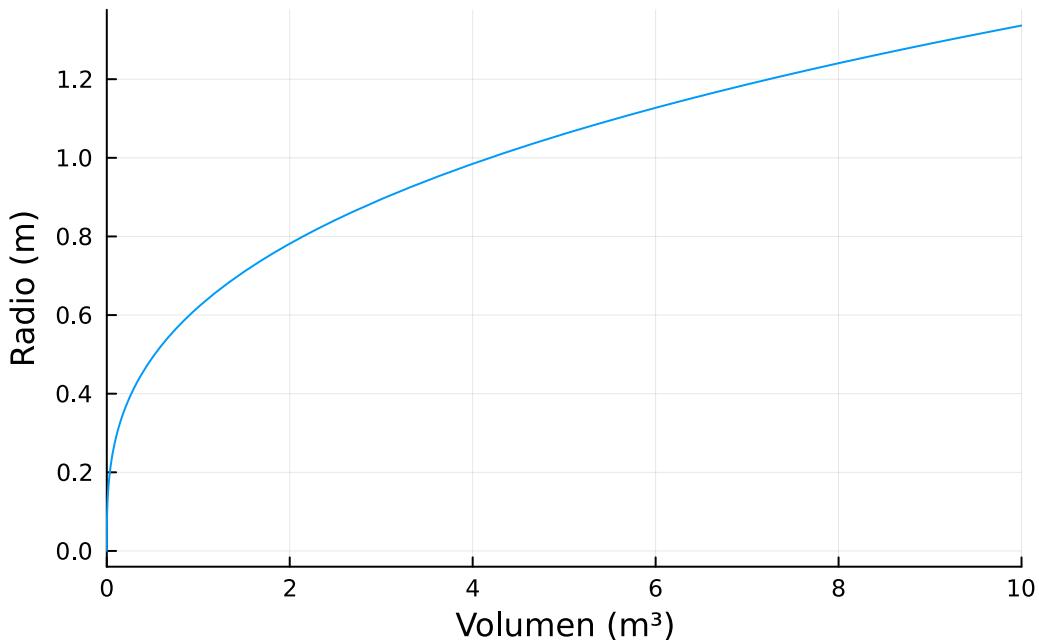
### 3.12 Makie

```
using GLMakie, SymPy
@syms r v
vol(r) = 4/3*pi*r^3
rad = lambdify(solve(v-vol(r),r)[1])
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], xlabel="Volumen (m³)", ylabel="Radio (m)")
Makie.lines!(ax, 0..10, rad)
fig
```



### 3.13 Plots

```
using Plots, SymPy
@syms r v
vol(r) = 4/3*pi*r^3
rad2 = solve(v-vol(r),r)[1]
Plots.plot(rad2, xlim=(0,10), xlabel="Volumen (m³)", ylab="Radio (m)", legend=false)
```



Si empezamos a introducir helio en el globo de manera que su volumen a los  $t$  minutos viene dado por la función  $v(t) = t^2 + 2t$ , dibujar la gráfica de la función que da el radio en cada instante.

### Ayuda

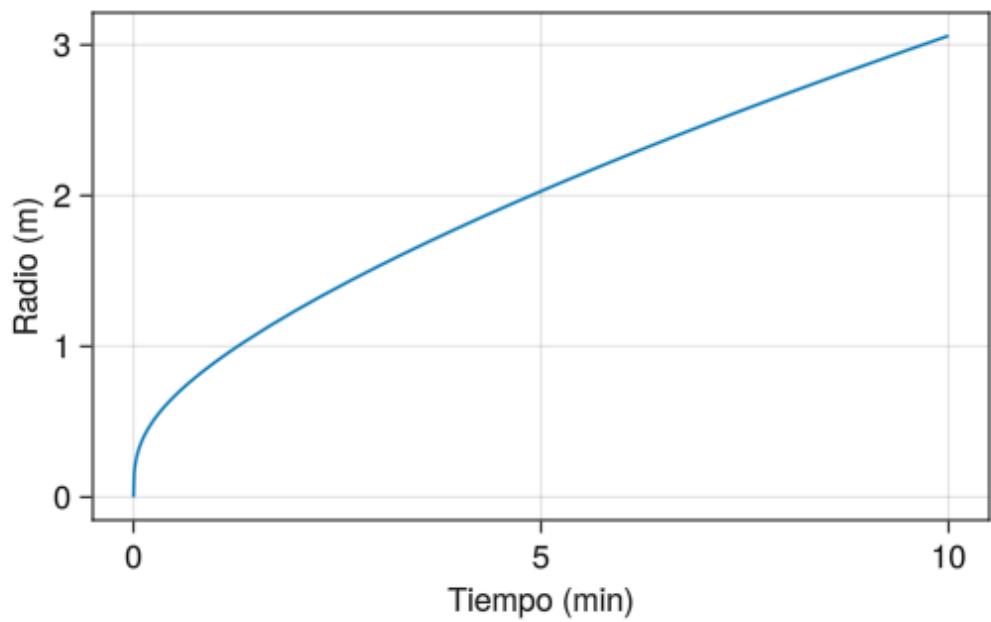
Declarar las variables simbólicas  $t$  usando el paquete SymPy y definir la función  $\text{vol}(t)$  que expresa el volumen del globo en función del tiempo.

Después utilizar a el operador de composición  $\circ$  para componer la función del volumen con la función del radio.

### Solución

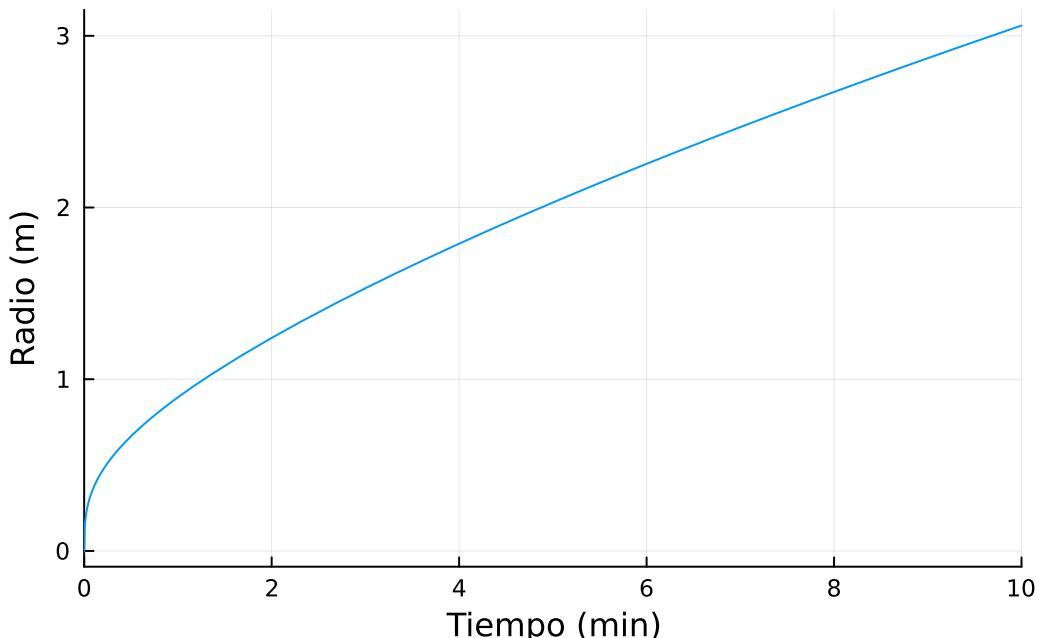
## 3.14 Makie

```
using GLMakie
vol(t)=t^2+2t
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], xlabel = "Tiempo (min)", ylabel = "Radio (m)")
Makie.lines!(ax, 0..10, rad vol)
fig
```



### 3.15 Plots

```
using Plots, SymPy
@syms t
vol(t)=t^2+2t
Plots.plot(vol, xlim = (0,10), xlab = "Tiempo (min)", ylab = "Radio (m)", legend
```



Si el globo explota cuando el radio alcanza los 3 m, ¿cuándo explotará el globo?

#### Solución

```
sol = solve((rad.vol)(t)-3)
```

$$\begin{bmatrix} -11.6816354332674 \\ 9.68163543326738 \end{bmatrix}$$

El globo explotará a los 9.68163543326738 minutos.

**Ejercicio 3.4.** Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

en el intervalo  $[-3, 4]$  y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

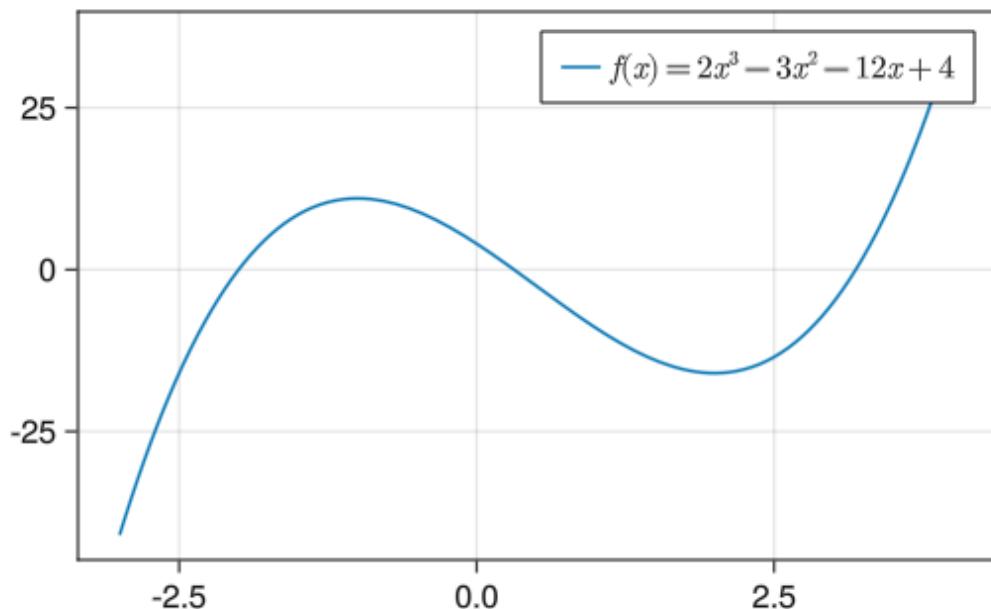
#### Ayuda

Definir la función `y` y usar la función `plot` del paquete `Makie` o `lines!` del paquete `Plots`.

💡 Solución

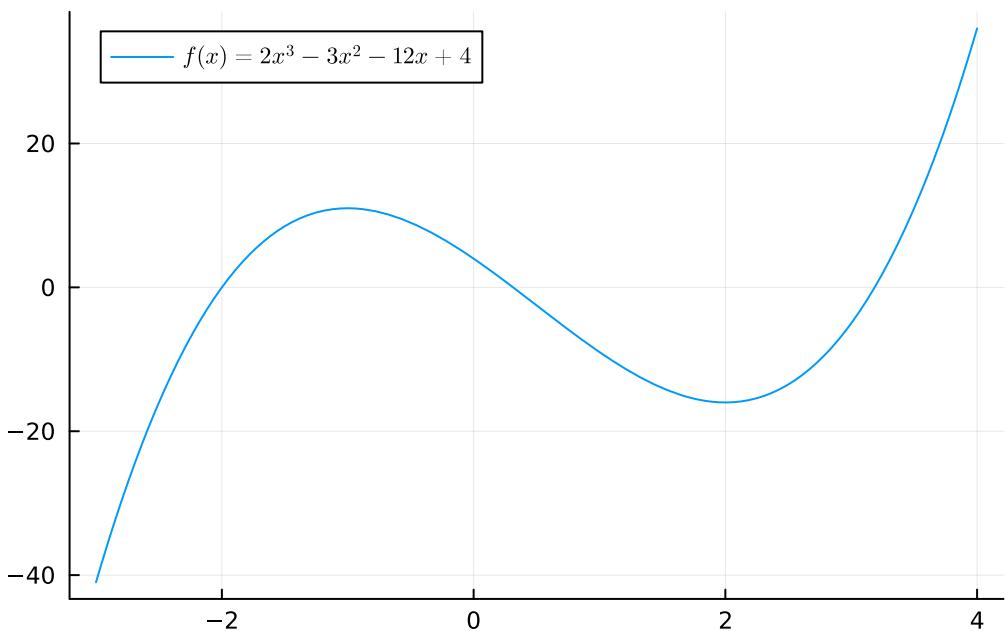
### 3.16 Makie

```
using GLMakie
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -3..4, f, label = L"f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4")
axislegend()
fig
```



### 3.17 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
Plots.plot(f, -3, 4, label=L"f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4")
```



a. Dominio

Solución

$$FrDom(f) = \mathbb{R}$$

b. Imagen

Solución

$$FrIm(f) = \mathbb{R}$$

c. Raíces

Solución

```
using SymPy
@syms x
f(x) = 2x^3-3x^2-12x+4
raices = solve(f(x)) # Solución exacta
print(raices)
N(raices) # Solución aproximada con decimales
```

```
Sym[-2, 7/4 - sqrt(33)/4, sqrt(33)/4 + 7/4]
```

3-element Vector{Real}:

-2

0.313859338365492835037347132945267670444933885504301908075030632358524819635648

3.186140661634507164962652867054732329555066114495698091924969367641475180364343

Hay tres raíces en  $x = -2$ ,  $x = 0.31$  y  $x = 3.19$  aproximadamente.

d. Signo

💡 Solución

Intervalos con  $f(x)$  negativa:  $(-\infty, -2) \cup (0.31, 3.19)$ .

Intervalos con  $f(x)$  positiva:  $(-2, 0.31) \cup (3.19, \infty)$ .

e. Crecimiento

💡 Solución

Intervalos con  $f(x)$  creciente:  $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ .

Intervalos con  $f(x)$  decreciente:  $(-1, 2)$ .

f. Extremos

💡 Solución

Máximo relativo en  $x = -1$  y el valor máximo es  $f(-1) = 11$ .

Mínimo relativo en  $x = 2$  y el valor del mínimo es  $f(2) = -16$ .

g. Concavidad

💡 Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba:  $(0.5, \infty)$ .

Intervalos de concavidad hacia abajo:  $(-\infty, 0.5)$ .

h. Puntos de inflexión

💡 Solución

Punto de inflexión en  $x = 0.5$ .

**Ejercicio 3.5.** Dibujar la gráfica de la función

$$g(t) = \frac{t^4 + 19t^2 - 5}{t^4 + 9t^2 - 10}$$

en el intervalo  $[-8, 8]$  y determinar, observando la gráfica, lo siguiente:

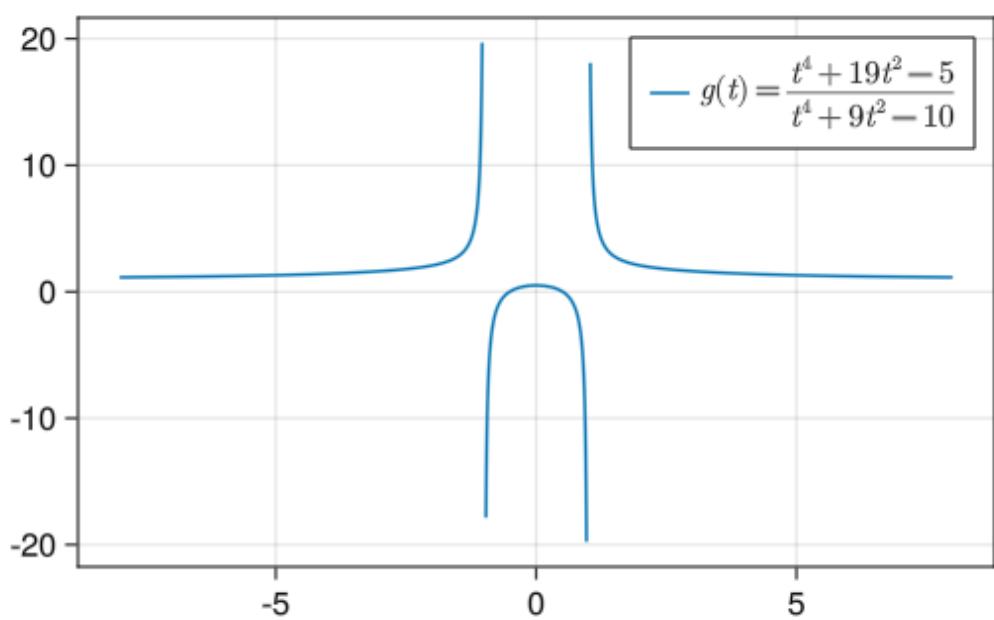
**Ayuda**

Usar la función `lines` del paquete `Makie`, o la función `plot` del paquete `Plots` con el parámetro `aspect_ratio=1.0` para que los ejes tengan la misma escala. Para respetar las discontinuidades utilizar la función `rangeclamp()` del paquete `MTH229`.

**Solución**

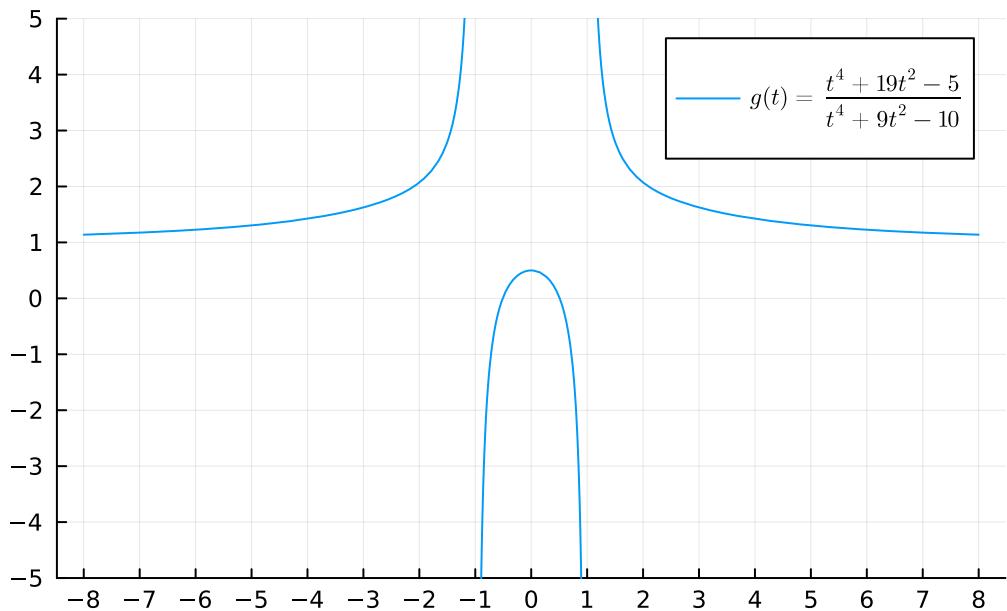
### 3.18 Makie

```
using GLMakie
g(t) = (t^4+19t^2-5) / (t^4+9t^2-10)
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -8..8, rangeclamp(g), label = L"$g(t) = \frac{t^4+19t^2-5}{t^4+9t^2-10}$")
axislegend()
fig
```



### 3.19 Plots

```
using Plots
g(t) = (t^4+19t^2-5) / (t^4+9t^2-10)
Plots.plot(rangeclamp(g), -8, 8, aspect_ratio=1.0, ylims=(-5,5) , xticks =Vector(-10:10))
```



- a. Dominio. ¿Qué pasa si aplicamos la función a algún valor fuera de su dominio?

Solución

$$FrDom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$g(-1), \quad g(1)$$

$$(\text{Inf}, \text{Inf})$$

Como se observa, al aplicar la función a  $-1$  y  $1$  se obtiene  $\infty$ .

- b. Imagen

Solución

$$FrIm(f) = \mathbb{R} \setminus (0.5, 1]$$

- c. Asíntotas. Dibujarlas.

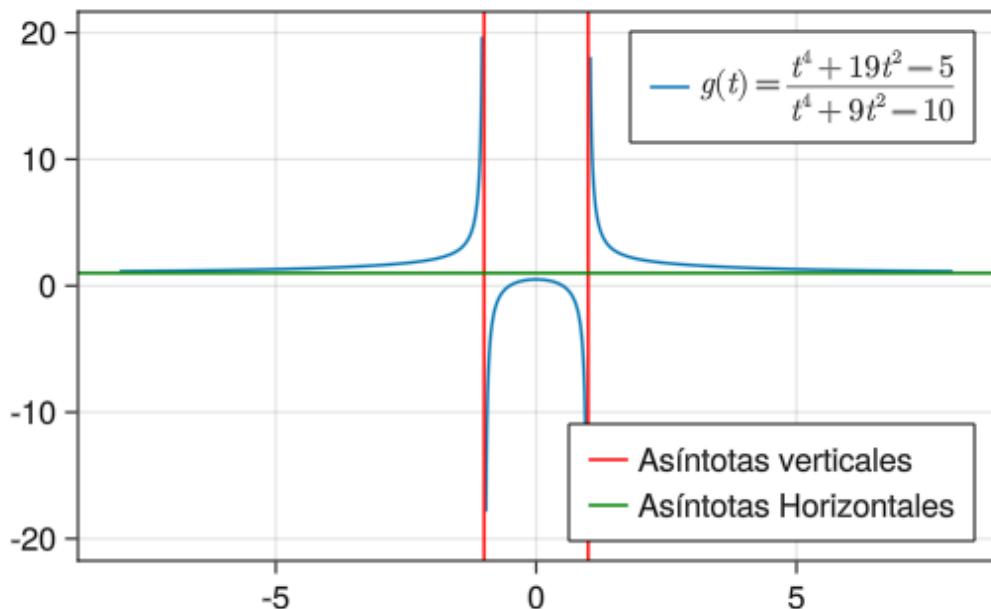
### Ayuda

Buscar las asíntotas verticales en los puntos fuera del dominio de la función. Para dibujar asíntotas verticales usar la función `vlines!` del paquete `Makie`, o `vline` del paquete `Plots`, y para dibujar las asíntotas horizontales usar la función `hlines!` del paquete `Makie`, o `hline` del paquete `Plots`.

### Solución

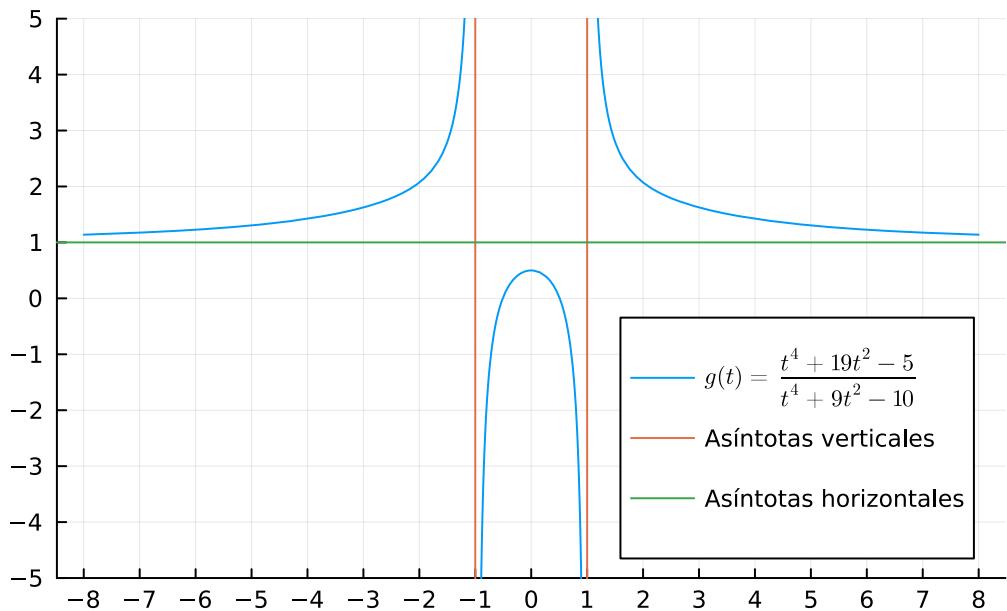
## 3.20 Makie

```
av = Makie.vlines!(ax, [-1,1], color = :red)
ah = Makie.hlines!([1], color = :green)
axislegend(ax, [av, ah], ["Asíntotas verticales", "Asíntotas Horizontales"], position=:bottomright)
fig
```



## 3.21 Plots

```
Plots.vline!([-1,1], label="Asíntotas verticales")
Plots.hline!([1], label="Asíntotas horizontales", legend=:bottomright)
```



Asíntotas verticales en  $x = -1$  y  $x = 1$ .

Asíntotas horizontales en  $y = 1$ .

No hay asíntotas oblicuas.

d. Raíces

Solución

Hay dos raíces en  $x = -0.5$  y  $x = 0.5$  aproximadamente.

e. Signo

Solución

Intervalos con  $f(x)$  positiva:  $(-\infty, -1) \cup (-0.5, 0.5) \cup (1, \infty)$ .

Intervalos con  $f(x)$  negativa:  $(-1, -0.5) \cup (0.5, 1)$ .

e. Crecimiento

Solución

Intervalos con  $f(x)$  creciente:  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ .

Intervalos con  $f(x)$  decreciente:  $(0, 1) \cup (1, \infty)$ .

f. Extremos

 Solución

Máximo relativo en  $x = 0$  y el valor máximo es  $g(0) = 0.5$ .  
No hay mínimos relativos.

g. Concavidad

 Solución

Intervalos de concavidad hacia arriba:  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .  
Intervalos de concavidad hacia abajo:  $(-1, 1)$ .

h. Puntos de inflexión

 Solución

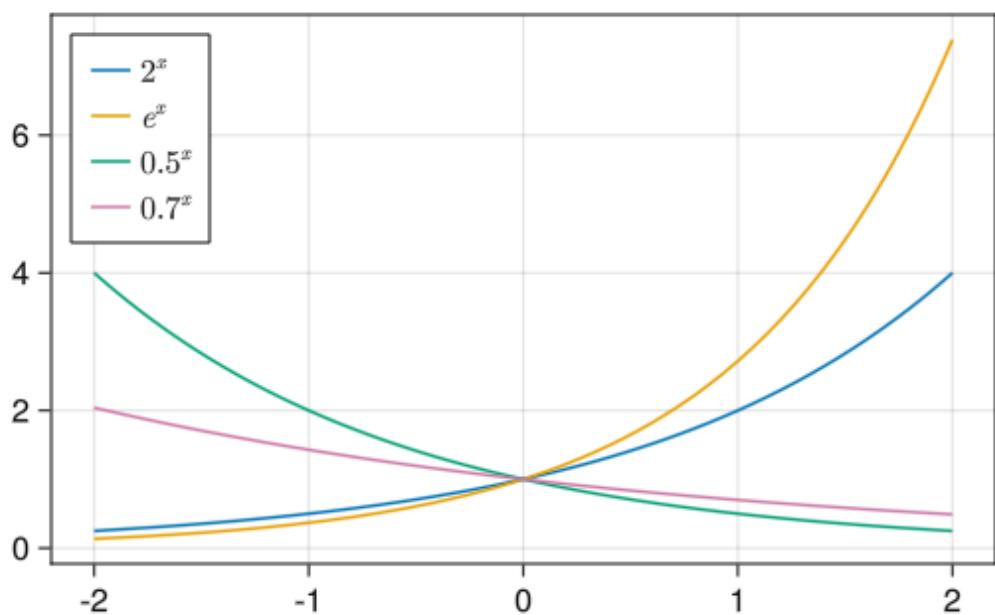
No hay puntos de inflexión.

**Ejercicio 3.6.** Dibujar la gráficas de las siguientes funciones exponenciales  $2^x$ ,  $e^x$ ,  $0.5^x$ ,  $0.7^x$  y responder a las siguientes preguntas comparando las gráficas.

 Solución

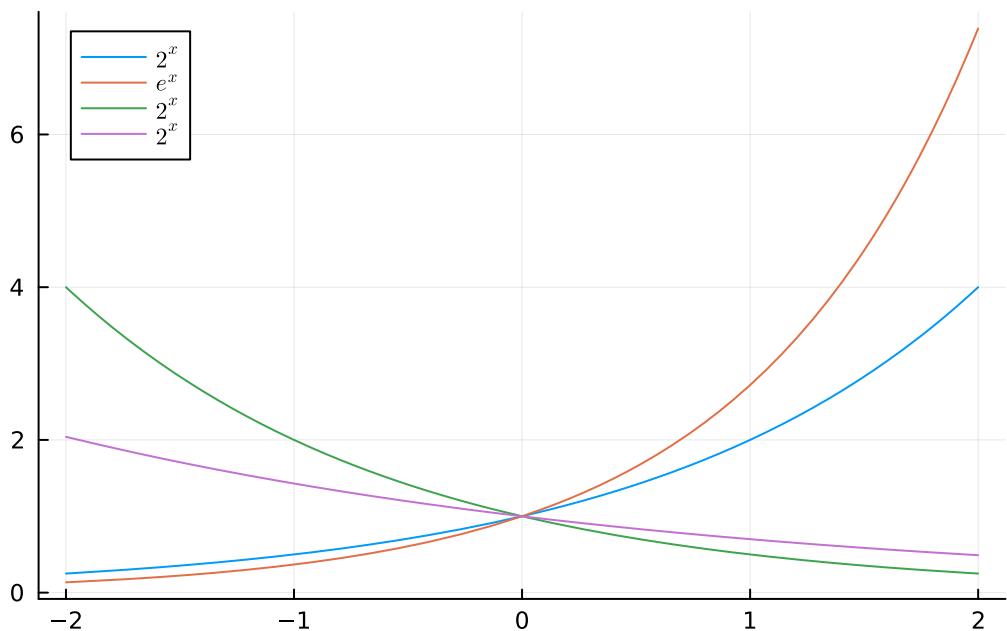
## 3.22 Makie

```
using GLMakie
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -2..2, x -> 2^x, label=L"$2^x$")
Makie.lines!(ax, -2..2, exp, label=L"$e^x$")
Makie.lines!(ax, -2..2, x -> 0.5^x, label=L"$0.5^x$")
Makie.lines!(ax, -2..2, x -> 0.7^x, label=L"$0.7^x$")
axislegend(position = :lt)
fig
```



### 3.23 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
Plots.plot(2^x, -2, 2, label=L"$2^x$")
Plots.plot!(exp(x), label=L"$e^x$")
Plots.plot!(0.5^x, label=L"$0.5^x$")
Plots.plot!(0.7^x, label=L"$0.7^x$")
```



a. ¿Cuál es el dominio de una función exponencial?

Solución

$\mathbb{R}$ .

b. ¿Cuál es la imagen de una función exponencial?

Solución

$\mathbb{R}^+$ .

c. ¿Cómo es el crecimiento de una función exponencial?

Solución

$a^x$  es creciente si  $a > 1$  y decreciente si  $0 < a < 1$ .

d. ¿Tienen extremos una función exponencial?

Solución

No

e. ¿Cómo es la curvatura de una función exponencial?

 Solución

Es cóncava hacia arriba.

**Ejercicio 3.7.** Dibujar la gráficas de las funciones trigonométricas  $Fr\sin(x)$ ,  $Fr\sin(x+2)$ ,  $Fr\sin(x) + 2$ ,  $Fr\sin(2x)$  y  $2Fr\sin(x)$ , y completar la siguiente tabla estudiando su periodo y amplitud.

Función	Periodo	Amplitud
$Fr\sin(x)$		
$Fr\sin(x+2)$		
$Fr\sin(x) + 2$		
$Fr\sin(2x)$		
$2Fr\sin(x)$		

¿Qué conclusiones sacas?

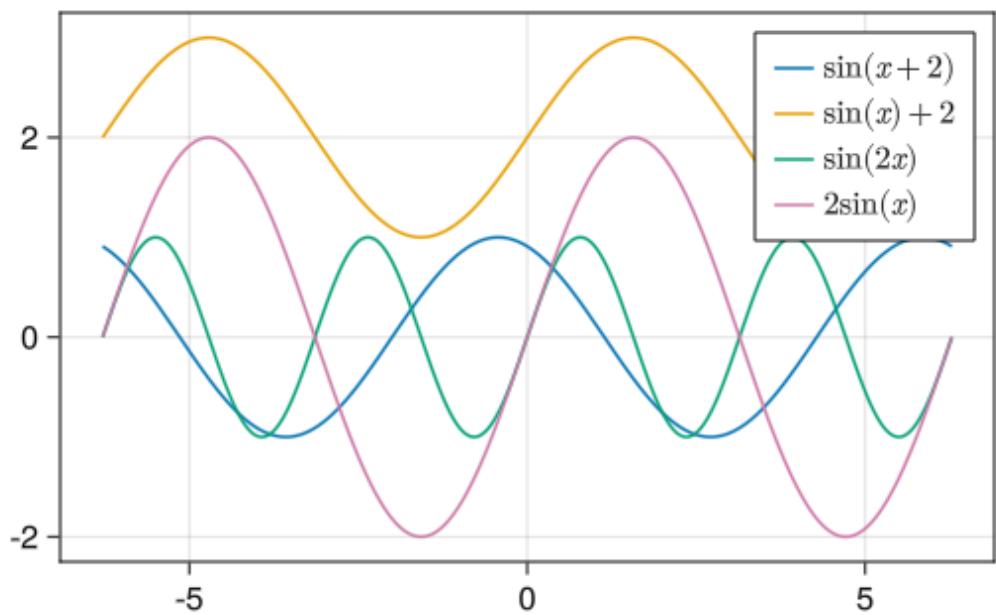
 Ayuda

El periodo es el mínimo intervalo en el que la gráfica de la función se repite, y la amplitud es la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función.

 Solución

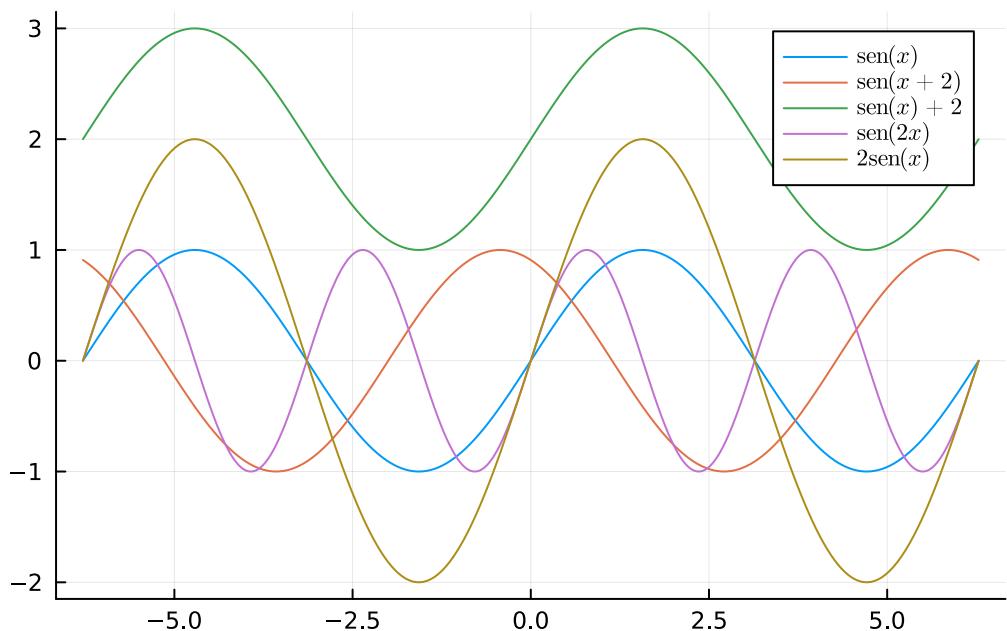
### 3.24 Makie

```
using GLMakie
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1])
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> sin(x+2), label=L"\sin(x+2)")
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> sin(x)+2, label=L"\sin(x)+2")
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> sin(2x), label=L"\sin(2x)")
Makie.lines!(ax, -2pi..2pi, x -> 2sin(x), label=L"2\sin(x)")
axislegend()
fig
```



### 3.25 Plots

```
using Plots, LaTeXStrings
Plots.plot(sin(x), -2*pi, 2*pi, label=L"\operatorname{sen}(x)")
Plots.plot!(sin(x+2), label=L"\operatorname{sen}(x+2)")
Plots.plot!(sin(x)+2, label=L"\operatorname{sen}(x)+2")
Plots.plot!(sin(2x), label=L"\operatorname{sen}(2x)")
Plots.plot!(2sin(x), label=L"2\operatorname{sen}(x)")
```



Función	Periodo	Amplitud
$F\text{rsen}(x)$	$2\pi$	1
$F\text{rsen}(x + 2)$	$2\pi$	1
$F\text{rsen}(x) + 2$	$2\pi$	1
$F\text{rsen}(2x)$	$\pi$	1
$2F\text{rsen}(x)$	$2\pi$	2

Se observa que al sumar una constante a la función seno o a su argumento, el periodo y la amplitud no cambian. Sin embargo, si se multiplica por una constante el seno, cambia la amplitud, y si se multiplica su argumento, cambia el periodo.

**Ejercicio 3.8.** Dibujar la gráfica de la función a trozos

$$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2; \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

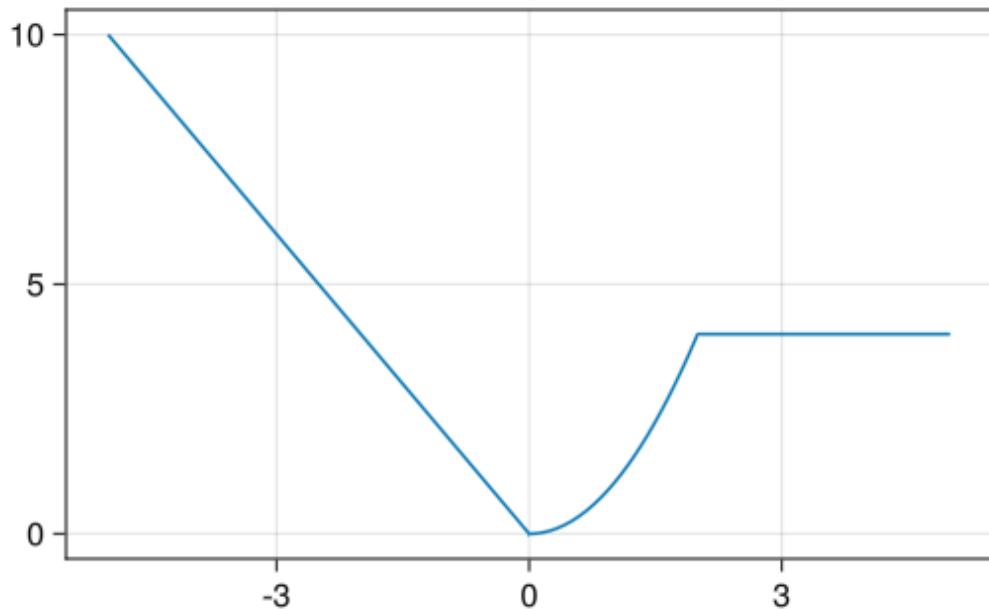
**Ayuda**

Usar el [operador condicional anidado](#).

 Solución

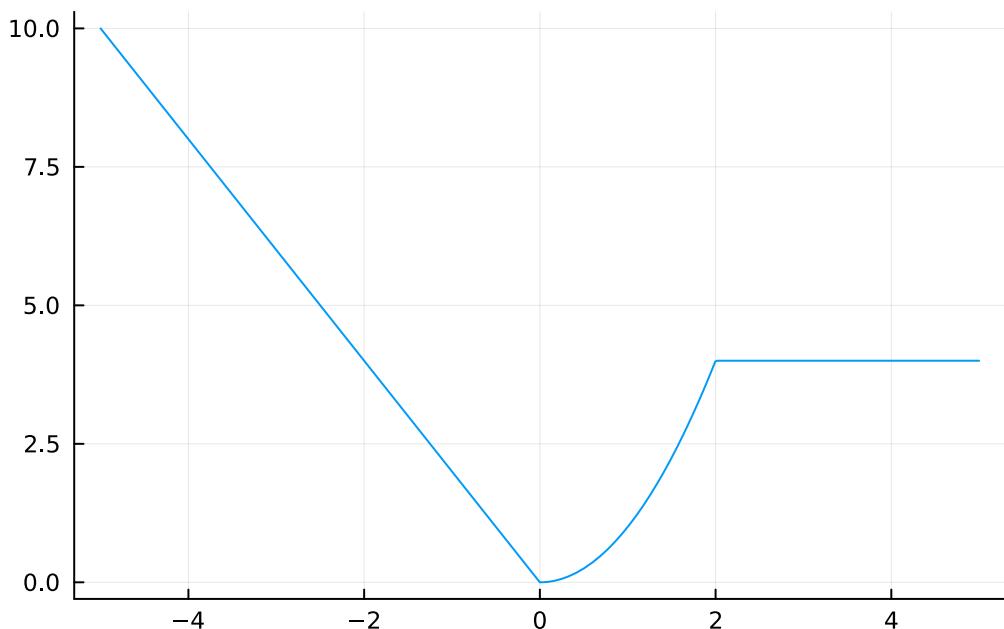
### 3.26 Makie

```
using GLMakie  
h(x) = x<=0 ? -2x : x<=2 ? x^2 : 4  
Makie.lines(-5..5, h)
```



### 3.27 Plots

```
using Plots  
h(x) = x<=0 ? -2x : x<=2 ? x^2 : 4  
Plots.plot(h, legend = false)
```



**Ejercicio 3.9.** Una hormiga se mueve sobre el plano real de manera que en cada instante  $t$  su posición viene dada por las funciones

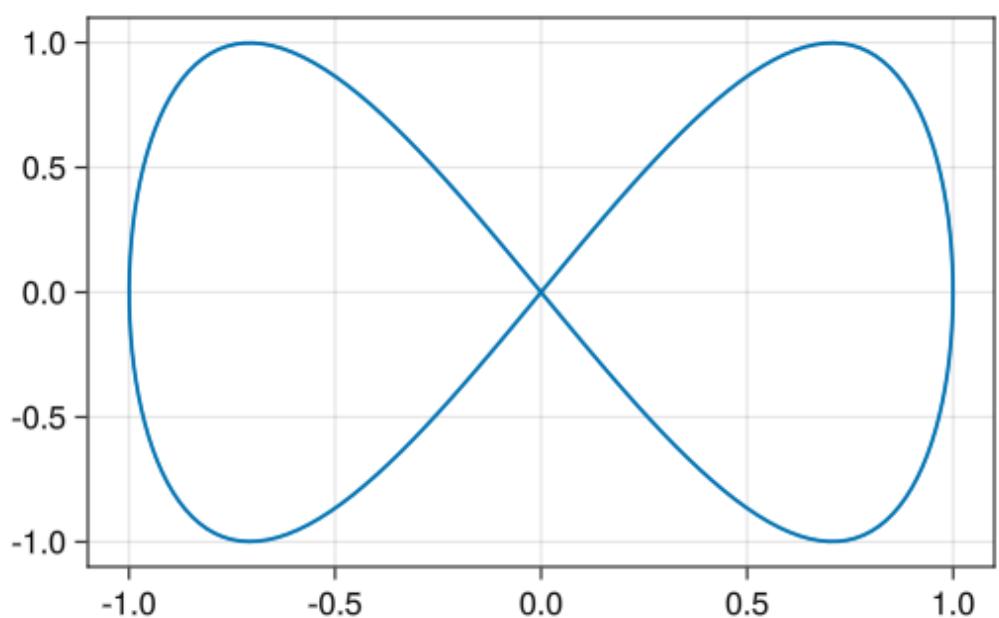
$$\begin{cases} x = Frsen(t) \\ y = Frsen(2t) \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de la trayectoria de la hormiga.

Solución

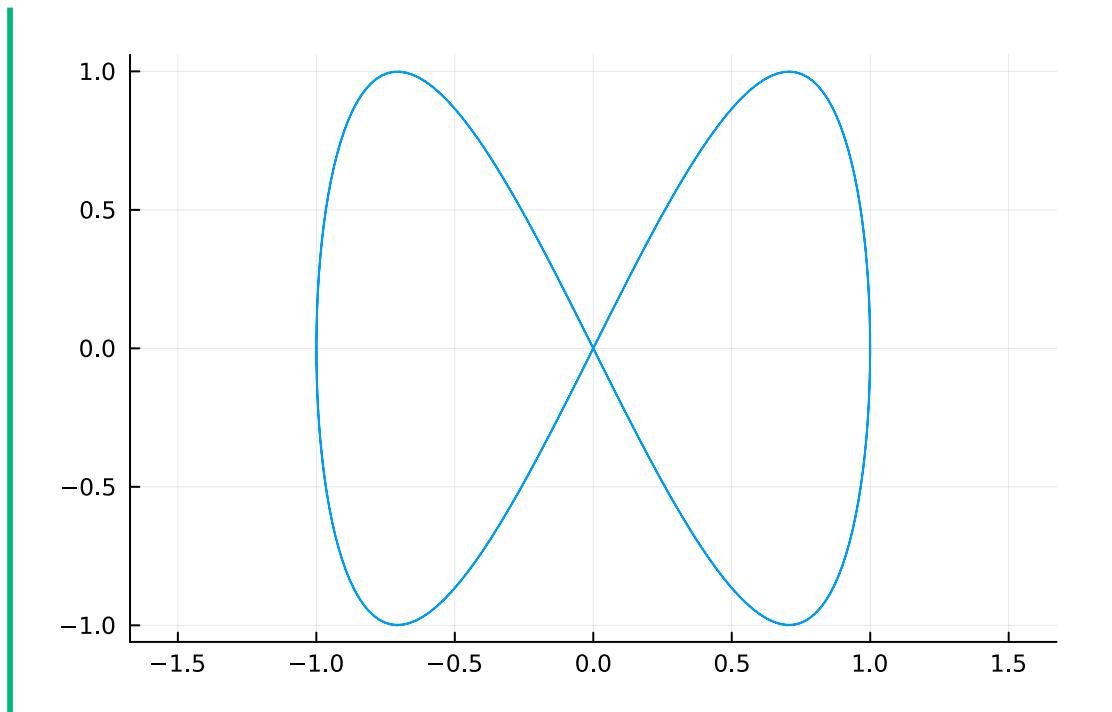
### 3.28 Makie

```
using GLMakie
u1(t)=sin(t)
v1(t)=sin(2t)
ts = range(0, 4pi, 200)
Makie.lines(u1.(ts), v1.(ts))
```



### 3.29 Plots

```
using Plots
u1(t)=sin(t)
v1(t)=sin(2t)
Plots.plot(u1, v1, 0, 4pi, aspect_ratio=1.0, legend = false)
```



### 3.30 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 3.10.** ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen dominio  $\mathbb{R}$  e imagen  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ?

- $2^x$
- $x^4 - 2x^3 + 4x$
- $|x|$
- $1/x^2$
- $\sqrt{x}$

(Select one or more)

**Ejercicio 3.11.** Dibujar las gráficas de las funciones logarítmicas  $\ln(x)$ ,  $\log_2(x)$  y  $\log_{0.5}(x)$  y contestar a las siguientes preguntas.

- a. ¿Cuál es el dominio de una función logarítmica?

Las otras opciones son falsas.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}$

b. ¿Cuál es la imagen de una función logarítmica?

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^-$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^+$

Las otras opciones son falsas.

c. ¿Cómo es el crecimiento la función logarítmica  $\log_a(x)$ ?

Decreciente si  $0 < a < 1$

Creciente si  $0 < a < 1$

Creciente si  $a < 1$

Creciente si  $a > 1$

(Select one or more)

d. ¿Cómo es la concavidad la función logarítmica  $\log_a(x)$ ?

Cóncava hacia abajo si  $a < 1$

Cóncava hacia abajo si  $0 < a < 1$

Cóncava hacia arriba si  $a > 1$

Cóncava hacia arriba si  $0 < a < 1$

(Select one or more)

**Ejercicio 3.12.** ¿Cuál es el periodo y la amplitud de la función  $2 \cos(x/2)$ ?

2 y 1

2 y 2

y 2

4 y 1

4 y 2

**Ejercicio 3.13.** ¿Cuál de las gráficas corresponde a la siguiente función paramétrica?

$$f(t) = \begin{cases} Frsen(2t) - \cos(t) \\ Frsen(t) + \cos(t) \end{cases}$$

insert image here

# 4 Límites de funciones reales

## 4.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.  
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.  
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.
```

**Ejercicio 4.1.** Sea la función  $f(x) = x^2$ .

- a. Estudiar la tendencia de  $f$  cuando  $x$  se aproxima a 3 por la derecha, evaluando la función en  $x = 3 + \frac{1}{10^i}$  para  $i = 1, \dots, 10$ .

**i** Ayuda

Definir la función y aplicar la función a los valores de  $x$  indicados usando [compresiones de arrays](#).

**💡 Solución**

```
f(x) = x^2  
a = 3  
print([f(a+1/10^i) for i = 1:10])
```

```
[9.610000000000001, 9.30249999999998, 9.20111111111111, 9.150625, 9.1204, 9.10027]
```

La función tiende a 9.

- b. Estudiar la tendencia de  $f$  cuando  $x$  se aproxima a 3 por la izquierda, evaluando la función en  $x = 3 - \frac{1}{10^i}$  para  $i = 1, \dots, 10$ .

### Solución

```
print([f(a-1/10*i) for i = 1:10])
```

```
[8.41, 8.7025, 8.8011111111112, 8.850625, 8.8804, 8.900277777777777, 8.914489795]
```

La función también tiende a 9.

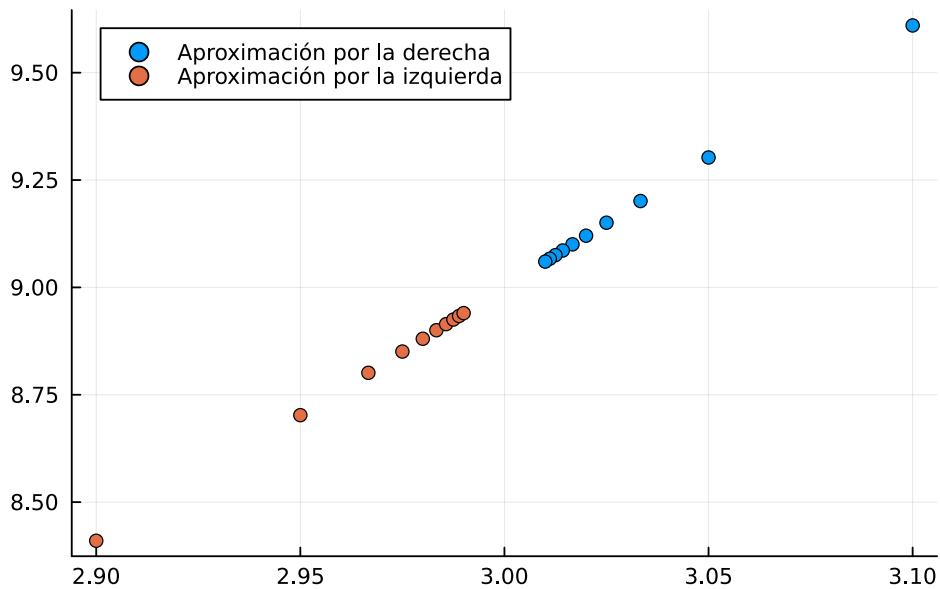
- c. Dibujar la gráfica de los valores de  $f$  evaluados en los apartados anteriores diferenciando la tendencia por la izquierda de la tendencia por la derecha.

### Ayuda

Definir un vector con los valores de  $x$  y otro con los valores correspondientes de  $f(x)$  y usar la función `scatter` del paquete `Plots`, pasandole los dos vectores.

### Solución

```
xd = [a+1/10*i for i=1:10]
scatter(xd, f.(xd), label="Aproximación por la derecha")
xi = [a-1/10*i for i=1:10]
scatter!(xi, f.(xi), label="Aproximación por la izquierda", legend=:topleft)
```



- d. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de  $f$  en  $x = 3$ .

**i** Ayuda

Declarar la variable simbólica  $x$  con `@syms` imponiendo la restricción `real=true`, definir la función  $y$  y usar la función `limit` del paquete SymPy para calcular los límites laterales de la función. Para el límite por la izquierda indicar el parámetro `dir="-"` y para el límite por la derecha `dir="+"`.

**💡 Solución**

```
@syms x::real
li = limit(f(x), x=>3, dir="-")
println("Límite por la izquierda: ", li)
ld = limit(f(x), x=>3, dir="+")
println("Límite por la derecha: ", ld)
```

```
Límite por la izquierda: 9
Límite por la derecha: 9
```

**Ejercicio 4.2.** Sea la función  $g(x) = (1+x)^{1/x}$ .

- a. Estudiar la tendencia de  $g$  cuando  $x$  se aproxima a 0 por la derecha, evaluando la función en  $x = \frac{1}{10^i}$  para  $i = 1, \dots, 10$ .

**💡 Solución**

```
g(x) = (1+x)^(1/x)
a = 0
print([g(a+1/10^i) for i = 1:10])
```

```
[2.5937424601000023, 2.7048138294215285, 2.7169239322355936, 2.7181459268249255, 2.7200000000000002]
```

La función tiende a  $e$ .

- b. Estudiar la tendencia de  $g$  cuando  $x$  se aproxima a 0 por la izquierda, evaluando la función en  $x = -\frac{1}{10^i}$  para  $i = 1, \dots, 10$ .

**💡 Solución**

```
print([g(a-1/10^i) for i = 1:10])
```

[2.867971990792441, 2.7319990264290284, 2.7196422164428524, 2.71841775501015, 2.71841775501015]  
La función también tiende a e.

- c. Calcular el límite por la izquierda y por la derecha de  $g$  en  $x = 0$ .

 Solución

```
@syms x::real
li = limit(g(x), x>0, dir="-")
println("Límite por la izquierda: ", li)
ld = limit(g(x), x>0, dir="+")
println("Límite por la derecha: ", ld)

Límite por la izquierda: E
Límite por la derecha: E
```

**Ejercicio 4.3.** Considérese la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2}.$$

- a. Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites:

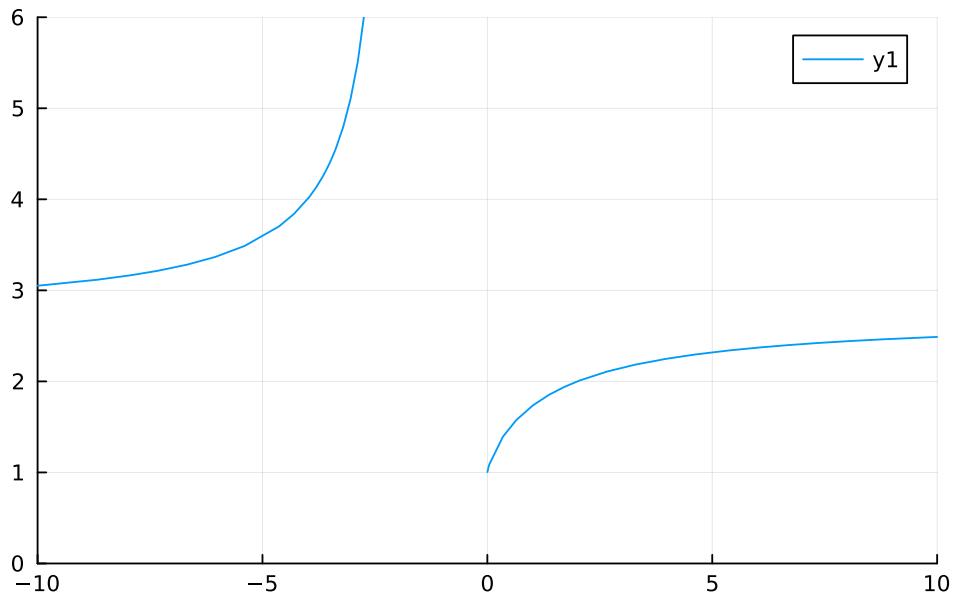
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

 Ayuda

Utilizar la función `plot!` del paquete `Plots`. Usar los parámetros `xlims=(a,b)` para restringir la región de dibujo al intervalo  $(a, b)$  del eje  $x$ , y `ylims=(c,d)` para restringir la región de dibujo al intervalo  $(c, d)$  del eje  $y$ .

### Solución

```
using Plots  
f(x) = (1+2/x)^(x/2)  
plot(f, xlims=(-10,10), ylims=(0,6))
```



A la vista de la gráfica, se puede concluir que

- i.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ .
- ii.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  no existe.
- iii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \approx 2.7$ .
- iv.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \approx 2.7$ .
- v.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ .
- vi.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

b. Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?

### Solución

```
using SymPy
@syms x::real
println("Límite por la izquierda en -2: ", limit(f(x), x=>-2, dir="-"))
println("Límite por la derecha en -2: ", limit(f(x), x=>-2, dir="+"))
println("Límite en -∞: ", limit(f(x), x=>-oo))
println("Límite en ∞: ", limit(f(x), x=>oo))
println("Límite en 2: ", limit(f(x), x=>2))
println("Límite en 0: ", limit(f(x), x=>0))
```

```
Límite por la izquierda en -2: ∞
Límite por la derecha en -2:
-∞
Límite en -∞: E
Límite en ∞: E
Límite en 2: 2
Límite en 0:
1
```

### Precaución

Aunque Julia calcula el límite en  $-2$  por la derecha y el límite en  $0$ , a la vista de la gráfica, estos límites en realidad no existen, ya que la función no está definida en el intervalo de  $[-2, 0]$ .

### Ejercicio 4.4. Calcular los siguientes límites

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

### Solución

```
using SymPy
@syms x::real
limit(sin(1/x), x=>0)
```

$(-1, 1)$

Como no se obtiene un valor concreto, sino un rango de valores, el límite no existe.

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\sin x}{x}$

 Solución

```
limit(x*sin(1/x), x=>0)
```

0

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} Frsen(x)$

 Solución

```
limit( ^(-x)*sin(x), x=>oo)
```

0

d.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Frsen(x) - Frsen(a)}{x - a}$

 Solución

```
@syms a::real  
limit((sin(x)-sin(a))/(x-a), x=>a)
```

$\cos(a)$

**Ejercicio 4.5.** Calcular el valor de las siguientes funciones en los puntos dados y su límite. Corroborar los límites obtenidos gráficamente.

a.  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  en  $x = 0$ .

 Solución

La función  $f$  no está definida en  $x = 0$  de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

```
f(x)=sin(x)/x  
f(0)
```

NaN

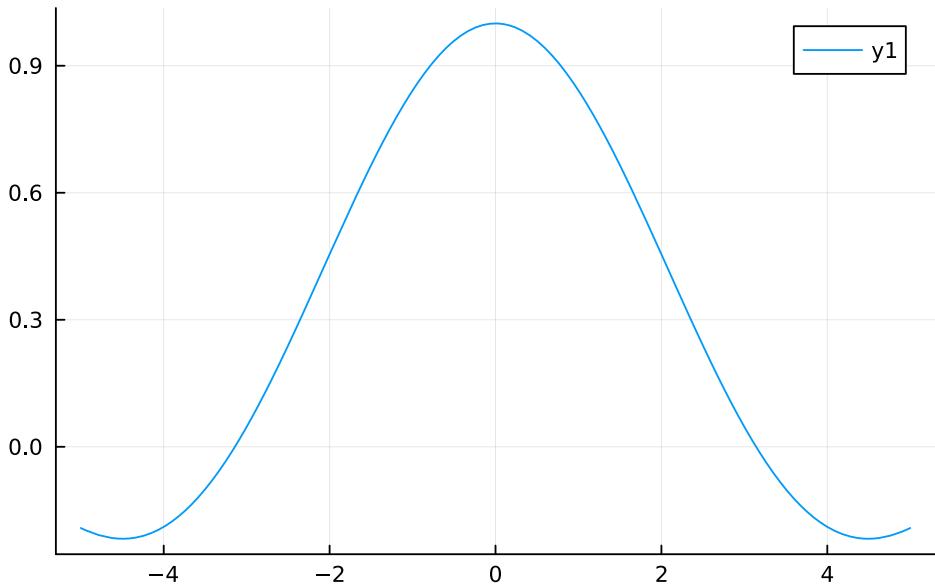
Ahora calculamos el límite de  $f$  en 0.

```
@syms x::real  
f(x)=sin(x)/x  
limit(f(x), x=>0)
```

1

Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de  $f$  en un entorno de 0.

```
using Plots  
plot(f)
```



b.  $g(x) = \frac{\cos(x)}{x - \pi/2}$  en  $x = \pi/2$ .

### 💡 Solución

La función  $f$  no está definida en  $x = 0$  de manera que al evaluarla en 0 obtenemos un valor indeterminado.

```
g(x)=cos(x)/(x-pi/2)  
g(pi/2)
```

Inf

Como se puede observar, se obtiene  $\infty$  en lugar de indeterminado. La razón está en la representación de los números reales mediante números con coma flotante, de manera que  $\pi/2$  se redondea al número de coma flotante más próximo, y al aplicar el coseno se obtiene un número muy próximo a 0 pero distinto de 0.

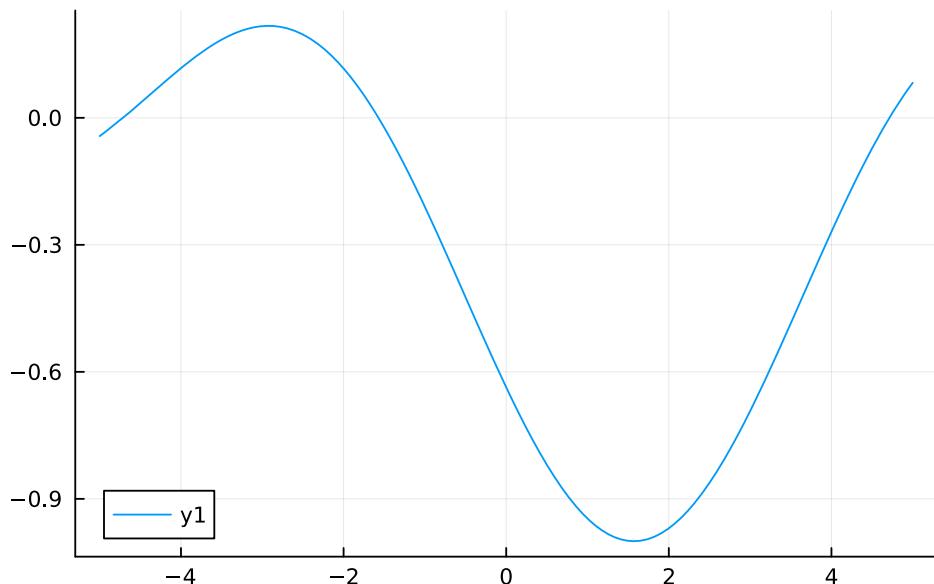
Ahora calculamos el límite de  $g$  en  $\pi/2$ .

```
limit(g(x), x=>pi/2)
```

```
-0.017235371463439
```

Para corroborar el límite dibujamos la gráfica de  $g$  en un entorno de  $\pi/2$ .

```
using Plots  
plot(g)
```



Como se puede apreciar gráficamente la tendencia de  $g$  en  $\pi/2$  es  $-1$  y no el valor obtenido con el cálculo del límite. De nuevo el problema está en la aproximación de  $\pi$  como un real en coma flotante. Afortunadamente el paquete SymPy permite definir una constante como simbólica para evitar su conversión a número en coma flotante, usando la función `Sym()`. También podemos usar la constante simbólica predefinida `Pi`. Repetimos la definición de la función y el cálculo de nuevo convirtiendo  $\pi$  en una constante simbólica.

```
g(x)=cos(x)/(x-Sym(pi)/2)  
limit(g(x), x=>Sym(pi)/2)
```

```
-1
```

**Ejercicio 4.6.** Considérese la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{2x-6} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

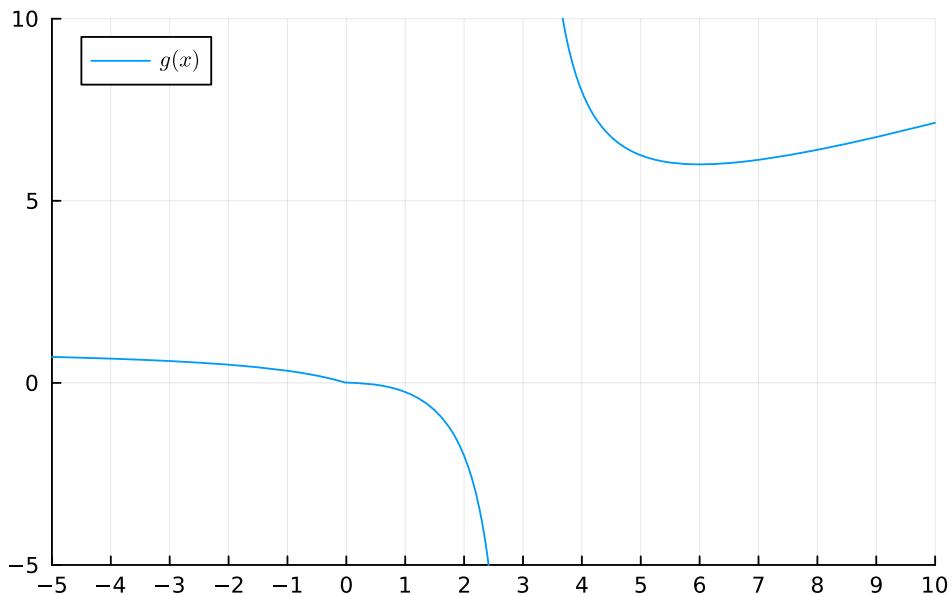
- a. Dibujar la gráfica de  $g$  y determinar gráficamente si existen asíntotas.

**i** Ayuda

Para respetar las discontinuidades utilizar la función `rangeclamp()` del paquete MTH229.

**?** Solución

```
using Plots, MTH229, LaTeXStrings
@syms x::real
g1(x) = x/(x-2)
g2(x) = x^2/(2x-6)
g(x) = x<=0 ? g1(x) : g2(x)
plot(rangeclamp(g), xlims=(-5,10), ylims=(-5,10), xticks=-5:10, label = L"g(x)"
```



A la vista de la gráfica, se observa que  $g$  tiene una asíntota vertical en  $x = 3$ , una asíntota horizontal  $y = 1$  en  $-\infty$  y parece que también hay una asíntota oblicua en  $\infty$ .

- b. Calcular las asíntotas verticales de  $g$  y dibujarlas.

 Solución

Estudiamos primero el dominio para ver dónde no está definida la función. Como tanto la rama negativa como la positiva son funciones racionales, hay que ver los puntos que anulan el denominador.

```
println("Puntos fuera del dominio de la rama negativa: ", solve(x-2))
println("Puntos fuera del dominio de la rama positiva: ", solve(2x-6))
```

Puntos fuera del dominio de la rama negativa: Sym[2]  
Puntos fuera del dominio de la rama positiva: Sym[3]

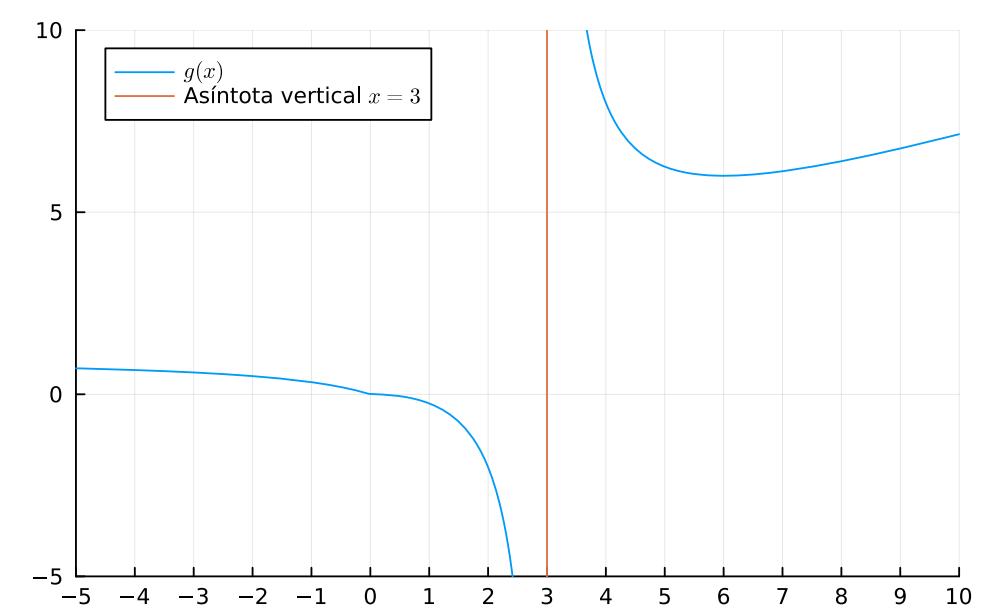
Así pues la rama negativa está definida en todos  $\mathbb{R}^-$  y la rama positiva en  $\mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$ . Es en este último punto donde  $g$  puede tener asíntota vertical, así que estudiamos los límites laterales.

```
println("Límite en 3 por la izquierda: ", limit(g(x), x=>3, dir="-"))
println("Límite en 3 por la derecha: ", limit(g(x), x=>3, dir="+"))
```

Límite en 3 por la izquierda: -oo  
Límite en 3 por la derecha: oo

Por tanto,  $g$  tiene una asíntota vertical en  $x = 3$ .

```
vline!([3], label = L"Asíntota vertical $x=3$")
```



c. Calcular las asíntotas horizontales de  $g$ .

#### 💡 Solución

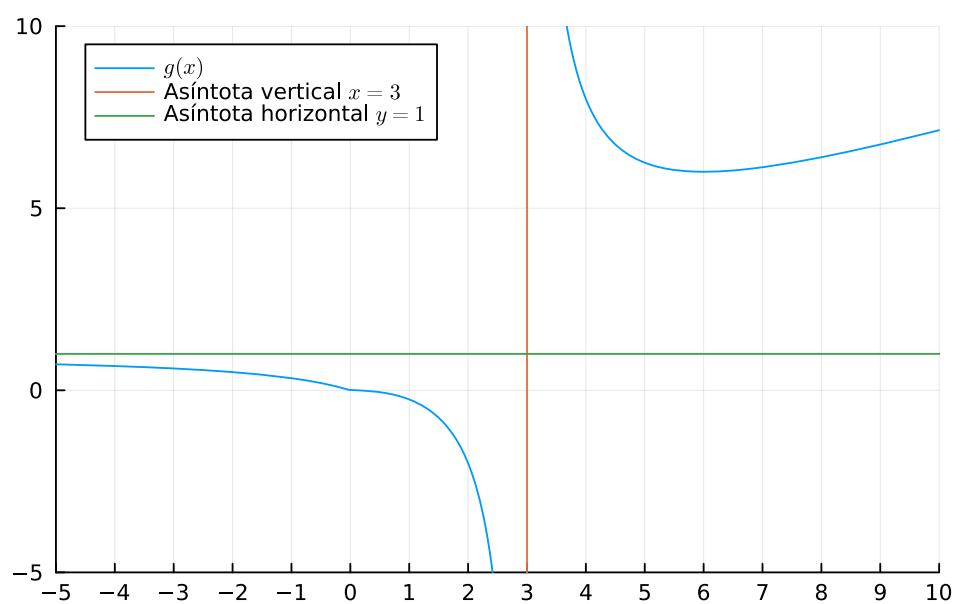
Estudiamos los límites en el infinito.

```
println("Límite en -∞: ", limit(g1(x), x>-oo))
println("Límite en ∞: ", limit(g2(x), x>oo))
```

```
Límite en -∞: 1
Límite en ∞: ∞
```

Por tanto,  $g$  tiene una asíntota horizontal  $y = 1$  en  $-\infty$ .

```
hline!([1], label = L"Asíntota horizontal $y=1$")
```



d. Calcular las asíntotas oblicuas de  $g$ .

#### 💡 Solución

Estudiamos el límite en  $\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$  (en  $-\infty$  no puede haber asíntota oblicua al haber asíntota horizontal).

```
limit(g2(x)/x, x=>oo)
```

 $\frac{1}{2}$ 

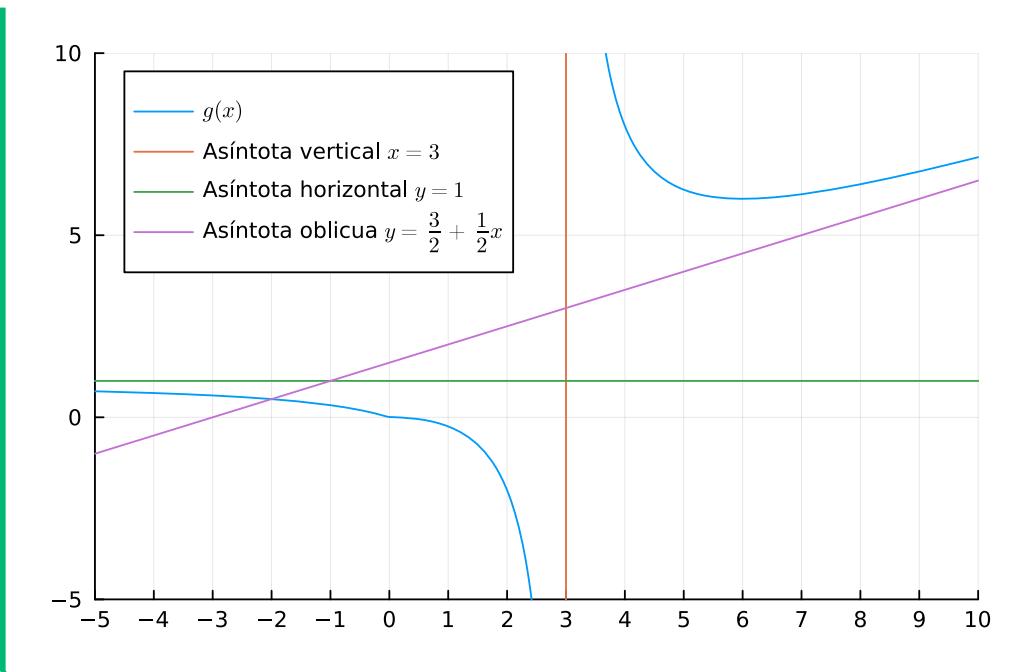
Por tanto,  $g$  tiene una asíntota oblicua con pendiente  $b = 1/2$  en  $\infty$ . Para obtener el término independiente de la asíntota calculamos el límite en  $\infty$  de  $f(x) - \frac{1}{2}x$ .

```
limit(g2(x)-x/2, x=>oo)
```

 $\frac{3}{2}$ 

Por tanto,  $g$  tiene una asíntota oblicua  $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$ .

```
plot!(3/2+x/2, label = L"Asintota oblicua $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x$")
```



**Ejercicio 4.7.** Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-2x}{3x^2+x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{Fr tg(x)+a}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar  $a$  para que la función sea continua en todo su dominio?

**i** Ayuda

Calcular el límite en 0 por la izquierda de la función de la rama negativa, y el límite en 0 por la derecha de la función de la rama positiva. Después resolver la ecuación simbólica que resulta de igualar los dos límites. Para crear la ecuación simbólica debe utilizarse la función `Eq()` del paquete `Sympy` y después resolverla con la función `solve()`.

### Solución

```
@syms x::real a::real
h1(x) = (2x^2-2x)/(3x^2+x)
h2(x) = (tan(x)-a*x)/x
l1 = limit(h1(x), x=>0, dir="-")
l2 = limit(h2(x), x=>0, dir="+")
solve(Eq(l1,l2))
```

[ 3 ]

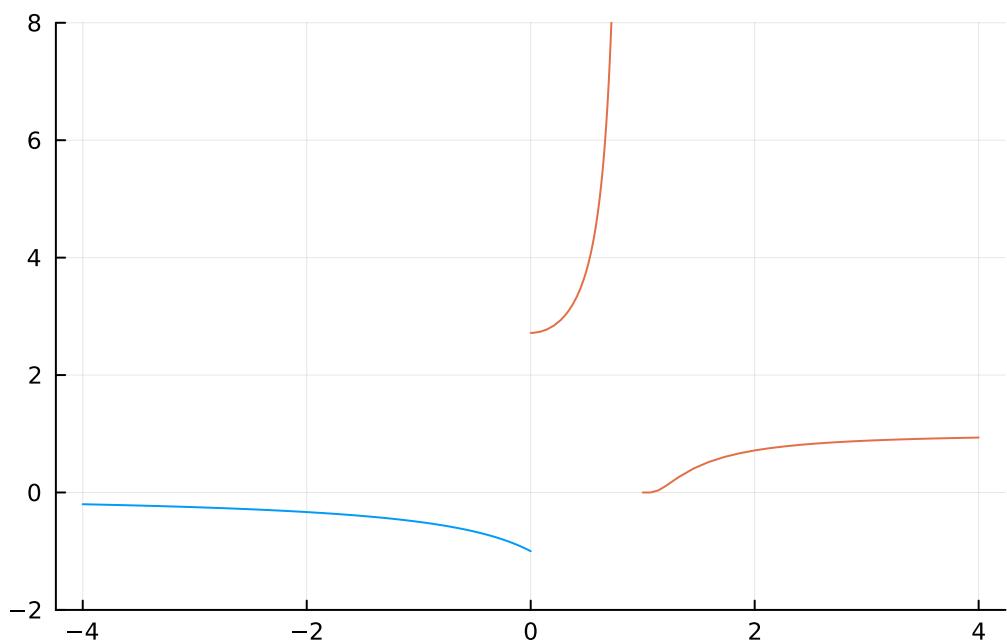
**Ejercicio 4.8.** Representar gráficamente y clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

### Solución

Para estudiar las discontinuidades de una función tenemos que estudiar los puntos que no están en el dominio y los puntos donde cambia la definición de la función en el caso de una función definida a trozos.

```
using Plots, MTH229, LaTeXStrings
@syms x::real
f1(x) = (x+1)/(x^2-1)
f2(x) = 1/exp(1/(x^2-1))
plot(f1, -4, 0, ylim=(-2,8), legend=false)
plot!(rangeclamp(f2), 0, 4)
```



Para determinar el dominio de la rama negativa, al ser una función racional, tenemos que ver los puntos que anulan el denominador.

```
solve(x^2-1)
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así pues, la función no está definida en  $x = -1$  (la otra raíz queda fuera de la rama negativa). Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en  $x = -1$ .

```
println("Límite en -1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="-"))
println("Límite en -1 por la derecha: ", limit(f1(x), x=> -1, dir="+"))
```

Límite en -1 por la izquierda: -1/2  
 Límite en -1 por la derecha: -1/2

Como el límite existe,  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $x = -1$ .

Del mismo modo la rama positiva no está definida en  $x = 1$  ya que se anula el denominador del exponente de la función exponencial. Para ver el tipo de discontinuidad estudiamos los límites laterales en  $x = 1$ .

```
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f2(x), x=>1, dir="-"))
println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>1, dir="+"))
```

Límite en 1 por la izquierda: oo

Límite en 1 por la derecha:

0

Como los límites laterales son distintos,  $f$  tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$ .

Finalmente, estudiamos los límites laterales en  $x = 0$ , que es donde cambia la definición de la función.

```
println("Límite en 1 por la izquierda: ", limit(f1(x), x=>0, dir="-"))
println("Límite en 1 por la derecha: ", limit(f2(x), x=>0, dir="+"))
```

Límite en 1 por la izquierda: -1

Límite en 1 por la derecha: E

Como los límites laterales son distintos,  $f$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 0$ .

**Ejercicio 4.9.** El [teorema de Bolzano](#) permite construir un algoritmo para encontrar raíces de una función continua en un intervalo  $[a, b]$  cuando  $f(a)f(b) < 0$ . Este algoritmo se conoce como el *algoritmo de bisección* y básicamente consiste en repetir los siguientes pasos:

1. Calcular el centro del intervalo  $c = \frac{a+b}{2}$ .
2. Si  $f(c) = 0$ ,  $c$  es una raíz y se termina la búsqueda.
3. En caso contrario, si  $f(a)f(c) < 0$  hacer  $b = c$ , y si no, hacer  $a = c$ .
4. Repetir la búsqueda.

Construir una función que implemente este algoritmo y utilizarlo para calcular una raíz de la función  $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 6x - 2$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

### Solución

```
function raices_biseccion(f, a, b, error=1e-10)
    if f(a) == 0 return(a) end
    if f(b) == 0 return(b) end
    if f(a) * f(b) > 0 error("Las imágenes de los extremos del intervalo no tienen signo contrario")
    c = (a+b)/2
    while abs(b-a) > error
        if f(c) == 0 return(c) end
        if f(a) * f(c) < 0
            b = c
        else
            a = c
        end
        c = (a+b)/2
    end
    c
end

f(x)=x^5+3x^4-2x^3+6x-4
print(raices_biseccion(f, 0, 1))
```

0.6496996753558051

## 4.2 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 4.10.** En 1683 Jacob Bernouilli estudió la evolución del interés compuesto cuando el periodo de actualización se hacía cada vez más pequeño.

Si disponemos de 1€ en una cuenta corriente que ofrece un 100% de interés anual, al cabo de un año tendremos 2€ en la cuenta. Si la cuenta ofrece un interés del 50% cada 6 meses, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\text{€}.$$

Si la cuenta ofrece un interés del 25% cada trimestre, al final del año tendremos

$$1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.44140625\text{€}.$$

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del 1/12% mensual?

\*Hint: \*

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta ofrece un interés del 1/365% diario?

\*Hint: \*

Introducir hasta 10 decimales

¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si la cuenta se actualiza de manera continua con un interés  $1/x\%$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ?

$$e^2$$

3

2.7182818284590

e

$$e^{-1}$$

**Ejercicio 4.11.** Calcular los siguientes límites.

a.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{Fr\sin(x) - \cos(x)}{1 - Fr\operatorname{tg}(x)}.$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1}.$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$

0

$-\infty$

1

$\infty$

NaN

a.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{1-x} - 1}{1 - x}.$

$\sqrt{a}$

$e^a$

$\ln(a)$

Las otras opciones son falsas.

$1/a$

**Ejercicio 4.12.** ¿Cuáles de las siguientes rectas son asíntotas de la función  $f(x) = \frac{x^2+1}{3x+3}$ ?

$y = 3x + 1$

$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$

$y = \frac{x-1}{3}$

$y = 1$

$x = -1$

(Select one or more)

**Ejercicio 4.13.** ¿Cuándo debería valer la función  $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$  para que fuese continua en  $x = 0$ .

**Ejercicio 4.14.** Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x - 2 & \text{si } x \leq 0, \\ \cos(x - \pi/2) + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar  $a$  para que la función sea continua en todo su dominio?

No hay ningún valor de  $a$  que haga la función continua

$-2$

$-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 - \sqrt{2}$

**Ejercicio 4.15.** ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función  $g(x) = \frac{1}{e^{1/(x^2-1)}}$  en  $x = -1$ ?

Es continua

Salto infinito

Salto finito

Segunda especie

Evitable

**Ejercicio 4.16.** Calcular de forma aproximada con el algoritmo de bisección una solución de la ecuación  $e^{-x} = \cos(x)$  en el intervalo  $[1, 2]$  con un error menor de  $10^{-15}$ .

# 5 Derivadas de funciones reales

## 5.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.  
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.  
using ImplicitPlots # Para dibujar curvas implícitas.  
using MTH229 # Para restringir la gráfica de una función a su dominio.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.  
using Latexify # Para convertir expresiones a código LaTeX.
```

**Ejercicio 5.1.** Galileo Galilei trató de estudiar el movimiento de un cuerpo en caída libre con un experimento en el que midió la distancia recorrida cada segundo por una bola que caía por un plano inclinado.



Figura 5.1: Plano inclinado de Galileo.

La siguiente tabla recoge sus mediciones.

Tiempo (s)	Distancia (cm)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

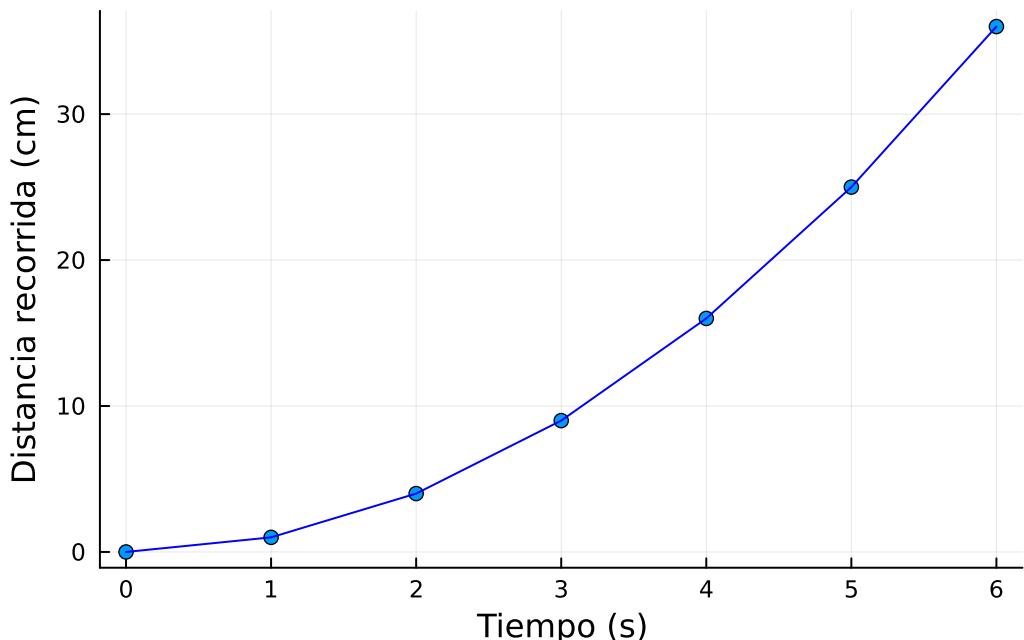
- a. Dibujar la gráfica que resulta de unir los puntos correspondientes a los pares de la tabla con segmentos. ¿Qué forma tiene la gráfica?

 Ayuda

Definir dos arrays con los valores del tiempo y la distancia y usar la función `scatter` del paquete `Plots` para dibujar los puntos y la función `plots` del paquete `Plots` para dibujar un diagrama de líneas uniendo los puntos.

 Solución

```
using Plots
t = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
d = [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36]
scatter(t, d, legend=false)
plt = plot!(t, d, linecolor="blue", xlab="Tiempo (s)", ylab="Distancia recorrida (cm))
```



Se aprecia que una forma parabólica.

- b. Calcular la velocidad media (tasa de variación media) desde los instantes  $t = 0, 1, 2$  hasta el instante  $t = 3$  y dibujar la rectas secantes a la gráfica anterior en esos instantes. ¿Cómo es la tendencia de las velocidades medias?

### Ayuda

La tasa de variación media de una función  $f$  en un intervalo  $[a, b]$  viene dada por la fórmula

$$TVM(f, [a, b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

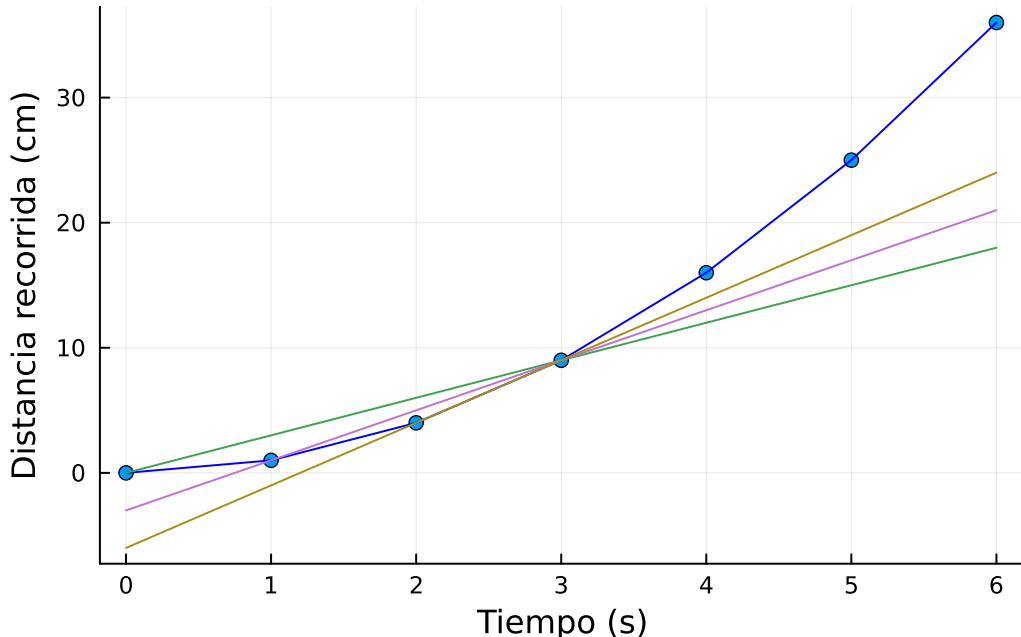
y la recta secante a la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  tiene ecuación

$$y = f(a) + TVM(f, [a, b])(x - a).$$

### Solución

```
# Función para el cálculo de la velocidad media en del instante i al instante j.
tvm(i, j) = (d[j]-d[i])/(t[j]-t[i])
j = 4
# Cálculo de las velocidades medias.
for i in 1:3
    println("Velocidad media desde el instante $(t[i]) al instante $(t[j]): $(tvm(i,
end
# Función para calcular la ecuación de la recta secante en los instantes i y j.
secante(x, i, j) = d[i] + tvm(i, j) * (x - t[i])
# Dibujo de las rectas secantes
for i in 1:3
    plt = plot!(x -> secante(x,i,j))
end
plt
```

```
Velocidad media desde el instante 0 al instante 3: 3.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 1 al instante 3: 4.0 cm/s
Velocidad media desde el instante 2 al instante 3: 5.0 cm/s
```



Las velocidades medias crecen a medida que pasa el tiempo.

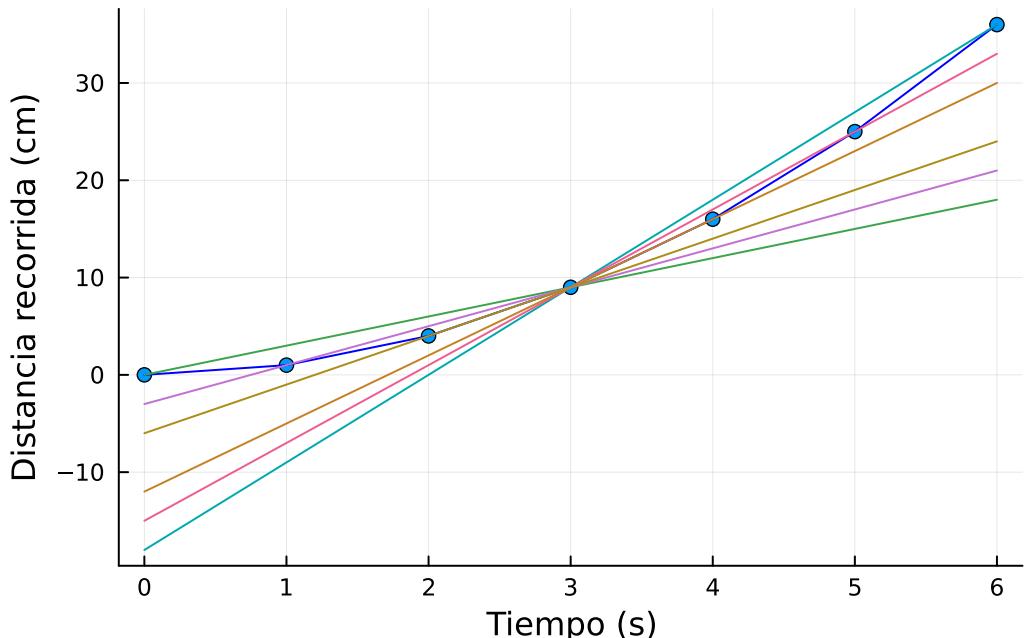
- c. Calcular la velocidad media desde el instante  $t = 3$  hasta los instantes  $t = 6, 5, 4$  y dibujar la rectas secantes a la gráfica anterior en esos instantes. ¿Cómo es la tendencia de las velocidades medias? ¿Hacia dónde tiende la velocidad media cuando los aproximamos al instante  $t = 3$  con instantes menores y mayores?

#### 💡 Solución

```
i = 4
# Cálculo de las velocidades medias.
for j in 7:-1:5
    println("Velocidad media desde el instante ${t[i]} al instante ${t[j]}: ${tvm(i,j)}")
end
# Dibujo de las rectas secantes.
for j in 7:-1:5
    plt = plot!(x -> secante(x,i,j))
end
plt
```

Velocidad media desde el instante 3 al instante 6: 9.0 cm/s  
 Velocidad media desde el instante 3 al instante 5: 8.0 cm/s

Velocidad media desde el instante 3 al instante 4: 7.0 cm/s



Las velocidades medias decrecen a medida que el tiempo decrece.

Se puede deducir que las velocidades medias tienden a 6 cm/s cuando los instantes se aproximan a 3 s.

- d. Calcular la variación en la distancia recorrida cada segundo que pasa. ¿Cómo evoluciona la velocidad de la bola?

#### Solución

```
v = []
for i in 2:length(d)
    push!(v, d[i]-d[i-1])
    println("Velocidad media desde el instante $(t[i-1]) al instante $(t[i]): $(v[i-1]))")
end
```

Velocidad media desde el instante 0 al instante 1: 1 cm/s  
Velocidad media desde el instante 1 al instante 2: 3 cm/s  
Velocidad media desde el instante 2 al instante 3: 5 cm/s  
Velocidad media desde el instante 3 al instante 4: 7 cm/s  
Velocidad media desde el instante 4 al instante 5: 9 cm/s

Velocidad media desde el instante 5 al instante 6: 11 cm/s

- e. Calcular la variación en la velocidad cada segundo que pasa. ¿Cómo evoluciona la aceleración de la bola? ¿Qué conclusiones sacó Galileo sobre la aceleración de la bola?

 Solución

```
for i in 2:length(v)
    println("Aceleración media desde el instante $(t[i-1]) al instante $(t[i]): $(v[
```

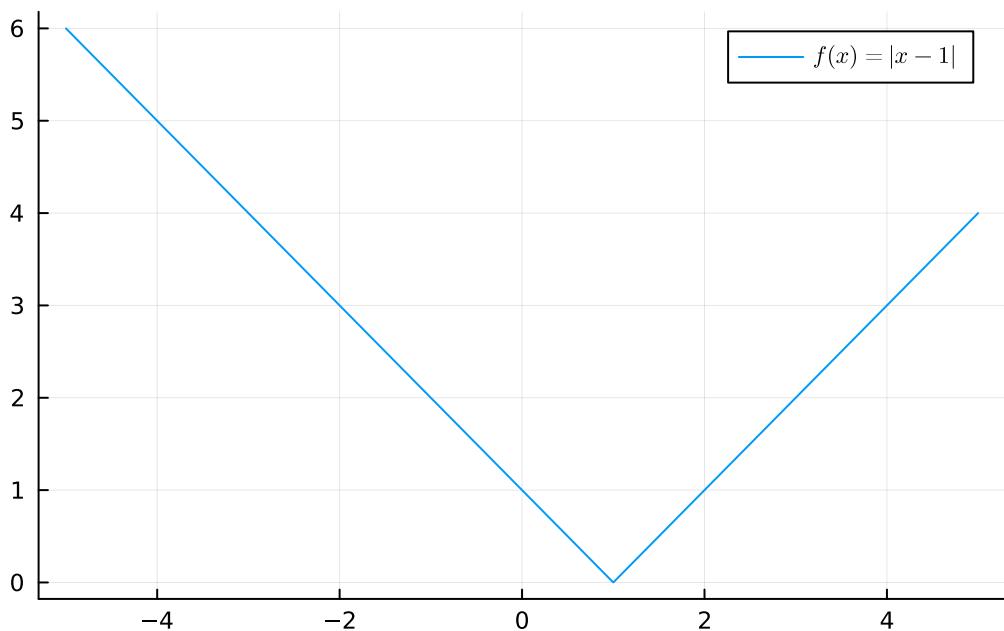
Aceleración media desde el instante 0 al instante 1: 2 cm/s  
Aceleración media desde el instante 1 al instante 2: 2 cm/s  
Aceleración media desde el instante 2 al instante 3: 2 cm/s  
Aceleración media desde el instante 3 al instante 4: 2 cm/s  
Aceleración media desde el instante 4 al instante 5: 2 cm/s

Se observa que la aceleración es la misma. Galileo concluyó que la aceleración de un cuerpo en caída libre era uniforme.

**Ejercicio 5.2.** Representar gráficamente la función  $f(x) = |x - 1|$  y estudiar su derivabilidad en el punto  $x = 1$  haciendo uso de la definición de derivada.

 Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = abs(x-1)
display(plot(f(x), label=L"f(x)=|x-1|"))
println("Derivada por la izquierda: ", limit((f(x)-f(1))/(x-1), x=>1, dir="-"))
println("Derivada por la derecha: ", limit((f(x)-f(1))/(x-1), x=>1, dir="+"))
```



Derivada por la izquierda: -1

Derivada por la derecha: 1

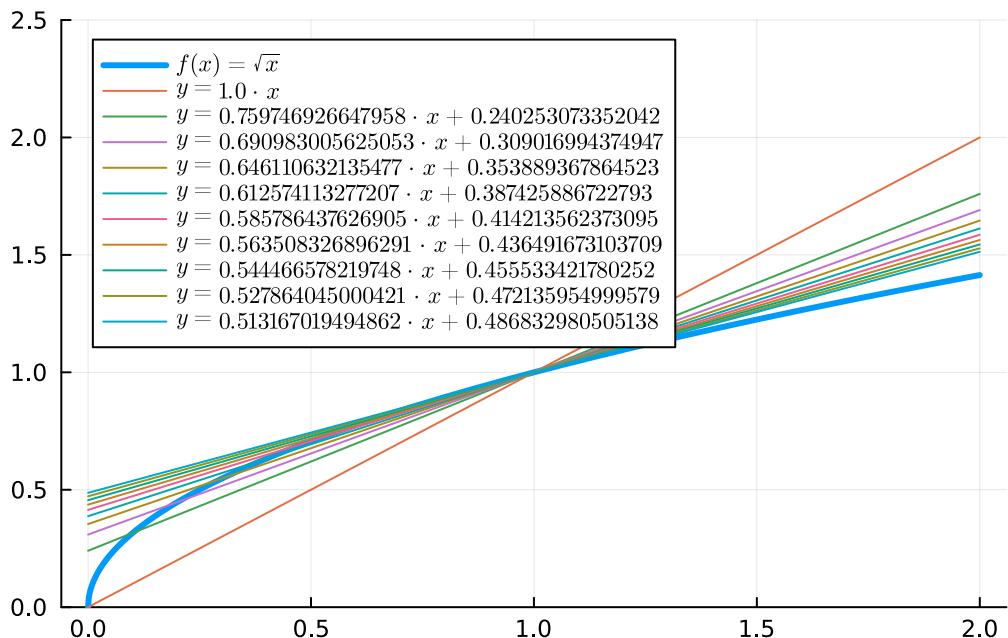
Como la derivada por la izquierda y por la derecha no son iguales, la función no es derivable en  $x = 1$ .

**Ejercicio 5.3.** Sea  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- a. Dibujar la gráfica de  $f$  y dibujar las rectas secantes a  $f$  en los intervalos  $[\frac{i}{10}, 1]$  para  $i = 0, \dots, 9$ . ¿Hacia dónde tienden las pendientes de las rectas secantes?

### Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real
f(x) = sqrt(x)
plt = plot(f, 0, 2, ylims=(0,2.5), linewidth = 3, label=L"f(x)=\sqrt{x}", legend=:top)
secante(x, i, j) = f(i) + (f(j)-f(i))/(j-i) * (x - i)
for i in 0:9
    sec = secante(x, i/10, 1)
    plt = plot!(sec, label =L"y=" * latexify(sec))
end
plt
```



Se deduce que las pendientes de las rectas secantes tienen a 0.5.

- b. Dibujar la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $x = 1$ .

### Ayuda

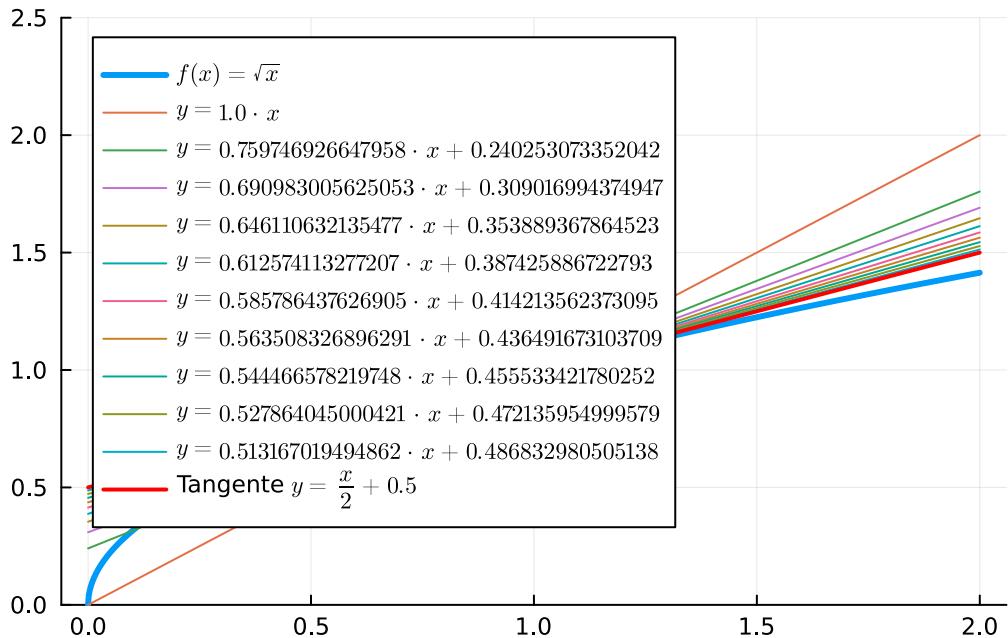
La ecuación de la recta tangente a la función  $f(x)$  en el punto  $a$  es  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

Usar la función `diff(f)` del paquete SymPy para calcular simbólicamente la deri-

vada de la función  $f$ .

### Solución

```
tg = f(1) + diff(f)(1) * (x-1)
plot(tg, linewidth = 2, color = "red", label="Tangente " * L"y=" * latexify(tg))
```



**Ejercicio 5.4.** Calcular las derivadas de las siguientes funciones hasta el orden 4 y deducir la expresión de la derivada de orden  $n$ .

a.  $f(x) = \ln(x+1)$

### Ayuda

Usar la función `diff(f,n)` del paquete SymPy para calcular simbólicamente la derivada de grado  $n$  de la función  $f$ .

💡 Solución

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = log(x+1)
println("Primera derivada: ", diff(f))
println("Segunda derivada: ", diff(f,2))
println("Tercera derivada: ", diff(f,3))
println("Cuarta derivada: ", diff(f,4))
```

Primera derivada:  $1/(x + 1)$   
Segunda derivada:  $-1/(x + 1)^2$   
Tercera derivada:  $2/(x + 1)^3$   
Cuarta derivada:  $-6/(x + 1)^4$

La derivada de orden  $n$  es  $f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$ .

b.  $f(x) = a^x$

💡 Solución

```
using SymPy
@syms x::real a::real
g(x) = a^x
println("Primera derivada: ", diff(g(x),x))
println("Segunda derivada: ", diff(g(x),x,2))
println("Tercera derivada: ", diff(g(x),x,3))
println("Cuarta derivada: ", diff(g(x),x,4))
```

Primera derivada:  $a^x \ln(a)$   
Segunda derivada:  $a^x \ln(a)^2$   
Tercera derivada:  $a^x \ln(a)^3$   
Cuarta derivada:  $a^x \ln(a)^4$

La derivada de orden  $n$  es  $g^{(n)} = a^x \ln(a)^n$ .

c.  $h(x) = Frsen(x) + \cos(x)$

### Solución

```
using SymPy
@syms x::real
h(x) = sin(x)+cos(x)
println("Primera derivada: ", diff(h))
println("Segunda derivada: ", diff(h,2))
println("Tercera derivada: ", diff(h,3))
println("Cuarta derivada: ", diff(h,4))
```

```
Primera derivada: -sin(x) + cos(x)
Segunda derivada: -(sin(x) + cos(x))
Tercera derivada: sin(x) - cos(x)
Cuarta derivada: sin(x) + cos(x)
```

La derivada de orden  $n$  es

$$h^{(n)} = \begin{cases} Frsen(x) + \cos(x) & \text{si } n = 4k \\ \cos(x) - Frsen(x) & \text{si } n = 4k + 1 \\ -Frsen(x) - \cos(x) & \text{si } n = 4k + 2 \\ -\cos(x) + Frsen(x) & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

**Ejercicio 5.5.** Calcular y dibujar las rectas tangente y normal a la gráfica de la función  $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$  en  $x = 1$ .

### Ayuda

La ecuación de la recta tangente a una función  $f$  en el punto  $a$  es

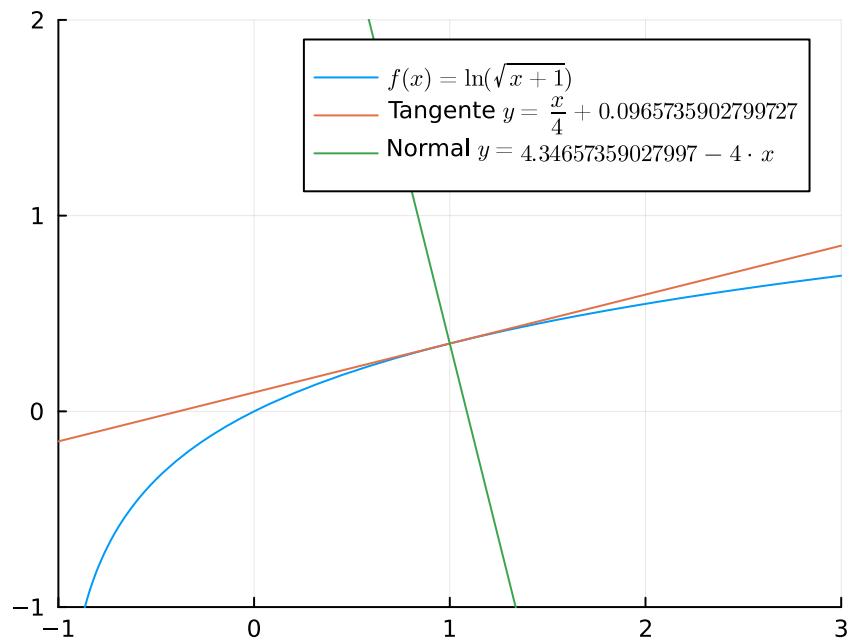
$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

y la de la recta normal

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

### Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real
f(x) = log(sqrt(x+1))
plot(f, -1, 3, xlims=(-1,3), ylims=(-1,2), aspect_ratio=1, label=L"f(x)=\ln(\sqrt{x+1})")
tg = f(1)+diff(f)(1)*(x-1)
plot!(tg, label="Tangente "*L"y="*latexify(tg))
nm = f(1)-1/diff(f)(1)*(x-1)
plot!(nm, label="Normal "*L"y="*latexify(nm))
```

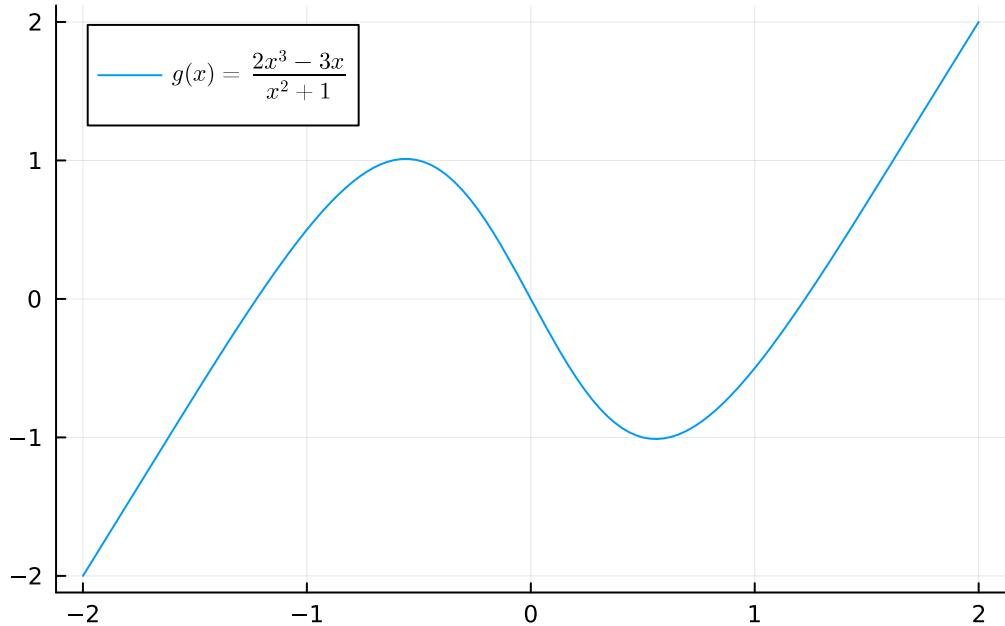


**Ejercicio 5.6.** Sea la función  $g(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + 1}$ .

- Dibujar la gráfica de  $g$ .

 Solución

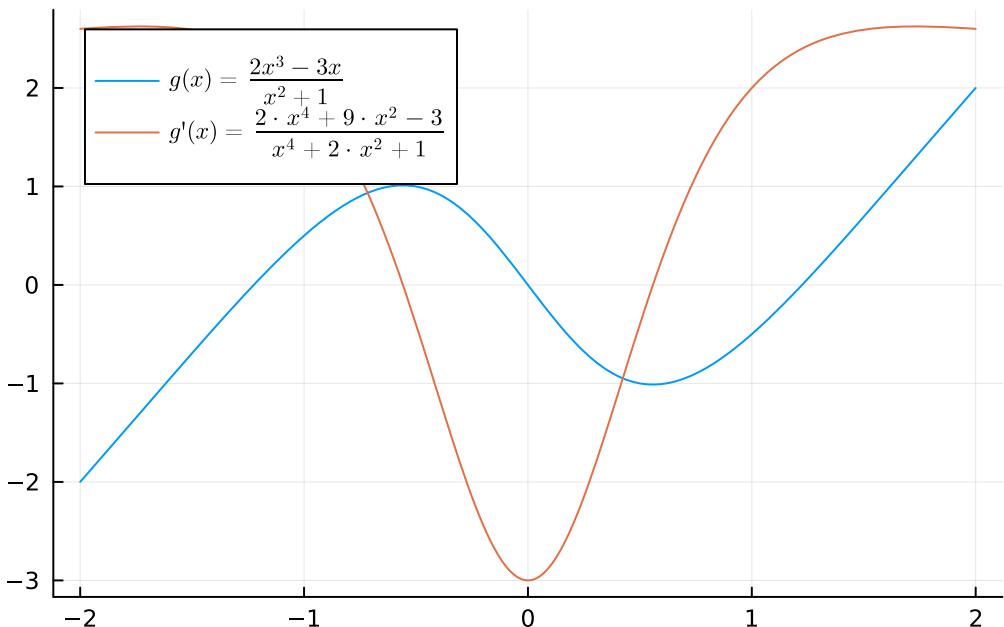
```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real
g(x)=(2x^3-3x)/(x^2+1)
plot(g, -2, 2, label=L"g(x)=\frac{2x^3-3x}{x^2+1}", legend=:topleft)
```



- b. Calcular la derivada de  $g$  y dibujar su gráfica en la misma gráfica que la de  $g$ .

 Solución

```
plot!(diff(g), label=L"g'(x)=*\textrm{latexify}(\textrm{simplify}(diff(g)))")
```



c. Calcular los puntos críticos de  $g$ .

#### *i* Ayuda

Los puntos críticos de una función son los puntos donde se anula la derivada.

#### 💡 Solución

```
N.(solve(diff(g)))
```

4-element Vector{Number}:

```
-0.5583347485961263326654828454569561179259924185641573901331644861659481412422448
 0.5583347485961263326654828454569561179259924185641573901331644861659481412422448
 0.0 - 2.193567343732555569019661050002362205421503627733216097530210072083854926923076
 0.0 + 2.193567343732555569019661050002362205421503627733216097530210072083854926923076
```

Existen dos puntos críticos en  $x = -0.55$  y  $x = 0.55$  aproximadamente.

d. A la vista de los puntos críticos y de la gráfica de la función derivada, determinar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función.

### Ayuda

Una función  $f$  derivable en el punto  $a$  es creciente si y solo si  $f'(a) > 0$  y decrecientes si y solo si  $f'(a) < 0$ .

### Solución

La derivada es positiva en los intervalos  $(-\infty, -0.55)$  y  $(0.55, \infty)$ , por lo que la función  $g$  es creciente en estos intervalos, y la derivada es negativa en el intervalo  $(-0.55, 0.55)$ , por lo que la función  $g$  es decreciente en este intervalo.

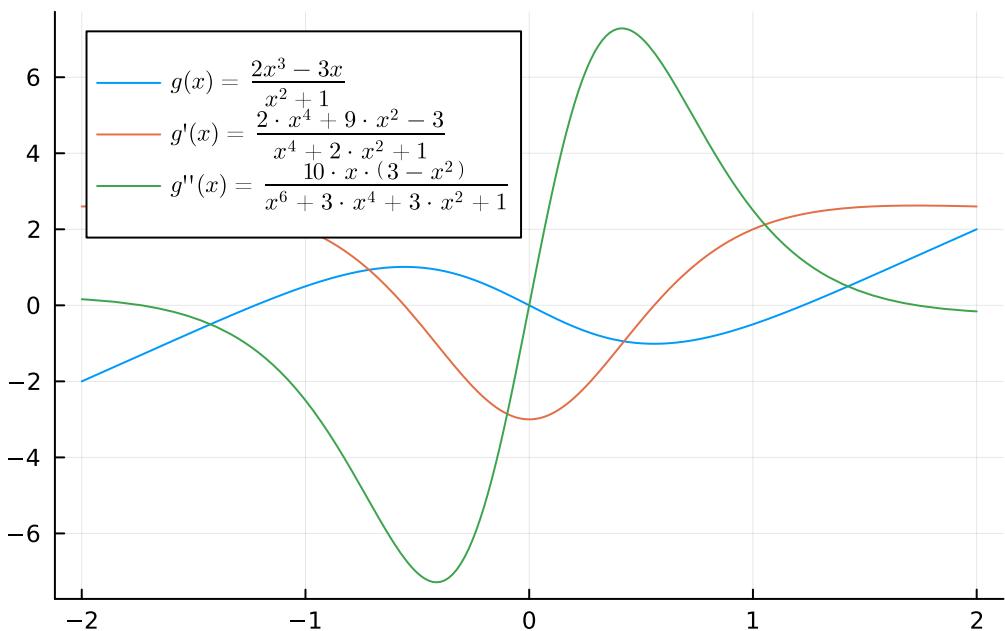
En el punto crítico  $x = -0.55$  la derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha, por lo que, según el criterio de la primera derivada, la función  $g$  tiene un máximo relativo.

En el punto crítico  $x = 0.55$  la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha, por lo que, según el criterio de la primera derivada, la función  $g$  tiene un mínimo relativo.

- e. Calcular segunda la derivada de  $g$  y dibujar su gráfica en la misma gráfica que la de  $g$ .

### Solución

```
plot!(diff(g,2), label=L"g''(x)=*latexify(simplify(diff(g(x),x,2)))")
```



- f. Calcular los puntos que anulan la segunda derivada de  $g$ .

Solución

```
N.(solve(diff(g,2)))
```

3-element Vector{Real}:

0

-1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451933016908798  
1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451933016908798

Existen tres puntos donde se anula  $g''(x)$ , en  $x = -1.73$ ,  $x = 0$  y  $x = 1.73$  aproximadamente.

- g. A la vista de las raíces de la gráfica de la segunda derivada, determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función  $g$ .

Ayuda

Una función  $f$  dos veces derivable en el punto  $a$  es cóncava hacia arriba si y solo si  $f''(a) > 0$  y cóncava hacia abajo si y solo si  $f''(a) < 0$ . Los puntos de inflexión de una función son los puntos donde cambia la concavidad.

### 💡 Solución

La segunda derivada es positiva en los intervalos  $(-\infty, -1.73)$  y  $(0, 1.73)$ , por lo que la función  $g$  es cóncava hacia arriba en esos intervalos, y la segunda derivada es negativa en los intervalos  $(-1.73, 0)$  y  $(1.73, \infty)$ , por lo que la función  $g$  es cóncava hacia abajo en esos intervalos.

$g$  tiene tres puntos de inflexión en  $x = -1.73$ ,  $x = 0$  y  $x = 1.73$ , donde cambia la concavidad de la función.

**Ejercicio 5.7.** Considérese la curva con ecuación  $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ .

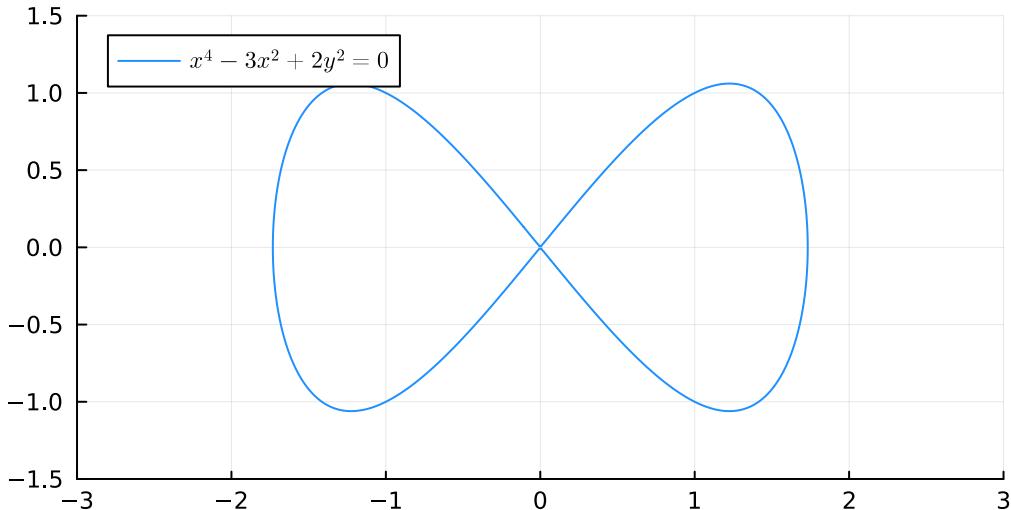
- Dibujar la gráfica de la curva.

### 💡 Ayuda

Para dibujar curvas implícitas utilizar la función `implicit_plot` del paquete `ImplicitPlots`.

### 💡 Solución

```
using ImplicitPlots, Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real y::real
f(x,y)=x^4-3x^2+2y^2
implicit_plot(f; xlims=(-3,3), ylims=(-1.5,1.5), label=L"x^4-3x^2+2y^2=0", legend=:t
```



- b. Calcular la tasa de variación de  $y$  con respecto a  $x$  en el punto  $(1, 1)$ .

#### **i** Ayuda

Para realizar derivadas implícitas simbólicamente hay que definir una función simbólica con el comando `@syms u()` del paquete SymPy y reemplazar  $y$  por  $u(x)$  en la ecuación de la curva implícita.

Después hay que hacer la derivada de ambos lados de la ecuación y finalmente hay que resolver la ecuación despejando la derivada de  $u(x)$ .

#### **💡 Solución**

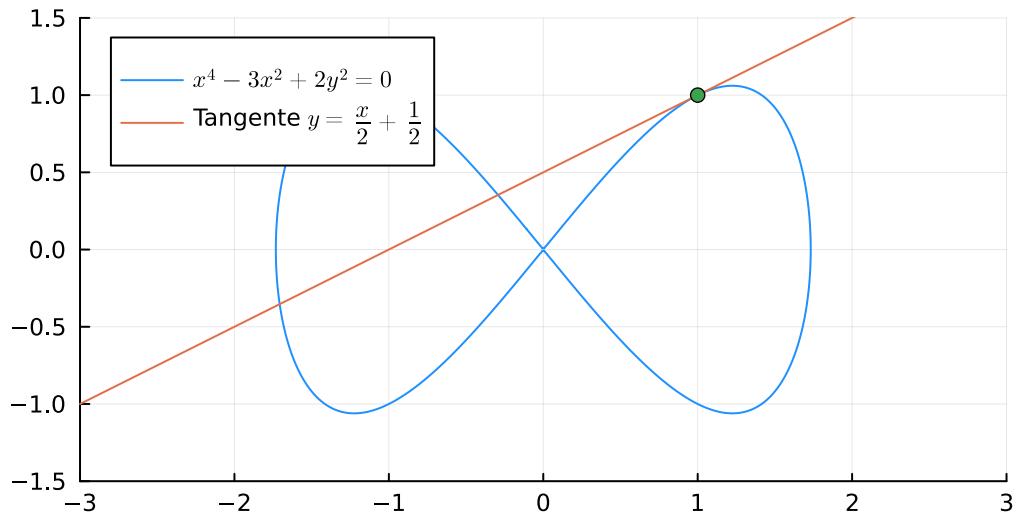
```
# Declaramos una función simbólica
@syms u()
# Reemplazamos y por una función simbólica u(x).
ex1 = f(x,y)(y=>u(x))
# Calculamos la derivada de ambos lados de la ecuación y la resolvemos para la derivada
du_dx = solve(diff(ex1,x), diff(u(x),x))[1]
# Deshacemos el cambio y=u(x).
dy_dx = du_dx(u(x)=>y)
println("y'=", dy_dx)
```

$$y' = x * (3 - 2x^2) / (2y)$$

c. Dibujar la recta tangente a la curva anterior en el punto  $(1, 1)$ .

 Solución

```
using Latexify
# Definimos la función de la recta tangente
tg = 1 + dy_dx(x=>1, y=>1) * (x-1)
plot!(tg, label="Tangente "*L"y="*latexify(tg))
# Dibujamos el punto (1,1)
scatter!([1],[1], label="")
```



**Ejercicio 5.8.** Crear una función para calcular el polinomio de Taylor de grado  $n$  una función  $f$  en un punto  $a$  y utilizarla para dibujar los polinomios de Taylor de la función  $f(x) = \text{Frsen}(x)$  en  $a = 0$  hasta el grado 5.

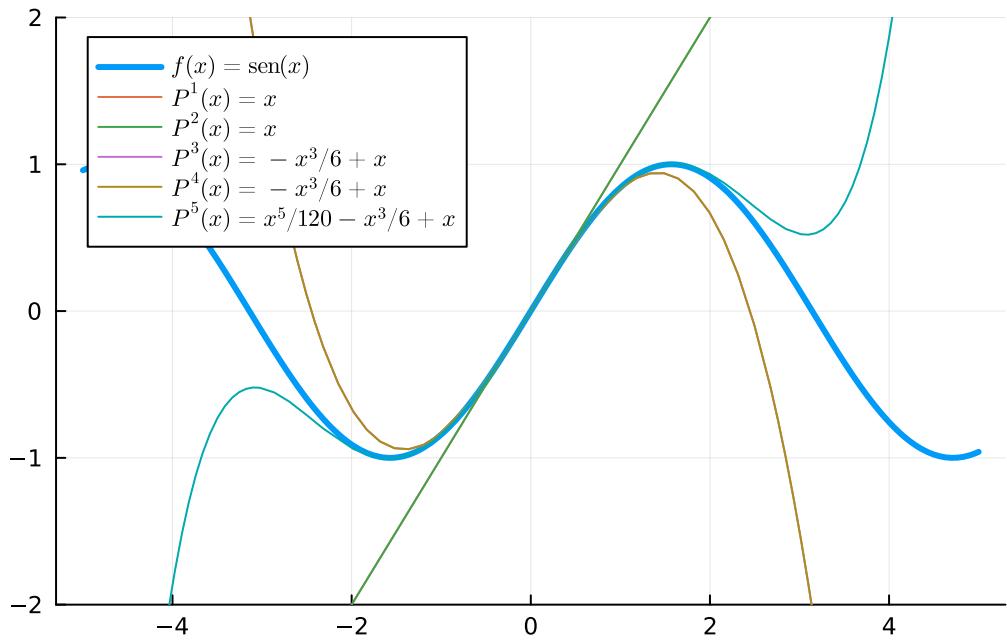
 Ayuda

La fórmula del polinomio de Taylor de grado  $n$  de la función  $f$  en el punto  $a$  es

$$P_{f,a}^n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

💡 Solución

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings, Latexify
@syms x::real
function taylor(f, a=0, n=2)
    sum(diff(f, x, i)(a)/factorial(i)*(x-a)^i for i=0:n)
end
f(x)=sin(x)
plt = plot(f, ylims=(-2,2), linewidth=3, label=L"f(x)=\operatorname{sen}(x)")
for i in 1:5
    pol = taylor(f(x), 0, i)
    plt = plot!(pol, label=latexstring("P^{$(i)}(x)=$(pol)"))
end
plt
```



**Ejercicio 5.9.** Calcular los polinomios de Taylor hasta grado 10 de las siguientes funciones en los puntos indicados.

- a.  $f(x) = \cos(x)$  en  $x = \pi/2$ .

### Ayuda

Para calcular polinomios de Taylor utilizar la función `series` del paquete SymPy.

### Solución

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = cos(x)
series(f(x), x, Sym(pi)/2, 10)
```

$$\frac{\pi}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{6} - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^5}{120} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^7}{5040} - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^9}{362880} - x + O\left((x - \frac{\pi}{2})^{10}; x \rightarrow \frac{\pi}{2}\right)$$

b.  $g(x) = \ln(x)$  en  $x = 1$

### Solución

```
g(x) = log(x)
series(g(x), x, 1, 10)
```

$$-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^9}{9} + x + O\left((x-1)^{10}; x \rightarrow 1\right)$$

c.  $h(x) = e^{\operatorname{rsen}(x)}$  en  $x = 0$

### Solución

```
h(x) = exp(sin(x))
series(h(x), x, 0, 10)
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} - \frac{x^6}{240} + \frac{x^7}{90} + \frac{31x^8}{5760} + \frac{x^9}{5670} + O(x^{10})$$

**Ejercicio 5.10.** Aproximar el número  $\ln(1.2)$  mediante un polinomio de Taylor de grado 8 y dar una cota del error cometido. ¿Hasta qué grado habría que llegar para obtener un error menor de  $10^{-10}$ ?

## Ayuda

El error en la aproximación de una función  $f(b)$  mediante un polinomio de Taylor de grado  $n$  en el punto  $a$  viene dado por el resto de Taylor, que en la forma de Lagrange es

$$R_{f,a}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ con } x \in [a, b].$$

## Solución

Utilizaremos un polinomio de MacLaurin de grado 5 para la función  $f(x) = \ln(1+x)$ .

```
using SymPy
@syms x::real
pol = series(log(1+x), x, 0, 6).remove0()
println("Aproximación de ln(1.2): ", N(pol(0.2)))
```

Aproximación de ln(1.2): 0.18233066666666667

Para dar una cota del error cometido calculamos el resto de Taylor en la forma de Lagrange.

```
resto = diff(log(1+x), x, 6)/factorial(6)*0.2^6
println("Resto de Taylor de orden 6: ", resto)
println("Derivada del resto : ", diff(resto))
```

Resto de Taylor de orden 6: -1.06666666666667e-5/(x + 1)^6  
Derivada del resto : 6.4e-5/(x + 1)^7

Como la derivada no se anula en el intervalo  $[1, 2]$ , no hay extremos relativos, y al ser una función continua en un intervalo cerrado, alcanza el máximo y mínimos absolutos en los extremos.

```
println("Cota del error: " , maximum(N(abs.([resto(0), resto(0.2)]))))
println("Error: " , abs(log(1.2)-pol(0.2)))
```

Cota del error: 1.06666666666667e-5  
Error: 9.10987271207642e-6

Así pues, el error en la aproximación de  $\ln(1.2)$  es menor que  $1.06 \cdot 10^{-5}$ .

Para ver la fórmula general del resto de Taylor en la forma de Lagrange para un polinomio de Taylor de orden  $n$ , calculamos las primeras derivadas sucesivas.

```
println("Primera derivada: ", diff(log(1+x)))
println("Segunda derivada: ", diff(log(1+x), x, 2))
println("Tercera derivada: ", diff(log(1+x), x, 3))
println("Cuarta derivada: ", diff(log(1+x), x, 4))
```

Primera derivada:  $1/(x + 1)$   
 Segunda derivada:  $-1/(x + 1)^2$   
 Tercera derivada:  $2/(x + 1)^3$   
 Cuarta derivada:  $-6/(x + 1)^4$

Así pues, se deduce que la derivada de orden  $n$  es  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$ , de manera que el resto de Taylor de orden  $n$  es

$$|R_{f,0}^n(x)| = \left| (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n+1)!(x+1)^n} 0.2^{n+1} \right| = \left| \frac{0.2^{n+1}}{(n+1)n(x+1)^n} \right| \quad x \in [0, 0.2].$$

Como se trata de una función positiva y decreciente en el intervalo  $[0, 0.2]$ , alcanza el máximo absoluto en el extremo inferior del intervalo, es decir, en  $x = 0$ , y por tanto se tiene,

$$|R_{f,1}^n(x)| \leq \left| \frac{0.2^{n+1}}{(n+1)n} \right|.$$

Finalmente calculamos el primer número natural  $n$  tal que  $|R_{f,1}^n(x)| < 10^{-10}$ .

```
n=6
while 0.2^(n+1)/(n*(n+1)) > 10^-10
    n += 1
end
print(n)
```

11

Así pues, habría que llegar al grado 11.

## 5.2 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 5.11.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} Frsen(x)^2 & \text{si } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leq c, \\ \ln(x) & \text{si } c < x, \end{cases}$$

¿Para qué valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  la función es derivable en todo  $\mathbb{R}$ ?

$$a = \frac{1}{2e}, b = 0, c = e^{1/2}.$$

$$a = 1, b = 0, c = e.$$

$$a = \sqrt{e}, b = 0, c = \frac{1}{e}.$$

$$a = 1, b = 1, c = 1.$$

Para ningún valor.

**Ejercicio 5.12.** ¿Cuál es la derivada de orden  $n$  de la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ?

$$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i}{2^n} (x+1)^{-(2n+1)/2}.$$

$$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i - 1}{2^n} (x+1)^{-(2n+1)/2}.$$

$$\frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^n} (x+1)^{-(2n-1)/2}.$$

$$\frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i + 1}{2^n} (x+1)^{-(2n+1)/2}.$$

$$\frac{(-1)^n n!}{2^n} (x+1)^{-n/2}.$$

**Ejercicio 5.13.** Dadas las funciones  $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{2}}\right)$  y  $g(x) = x^3 + 1$ , ¿en qué puntos la recta normal a  $f$  y la recta tangente a  $g$  son paralelas?

**Ejercicio 5.14.** Calcular el máximo y el mínimo absoluto de la función  $g(x) = \sqrt{x^4 - 3x^3 + \frac{5}{2}x^2}$  en el intervalo  $[-0.5, 1.5]$ .

a. Mínimo absoluto

b. Máximo absoluto

**Ejercicio 5.15.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas sobre la función  $h(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ ?

- Es cóncava hacia abajo en  $(1, 3)$ .
- Tiene un punto de inflexión en  $x = 3$ .
- Es decreciente en todo  $\mathbb{R}$ .
- Tiene un máximo en  $x = 1$ .
- Tiene un mínimo en  $x = 1$ .

(Select one or more)

**Ejercicio 5.16.** Una cuerda de longitud  $l$  está sujetada en sus extremos en los puntos  $(0, 0)$  y  $(a, b)$ . De la cuerda cuelga un anillo. ¿En qué posición estará el anillo debido a la fuerza de gravedad suponiendo que  $l = 10$ ,  $a = 3$  y  $b = 2$ ?

**i** Ayuda

Puesto que la longitud de la cuerda es fija, del siguiente diagrama se deduce que las posiciones  $(x, y)$  que puede ocupar el anillo vienen dadas por la ecuación

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2}$$

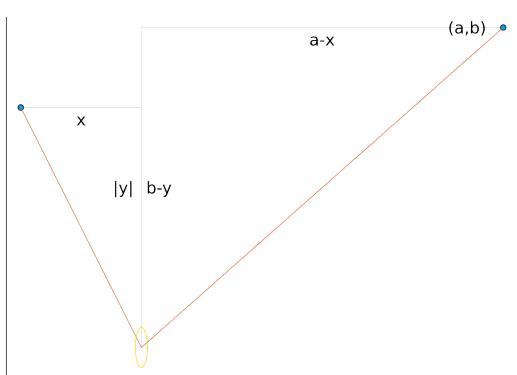


Figura 5.2: Descomposición en triángulos rectángulos de la posición que ocupa un anillo suspendido de una cuerda de tamaño  $l$  sujetado en sus extremos en los puntos  $(0, 0)$  y  $(a, b)$ .

Coordenada x

Coordenada y

**Ejercicio 5.17.** Calcular de manera aproximada el valor de  $Fr\text{sen}(1/2)$  usando los siguientes polinomios de Taylor de la función  $f(x) = Fr\text{sen}(x)$ .

a. Polinomio de Taylor de grado 20 en el punto  $\pi/6$ .

b. Polinomio de MacLaurin de grado 100.

c. ¿Qué polinomio da una mejor aproximación?

- El polinomio de Taylor de grado 20 en  $\pi/6$ .
- El polinomio de MacLaurin de grado 100.

# 6 Series de números reales

## 6.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de límites.  
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.  
using Bessels # Para definir funciones de Bessel.
```

**Ejercicio 6.1.** La [paradoja de la dicotomía de Zenon](#) establece que para que un corredor pueda recorrer una distancia hasta la meta, primero tiene que recorrer la mitad de la distancia, después la mitad de la distancia restante, después la mitad de la distancia restante, y así hasta el infinito, por lo que, aparentemente, nunca llegaría a la meta.

La serie que calcula la distancia recorrida por el corredor es

$$\sum \frac{1}{2^n}$$

- a. Calcular los 50 primeras sumas parciales de la serie.

### Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 50 usando [compresiones de arrays](#). Usar la función `cumsum` para realizar sumas parciales.

### Solución 1

```
N = 50  
a(n) = 1/2^n  
an = [a(n) for n = 1:N]  
An = cumsum(an)
```

```
50-element Vector{Float64}:
0.5
0.75
0.875
0.9375
0.96875
0.984375
0.9921875
0.99609375
0.998046875
0.9990234375
0.99951171875
0.999755859375
0.9998779296875

0.999999999998181
0.999999999990905
0.999999999995453
0.999999999997726
0.999999999998863
0.999999999999432
0.99999999999716
0.99999999999858
0.999999999999929
0.999999999999964
0.999999999999982
0.999999999999991
```

## 💡 Solución 2

```
N = 50
a(n) = 1/2^n
A(n) = sum(a, 1:n)
An = [A(n) for n = 1:N]
```

```
50-element Vector{Float64}:
0.5
0.75
0.875
0.9375
0.96875
0.984375
```

```
0.9921875
0.99609375
0.998046875
0.9990234375
0.99951171875
0.999755859375
0.9998779296875

0.999999999998181
0.999999999990905
0.999999999995453
0.999999999997726
0.999999999998863
0.999999999999432
0.999999999999716
0.999999999999858
0.999999999999929
0.999999999999964
0.999999999999982
0.999999999999991
```

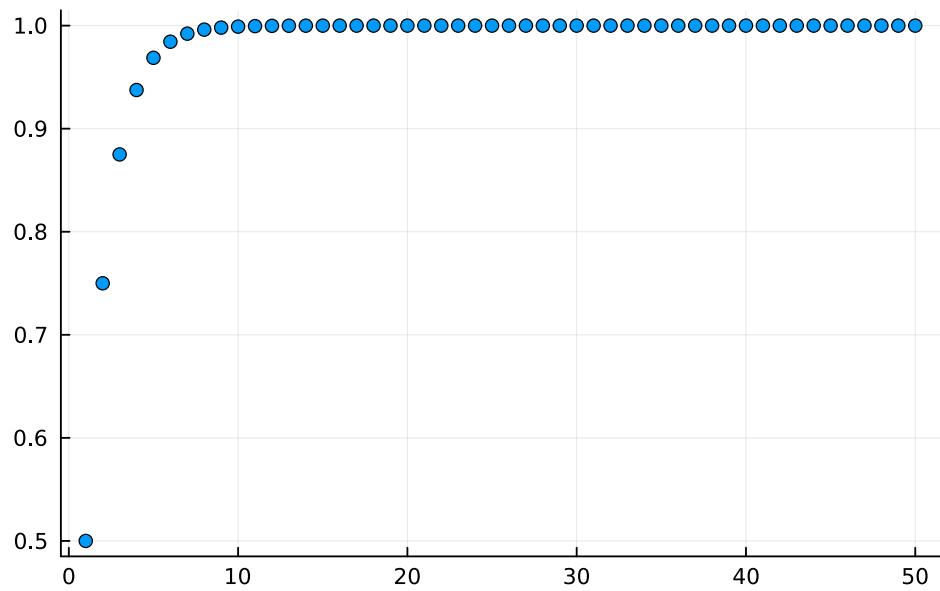
- b. Dibujar en una gráfica las 50 primeras sumas parciales de la serie.

#### Ayuda

Definir una función para el término general y aplicar la función a los naturales de 1 a 100 usando compresiones de arrays como en el ejercicio anterior y usar la función `cumsum` para calcular las sumas parciales. Después usar la función `scatter` del paquete `Plots` para dibujar el array de las sumas parciales.

#### Solución

```
using Plots, LaTeXStrings
scatter(An, legend=false)
```



c. ¿Es cierto que el corredor nunca llegará a la meta?

#### 💡 Solución

No, porque la serie converge a 1.

**Ejercicio 6.2.** Calcular las 50 primeras sumas parciales de la serie  $\sum \frac{1}{n!}$  empezando en  $n = 0$ . ¿Cuántas cifras decimales del número  $e$  son correctas en la última suma parcial?

#### 💡 Ayuda

Para que no se desborde cálculo del factorial deben usarse enteros de la clase `BigInt`.

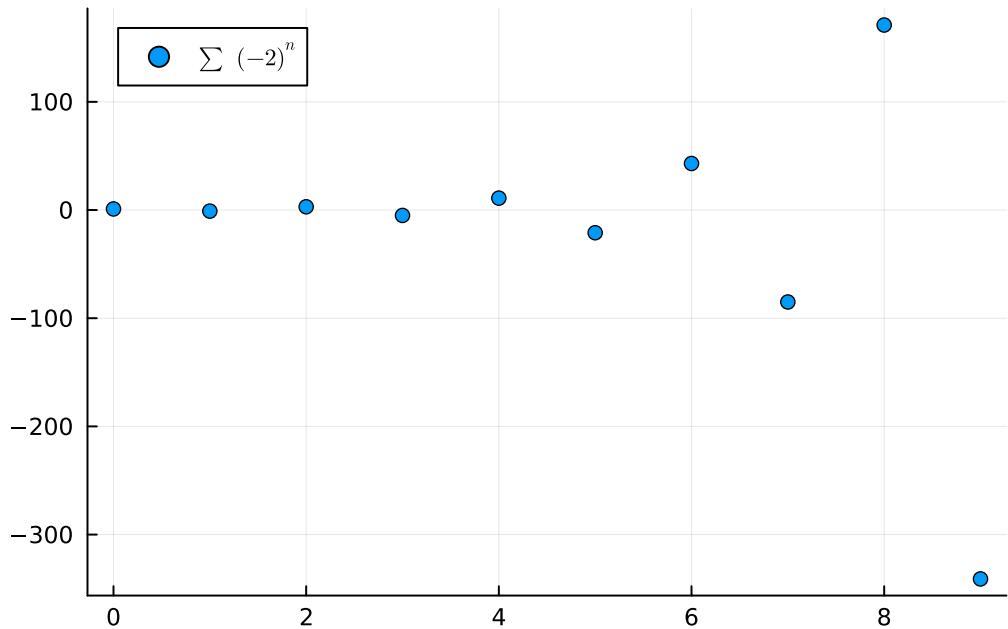
#### 💡 Solución 1

```
N = 50
a(n) = 1/factorial(big(n))
an = [a(n) for n = 0:N]
An = cumsum(an)
decimales = round(abs(log10(abs(-An[N]))))
println(An)
println("Cifras del número e correctas: $decimales")
```

**Ejercicio 6.3.** Dibujar una gráfica con los 10 primeros términos de las series geométricas  $\sum r^n$  para  $r = -2$ ,  $r = -1/2$ ,  $r = 1/2$  y  $r = 2$ . ¿Para qué valores de  $r$  crees que converge la serie?

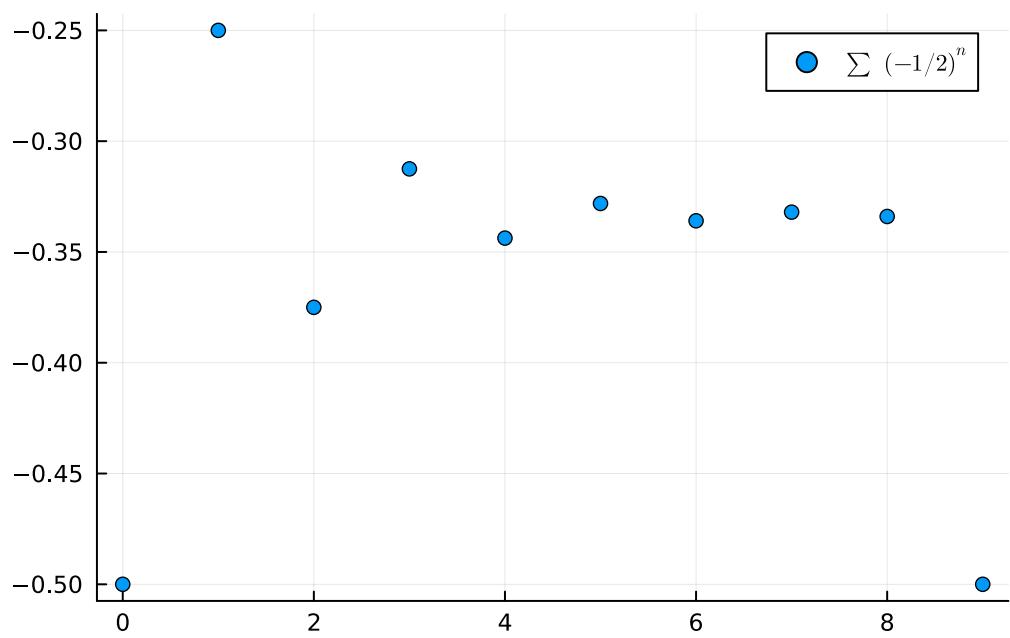
## Solución

```
using Plots, LaTeXStrings  
an = [(-2)^n for n = 0:9]  
scatter(0:9, cumsum(an), label=L"\sum (-2)^n")
```



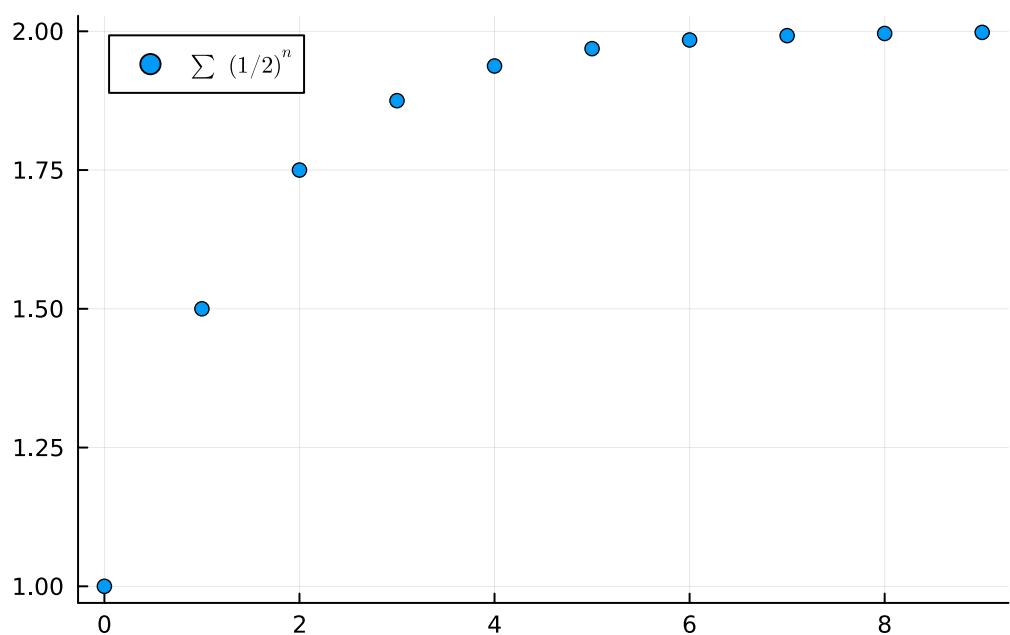
La serie diverge.

```
bn = [(-1/2)^n for n = 1:9]
scatter(0:9, cumsum(bn), label=L"\sum (-1/2)^n")
```



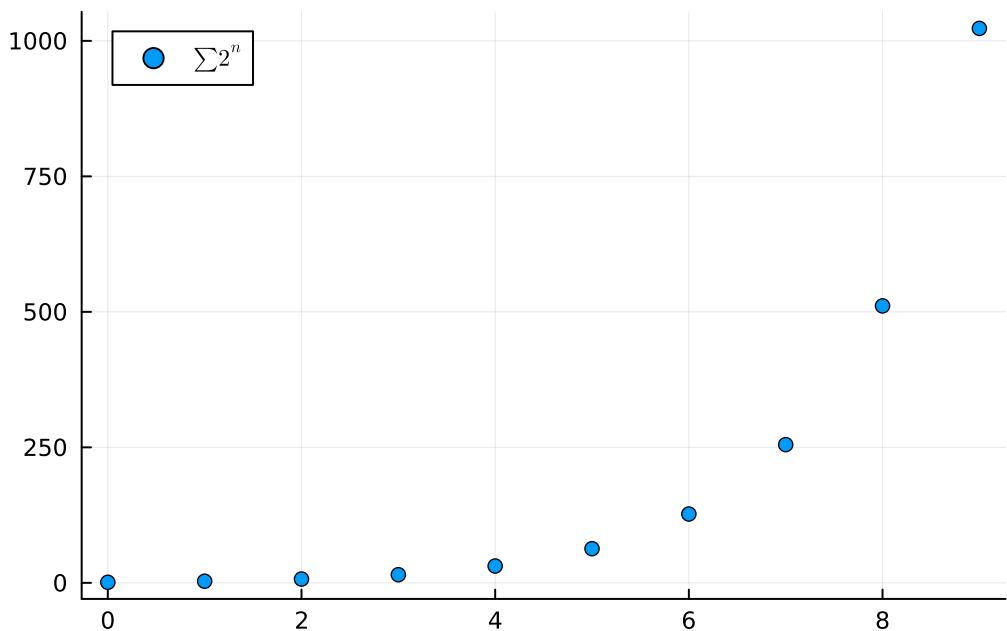
La serie converge.

```
cn = [(1/2)^n for n = 0:9]
scatter(0:9, cumsum(cn), label=L"\sum (1/2)^n")
```



La serie converge.

```
dn = [2^n for n = 0:9]
scatter(0:9, cumsum(dn), label=L"\sum 2^n")
```



La serie diverge.

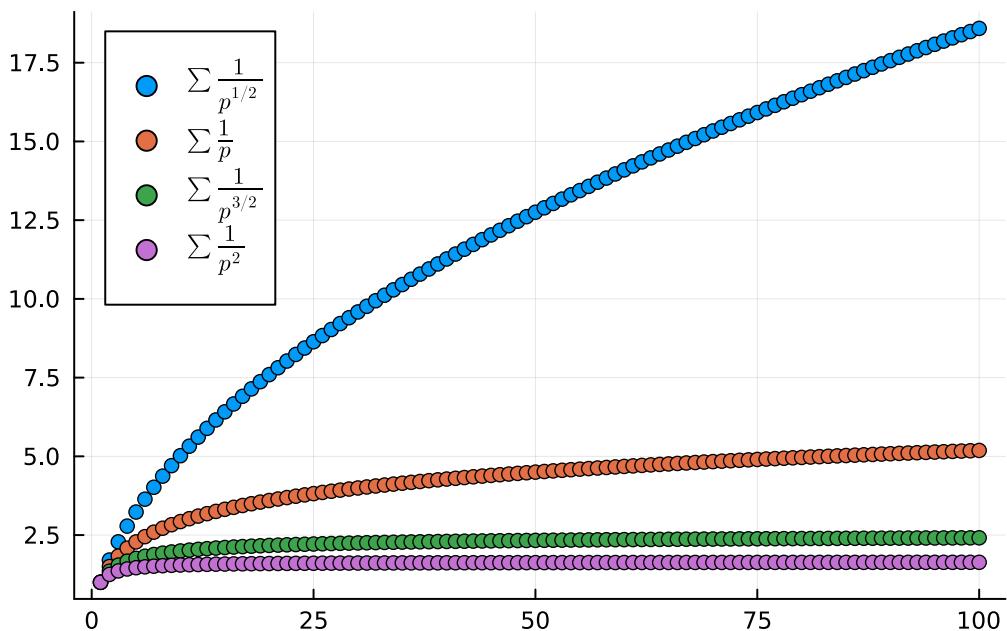
Se puede concluir que la serie converge para  $|r| < 1$ .

**Ejercicio 6.4.** Dibujar en la misma gráfica los 100 primeros términos de las series  $\sum \frac{1}{n^p}$  para  $p = 1/2$ ,  $p = 1$ ,  $p = 3/2$  y  $p = 2$ .

¿Para qué valores de  $p$  crees que la serie converge?

#### 💡 Solución

```
using Plots, LaTeXStrings
a(n,p) = 1/n^p
an = [a(n,1/2) for n = 1:100]
scatter(cumsum(an), label=L"\sum \frac{1}{n^{1/2}}", legend=:topleft)
bn = [a(n,1) for n = 1:100]
scatter!(cumsum(bn), label=L"\sum \frac{1}{n^1}")
cn = [a(n,3/2) for n = 1:100]
scatter!(cumsum(cn), label=L"\sum \frac{1}{n^{3/2}}")
dn = [a(n,2) for n = 1:100]
scatter!(cumsum(dn), label=L"\sum \frac{1}{n^2}")
```



Se puede concluir que la serie converge para  $p > 1$ .

**Ejercicio 6.5.** Una suma parcial de cualquier serie convergente se puede utilizar como aproximación de la suma de la serie. La aproximación será mejor cuanto mayor sea el orden de la serie parcial, pero depende de la velocidad a la que la serie converja a su suma. En el caso de las series alternadas que converjan, el error en la estimación de la suma mediante la suma parcial de orden  $n$  siempre es menor o igual que el término de  $n$  de la sucesión correspondiente, es decir, para la serie alternada  $\sum (-1)^n a_n$ , se cumple que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i \right| \leq a_n$$

Calcular la suma aproximada de las siguientes series alternadas con un error menor de  $10^{-10}$ . ¿Cuál es la primera suma parcial que da esa aproximación?

a.  $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$

### Solución

```
error = 10^-10
a(n) = (-1)^n/factorial(n)
i = 0
while abs(a(i)) >= error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i")
println("Aproximación: $(sum(a, 0:i))")
```

Suma parcial de orden 14

Aproximación: 0.36787944117216204

b.  $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$

### Solución

```
error = 10^-10
a(n) = (-1)^n*log(n)/n^2
i = 2
while abs(a(i)) >= error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i")
println("Aproximación: $(sum(a, 2:i))")
```

Suma parcial de orden 357592

Aproximación: 0.10131657821350423

**Ejercicio 6.6.** Calcular hasta la suma funcional parcial de orden 9 de la serie de Maclaurin para la función  $F(x) = \operatorname{arctg}(x)$ . Deducir el término general de la serie y estudiar su radio de convergencia.

Se puede probar que esta serie también converge en  $x = 1$ . Usar este hecho para calcular el valor de  $\pi$  con un error menor de  $10^{-8}$ .

### Ayuda

Para calcular polinomios de Taylor utilizar la función `series` del paquete SymPy.  
Para calcular el radio de convergencia utilizar el [criterio de la razón](#) para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias.

## Solución

```
using SymPy
@syms x::real
p(n) = series(atan(x), x, 0, n+1).remove0()
for i = 1:5
    println("Suma funcional parcial de grado $(2i-1): $(p(2i-1))")
end
```

```
Suma funcional parcial de grado 1: x
Suma funcional parcial de grado 3: -x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 5: x^5/5 - x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 7: -x^7/7 + x^5/5 - x^3/3 + x
Suma funcional parcial de grado 9: x^9/9 - x^7/7 + x^5/5 - x^3/3 + x
```

El término general de la serie es  $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ , y por tanto, se trata de una serie alternada.

```
@syms n::integer
c(n) = (-1)^(n-1)/(2n-1)
limit(abs(c(n)/c(n+1)), n => Inf)
```

1

El radio de convergencia es  $R = 1$ , y por tanto la serie converge para  $-1 < x < 1$ . En realidad, su dominio de convergencia es  $[-1, 1]$ .

```
error = 10^-8
i = 0
while abs(c(i)) >= error
    i += 1
end
println("Suma parcial de orden $i")
println("Aproximación de : $(4*sum(c, 1:i)))")
```

Suma parcial de orden 50000001

Aproximación de : 3.141592673589794

**Ejercicio 6.7.** La función de Bessel de orden 0 se obtiene a partir de la suma de la serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Esta función sirve, entre otras cosas, para explicar la distribución de temperaturas en una lámina circular o las vibraciones de una membrana.

- Calcular el radio de convergencia de la función de Bessel.

**i** Ayuda

Utilizar el [criterio de la razón](#) para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias.

**?** Solución

```
using SymPy
@syms n::integer
c(n) = (-1)^n*1/(2^(2n)*factorial(n)^2)
limit(abs(c(n)/c(n+1)), n => Inf)
```

$\infty$

La serie converge para todo  $\mathbb{R}$ .

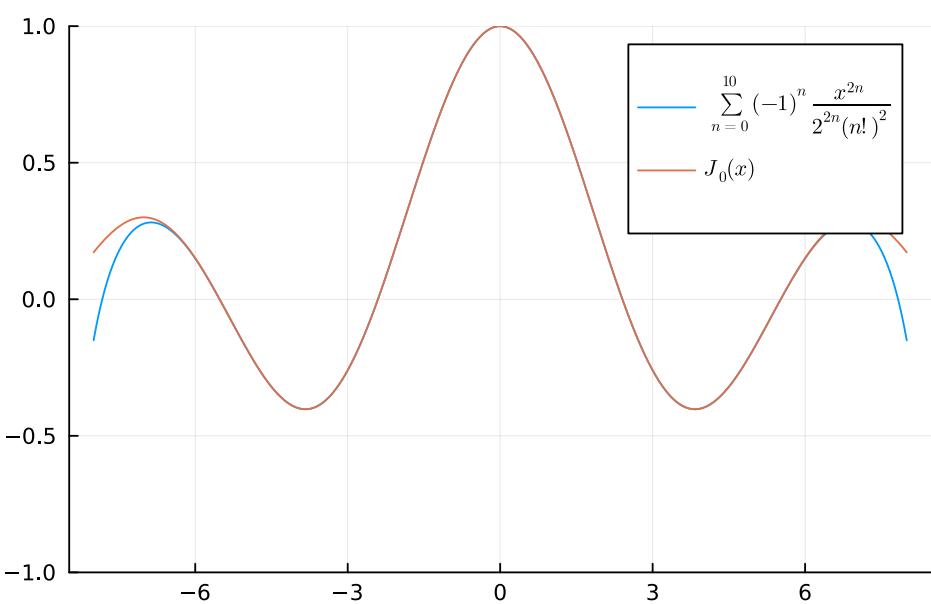
- Dibujar en una misma gráfica la suma funcional parcial de orden 10 de la serie y la función de Bessel de orden 0.

**i** Ayuda

Usar el paquete [Bessels](#) para dibujar la función de Bessel de orden 0.

**?** Solución

```
using Plots, LaTeXStrings, Bessels
@syms x::real
a(x,n) = (-1)^n/(2^(2n)*factorial(n)^2) * x^(2n)
N = 10
an = [a(x,n) for n=0:N]
An = sum(an)
plot(An, -8, 8, ylims = (-1,1), label=L"\sum_{n=0}^{10} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n}")
plot!(besselj0, label = L"$J_0(x)$")
```



La serie converge para todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 6.8.** Una serie de Fourier es una serie cuyo término general se construye combinando funciones sinusoidales simples (como senos y cosenos) que converge puntualmente a una función periódica continua. La forma general de una serie de Fourier es

$$a_0 + \sum a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right),$$

donde  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier y  $T$  es el periodo.

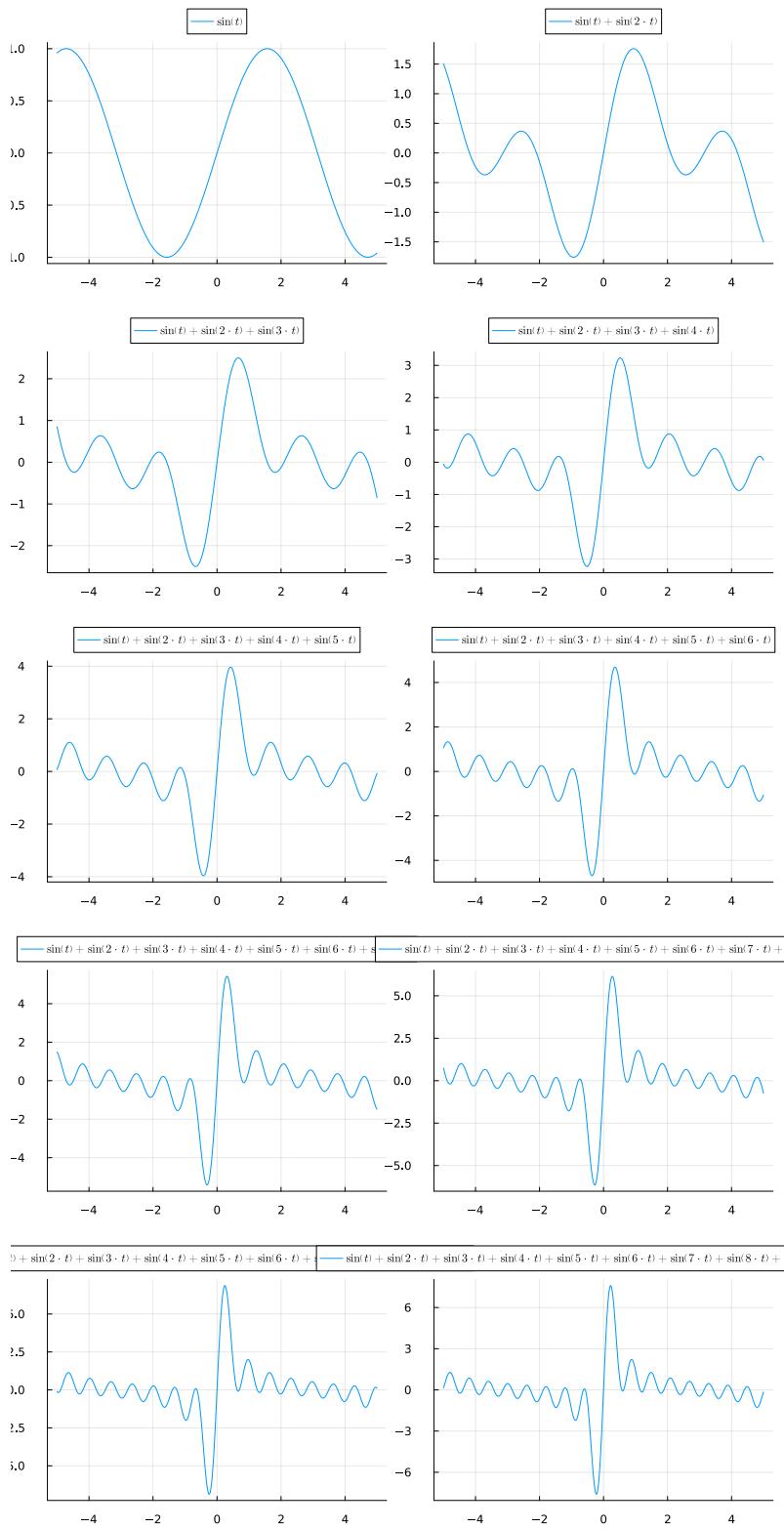
Las series de Fourier son muy útiles para aproximar funciones periódicas que describen las ondas, por lo que se utilizan a menudo para modelizar procesos que involucran sonido, imágenes o corriente eléctrica.

Dibujar las gráficas las 10 primeras sumas parciales de las siguientes series de Fourier y predecir hacia qué función convergen.

a.  $\sum F \operatorname{sen}(nt)$

## 💡 Solución

```
using Plots, SymPy, Latexify
@syms t::real
a(t,n) = sin(n*t)
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = [] # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```

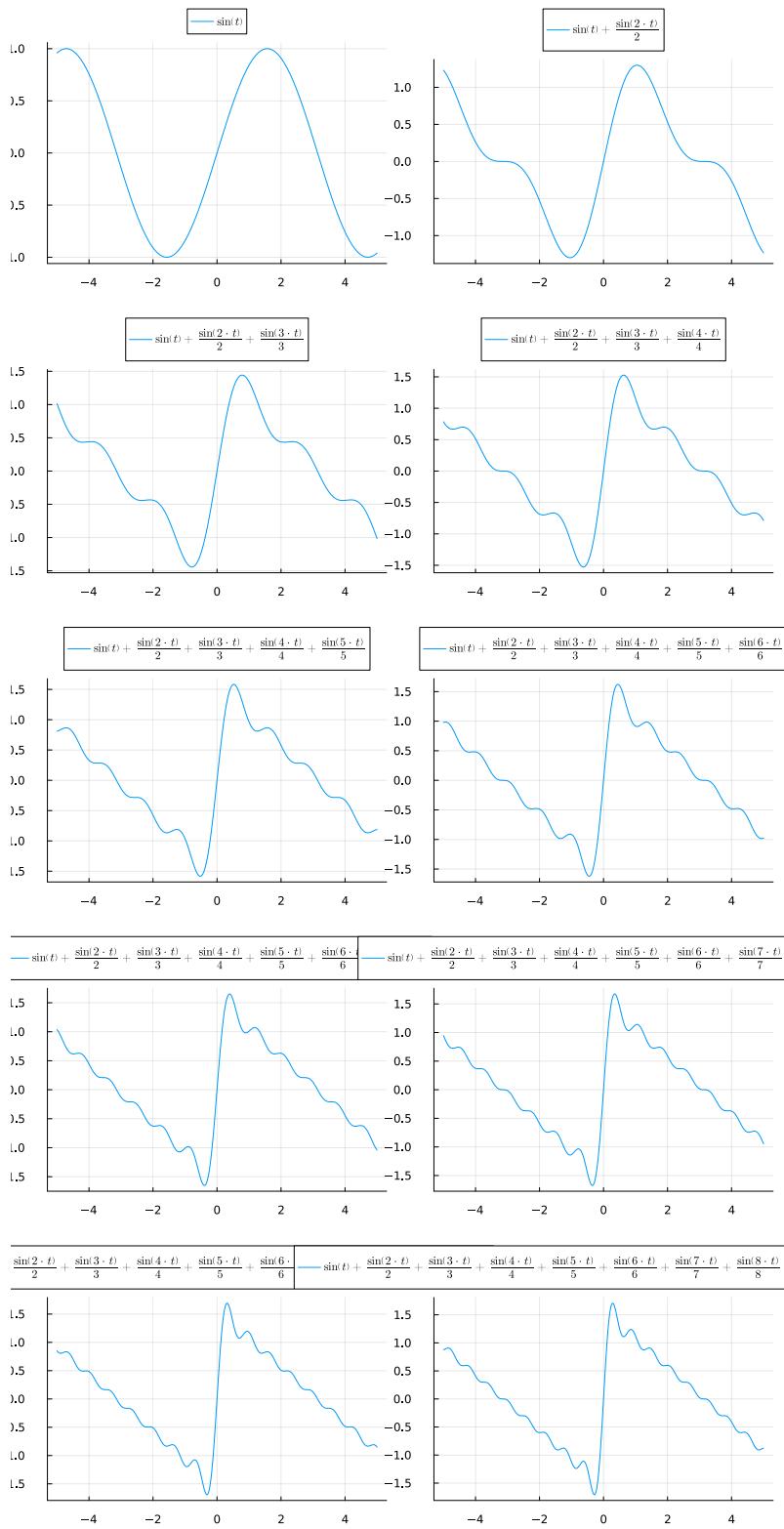


Converge aproximadamente a la función de tipo *pulso*, que se anula en todo su dominio excepto en los puntos  $x = 2n\pi$  donde se produce discontinuidad de salto.

b.  $\sum \frac{Fr\sin(nt)}{n}$

### 💡 Solución

```
using Plots, SymPy, Latexify
@syms t::real
a(t,n) = sin(n*t)/n
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = [] # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```

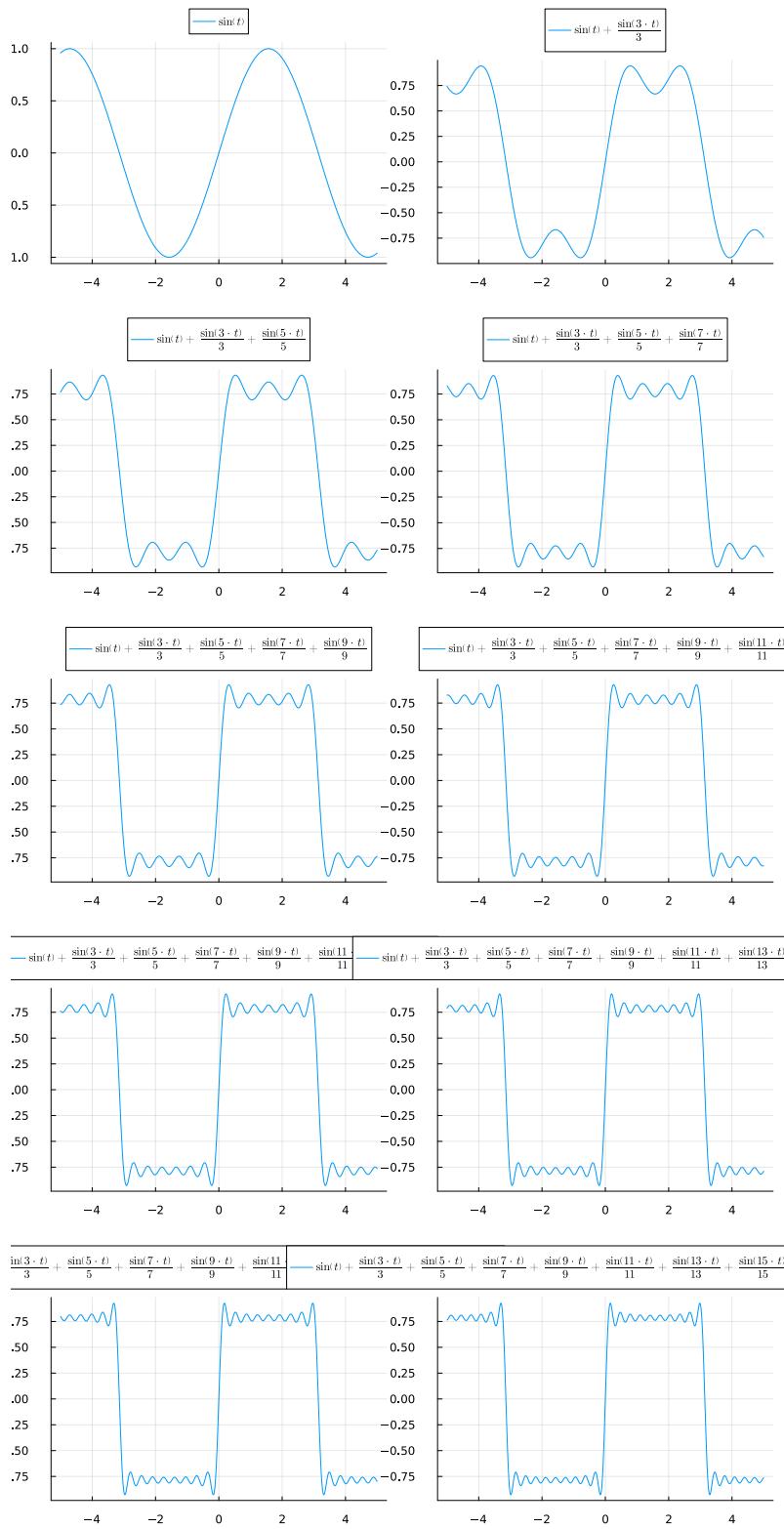


Converge aproximadamente a la función de tipo *diente de sierra* con periodo  $2\pi$ .

c.  $\sum \frac{Fr\sin((2n-1)t)}{2n-1}$

💡 Solución

```
using Plots, SymPy, Latexify
@syms t::real
a(t,n) = sin((2n-1)t)/(2n-1)
N = 10
an = [a(t,n) for n=1:N]
An = cumsum(an)
plots = [] # Array para guardar las gráficas
for i in An
    push!(plots, plot(i, label=latexify(i), legend=:outertop))
end
plot(plots..., layout=(5,2), size=(800,1600))
```



Converge aproximadamente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 & \text{si } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ -0.75 & \text{si } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \end{cases}$$

## 6.2 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 6.9.** Calcular la suma parcial de orden 100 de las siguientes series (empezando en  $n = 1$ ):

a.  $\sum \frac{1}{n^{2n}}$

\*Hint: \*

Introducir hasta 20 decimales

b.  $\sum \frac{n!}{n^n}$

\*Hint: \*

Introducir hasta 40 decimales

**Ejercicio 6.10.** Dibujar las 100 primeras sumas parciales de las siguientes series y determinar cuáles convergen.



$$\sum \frac{\ln(n)}{n}$$



$$\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$$



$$\sum n!/n^n$$



$$\sum \frac{e^{1/n}}{n}$$



$$\sum \cos(1/n)$$

(Select one or more)

**Ejercicio 6.11.** ¿Hasta qué suma parcial de la serie de Maclaurin de la función  $e^x$  hay que llegar para aproximar el número  $\sqrt{e}$  con un error menor de  $10^{-50}$ ?

**Ejercicio 6.12.** Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

a.  $\sum \frac{(x-2)^n}{n5^n}$

b.  $\sum \frac{2^n(x-2)^n}{\sqrt{n+3}}$

**Ejercicio 6.13.** La fuerza que ejerce la gravedad que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  a una altura  $h$  sobre la superficie de la Tierra viene dada por la fórmula

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde  $R$  es el radio de la Tierra (tomar un radio medio 6371 km) y  $g$  es la aceleración de la gravedad (tomar  $9.81 \text{ m/s}^2$ ). Expresar  $F$  como una serie de potencias de  $h/R$  y usarla para dar la aproximación de cuarto grado de  $F$  para  $h = 100 \text{ m}$ . ¿Cuál es error relativo cometido en la aproximación?

\*Hint: \*

Introducir hasta 10 decimales

Aplicar el teorema de la serie alternada para dar una cota superior del error relativo cometido en la aproximación anterior.

\*Hint: \*

Introducir hasta 10 decimales

\*\*\*

**Ejercicio 6.14.** ¿Cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la serie de Fourier

$$\sum (-1)^n \frac{\operatorname{Fr} \operatorname{sen}((2n-1)t)}{(2n-1)^2} ?$$

insert image here

# 7 Integrales de funciones reales

## 7.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico de integrales.  
using QuadGK # Para el cálculo numérico de integrales.  
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
#plotlyjs() # Para obtener gráficos interactivos.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.  
using PrettyTables # Para formatear tablas.
```

**Ejercicio 7.1.** Sea  $f(x) = x^2$ .

- Calcular la suma inferior de Riemann de  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$ , tomando una partición de 10 subintervalos de igual amplitud.

### 💡 Solución

La [suma inferior de Riemann](#) de una función  $f$  en un intervalo  $[a, b]$  se obtiene sumando las áreas de los rectángulos que resultan de tomar una partición del intervalo, tomando como base la amplitud de los subintervalos y el como altura el mínimo valor de  $f$  en el subintervalo.

```
f(x) = x^2  
Δx = 1/10  
areas_inf = [f((i-1)*Δx)*Δx for i = 1:10]  
sum_inf = sum(areas_inf)  
  
0.2850000000000001
```

- Calcular la suma superior de Riemann de  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$ , tomando una partición de 10 subintervalos de igual amplitud.

### Solución

La **suma superior de Riemann** de una función  $f$  en un intervalo  $[a, b]$  se obtiene sumando las áreas de los rectángulos que resultan de tomar una partición del intervalo, tomando como base la amplitud de los subintervalos y el como altura el máximo valor de  $f$  en el subintervalo.

```
f(x) = x^2  
Δx = 1/10  
areas_sup = [f(i*Δx)*Δx for i = 1:10]  
sum_sup = sum(areas_sup)
```

0.3850000000000001

- c. Dar una cota del error cometido en la aproximación del área encerrada entre la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  en el intervalo  $[0, 1]$  tomando sumas de Riemann para una partición en 10 subintervalos.

### Solución

La suma inferior de Riemann nos da una cota inferior del área que queda encerrada entre la gráfica de la función y el eje  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ , mientras que la suma superior de Riemann nos da una cota superior. Por tanto, si tomamos cualquier valor entre la suma inferior y la suma superior de Riemann como aproximación del área encerrada entre la gráfica de  $f$  y el eje  $x$ , una cota del error cometido será la diferencia entre la suma superior y la suma inferior.

```
error = sum_sup - sum_inf
```

0.1000000000000003

- d. Definir una función para calcular de manera aproximada el área encerrada entre la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  tomando sumas de Riemann para una partición en  $n$  subintervalos, y el error cometido en la aproximación. Utilizarla para calcular los errores aproximados al aproximar el área de  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$  tomando particiones desde 10 a 100 subintervalos.

## Solución

```
using PrettyTables
f(x) = x^2
function area_inf(a, b, n)
    Δx = (b-a)/n
    return sum([f(a+(i-1)*Δx)*Δx for i = 1:n])
end

function area_sup(a, b, n)
    Δx = (b-a)/n
    return sum([f(a+i*Δx)*Δx for i = 1:n])
end

function area(a, b, n)
    area = (area_inf(a, b, n) + area_sup(a, b, n)) / 2
    error = area_sup(a, b, n) - area_inf(a, b, n)
    return area, error
end

areas = [area(0, 1, n) for n=10:100]
pretty_table(hcat(first.(areas), last.(areas)); header = ["Aproximación", "Error"])
```

Aproximación	Error
0.335	0.1
0.334711	0.0909091
0.334491	0.0833333
0.33432	0.0769231
0.334184	0.0714286
0.334074	0.0666667
0.333984	0.0625
0.33391	0.0588235
0.333848	0.0555556
0.333795	0.0526316
0.33375	0.05
0.333711	0.047619
0.333678	0.0454545
0.333648	0.0434783
0.333623	0.0416667
0.3336	0.04

0.33358	0.0384615
0.333562	0.037037
0.333546	0.0357143
0.333532	0.0344828
0.333519	0.0333333
0.333507	0.0322581
0.333496	0.03125
0.333486	0.030303
0.333478	0.0294118
0.333469	0.0285714
0.333462	0.0277778
0.333455	0.027027
0.333449	0.0263158
0.333443	0.025641
0.333438	0.025
0.333432	0.0243902
0.333428	0.0238095
0.333423	0.0232558
0.333419	0.0227273
0.333416	0.0222222
0.333412	0.0217391
0.333409	0.0212766
0.333406	0.0208333
0.333403	0.0204082
0.3334	0.02
0.333397	0.0196078
0.333395	0.0192308
0.333393	0.0188679
0.33339	0.0185185
0.333388	0.0181818
0.333386	0.0178571
0.333385	0.0175439
0.333383	0.0172414
0.333381	0.0169492
0.33338	0.0166667
0.333378	0.0163934
0.333377	0.016129
0.333375	0.015873
0.333374	0.015625
0.333373	0.0153846
0.333372	0.0151515
0.33337	0.0149254

0.333369	0.0147059
0.333368	0.0144928
0.333367	0.0142857
0.333366	0.0140845
0.333365	0.0138889
0.333365	0.0136986
0.333364	0.0135135
0.333363	0.0133333
0.333362	0.0131579
0.333361	0.012987
0.333361	0.0128205
0.33336	0.0126582
0.333359	0.0125
0.333359	0.0123457
0.333358	0.0121951
0.333358	0.0120482
0.333357	0.0119048
0.333356	0.0117647
0.333356	0.0116279
0.333355	0.0114943
0.333355	0.0113636
0.333354	0.011236
0.333354	0.0111111
0.333353	0.010989
0.333353	0.0108696
0.333353	0.0107527
0.333352	0.0106383
0.333352	0.0105263
0.333351	0.0104167
0.333351	0.0103093
0.333351	0.0102041
0.33335	0.010101
0.33335	0.01

**Ejercicio 7.2.** Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = x^2 \ln(x)$

 Solución

Para calcular la primitiva de una función se puede usar la función `integrate(f)` del paquete `Sympy`, donde `f` es la función a integrar.

```
using SymPy
@syms x::real
primitiva = integrate(x^2*ln(x))
```

$$\frac{x^3 \log(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$$

Obsérvese que la primitiva obtenida con la función `integrate` no incluye la típica constante que define la familia de primitivas.

Podemos comprobar que efectivamente es la primitiva derivándola.

```
diff(primitiva)
```

$$x^2 \log(x)$$

b.  $g(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{x}$

Solución

```
integrate(ln(ln(x))/x)
```

$$\log(x) \log(\log(x)) - \log(x)$$

c.  $h(x) = \frac{6x + 5}{(x^2 + x + 1)^2}$

Solución

Se trata de una función racional, así que hacemos primero la descomposición en fracciones simples. Para ello se puede usar la función `apart(f)` del paquete `Sympy`.

```
h(x) = (2x^3+x^2+6)/(x^5-x)
# Descomposición en fracciones simples.
apart(h(x))
```

$$\frac{5x+2}{2(x^2+1)} + \frac{5}{4(x+1)} + \frac{9}{4(x-1)} - \frac{6}{x}$$

Y ahora calculamos la primitiva.

```
integrate(h(x))
```

$$-6 \log(x) + \frac{9 \log(x-1)}{4} + \frac{5 \log(x+1)}{4} + \frac{5 \log(x^2+1)}{4} + Fratan(x)$$

d.  $i(x) = x^a$

💡 Solución

Cuando en la función aparece algún parámetro, es necesario indicar la variable con respecto a la que calcular la integral. Para ello se utiliza la función `integrate(f, x)`, siendo `x` la variable con respecto a la que integrar.

```
@syms a::real  
integrate(x^a, x)
```

$$\begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} & \text{for } a \neq -1 \\ \log(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

e.  $j(x) = (1 + \log(x))\sqrt{1 + x^2 \log(x)^2}$

💡 Solución

```
@syms x::real  
j(x) = (1 + log(x)) * sqrt(1 + (x*log(x))^2)  
# El cálculo directo de la integral no funciona.  
integrate(j(x))  
# Ayudamos a SymPy con la sustitución.  
h(x) = x*log(x)  
@syms y::real dy::real  
# Definimos la nueva función con el cambio de variable.  
g(y) = j(x)(h(x) => y, diff(h(x), x) => 1)  
# Integraremos la nueva función y deshacemos el cambio de variable.  
integrate(g(y))(y => h(x))
```

$$\frac{x\sqrt{x^2 \log(x)^2 + 1} \log(x)}{2} + \frac{\operatorname{Frasinh}(x \log(x))}{2}$$

**Ejercicio 7.3.** Calcular las siguientes integrales definidas:

a.  $\int_{-1/2}^0 \frac{x^3}{x^2 + x + 1} dx$

💡 Solución

Para calcular una integral definida también se puede usar la función `integrate(f, a, b)`, del paquete SymPy, donde, además de la función `f`,

hay que indicar los límites de integración a y b.

```
using SymPy
@syms x::real
integrate(x^3/x^2+x+1, -1/2, 0)
```

0.25

b.  $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} dx$

?

Solución

```
integrate(sqrt(16-x^2)/x, 2, 4)
-2\sqrt{3} + 4Fracosh(2)
```

c.  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos(2x)}$

?

Solución

```
integrate(1/(3+cos(2x)), 0, PI/2)
\sqrt{2}\pi/8
```

**Ejercicio 7.4.** Calcular la integral definida  $\int_0^1 x^x dx$  con un error menor de  $10^{-10}$ .

?

Solución

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = x^x
integrate(f(x), 0, 1)
```

$$\int_0^1 x^x dx$$

Esta función no tiene primitiva como se puede comprobar al realizar la integral con la función `integrate`. Para calcularla hay que recurrir a métodos numéricos de aproximación. Para ello se puede usar la función `quadgk` del paquete `QuadGK`

que realiza el cálculo de la integral mediante el método de la cuadratura de Gauss-Kronrod.

```
using QuadGK
quadgk(f(x), 0, 1, rtol = 10^-10)

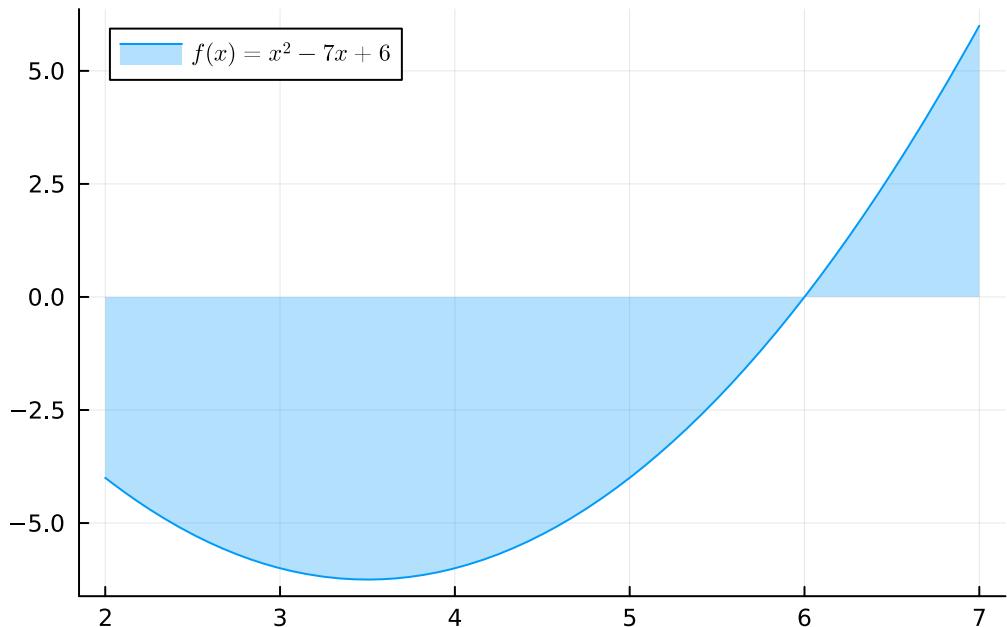
(0.783430510710741, 7.598588099878845e-11)
```

**Ejercicio 7.5.** Dibujar y calcular el área encerrada por la parábola  $y = x^2 - 7x + 6$  y el eje de abscisas en el intervalo  $[2, 7]$ .

### 💡 Solución 1

Dibujamos primero la región.

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = x^2-7x+6
plot(f, 2, 7, fillrange = 0, fillalpha = 0.3, label = L"f(x)=x^2-7x+6")
```



Para calcular el área encerrada entre la gráfica de una función  $y$  y el eje  $x$  en un intervalo  $[a, b]$ , hay que descomponer el intervalo de integración en los subintervalos

donde la función es positiva y los subintervalos donde es negativa, e integrar la función en cada intervalo por separado.

```
# Calculamos primero las raíces de la función
solve(f(x))
# Descomponemos el intervalo de integración en los subintervalos [2,6] (función nega
-integrate(f, 2, 6) + integrate(f, 6, 7)
```

$\frac{43}{2}$

### 💡 Solución 2

En general, para calcular áreas bajo una curva, es más rápido integrar el valor absoluto de la función.

```
integrate(abs(f(x)), 2, 7)
```

$\frac{43}{2}$

**Ejercicio 7.6.** Calcular y dibujar el área comprendida entre las paráolas  $y = -x^2 + 6x$  e  $y = x^2 - 2x$ .

### 💡 Solución

Calculamos primero el área comprendida entre las dos funciones.

```
using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = -x^2+6x
g(x) = x^2-2x
# Calculamos primero los puntos de corte de la función.
raices = solve(f(x)-g(x))
# Descomponemos el intervalo de integración en los subintervalos [2,6] (función nega
sol = integrate(f(x)-g(x), raices[1], raices[2])
```

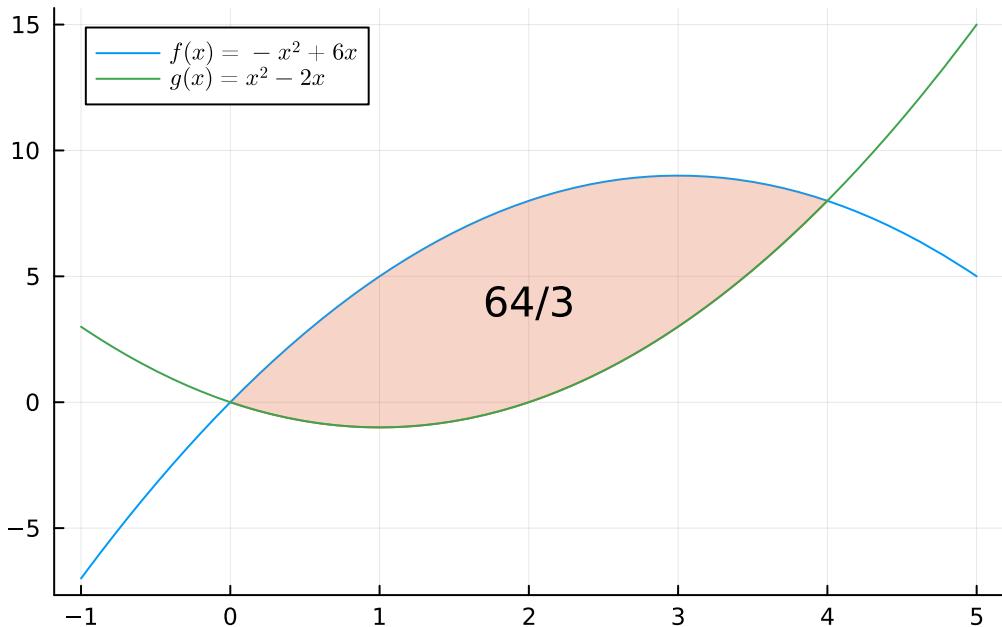
$\frac{64}{3}$

Y ahora dibujamos el área calculada.

```

using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = -x^2+6x
g(x) = x^2-2x
plot(f, -1, 5, label = L"f(x)=-x^2+6x")
plot!(g, 0, 4, fillrange = f, fillalpha = 0.3, label = "")
plot!(g, label = L"g(x)=x^2-2x")
annotate!(2, 4, sol)

```



**Ejercicio 7.7.** Dibujar la gráfica de la función  $f(x) = e^{-x}$  y calcular el área total encerrada entre la gráfica y el eje  $x$  para  $x > 0$ .

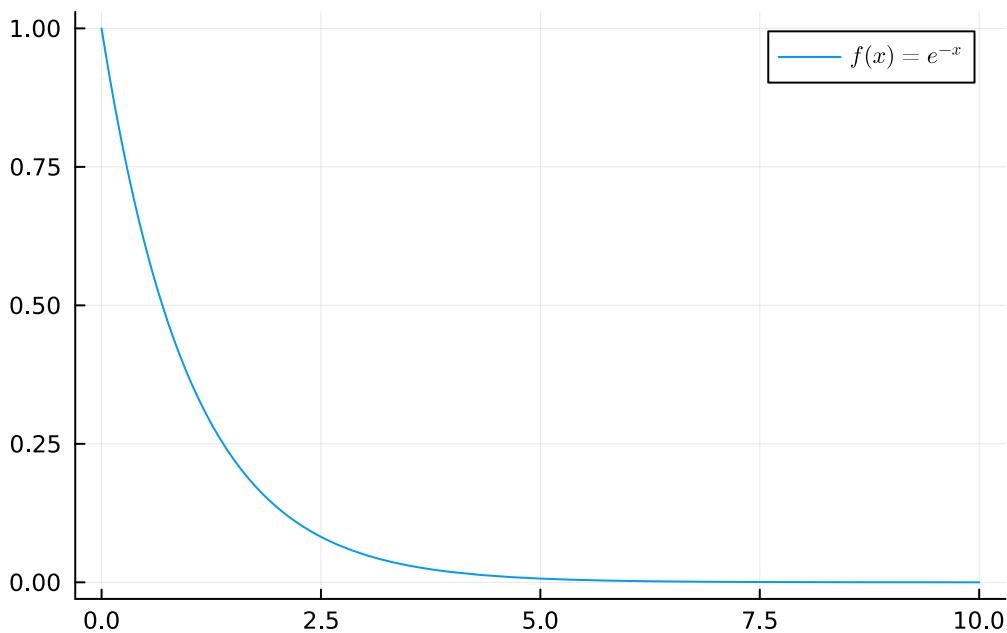
### 💡 Solución

Dibujamos primero la gráfica.

```

using Plots, SymPy, LaTeXStrings
@syms x::real
f(x) = exp(-x)
plot(f(x), 0, 10, label = L"f(x)=e^{-x}")

```



Y ahora calculamos el área mediante la integral impropia entre 0 y  $\infty$ .

```
integrate(f(x), 0, oo)
```

1

**Ejercicio 7.8.** Un vehículo se mueve con una velocidad dada por la función  $f_{rsen}(t)^2$ . ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo  $[0, 2\pi]$ ?

### 💡 Solución

Para calcular el **valor medio de una función**  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  tenemos que calcular la integral definida

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = sin(x)^2
1/(2*PI) * integrate(f(x), 0, 2PI)
```

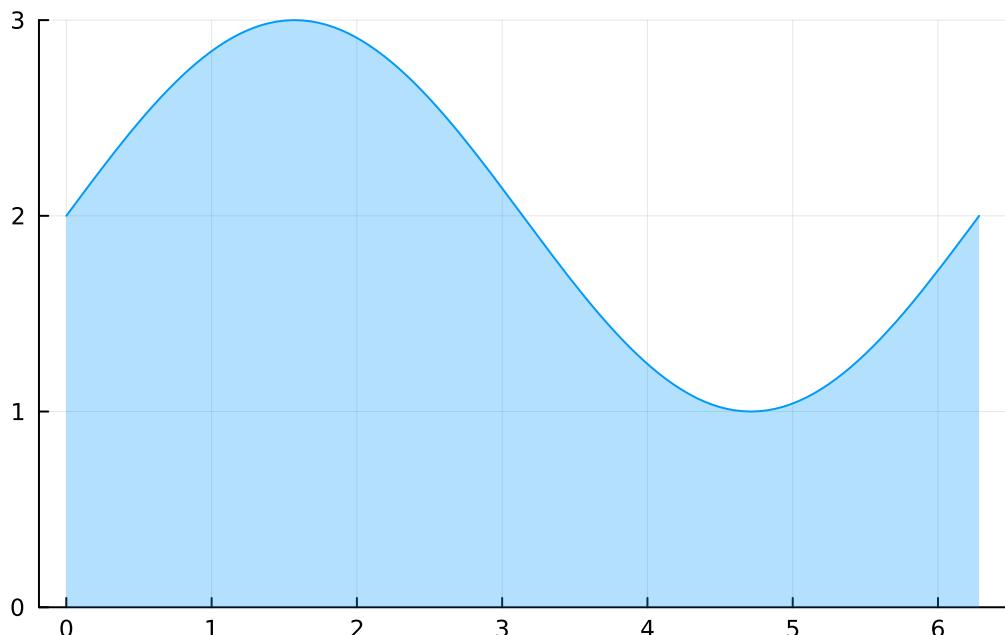
$\frac{1}{2}$

**Ejercicio 7.9.** Representar gráficamente la región del primer cuadrante limitada por la función  $f(x) = 2 + \sin(x)$  y el eje  $x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y hallar el volumen del sólido de revolución generado al rotar esta región alrededor del eje  $x$ .

### Solución

Dibujamos primero la región.

```
using SymPy, Plots
@syms x::real
f(x) = sin(x)+2
plot(f, 0, 2pi, ylim=(0,3), fillrange = 0, fillalpha = 0.3, label = "")
```

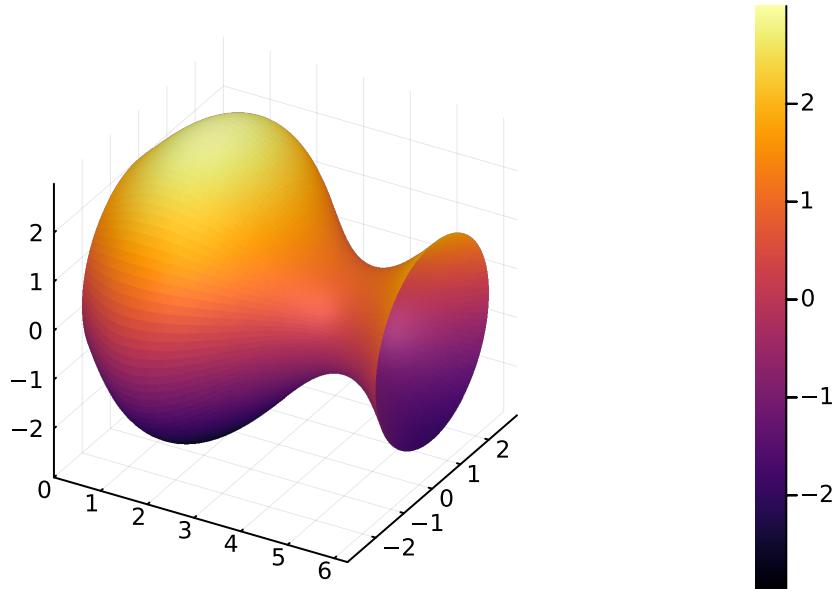


A continuación dibujamos el sólido de revolución parametrizado en 3D.

```

using Unzip
@syms x::real u::real v::real
f(x) = sin(x)+2
S(u, v) = (u, f(u)*cos(v), f(u)*sin(v))
us = range(0, 2pi, length=100)
vs = range(0, 2pi, length=100)
ws = unzip(S.(us, vs'))
surface(ws...)

```



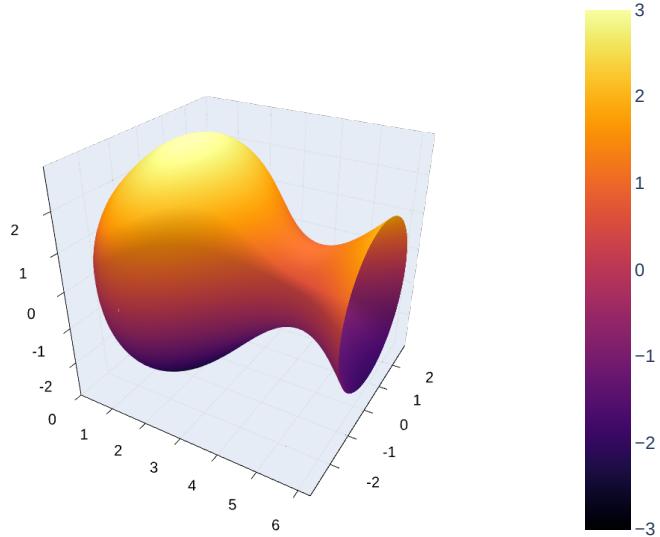
También es posible dibujarlo de manera interactiva con la activando el backend de Plotly mediante la función `plotlyjs()`.

```

# Activamos el backend de Plotly.
plotlyjs()
plot(surface(ws...))

```

```
WebIO._IJuliaInit()
```



Para calcular el [volumen de un sólido de revolución](#) generado al rotar la gráfica de una función  $f(x)$  alrededor del eje  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ , mediante discos cilíndricos perpendiculares al eje  $x$ , hay que calcular la integral definida

$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

```
N(integrate(pi*f(x)^2, 0, 2pi))
```

88.82643960980422410690317029966353336734417982417697812151367494195434357891355

**Ejercicio 7.10.** Calcular el volumen del toro que se obtiene al rotar la circunferencia de ecuación  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  alrededor del eje  $y$ .

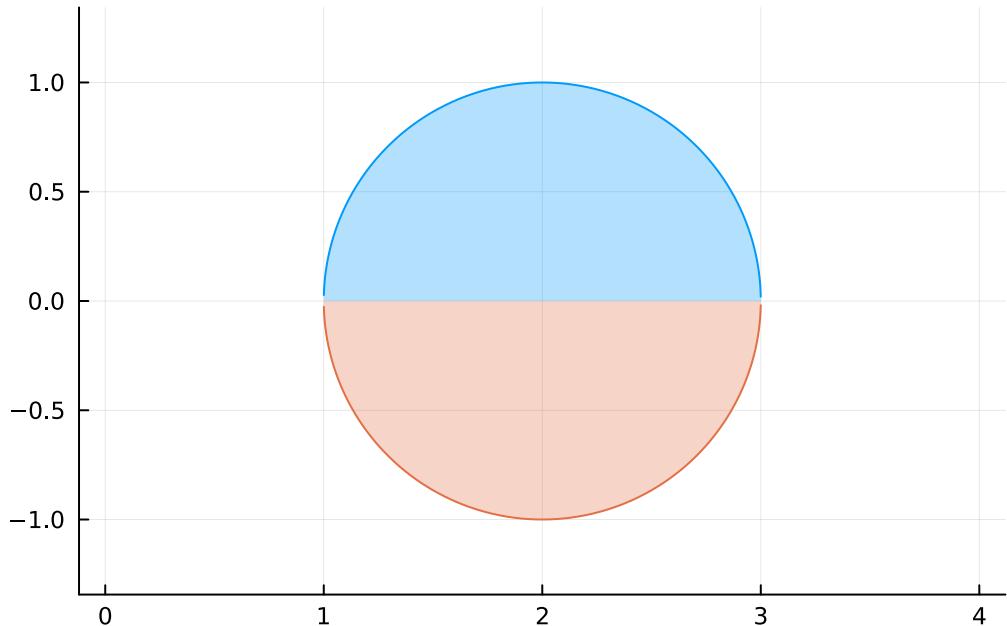
### Solución

Dibujamos primero la región.

```

using SymPy, Plots
# Volvemos a activar el backend por defecto.
gr()
@syms x::real
f(x) = sqrt(1-(x-2)^2)
plot(f(x), 0, 4, fillrange = 0, fillalpha = 0.3, aspect_ratio = 1, label = "")
plot!(-f(x), 0, 4, fillrange = 0, fillalpha = 0.3, aspect_ratio = 1, label = "")

```



En este caso, usaremos **envoltorios cilíndricos** para calcular el volumen del sólido de revolución. Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar alrededor del eje  $y$  la gráfica de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , mediante envoltorios cilíndricos, hay que calcular la integral definida

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Para el caso particular del toro, calcularemos la mitad de su volumen aprovechando que es simétrico con respecto al plano  $xz$  y lo multiplicaremos por 2.

```
2 * integrate(2PI*x*f(x), 1, 3)
```

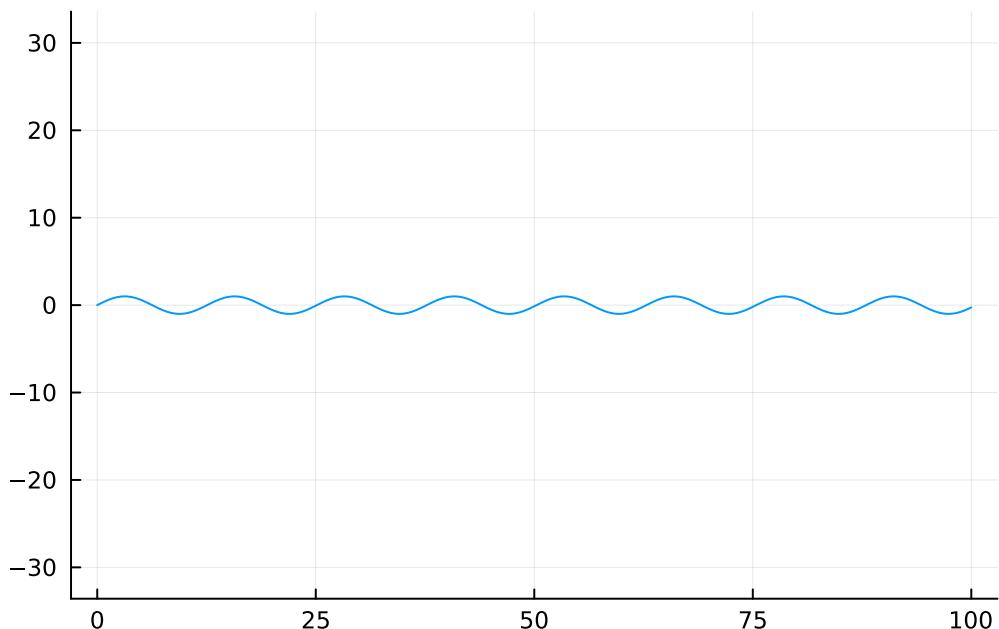
$$4\pi^2$$

**Ejercicio 7.11.** Una empresa fabrica tejas de chapa con forma ondulada cuyo perfil viene dado por la curva  $y = Fr\sin(\frac{x}{2})$ . Si se quieren obtener tejas de 100 cm de longitud, ¿qué longitud tienen que tener las planchas de chapa para fabricarlas?

 Solución

Dibujamos primero el perfil de las chapas.

```
using SymPy, Plots
@syms x::real
f(x) = sin(x/2)
plot(f(x), 0, 100, aspect_ratio = 1, label = "")
```



Para calcular la [longitud de una curva](#) dada por la gráfica de una función  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$ , hay que calcular la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

```
using QuadGK
quadgk(sqrt(1+diff(f(x))^2), 0, 100)

(105.954416730336, 1.2200227161862642e-6)
```

**Ejercicio 7.12.** El **cuerno de Gabriel** es un sólido de revolución que se obtiene al rotar la función  $f(x) = 1/x$  alrededor del eje  $x$  para  $x \geq 1$ .

- a. El volumen del cuerno de Gabriel.

 Solución

Calculamos su volumen mediante discos cilíndricos transversales al eje  $x$ .

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = 1/x
integrate(PI*f(x)^2, 1, oo)
```

$\pi$

- b. Calcular la superficie del cuerno de Gabriel.

 Solución

Para calcular la **superficie del sólido de revolución** que se obtiene al rotar la gráfica de la función  $f(x)$  alrededor del eje  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  hay que calcular la integral definida

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

```
using SymPy
@syms x::real
f(x) = 1/x
integrate(2PI*f(x)*sqrt(1+diff(f(x))^2), 1, oo)
```

$\infty$

Así pues, se da la paradoja de que el cuerno de Gabriel tiene un volumen finito, pero una superficie infinita.

**Ejercicio 7.13.** Un depósito con forma de sólido de revolución generado al rotar la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  alrededor del eje  $y$  en el intervalo de 0 a 4 m, contiene 100000 l de aceite con una densidad de  $\delta = 900 \text{ kg/m}^3$ . ¿Qué trabajo se realiza al vaciar el depósito por arriba?

### Solución

Calculamos primero el nivel del aceite en el depósito. Para ello necesitamos el volumen contenido en el depósito hasta una altura  $h$ .

```
using SymPy
@syms x::real y::real
f(x) = x^2/2
f⁻¹(y) = solve(y-f(x), x)[2]
# Volumen hasta una altura h
V(x) = integrate(PI*f⁻¹(y)², 0, x)
# Nivel para un volumen de 100 m³
nivel = solve(V(x)-100)[2]
```

$\frac{10}{\sqrt{\pi}}$   
Para calcular el [trabajo realizado por una fuerza](#) aplicada sobre un objeto y que provoca un desplazamiento desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , basta con calcular la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

En este caso, tomando discos cilíndricos perpendiculares al eje  $y$ , el volumen de cada disco viene dado por la función  $V(y) = \pi f^{-1}(y)^2 \Delta y$  y, por tanto, la masa de cada uno de estos discos es  $M(y) = \delta \pi f^{-1}(y)^2 \Delta y$ . Como la única fuerza que actúa sobre la masa es la gravedad, la fuerza aplicada a la masa de cada disco es  $F(y) = gM(y) = g\delta\pi f^{-1}(y)^2 \Delta y$ . Finalmente, como la masa de cada uno de los discos debe elevarse una distancia  $4 - y$ , el trabajo realizado para vaciar el depósito se calcula mediante la integral definida

$$\int_0^h g\delta\pi f^{-1}(y)^2(4-y) dy$$

donde  $h$  es el nivel del aceite calculado antes.

```
= 900
gravedad = 9.81
N(integrate(gravedad* *PI*f⁻¹(y)²*(8-y), 0, nivel))
```

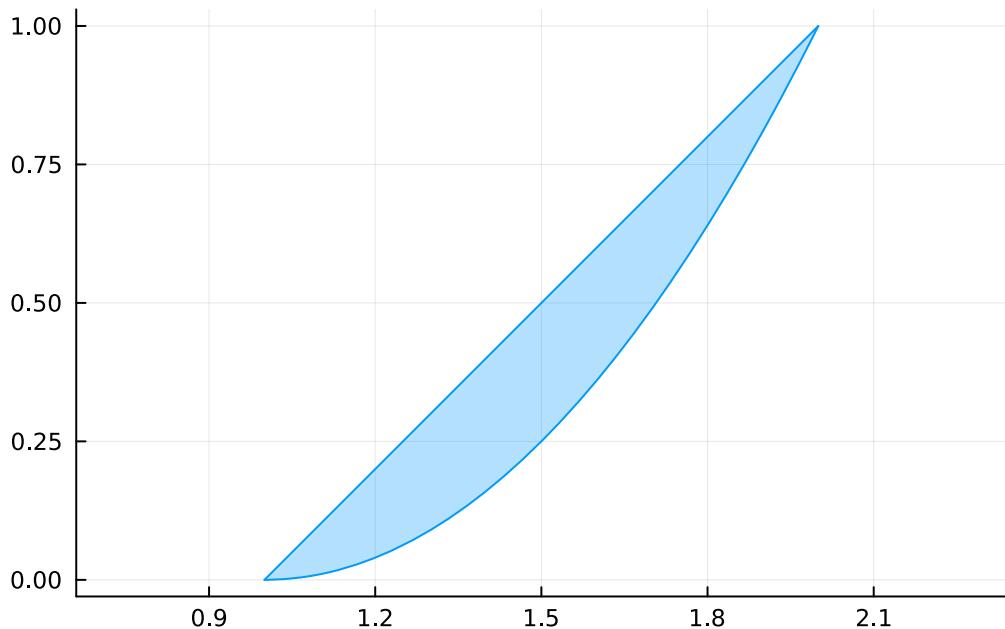
3.742380111237906495023604348113292559721917995769512728615711442011158430753357e+06

**Ejercicio 7.14.** Dibujar la región que se obtiene con la intersección de la recta  $y = x - 1$  y la parábola  $y = (x - 1)^2$ , y dibujar su centroide. ¿Cuál es el volumen del sólido de revolución generado al rotar esta región sobre el eje  $x$ ? ¿Y al rotarla sobre el eje  $y$ ?

### Solución

Dibujamos primero la región. Para ello hay que calcular primero los puntos de corte de las dos curvas.

```
using SymPy, Plots
@syms x::real
f(x) = x-1
g(x) = (x-1)^2
# Calculo de los puntos de corte.
a, b = N(solve(f(x)-g(x)))
plot(f(x), a, b, aspect_ratio = 1, label = "")
plot!(g(x), a, b, fillrange = f, fillalpha = 0.3, aspect_ratio = 1, c = 1, label = "")
```

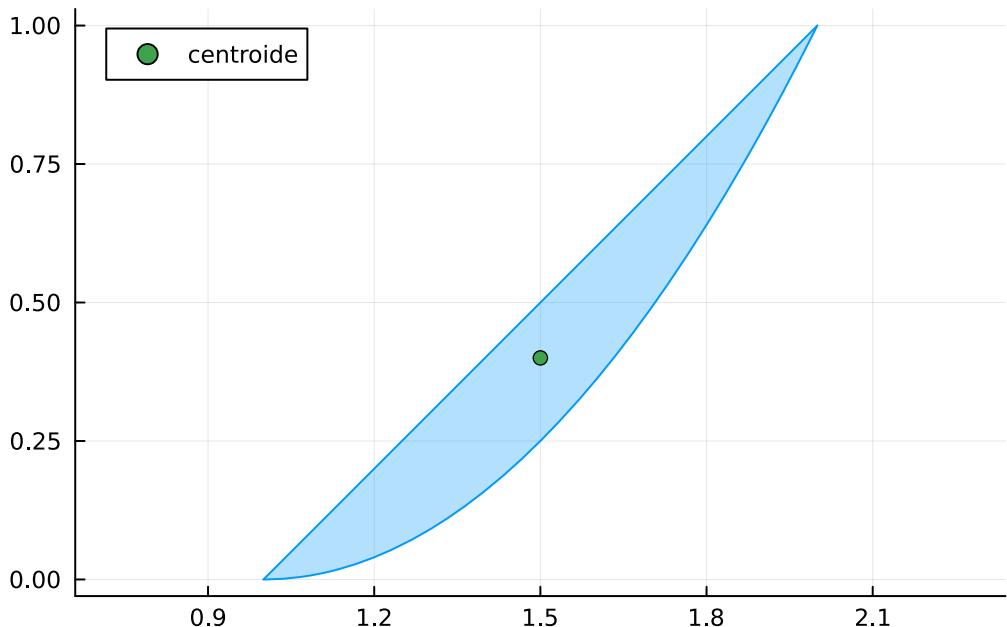


Para calcular el [centroide  \$\(\bar{x}, \bar{y}\)\$  de una región plana](#) encerrada por dos curvas  $f(x)$  y  $g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  hay que calcular por separado el centro de masas  $\bar{x}$  con respecto al eje  $y$ , y el centro de masas  $\bar{y}$  con respecto al eje  $x$ , mediante cociente de las siguientes integrales definidas

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx}$$

```
# Coordenada x del centroide.
cx = integrate(x*(f(x)-g(x)), a, b) / integrate(f(x)-g(x), a, b)
# Coordenada y del centroide
cy = 1/2 * integrate(f(x)^2-g(x)^2, a, b) / integrate(f(x)-g(x), a, b)
# Dibujamos el centroide
scatter!((cx,cy), label = "centroide")
```



Para calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar esta región sobre el eje  $x$  podemos usar el teorema de Pappus que establece que el volumen es el área de la región multiplicada por la longitud del camino recorrido por el centroide. Al rotar la región sobre el eje  $x$  el camino recorrido por el centroide es  $2\pi\bar{y}$ .

```
2*PI*cy*integrate(f(x)-g(x), a, b)
```

$0.133333333333333\pi$

Y al rotarla sobre el eje  $y$  el camino recorrido por el centroide es  $2\pi\bar{x}$ .

```
2*PI*cx*integrate(f(x)-g(x), a, b)
```

$\frac{\pi}{2}$

## 7.2 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 7.15.** Calcular la suma superior de Riemann de la función  $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$  en el intervalo  $[1, 2]$ , tomando una partición de 100 subintervalos de igual amplitud.

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 7.16.** Calcular el área encerrada entre las funciones  $f(x) = Frsin(x)$  y  $\cos(x)$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 7.17.** Dibujar la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$  y calcular el área total encerrada entre la gráfica y el eje  $x$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 7.18.** La función  $T(t) = 100te^{-t}$  define la temperatura de un sistema en cada instante  $t$ . Calcular la temperatura media en el intervalo  $[0, 5]$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 7.19.** Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación alrededor del eje  $x$  de la región comprendida entre las funciones  $f(x) = \ln(x)$  y  $g(x) = \frac{x-1}{2}$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

Calcular también el volumen del sólido de revolución generado al rotar la misma región alrededor del eje  $y$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 7.20.** La curva  $y = a \cosh(x/a)$  se conoce como *catenaria*. ¿Cuál es la longitud de la catenaria con  $a = 2$  entre  $-1$  y  $1$ ?

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 7.21.** Un depósito metálico tiene la forma del elipsoide que se obtiene al rotar la elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  alrededor del eje  $x$ . Calcular la cantidad de chapa metálica necesaria para construir el depósito.

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 7.22.** La función de densidad del modelo de distribución de probabilidad exponencial  $\text{Exp}(1)$  es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- La media es menor que la mediana
- La media es igual que la mediana
- La media es mayor que la mediana.

# 8 Funciones vectoriales

## 8.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico.  
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
using Makie, GLMakie # Para el dibujo de gráficas en 3d.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.  
using LinearAlgebra # Para el módulo, producto escalar y vectorial de vectores.  
using Roots # Para calcular soluciones de ecuaciones numéricamente.  
using CalculusWithJulia # Utilidades para dibujar vectores.
```

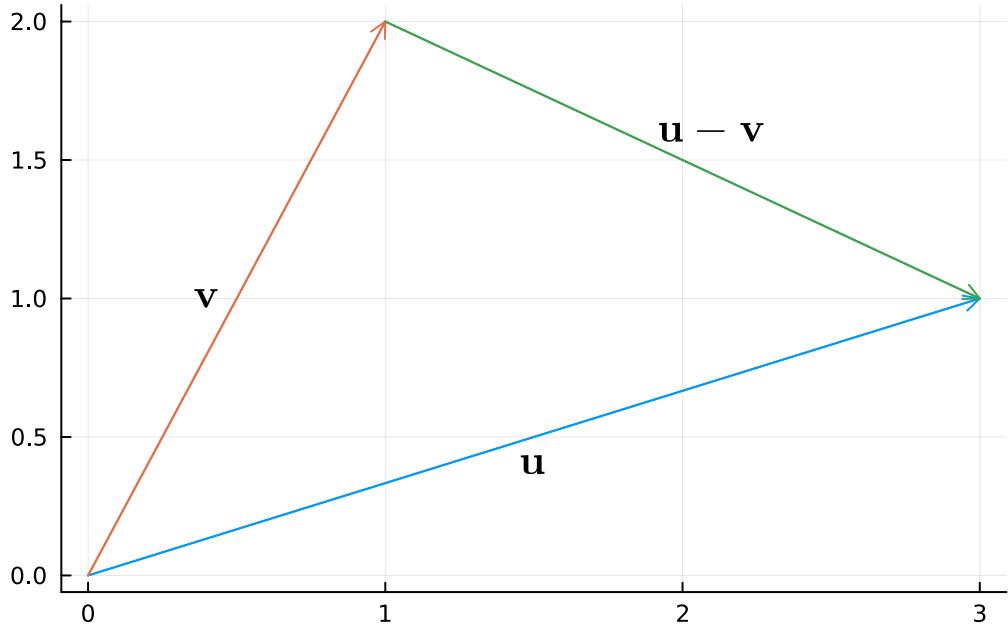
**Ejercicio 8.1.** Representar gráficamente los vectores  $\mathbf{u} = (3, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 2)$  y  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  en el plano real  $\mathbb{R}^2$ .

**i** Ayuda

Usar la función `arrow` del paquete `CalculusWithJulia` para dibujar flechas que representan vectores.

### Solución

```
using CalculusWithJulia
using LaTeXStrings
O = [0, 0] # Origin
u = [3, 1]
v = [1, 2]
Plots.plot()
arrow!(O, u)
arrow!(O, v)
arrow!(v, u-v)
annotate!(1.5, 0.4, L"\mathbf{u}")
annotate!(0.4, 1, L"\mathbf{v}")
annotate!(2.1, 1.6, L"\mathbf{u}-\mathbf{v})
```



**Ejercicio 8.2.** Sean  $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$  y  $\mathbf{v} = (3, 0, 2)$  dos vectores del espacio real  $\mathbb{R}^3$ .

- Calcular el módulo (norma) de ambos vectores y construir vectores unitarios con su misma dirección.

### **i** Ayuda

Usar la función `norm` del paquete `LinearAlgebra` para calcular el módulo de un vector.

### **?** Solución

```
using LinearAlgebra
u = [-1, 2, -1]
v = [-2, 0, 1]
println("Módulo de u: $(norm(u))")
println("Módulo de v: $(norm(v))")
println("Vector unitario con la dirección de u $(u/norm(u))")
println("Vector unitario con la dirección de v $(v/norm(v))")

Módulo de u: 2.449489742783178
Módulo de v: 2.23606797749979
Vector unitario con la dirección de u [-0.4082482904638631, 0.8164965809277261, -0.23606797749979]
Vector unitario con la dirección de v [-0.8944271909999159, 0.0, 0.447213595499957]
```

- b. Calcular su producto escalar.

### **i** Ayuda

Usar la función `dot` del paquete `LinearAlgebra` para calcular el producto escalar de dos vectores.

### **?** Solución

```
println("Producto escalar de u y v: $(dot(u, v))")
# También se puede usar el clásico punto
println("Producto escalar de u y v: $(u · v)")

Producto escalar de u y v: 1
Producto escalar de u y v: 1
```

- c. Calcular su producto vectorial.

### **i** Ayuda

Usar la función `cross` del paquete `LinearAlgebra` para calcular el producto vectorial de dos vectores.

 Solución

```
println("Producto vectorial de u y v: $(cross(u, v))")  
# También se puede usar la clásica cruz ×  
println("Producto vectorial de u y v: $(u × v)")
```

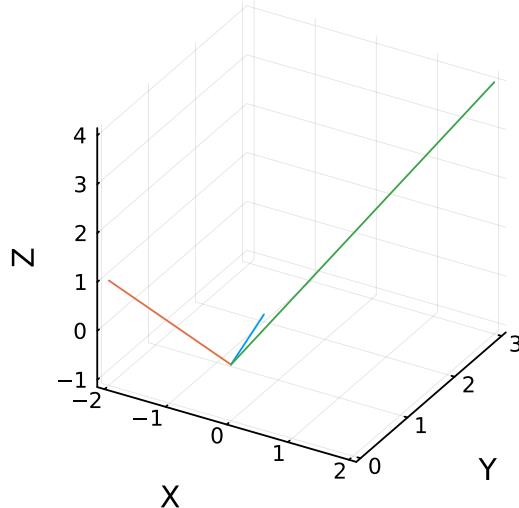
```
Producto vectorial de u y v: [2, 3, 4]  
Producto vectorial de u y v: [2, 3, 4]
```

d. Dibujar  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  en el espacio real.

 Solución

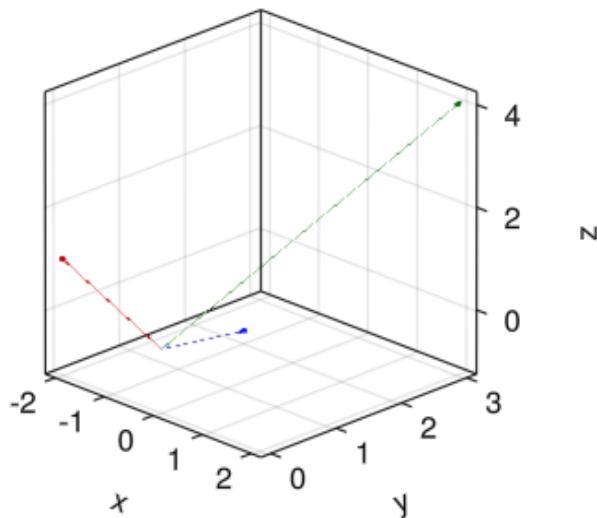
## 8.2 Plots

```
using CalculusWithJulia  
Plots.plot(xlabel = "X", ylabel = "Y", zlabel = "Z", legend = false)  
O = [0, 0, 0]  
arrow!(O, u)  
arrow!(O, v)  
arrow!(O, u × v)
```



### 8.3 Makie

```
using GLMakie
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], azimuth = -pi/4, aspect = (1,1,1))
O = [0, 0 ,0]
arrows!(ax, [Point3(0)], [Vec3(u), Vec3(v), Vec3(u × v)],
    linecolor = [:blue,:red, :green], arrowcolor = [:blue,:red, :green],
    linewidth = 0.02, arrowsize = Vec3(0.1, 0.1, 0.1))
fig
```



**Ejercicio 8.3.** Dibujar las trayectorias de las siguientes funciones vectoriales.

- a.  $f(t) = (Fr\sin(t), \cos(t))$ .

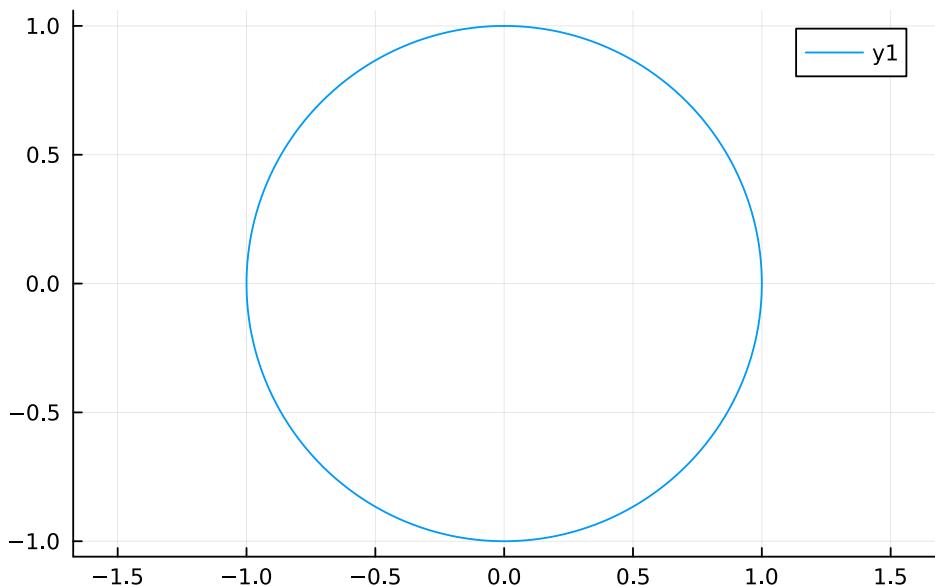
**i** Ayuda

Usar la función `plot` del paquete `Plots` o la función `lines` del paquete `Makie` para dibujar la trayectoria, pasándole cada una de las funciones componentes separadas por comas.

 Solución

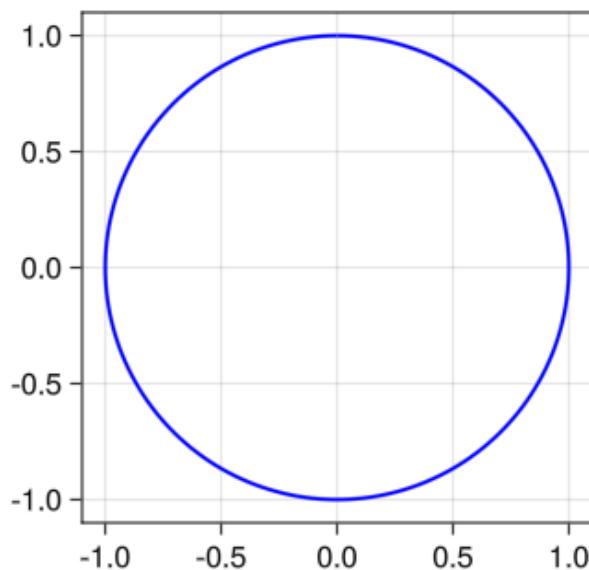
## 8.4 Plots

```
using Plots
using CalculusWithJulia
f(t) = [sin(t), cos(t)]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
xs, ys = unzip(f.(ts))
Plots.plot(xs, ys, aspect_ratio = :equal)
```



## 8.5 Makie

```
using GLMakie
f(t) = [sin(t), cos(t)]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point2.(f.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], aspect = 1)
lines!(ax, points, linewidth = 2, color = :blue)
fig
```

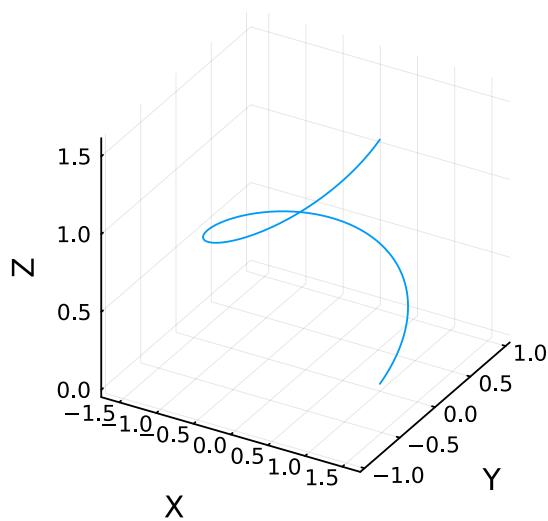


b.  $\mathbf{g}(t) = (\cos(t), Fr\sin(t), t/4)$ .

💡 Solución

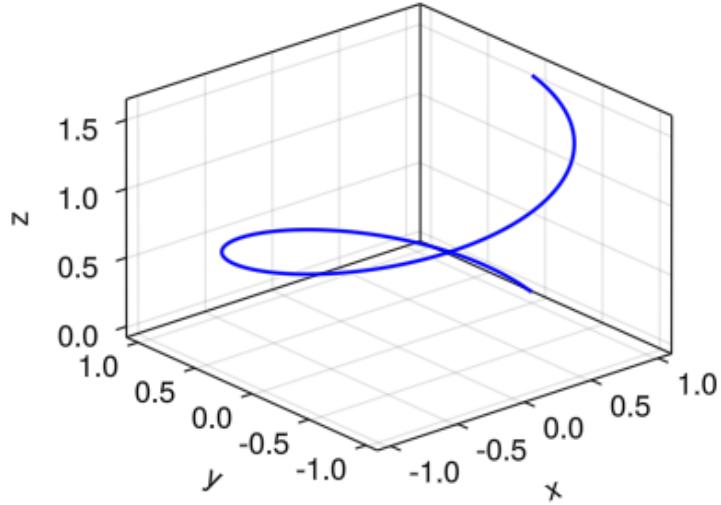
## 8.6 Plots

```
g(t) = [cos(t), sin(t), t/4]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
xs, ys, zs = unzip(g.(ts))
Plots.plot(xs, ys, zs, aspect_ratio = :equal, xlabel = "X", ylabel = "Y", zlabel = "Z")
```



## 8.7 Makie

```
using GLMakie
g(t) = [cos(t), sin(t), t/4]
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point3.(g.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1])
lines!(ax, points, linewidth = 2, color = :blue)
fig
```



**Ejercicio 8.4.** Un **nudo tórico** es un nudo que se forma mediante una trayectoria que gira sobre la superficie de un toro en  $\mathbb{R}^3$ . La función vectorial que define este tipo de nudos sobre un toro de ecuación  $(r - 2)^2 + z^2 = 1$  es  $\mathbf{f}(t) = ((2 + \cos(qt)) \cos(pt), (2 + \cos(qt)) \operatorname{sen}(pt), -\operatorname{sen}(qt))$ , donde  $p$  y  $q$  son dos enteros primos entre si y  $t \in [0, 2\pi]$ .

- Dibujar el nudo tórico con  $p = 2$  y  $q = 3$ .

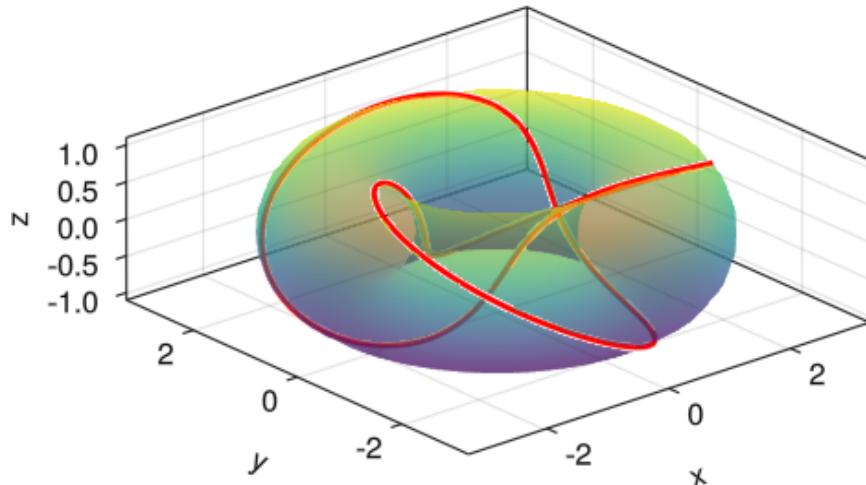
#### 💡 Solución

Usando el paquete **Makie**.

```

using GLMakie
# Definimos las ecuaciones paramétricas del toro.
U = LinRange(-pi, pi, 100)
V = LinRange(-pi, pi, 20)
x1 = [2cos(u) + cos(u) * cos(v) for u in U, v in V]
y1 = [2sin(u) + sin(u) * cos(v) for u in U, v in V]
z1 = [sin(v) for u in U, v in V]
# Inicializamos la figura y los ejes.
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = (3, 3, 1))
# Dibujamos el toro.
Makie.surface!(ax, x1, y1, z1; colormap = :viridis, shading = false, transparent = true)
# Definimos la función vectorial de nudo tórico.
f(t) = [(2+cos(3t))cos(2t), (2+cos(3t))sin(2t), -sin(3t)]
# Generamos los puntos de la trayectoria del nudo tórico.
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point3.(f.(ts))
# Dibujamos el nudo tórico.
lines!(ax, points, linewidth = 3, color = :red)
fig

```



- b. Definir una función para crear nudos tóricos con parámetros  $p$  y  $q$  para los enteros que definen el toro y un parámetro opcional booleano `toro`, para dibujar el toro o

no.

### Solución

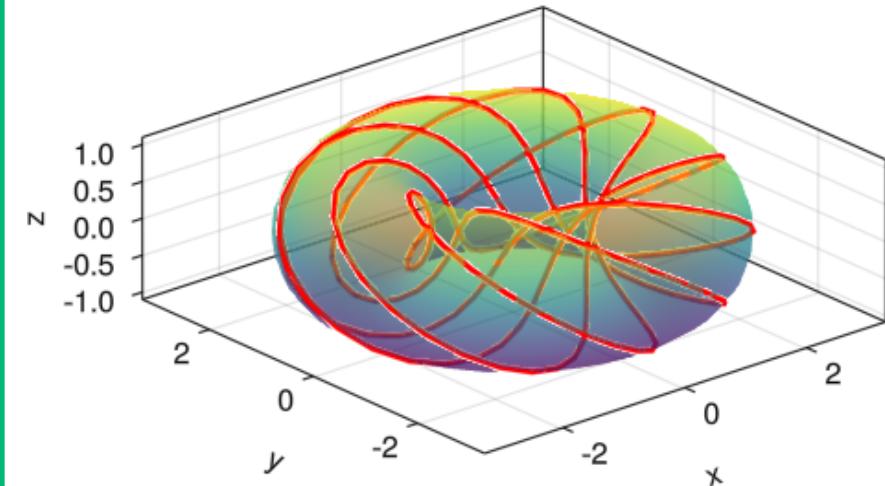
```
using GLMakie
"""

nudo_torico(ax, p, q, toro)

Función dibuja un nudo tórico de parámetros p, q sobre los ejes ax. Si el parámetro toro es true, dibujará un toro paramétrico; si es false, dibujará un nudo tórico.

function nudo_torico(ax::Axis3, p::Int64, q::Int64, toro::Bool = true)
    if toro
        alpha = 0.5
    else
        alpha = 0
    end
    # Definimos las ecuaciones paramétricas del toro.
    U = LinRange(-pi, pi, 100)
    V = LinRange(-pi, pi, 20)
    x1 = [2cos(u) + cos(u) * cos(v) for u in U, v in V]
    y1 = [2sin(u) + sin(u) * cos(v) for u in U, v in V]
    z1 = [sin(v) for u in U, v in V]
    # Dibujamos el toro en los ejes.
    Makie.surface!(ax, x1, y1, z1; colormap = :viridis, shading = false, transparency = 0.5)
    # Definimos la función vectorial de nudo tórico.
    f(t) = [(2+cos(q*t))cos(p*t), (2+cos(q*t))sin(p*t), -sin(q*t)]
    # Generamos los puntos de la trayectoria del nudo tórico.
    ts = range(0, 2pi, length = 200)
    points = Point3.(f.(ts))
    # Dibujamos el nudo tórico.
    lines!(ax, points, linewidth = 3, color = :red)
end

fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = (3, 3, 1))
nudo_torico(ax, 5, 9, true)
fig
```



### Ejercicio 8.5.

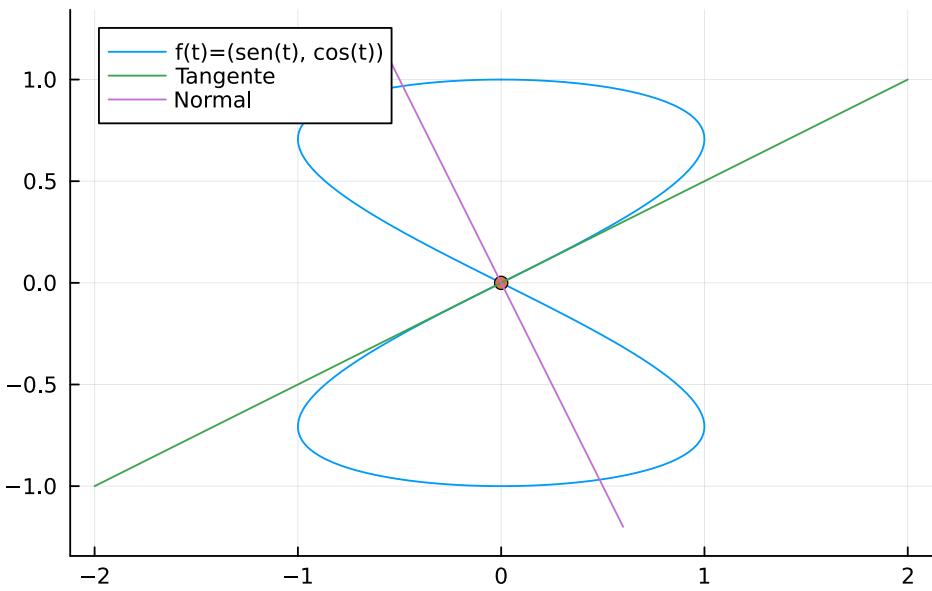
- a. Calcular las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la trayectoria  $\mathbf{f}(t) = (Fr\sin(2t), \cos(t))$  en el punto correspondiente a  $t = \pi/2$  y dibujarlas.

**i** Ayuda

La ecuación de la recta tangente a la trayectoria de la función vectorial  $\mathbf{f}(t)$  en el instante  $t = a$  es  $\mathbf{f}(a) + \mathbf{f}'(a)t$ .

### Solución

```
using SymPy, Plots
@syms t::real
# Definimos la función vectorial.
f(t) = [sin(2t), cos(t)]
# Instante
a = pi/2
# Dibujamos la trayectoria.
Plots.plot(f(t)..., 0, 2pi, aspect_ratio = :equal, label = "f(t)=(sen(t), cos(t))")
# Dibujamos el punto de tangencia.
Plots.scatter!([f(a)[1]], [f(a)[2]], label = "")
# Calculamos la derivada en el punto.
df = subs.(diff.(f(t)), t=>a)
# Calculamos la ecuación de la recta tangente.
tl(t) = f(a) + df * t
# Dibujamos la recta tangente.
Plots.plot!(tl(t)..., -1, 1, label = "Tangente")
# Calculamos la ecuación de la recta normal.
nl(t) = f(a) - [df[2], -df[1]] * t
Plots.plot!(nl(t)..., -0.6, 0.6, label = "Normal")
```

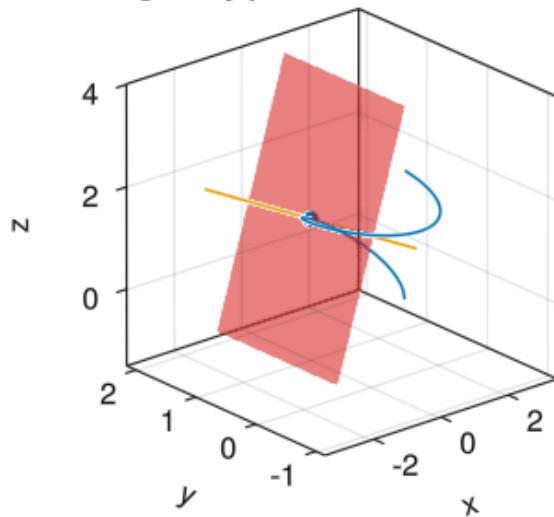


- b. Calcular las ecuaciones de las recta tangente y el plano normal a la trayectoria  $\mathbf{g}(t) = (\cos(t), Fr\sin(t), \sqrt{t})$  en punto correspondiente a  $t = \pi$  y dibujarlas.

### Solución

```
using SymPy, LinearAlgebra, GLMakie
@syms x, y, z, t::real
# Definimos la función vectorial.
g(t) = [cos(t), sin(t), sqrt(t)]
# Instante
a = pi/2
# Dibujamos la trayectoria.
ts = range(0, 2pi, 200)
points = Point3.(g.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], title = "Recta tangente y plano normal a una trayectoria",
lines!(ax, points)
# Dibujamos el punto de tangencia.
Makie.scatter!([Point3(g(a))])
# Calculamos la derivada en el punto.
dg = subs.(diff.(g(t)), t=>a)
# Calculamos la ecuación de la recta tangente.
tl(t) = g(a) + dg * t
# Dibujamos la recta tangente.
pointstl = Point3.(tl.(range(-pi, pi, 2)))
lines!(ax, pointstl)
# Calculamos la ecuación del plano normal
np(x,y) = solve(dot(([x, y, z] - g(a)), dg), z)[1]
xs = range(-1, 1, 2)
ys = range(0, 2, 2)
zs = [np(x,y) for x in xs, y in ys]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs, colormap = ["red"], alpha = 0.5, transparency =
fig
```

### Recta tangente y plano normal a una trayectoria



**Ejercicio 8.6.** Dada una función vectorial  $\mathbf{f}(t)$  en  $\mathbb{R}^3$ , el *plano osculador* de la trayectoria de  $\mathbf{f}(t)$  en  $t = a$  es el plano definido por los vectores tangente  $\mathbf{T}(a)$  y normal  $\mathbf{N}(a)$ .

Calcular y dibujar el plano osculador de la función vectorial del nudo tórico del apartado a del ejercicio Ejercicio 8.4 en el punto correspondiente a  $t = \pi/2$ .

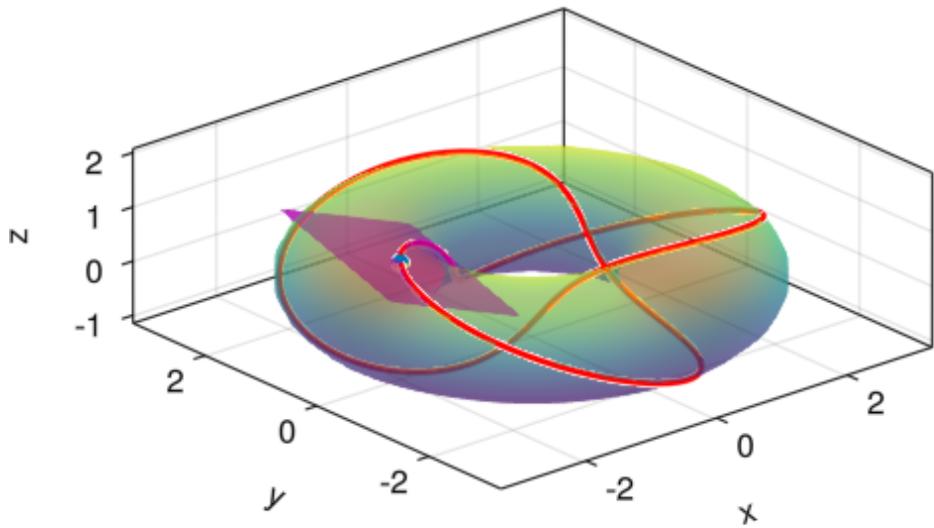
#### Solución

Usando el paquete Makie.

```

using SymPy, LinearAlgebra, GLMakie
@syms x, y, z, t::real
# Definimos las ecuaciones paramétricas del toro.
U = LinRange(-pi, pi, 100)
V = LinRange(-pi, pi, 20)
x1 = [2cos(u) + cos(u) * cos(v) for u in U, v in V]
y1 = [2sin(u) + sin(u) * cos(v) for u in U, v in V]
z1 = [sin(v) for u in U, v in V]
# Inicializamos la figura y los ejes.
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = (3, 3, 1))
# Dibujamos el toro.
Makie.surface!(ax, x1, y1, z1; colormap = :viridis, shading = false, transparency =
# Definimos la función vectorial de nudo tórico.
f(t) = [(2+cos(3t))cos(2t), (2+cos(3t))sin(2t), -sin(3t)]
# Generamos los puntos de la trayectoria del nudo tórico.
ts = range(0, 2pi, length = 200)
points = Point3.(f.(ts))
# Dibujamos el nudo tórico.
lines!(ax, points, linewidth = 3, color = :red)
# Punto
a = pi/2
# Dibujamos el punto.
Makie.scatter!(ax, [Point3(f(a))])
# Vector tangente unitario.
Tan(t) = diff.(f(t)) / norm(diff.(f(t)))
Ta = subs.(Tan(t), t=>a)
# Vector normal unitario.
Norm(t) = diff.(Tan(t)) / norm(diff.(Tan(t)))
Na = subs.(Norm(t), t=>a)
# Calculamos la ecuación del plano osculador.
po(x,y) = solve(dot(([x, y, z] - f(a)), cross(Ta, Na)), z)[1]
xs = range(-3, -1, 2)
ys = range(-1, 1, 2)
zs = [po(x,y) for x in xs, y in ys]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs, colormap = ["magenta"], alpha = 0.8, transparency = t
fig

```



**Ejercicio 8.7.** Para construir un cuaderno de 30 cm de altura se utiliza una espiral de alambre con radio 1 cm y una distancia entre cada dos vueltas consecutivas  $\pi/4$  cm. Dibujar la espiral y calcular la cantidad de alambre necesaria para cada cuaderno.

**i** Ayuda

La [longitud de la trayectoria de una función vectorial  \$\mathbf{f}\(t\)\$](#)  en el intervalo  $t \in [a, b]$  se calcula mediante la integral

$$\int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt$$

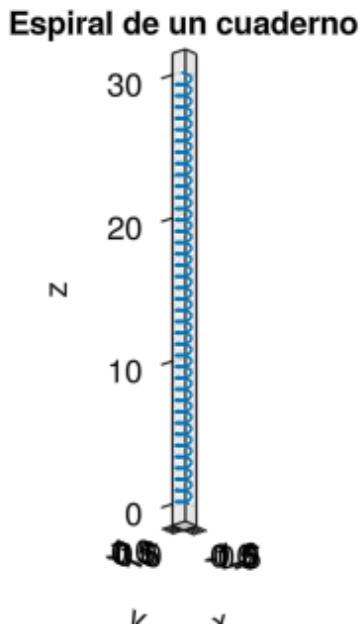
**💡 Solución**

Dibujamos primero la espiral.

```

using SymPy, GLMakie
@syms t::real
# Definimos la función vectorial.
f(t) = [cos(t), sin(t), t/8]
# Calculamos el número de revoluciones.
h = solve(f(t)[3]-30)[1]
# Dibujamos la trayectoria.
ts = range(0, h, 2000)
points = Point3.(f.(ts))
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], title = "Espiral de un cuaderno", aspect = (1, 1, 30))
lines!(ax, points)
fig

```



A continuación calculamos la longitud de la espiral.

```

using LinearAlgebra
# Calculamos longitud de la trayectoria
N(integrate(norm(diff.(f(t))), 0, h))

```

241.8677324489564895709983969091131339340318891682572016380977716779162485307713

**Ejercicio 8.8.** Dibujar función de curvatura de campana de Gauss correspondiente a la función de densidad de una distribución normal estándar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

¿En qué puntos la curvatura es nula? ¿Dónde la curvatura es máxima localmente?

### Ayuda

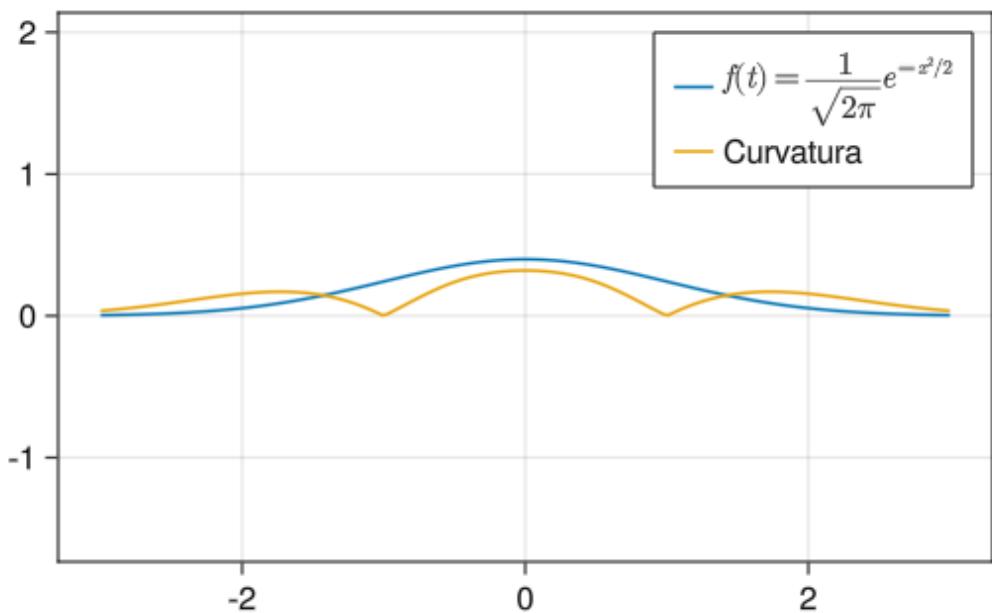
La [curvatura de la gráfica de una función real](#)  $f(x)$  se calcula mediante la fórmula

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f''(x)^2)^{3/2}}.$$

### Solución

Dibujamos primero la gráfica de la función y la de la función curvatura.

```
using SymPy, GLMakie
@syms x::real
# Definimos la función.
f(x) = 1/sqrt(2pi) * exp(-x^2/2)
# Dibujamos la gráfica de la función.
fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], autolimitaspect = 1)
lines!(ax, -3..3, f, label = L"\$f(t)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$")
fig
# Calculamos la segunda derivada de la función.
df2 = diff(f, 2)
# Calculamos la función de curvatura.
k(x) = abs(df2(x)) / (1 + df2(x)^2)^(3/2)
# Definimos una serie de puntos de la función curvatura.
xs = range(-3, 3, 200)
points = Point2.(xs, k.(xs))
# Dibujamos la función de curvatura
lines!(ax, points, label = "Curvatura")
# Añadimos la leyenda
axislegend()
fig
```



Ahora calculamos los puntos con curvatura máxima y mínima localmente.

```
# Calculamos los puntos que anulan la curvatura.
solve(k(x),x)
# Calculamos los puntos críticos de la curvatura.
# solve(diff(k(x)), x) No encuentra la solución, así que buscamos la solución numérica
using Roots
println("Máximo local en x = $(find_zero(diff(k(x)), -2)))")
println("Máximo local en x = $(find_zero(diff(k(x)), 0)))")
println("Máximo local en x = $(find_zero(diff(k(x)), 2)))")
```

Máximo local en x = -1.7320508075688774

Máximo local en x = 0.0

Máximo local en x = 1.7320508075688774

**Ejercicio 8.9.** La *torsión* de una trayectoria de una función vectorial  $\mathbf{f}(t)$  en el espacio real  $\mathbb{R}^3$  mide la intensidad con la que una curva se sale del plano osculador y se calcula con la fórmula

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)) \mathbf{f}'''(t)}{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|^2}$$

Definir una función para la curvatura y y otra para la torsión de la trayectoria de la función vectorial  $\mathbf{h}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + Frsen(t)\mathbf{j} + \cos(t)\mathbf{k}$ , y utilizarla para calcular la curvatura y la torsión en los instantes  $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/2$ .

### Solución

Calculamos primero la curvatura.

```
using SymPy, LinearAlgebra
"""
    curvatura(h, a)

Calcula la curvatura de la trayectoria de una función vectorial h en el punto a.
"""

function curvatura(f, a)
    @syms t::real
    # Calculamos la primera derivada.
    df(t) = diff.(f(t))
    # Calculamos la segunda derivada.
    df2(t) = diff.(df(t))
    # Calculamos la curvatura
    k(t) = norm(cross(df(t), df2(t))) / norm(df(t))^3
    return N(subs(k(t), t=>a))
end

f(t) = [cos(2t), sin(t), cos(t)]
println("Curvatura en t=0: $(curvatura(f, 0))")
println("Curvatura en t= /4: $(curvatura(f, pi/4))")
println("Curvatura en t= /2: $(curvatura(f, pi/2))")
println("Curvatura en t=3 /4: $(curvatura(f, 3pi/4))")
```

Curvatura en t=0: 4.1231056256176605498214098559740770251471992253736204343986335730949  
Curvatura en t= /4: 0.2  
Curvatura en t= /2: 4.123105625617661  
Curvatura en t=3 /4: 0.2

Y ahora calculamos la torsión.

```

using SymPy, LinearAlgebra
"""
    torsion(h, a)

Calcula la torsion de la trayectoria de una función vectorial h en el punto a.
"""

function torsion(f, a)
    @syms t::real
    # Calculamos la primera derivada.
    df(t) = diff.(f(t))
    # Calculamos la segunda derivada.
    df2(t) = diff.(df(t))
    # Calculamos la tercera derivada.
    df3(t) = diff.(df2(t))
    # Calculamos la torsión.
    (t) = dot(cross(df(t), df2(t)), df3(t)) / norm(cross(df(t), df2(t)))^2
    return N(subs( (t), t=>a))
end

println("Torsión en t=0: $(torsion(f, 0))")
println("Torsión en t= π/4: $(torsion(f, pi/4))")
println("Torsión en t= π/2: $(torsion(f, pi/2))")
println("Torsión en t=3 π/4: $(torsion(f, 3pi/4))")

```

```

Torsión en t=0: 0
Torsión en t= π/4: -1.2000000000000002
Torsión en t= π/2: -4.3222828205200695e-17
Torsión en t=3 π/4: 1.2000000000000002

```

**Ejercicio 8.10.** Se lanza una pelota desde la terraza de un edificio de altura  $h$  con una rapidez inicial  $r$  y un ángulo sobre el horizonte  $\theta$ . Estudiar la trayectoria que describe la pelota suponiendo que la única fuerza que actúa sobre ella es la de la gravedad.

- Definir una función para calcular la función vectorial de la posición de la pelota tomando como parámetros la altura del edificio, la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento.

### Solución

```
using SymPy
"""
pelota(h, r, )

Devuelve un vector con las componentes de la función vectorial que define la po
"""

function pelota(h, r, )
    @syms t::positive
    # Constante con al aceleración de la gravedad
    g = 9.81
    # Velocidad inicial.
    v = [r*cos(), r*sin()]
    # Aceleración constante
    a(t) = [Sym(0), -Sym(g)]
    # Obtenemos el vector velocidad integrando la aceleración.
    v(t) = integrate.(a(t), t) + v
    # Obtenemos el vector posición integrando el vector velocidad.
    return integrate.(v(t), t) + [0, h]
end

pelota
```

- b. Construir una función para dibujar la gráfica de la trayectoria de la pelota tomando como parámetros la altura del edificio, la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento.

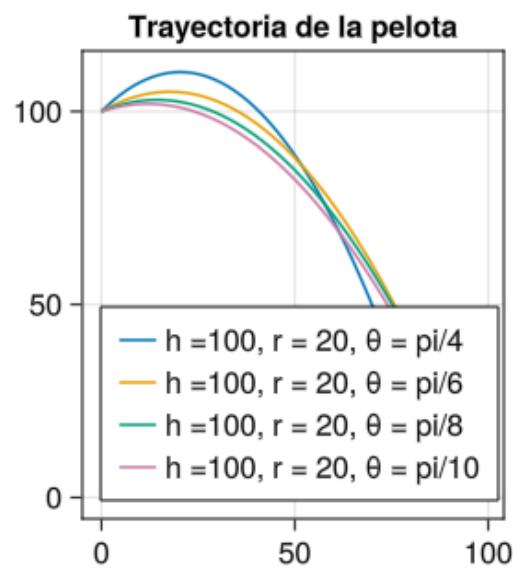
## Solución

```
using GLMakie
"""
    trayectoria_pelota(ax, h, r, )

Dibuja sobre los ejes ax la gráfica de la trayectoria de una pelota lanzada desde
"""

function trayectoria_pelota!(ax, h, r, )
    @syms t::positive
    # Lambdificamos la expresión de la función vectorial para poder llamarla como
    f = lambdify(peleta(h, r, ))
    # Calculamos el instante en el que la pelota toca el suelo.
    t = solve(f(t)[2], t)[1]
    # Definimos un rango de valores desde 0 hasta el instante en que la pelota toca el suelo.
    ts = range(0, t, 200)
    # Obtenemos los puntos de la trayectoria.
    points = Point2.(f.(ts))
    # Dibujamos la trayectoria.
    lines!(ax, points, label = "h =$(h), r = $(r),   = $( ))")
    return ax
end

fig = Figure()
ax = Axis(fig[1,1], title = "Trayectoria de la pelota", aspect = DataAspect())
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/4)
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/6)
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/8)
trayectoria_pelota!(ax, 100, 20, PI/10)
# Añadimos la leyenda
axislegend(position = :lb)
fig
```



- c. Si se lanza la pelota a nivel del suelo, con una rapidez de 20 m/s ¿para qué ángulo se alcanzará una mayor distancia? ¿Y si se lanza desde 100 m de altura?

#### Solución

Calculamos primero el ángulo para una altura 0.

```
@syms , t:: positive
# Definimos la función vectorial.
f(t) = pelota(0, 20, )
# Calculamos el instante en que la pelota toca el suelo.
t = solve(f(t)[2], t)[1]
# Calculamos los puntos críticos de la derivada de la posición horizontal de la
solve(diff(subs(f(t)[1], t=>t), ))
```

$$\begin{bmatrix} -0.785398163397448 \\ 0.785398163397448 \end{bmatrix}$$

Y ahora para una altura de 100 m.

```

using Roots
@syms , t:: positive
# Definimos la función vectorial.
f(t) = pelota(100, 20, )
# Definimos la función vectorial.
t = solve(f(t)[2], t)[2]
# Calculamos los puntos críticos de la derivada de la posición horizontal de la
find_zero(diff(subs(f(t)[1], t=>t), ), 0.5)

```

0.3903970673218906

- d. Determinar las componentes tangencial y normal del vector aceleración, para una altura de 100 m, una rapidez de 20 m/s y un ángulo  $\pi/4$ . Comprobar que la componente tangencial de la aceleración se anula en el mismo instante en el que la componente normal es máxima y cuando la pelota alcanza la máxima altura.

### Ayuda

La componente tangencial del vector aceleración se puede calcular con la fórmula

$$a_T(t) = |\mathbf{v}(t)|' = \frac{\mathbf{f}'(t)\mathbf{f}''(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}.$$

Y la componente normal mediante la fórmula

$$a_N(t) = \kappa(t)|\mathbf{v}(t)|^2 = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|}.$$

Si la trayectoria no es en el plano real, se pueden aplicar estas fórmulas añadiendo una tercera componente nula.

### Solución

Calculamos primero la componente tangencial del vector aceleración.

```

using LinearAlgebra
@syms t::positive
# Creamos la función vectorial
f(t) = pelota(100, 20, PI/4)
# Añadimos una tercera componente nula para estar en el espacio real.
f3 = push!(f(t), 0)
# Calculamos la primera derivada (vector velocidad).
df = diff.(f3, t)
# Calculamos la segunda derivada (vector aceleración).
df2 = diff.(df, t)
# Calculamos la componente tangencial del vector aceleración.
at = dot(df, df2) / norm(df)

```

$$\frac{96.2361t - 98.1\sqrt{2}}{\sqrt{100(0.981t - \sqrt{2})^2 + 200}}$$

Y a continuación la componente normal.

```
an = norm(cross(df, df2)) / norm(df)
```

$$\frac{138.734350468801}{\sqrt{100(0.981t - \sqrt{2})^2 + 200}}$$

Ahora calculamos el instante en el que se anula la componente tangencial.

```
solve(at)
```

$$[ 1.4416040391163 ]$$

Finalmente comprobamos que es el mismo instante en el que la componente normal de la aceleración es máxima.

```
# Instante en el que la componente normal de la aceleración es máxima.
solve(diff(an))
```

$$[ 1.4416040391163 ]$$

Y comprobamos también que coincide con el instante en que la pelota alcanza la máxima altura.

```
solve(diff(f(t)[2]))
```

$$[ 1.4416040391163 ]$$

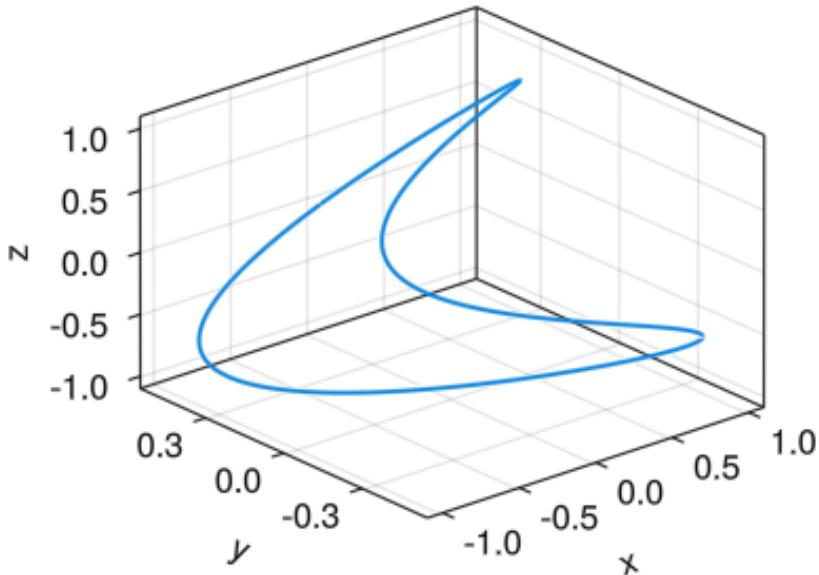
## 8.8 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 8.11.** Calcular el módulo del producto vectorial de los vectores  $(-\pi, \sqrt{2}, 1)$  y  $(\sqrt{3}, -e, -2)$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 8.12.** ¿A qué función vectorial le corresponde la trayectoria siguiente?



- $f(t) = (Fr\sin(2t), \cos(t)/2, Fr\sin(t))$
- $f(t) = (Fr\sin(t), \cos(2t), \cos(t)/2)$
- Las otras opciones son falsas.
- $f(t) = (Fr\sin(t)/2, \cos(2t), \cos(t))$
- $f(t) = (\cos(2t), \cos(t)/2, Fr\sin(t/2))$

**Ejercicio 8.13.** Un mosquito sigue la trayectoria de la función  $f(t) = (\cos(t), t/2, \ln(t+1))$ . Si en el instante  $t = 1$  se sale por la tangente a la trayectoria, ¿a qué distancia del origen de coordenadas estará el mosquito en el instante  $t = 2$ ?

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 8.14.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la del plano normal a la trayectoria de la función  $g(t) = (\cos(t-1), \ln(\sqrt{t}), t^2)$  en el instante  $t = 1$ ?

$$\frac{1}{4}y - z = 1$$

$$x + \frac{1}{2}y - z = 0$$

Las otras opciones son falsas.

$$x + y + z = 2$$

$$2x - z = 1$$

**Ejercicio 8.15.** Un avión sigue la trayectoria de la función  $h(t) = (2t^2 + t, Frsen(t) + 2\cos(t), e^{-t/2})$ .

a. ¿Qué distancia habrá recorrido desde instante  $t = 1$  hasta el instante  $t = 5$ ?

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

b. ¿Cuál será la curvatura de la trayectoria en el instante  $t = 2$ ?

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

c. ¿Cuál será la torsión de la trayectoria en el instante  $t = 2$ ?

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 8.16.** Un coche circula por una circuito elíptico cuya trayectoria viene dada por la función vectorial  $f(t) = (400 \cos(t), 100Fr\sin(t))$ , donde  $t$  está dado en minutos y las coordenadas de  $f$  en metros.

- a. Calcular la rapidez del vehículo en el instante  $t = \pi$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

- b. Calcular el módulo del vector aceleración en el mismo instante.

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

- c. Calcular la componente tangencial del vector aceleración en ese instante.

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

- d. Calcular la componente normal del vector aceleración en ese instante.

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

- e. Suponiendo que los neumáticos no proporcionan ningún agarre (por ejemplo porque hay hielo en la carretera), ¿Cuál es el mínimo ángulo que debería tener el peralte de la curva en este instante para que el coche no se salga del circuito? Tómese una aceleración debida a la gravedad de  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

# 9 Derivadas de funciones de varias variables

## 9.1 Ejercicios Resueltos

Para la realización de esta práctica se requieren los siguientes paquetes:

```
using SymPy # Para el cálculo simbólico.  
using Plots # Para el dibujo de gráficas.  
using Makie, GLMakie # Para el dibujo de gráficas en 3d.  
using ImplicitPlots # Para el dibujo de gráficas de funciones implícitas.  
using LaTeXStrings # Para usar código LaTeX en los gráficos.  
using LinearAlgebra # Para el módulo y el producto escalar de vectores.
```

**Ejercicio 9.1.** Dibujar las gráficas de las siguientes funciones.

- $f(x, y) = 2x + 3y$ .

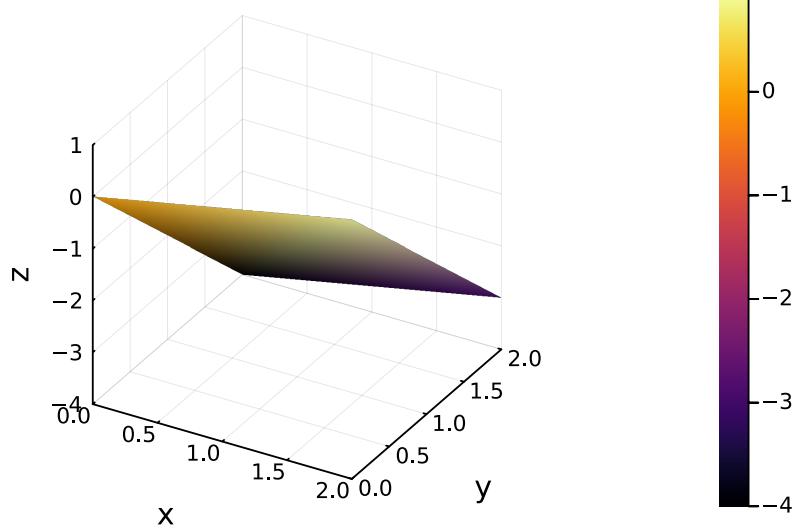
 Ayuda

Usar la función `surface` del paquete `Plots` o la función `surface` del paquete `Makie` para representar superficies de funciones de dos variables.

 Solución

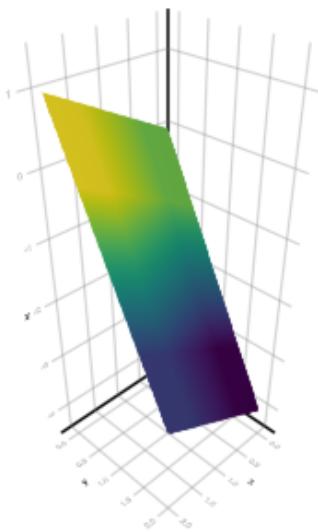
## 9.2 Plots

```
using Plots  
f(x, y) = x/2 - 2y  
xs = ys = range(0, 2, 2)  
Plots.surface(xs, ys, f, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z")
```



### 9.3 Makie

```
using GLMakie
f(x, y) = x/2 - 2y
xs = ys = range(0, 2, 2)
Makie.surface(xs, ys, f)
```

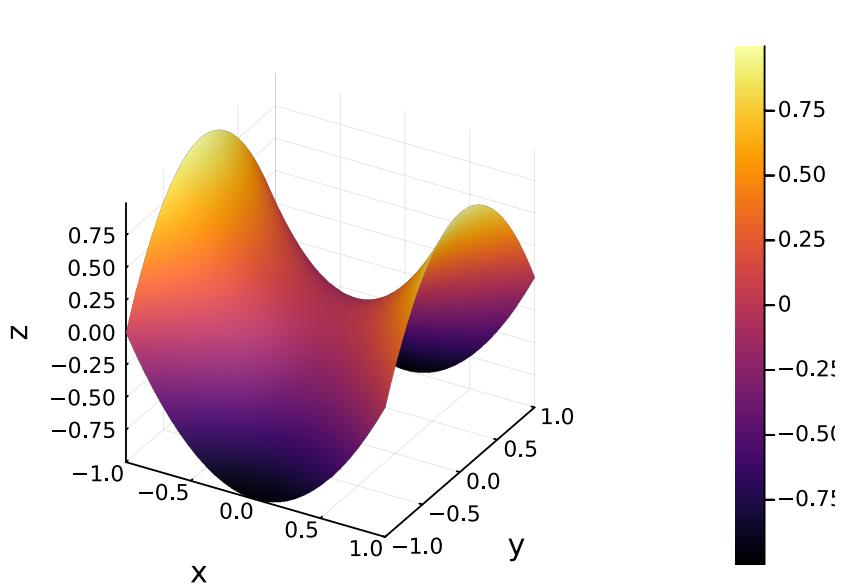


b.  $g(x) = x^2 - y^2$ .

💡 Solución

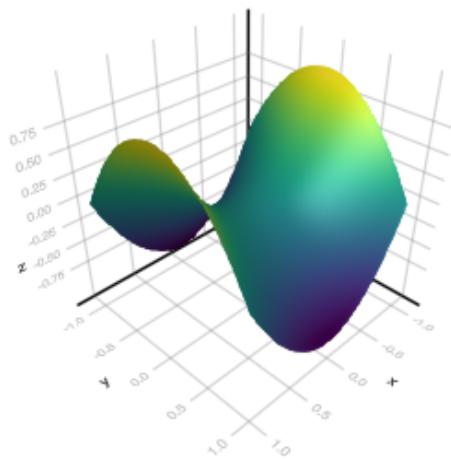
## 9.4 Plots

```
using Plots
g(x, y) = x^2-y^2
xs = ys = range(-1, 1, 30)
Plots.surface(xs, ys, g, xlabel = "x", ylabel = "y", zlabel = "z")
```



## 9.5 Makie

```
using GLMakie
g(x, y) = x^2 - y^2
xs = ys = range(-1, 1, 30)
Makie.surface(xs, ys, g)
```

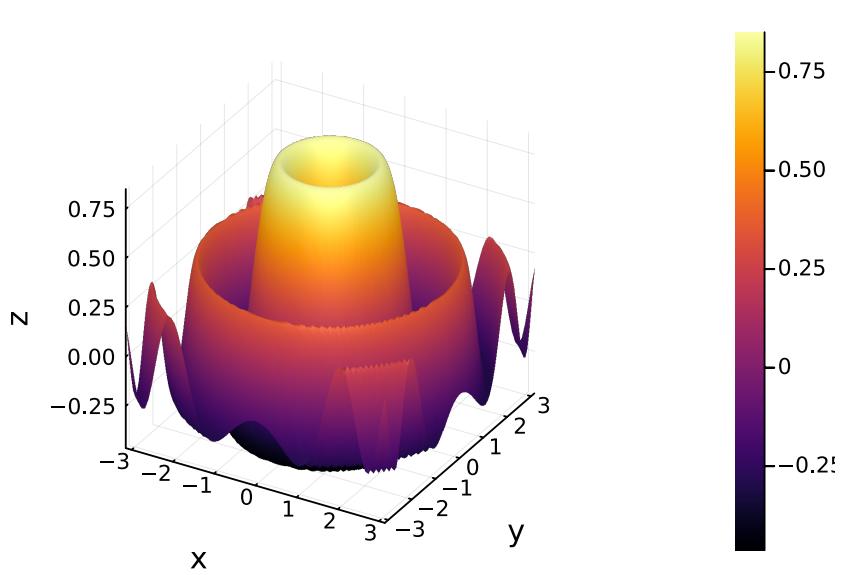


c. 
$$h(x) = \frac{Fr \sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solución

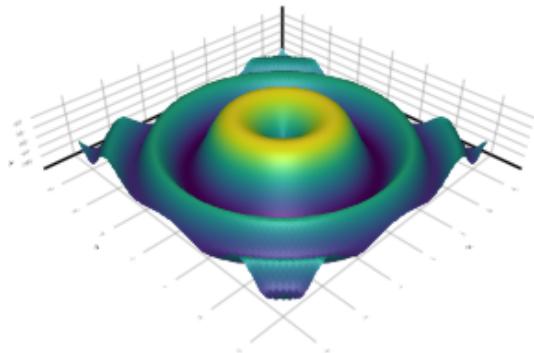
## 9.6 Plots

```
using Plots
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Plots.surface(xs, ys, h, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z")
```



## 9.7 Makie

```
using GLMakie
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Makie.surface(xs, ys, h)
```



**Ejercicio 9.2.** Dibujar las curvas de nivel de las siguientes funciones.

a.  $f(x, y) = 2x + 3y$ .

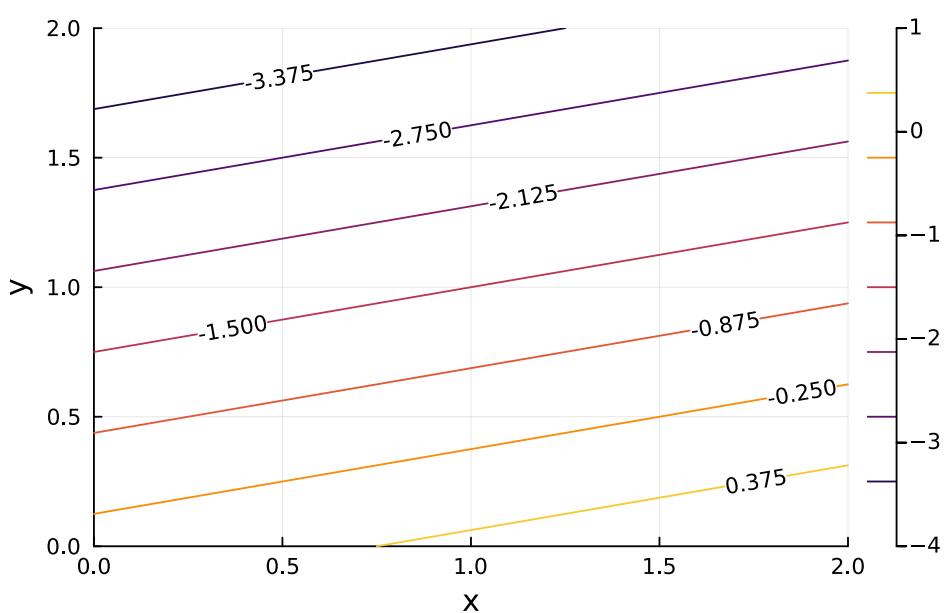
**i** Ayuda

Usar la función `contour` del paquete `Plots` o la función `contour` del paquete `Makie` para representar curvas de nivel de funciones de dos variables.

**?** Solución

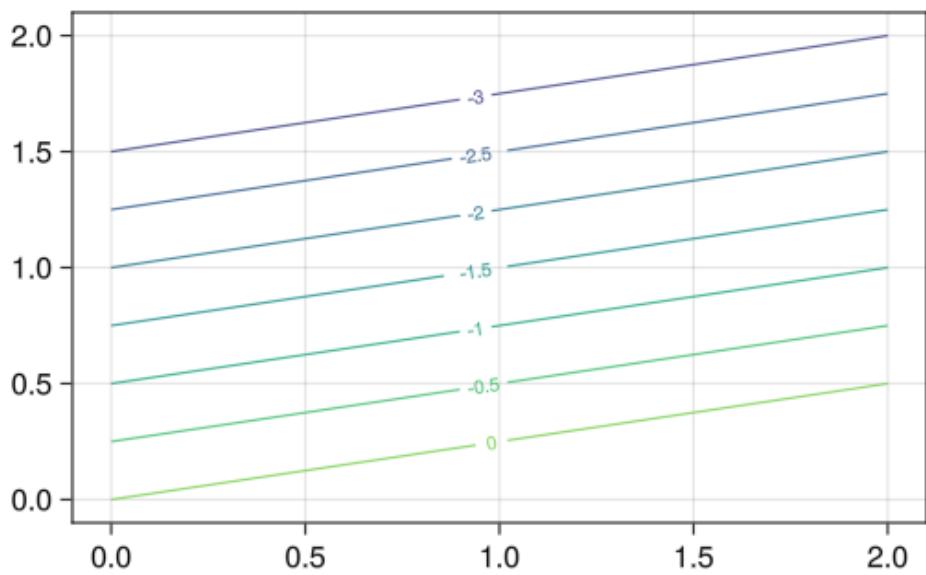
## 9.8 Plots

```
using Plots
f(x, y) = x/2 - 2y
xs = ys = range(0, 2, 50)
Plots.contour(xs, ys, f, levels = 7, xlab = "x", ylab = "y", clabels = true)
```



## 9.9 Makie

```
using GLMakie
f(x, y) = x/2 - 2y
xs = ys = range(0, 2, 50)
Makie.contour(xs, ys, f, labels = true, levels = 0:-0.5:-3)
```

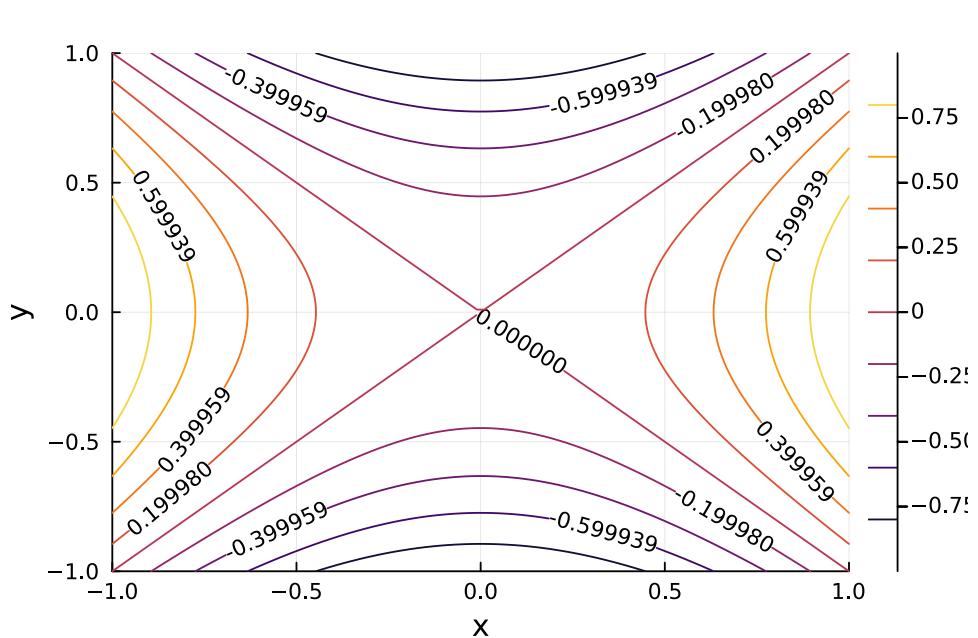


b.  $g(x) = x^2 - y^2$ .

💡 Solución

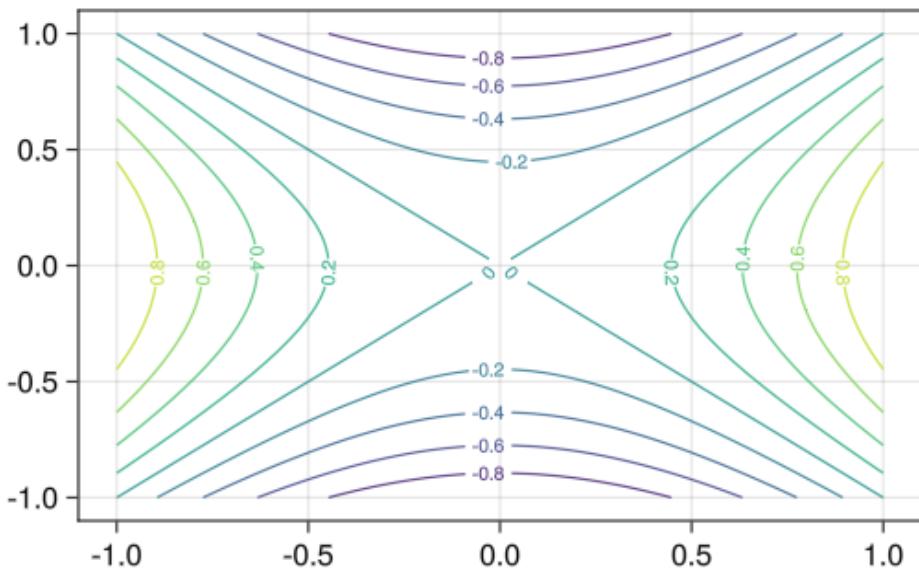
## 9.10 Plots

```
using Plots
g(x, y) = x^2 - y^2
xs = ys = range(-1, 1, 100)
Plots.contour(xs, ys, g, levels = 9, xlab = "x", ylab = "y", clabels = true)
```



## 9.11 Makie

```
using GLMakie
f(x, y) = x^2 - y^2
xs = ys = range(-1, 1, 100)
Makie.contour(xs, ys, f, labels = true, levels = -1:0.2:1)
```

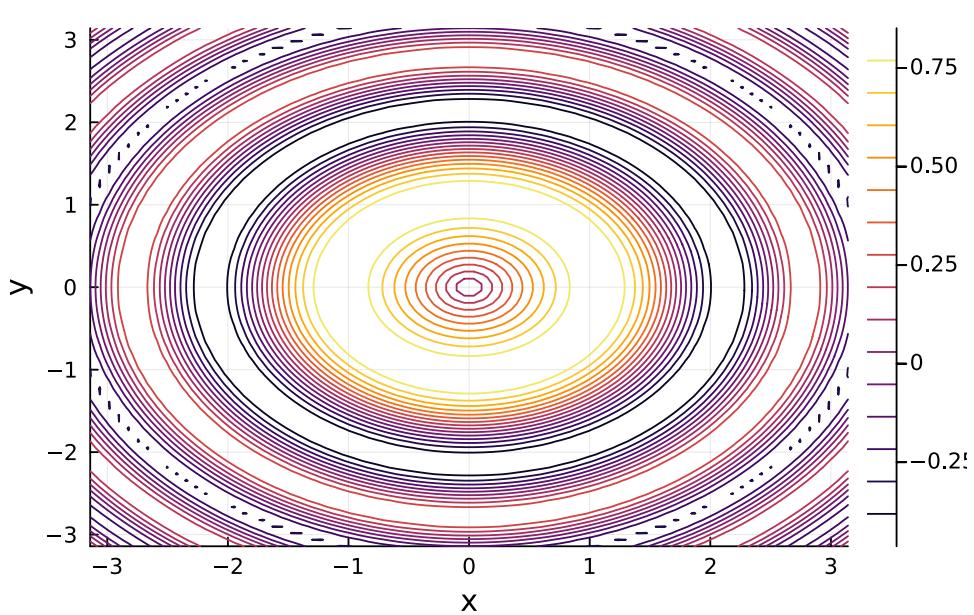


c. 
$$h(x) = \frac{Fr \sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solución

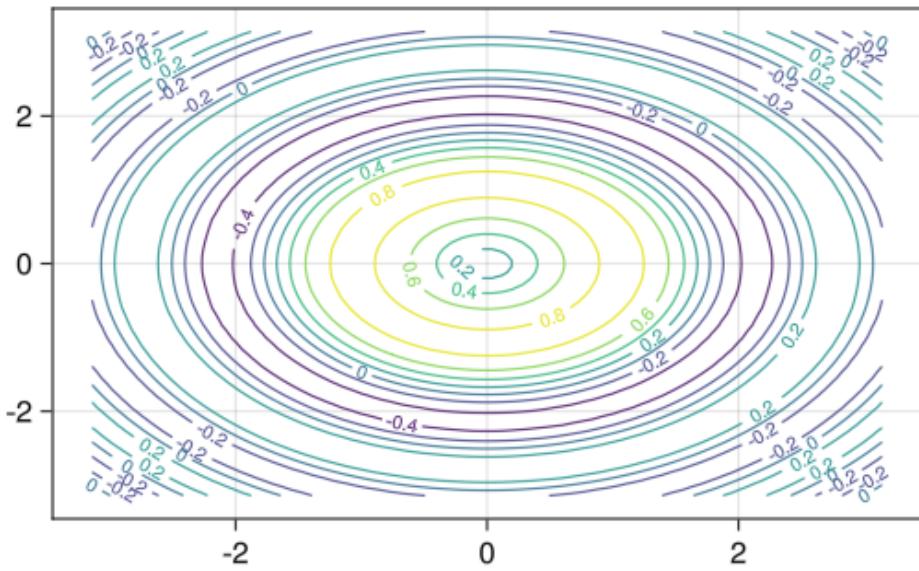
## 9.12 Plots

```
using Plots
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Plots.contour(xs, ys, h, xlab = "x", ylab = "y")
```



## 9.13 Makie

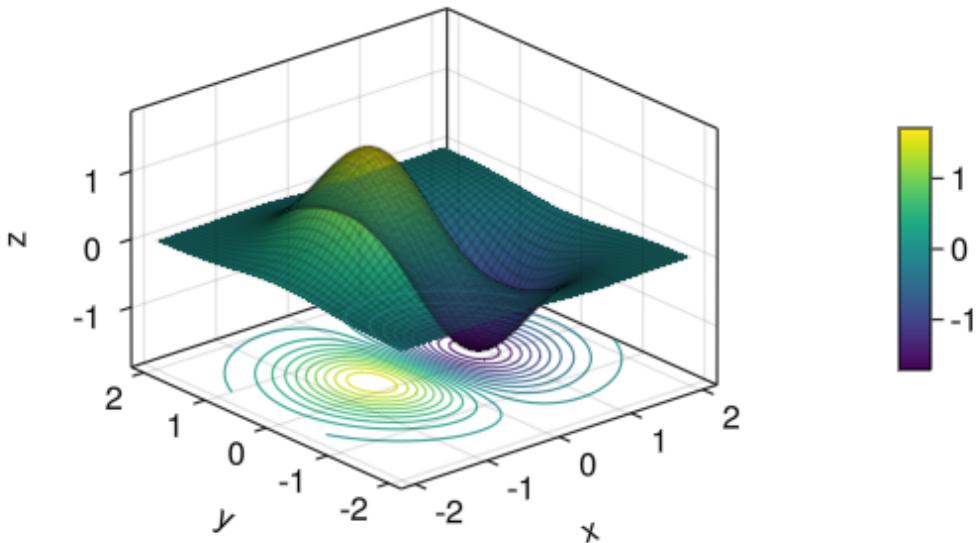
```
using GLMakie
h(x, y) = sin(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)
xs = ys = range(-pi, pi, 80)
Makie.contour(xs, ys, h, labels = true, levels = -1:0.2:1)
```



**Ejercicio 9.3.** Dibujar en una misma gráfica la superficie de la función  $f(x, y) = -4xe^{-x^2-y^2}$  y sus curvas de nivel.

#### Solución

```
using GLMakie
f(x, y) = -4x*exp(-x^2-y^2)
xs = ys = range(-2, 2, 50)
zs = f.(xs, ys')
zmin = minimum(zs)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], )
surf = Makie.surface!(ax, xs, ys, zs, transparency = true)
Makie.wireframe!(ax, xs, ys, zs, color = (:black, 0.1), transparency = true)
Makie.contour!(ax, xs, ys, zs, levels = 20, transformation = (:xy, zmin), transparency = true)
Colorbar(fig[1, 2], surf, height = Relative(0.5))
fig
```



**Ejercicio 9.4.** Sea  $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ .

- a. Dibujar la gráfica y el punto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

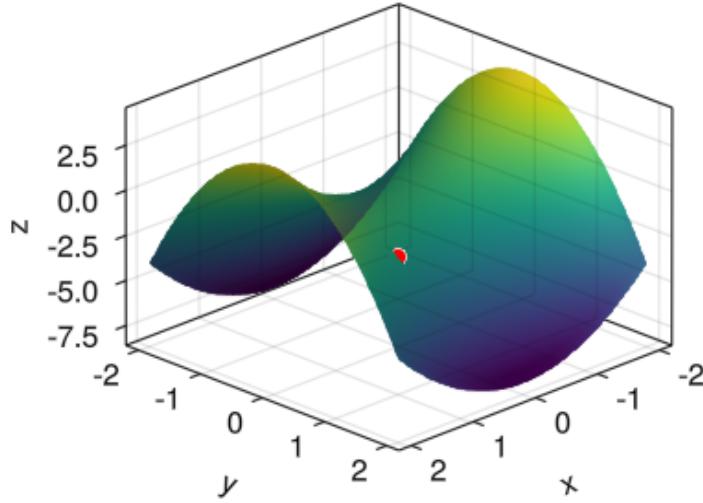
**i** Ayuda

Usar la función `surface` del paquete `Makie` para representar superficies de funciones de dos variables.

Usar la función `scatter` del paquete `Makie` para dibujar puntos.

**💡 Solución**

```
using GLMakie
f(x, y) = x^2 - 2y^2
xs = ys = range(-2, 2, 30)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], azimuth = pi/4)
Makie.surface!(ax, xs, ys, f, transparency = true)
Makie.scatter!(ax, Point3(1, 1, f(1,1)), color = :red)
fig
```



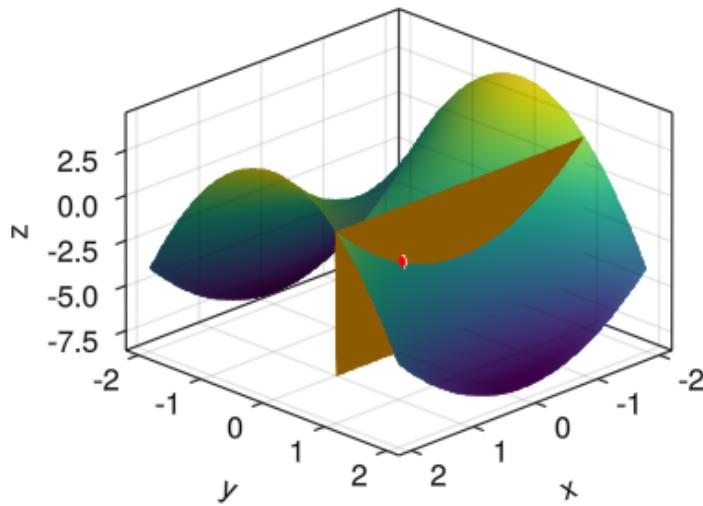
- b. Dibujar el plano  $y = 1$  sobre la superficie. ¿Cuál es la curva que resulta de la intersección del plano con la superficie? ¿Cómo es la pendiente de la tangente a esta curva en  $x = 1$ ?

Solución

```

xs = [-2 -2; 2 2]
zs = [-6 2; -6 2]
ys = [1 1; 1 1]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs; colormap = [:orange])
fig

```



La curva resultante es la parábola  $f(x) = x^2$ . La pendiente de la recta tangente a esta curva en  $x = 1$  vale 2.

- c. Calcular la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  en el punto  $(1, 1)$ .

#### 💡 Solución

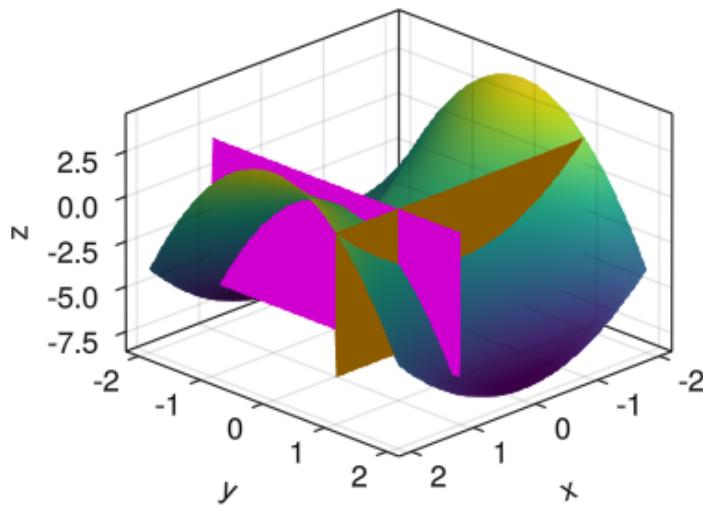
```
using SymPy
@syms x y
subs(diff(f(x,y), x), x => 1, y => 1)
```

2

- d. Dibujar el plano  $x = 1$  sobre la superficie. ¿Cuál es la curva que resulta de la intersección del plano con la superficie? ¿Cómo es la pendiente de la tangente a esta curva en  $y = 1$ ?

 Solución

```
ys = [-2 -2; 2 2]
zs = [-6 2; -6 2]
xs = [1 1; 1 1]
Makie.surface!(ax, xs, ys, zs; colormap = [:magenta])
fig
```



La curva resultante es la parábola  $g(y) = -2y^2$ . La pendiente de la recta tangente a esta curva en  $y = 1$  vale  $-4$ .

- e. Calcular la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$  en el punto  $(1, 1)$ .

 Solución

```
using SymPy
@syms x y
subs(diff(f(x,y), y), x => 1, y => 1)
```

-4

**Ejercicio 9.5.** La presión  $P$  de un gas perfecto depende de la temperatura  $T$  y del volumen que ocupa  $V$  según la función

$$P(T, V) = \frac{nRT}{V},$$

donde  $n$  y  $R$  son constantes positivas propias de cada gas.

- a. Calcular la derivada parcial de la presión con respecto a la temperatura. ¿Cómo la interpretarías?

 Solución

```
using SymPy
@syms n R T V
diff(n*R*T/V, T)
```

$$\frac{Rn}{V}$$

Como  $n$ ,  $R$  y  $V$  son positivos, la derivada parcial es positiva, por lo que si se mantiene el volumen constante y empezamos a aumentar la temperatura, la presión aumentará.

- b. Calcular la derivada parcial de la presión con respecto al volumen. ¿Cómo la interpretarías?

 Solución

```
diff(n*R*T/V, V)
```

$$-\frac{RTn}{V^2}$$

Como  $n$ ,  $R$ ,  $T$  y  $V$  son positivos, la derivada parcial es negativa, por lo que si se mantiene la temperatura constante y empezamos a aumentar el volumen, la presión disminuirá.

**Ejercicio 9.6.** Dada la función  $f(x, y) = e^{x+y} \operatorname{Frsen}\left(\frac{x}{y}\right)$ , calcular las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

a.  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

 Solución

```
using SymPy
@syms x y
f(x, y) = exp(x+y)sin(x/y)
diff(f(x, y), x, y)


$$\left( -\frac{x \cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} + \frac{x \sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y^3} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y} - \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} \right) e^{x+y}$$

```

b.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

 Solución

```
using SymPy
@syms x y
f(x, y) = exp(x+y)sin(x/y)
diff(f(x, y), y, x)


$$\left( -\frac{x \cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} + \frac{x \sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y^3} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y} - \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} \right) e^{x+y}$$

```

c. ¿Se cumple la igualdad de las derivadas cruzadas?

 Solución

Si,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , porque ambas derivadas son continuas en todo su dominio.

**Ejercicio 9.7.** La función  $f(x, y, z) = e^{-x-2y-3z}$  da la temperatura en cada posición  $(x, y, z)$  de una habitación.

- a. Si un mosquito está en la posición  $(1, 1, 1)$ , ¿en qué dirección debe volar para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible? ¿Cuál será la tasa de variación de la temperatura si el mosquito se mueve en esa dirección?

 Ayuda

Debe moverse en la dirección opuesta al [vector gradiente](#) de  $f$ .

 Solución

## 9.14 Solución 1

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x y z
f(x, y, z) = exp(-x-2y-3z)
ex = diff.(f(x, y, z), [x, y, z])
f = lambdify(ex, (x, y, z))
println("Dirección de máximo decrecimiento : $(- f(1, 1, 1))")
println("Tasa de variación en esa dirección: $(-norm(f(1, 1, 1)))")
```

Dirección de máximo decrecimiento : [0.0024787521766663585, 0.004957504353332717,  
Tasa de variación en esa dirección: -0.009274641391805666

## 9.15 Solución 2

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x y z
f(x, y, z) = exp(-x-2y-3z)
ex = [diff(f(x,y,z), i) for i in (x, y, z)]
f = lambdify(ex, (x, y, z))
println("Dirección de máximo decrecimiento : $(- f(1, 1, 1))")
println("Tasa de variación en esa dirección: $(-norm(f(1, 1, 1)))")
```

Dirección de máximo decrecimiento : [0.0024787521766663585, 0.004957504353332717,  
Tasa de variación en esa dirección: -0.009274641391805666

- b. Si el mosquito se mueve siguiendo la dirección del vector  $(2, -1, 3)$ , ¿la temperatura aumenta o disminuye? ¿Cuál será la tasa de variación de la temperatura en esa dirección?

 Ayuda

La tasa de variación de la función viene dada por la [derivada direccional](#) de la función en el punto  $(1, 1, 1)$  siguiendo la dirección del vector  $(2, -1, 3)$ .

 Solución

```
dot(f(1, 1, 1), normalize([2, -1, 3]))
-0.005962269466160785
```

La temperatura disminuye.

**Ejercicio 9.8.** Calcular las ecuaciones de la recta normal y el plano tangente a la superficie  $x + 2y - \ln(z) + 4 = 0$  en el punto  $(0, -2, 1)$ , y dibujarlos.

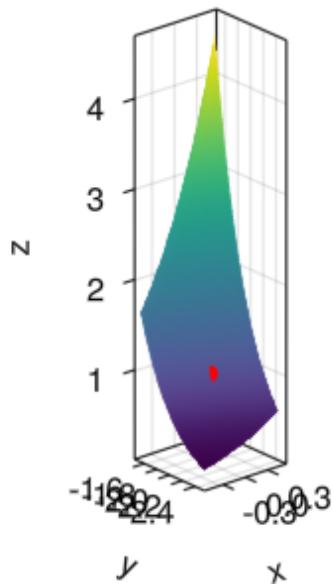
**i** Ayuda

Usar la propiedad de que el vector gradiente de una función  $f(x, y, z)$  es siempre normal a las curvas de nivel  $f(x, y, z) = 0$ .

**?** Solución

Dibujamos primero la superficie.

```
using SymPy, GLMakie
f(x, y, z) = x + 2y - log(z) + 4
@syms x y z
f1 = lambdify(solve(f(x,y,z), z)[1])
xs = range(-0.5, 0.5, 30)
ys = range(-2.5, -1.5, 30)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], aspect = :data)
Makie.surface!(ax, xs, ys, f1)
Makie.scatter!(ax, Point3(0, -2, 1), color = :red)
fig
```



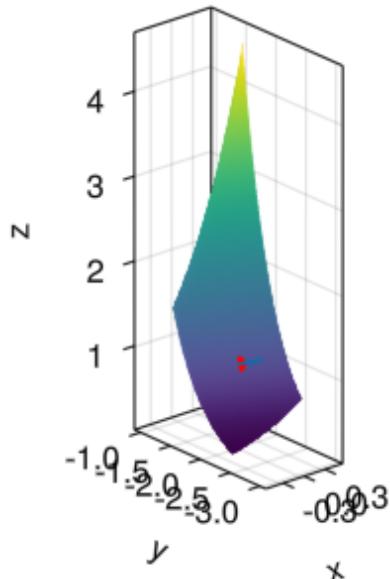
Calculamos primero la ecuación de la recta normal.

```
using SymPy
ex = diff.(f(x, y, z), [x, y, z])
f = lambdify(ex, (x, y, z))
nl(t) = [0, -2, 1] + t*f(0, -2, 1)
@syms t
println("Ecuación de la recta normal $(nl(t))")
```

Ecuación de la recta normal Sym[t, 2\*t - 2, 1 - 1.0\*t]

Y la dibujamos sobre la misma gráfica de la superficie.

```
ts = range(-0.5, 0.5, 2)
points = Point3.(nl.(ts))
Makie.lines!(ax, points)
fig
```



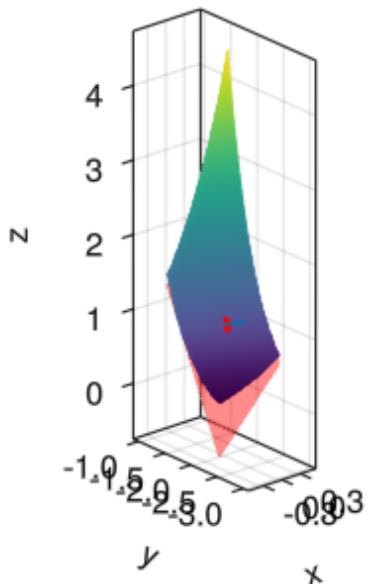
A continuación calculamos la ecuación del plano tangente.

```
using LinearAlgebra
tp(x,y) = solve(dot(([x, y, z] - [0, -2, 1]), f(0, -2, 1)), z)[1]
println("Ecuación del plano tangente z = $(tp(x,y))")
```

Ecuación del plano tangente  $z = x + 2.0*y + 5.0$

Y finalmente lo dibujamos en la misma gráfica de la superficie.

```
Makie.surface!(ax, xs, ys, tp, colormap = ["red"], alpha = 0.5, transparency = true)
fig
```



**Ejercicio 9.9.** La ecuación  $x^3 + y^3 = 8$  define una curva implícita.

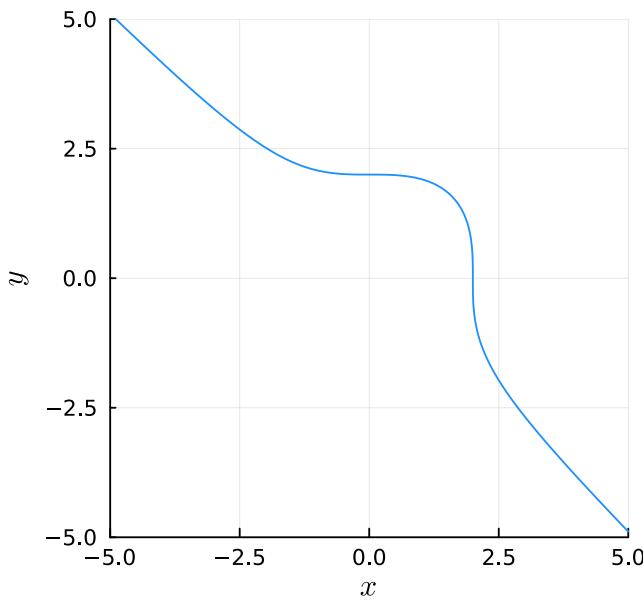
- Dibujar la gráfica de la ecuación.

**i** Ayuda

Usar la función `implicit_plot` del paquete `ImplicitPlots` para dibujar la gráfica de una función implícita definida por una ecuación.

**?** Solución

```
using Plots, ImplicitPlots, LaTeXStrings
f(x, y) = x^3 + y^3 - 8
implicit_plot(f, xlab = L"x", ylab = L"y", legend = false)
```



- b. Calcular la derivada de  $y$  como función implícita de  $x$ .

**i** Ayuda

La derivada de  $y$  como función implícita de  $x$  en la ecuación  $f(x, y) = 0$  se puede calcular como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

**?** Solución

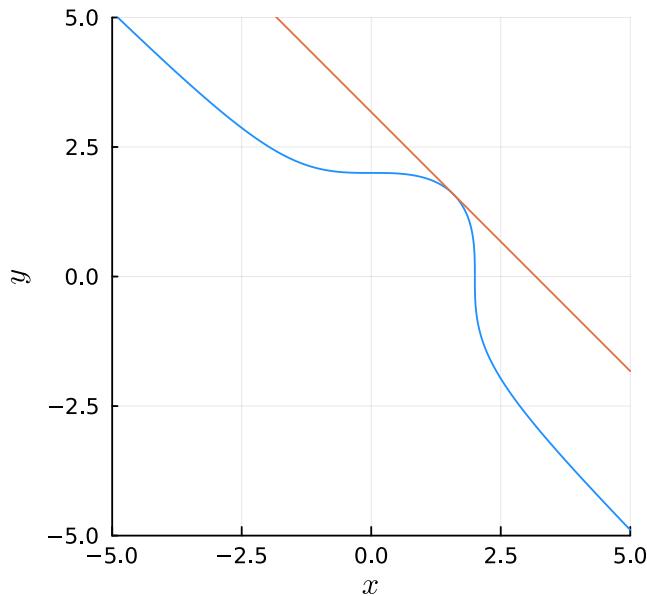
```
using SymPy
@syms x y u()
y = -diff(f(x, y), x) / diff(f(x, y), y)

- $\frac{x^2}{y^2}$ 
```

- c. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva implícita en el punto  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})$ .

 Solución

```
x = y = 2^(2/3)
tan = lambdify(y + subs(y, y => y, x => x)*(x-x))
Plots.plot!(tan)
```

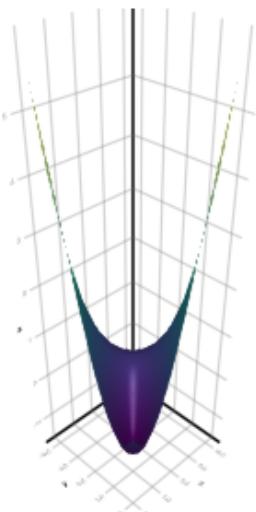


**Ejercicio 9.10.** La función  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  determina la concentración de una sustancia  $z$  en función de las concentraciones de otras dos  $x$  e  $y$  en una reacción química.

- Representar la gráfica de la función.

 Solución

```
using GLMakie
f(x, y) = x^3+y^3-3x*y
xs = ys = range(-0.5, 1.5, 30)
Makie.surface(xs, ys, f)
```



- b. Calcular los puntos críticos de la función.

### **i** Ayuda

Los puntos críticos son los puntos que anulan el gradiente. Para resolver el sistema de ecuaciones que resulta de igualar el vector gradiente al vector nulo se pueden utilizar las funciones `linsolve` (para sistemas lineales) o `nonlinsolve` (para sistemas no lineales) del paquete SymPy.

### **?** Solución

```
using SymPy
@syms x y
nonlinsolve(diff.(f(x, y), (x, y)), (x, y))

 $\{(0, 0), (1, 1), \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\}$ 
```

- c. Determinar los extremos relativos y los puntos de silla. ¿Para qué concentraciones de  $x$  e  $y$  la concentración de  $z$  será mínima?

## Ayuda

Para determinar los extremos relativos y los puntos de silla de una función de dos variables, hay que calcular el hessiano en los puntos críticos.

## Solución

Definimos una función para el hessiano.

```
using LinearAlgebra  
hes = lambdify(det(hessian(f(x,y), (x,y))))  
  
#123 (generic function with 1 method)
```

Calculamos el hessiano en el punto crítico  $(0, 0)$ .

```
hes(0,0)  
  
-9
```

Como es negativo, en  $(0, 0)$  hay un punto de inflexión.  
Calculamos el hessiano en el punto crítico  $(1, 1)$ .

```
hes(1,1)  
  
27
```

Como es positivo, existe un extremo relativo en  $(1, 1)$ . Para ver si se trata de un máximo o mínimo calculamos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ .

```
fxx = lambdify(diff(f(x,y), x, x), (x,y))  
fxx(1,1)  
  
6
```

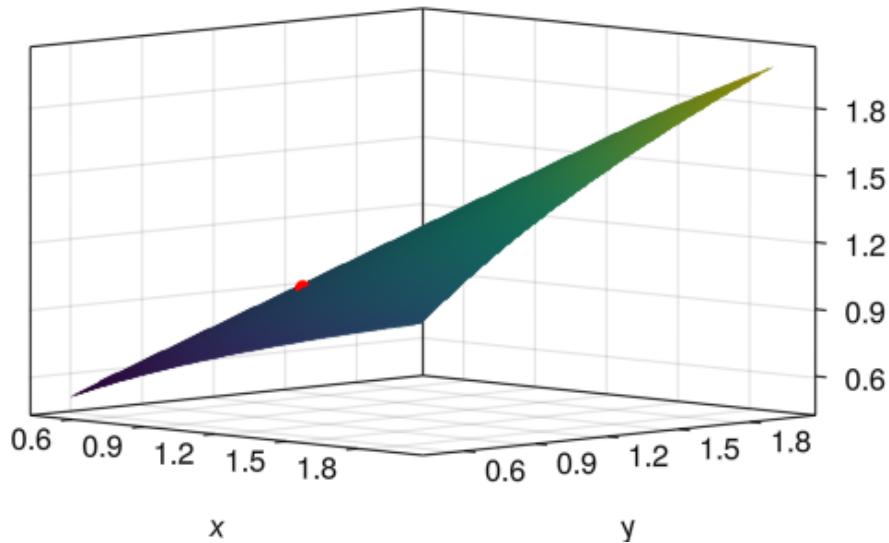
Como es positiva, en  $(1, 1)$  hay un mínimo. Así pues, la concentración de  $z$  será mínima cuando las concentraciones de  $x$  e  $y$  sean 1.

**Ejercicio 9.11.** Sea  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ .

- Dibujar la gráfica de  $f$  y el punto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

### Solución

```
using GLMakie
f(x, y) = sqrt(x*y)
a = b = 1
xs = ys = range(0.5, 2, 30)
fig = Figure()
ax = Axis3(fig[1,1], azimuth = -pi/4, elevation = 0.1)
Makie.surface!(ax, xs, ys, f)
Makie.scatter!(ax, Point3(a, b, f(a,b)), color = :red)
fig
```



- b. Calcular el polinomio de Taylor de primer grado de  $f$  en el punto  $(1, 1)$  y representarlo gráficamente. Comprobar que se obtiene el plano tangente a la superficie de  $f$  en el punto  $(1, 1)$ .

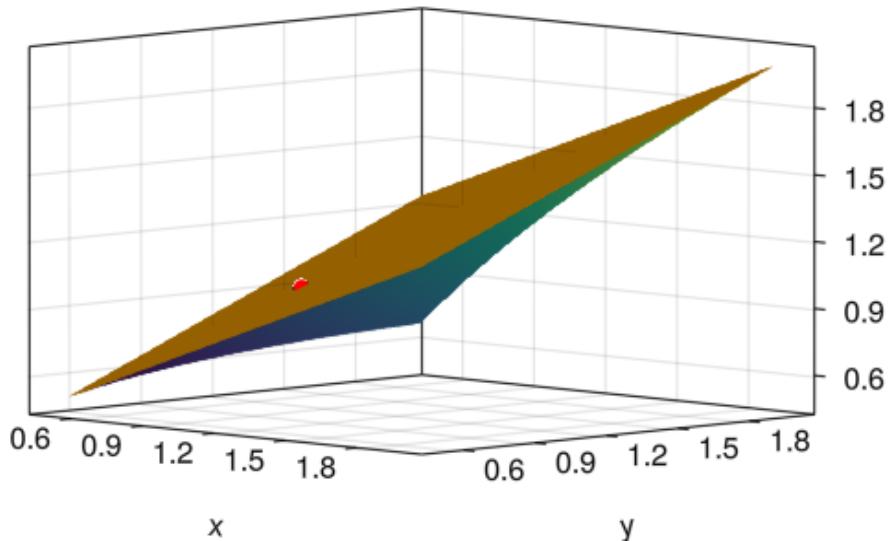
### Ayuda

La fórmula del polinomio de Taylor de primer grado de la función  $f(x, y)$  en el punto  $(a, b)$  es

$$P^1(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b)(x - a, y - b).$$

 Solución

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x, y
ex = diff.(f(x, y), [x, y])
f = lambdify(ex, (x, y))
p1(s,t) = f(a, b) + dot(f(a, b), [s-a, t-b])
Makie.surface!(ax, xs, ys, p1; colormap = [:orange], transparency = true)
fig
```



- c. Utilizar el polinomio anterior para calcular el valor aproximado de  $\sqrt{1.01 \cdot 0.99}$ . ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?

 Solución

```
error = abs(f(1.01, 0.99) - p1(1.01, 0.99))
5.000125006249245e-5
```

- d. Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de  $f$  en el punto  $(1, 1)$  y representarlo gráficamente.

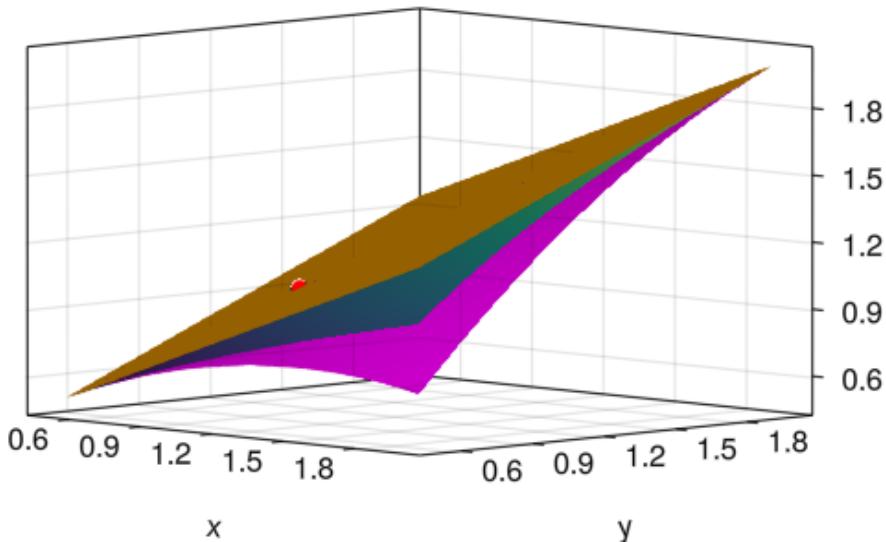
### Ayuda

La fórmula del polinomio de Taylor de segundo grado de la función  $f(x, y)$  en el punto  $(a, b)$  es

$$P^2(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b)(x-a, y-b) + \frac{1}{2!} \nabla^2 f(a, b)(x-a, y-b)(x-a, y-b).$$

### Solución

```
using SymPy, LinearAlgebra
@syms x, y
²f = lambdify(hessian(f(x,y), (x, y)), (x, y))
p2(s,t) = f(a, b) + dot( f(a, b), [s-a, t-b]) + dot( ²f(a,b) * [s-a; t-b], [s-a; t-b])
Makie.surface!(ax, xs, ys, p2; colormap = [:magenta], transparency = true)
fig
```



- e. Utilizar el polinomio anterior para calcular el valor aproximado de  $\sqrt{1.01 \cdot 0.99}$ . ¿Cuál es error cometido en la aproximación? ¿Es mayor o menor que en la aproximación mediante el polinomio de Taylor de primer grado?

 Solución

```
error = f(1.01, 0.99) - p2(1.01, 0.99)
```

```
4.9998749937496534e-5
```

## 9.16 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 9.12.** ¿Emparejar las siguientes funciones de dos variables con sus diagramas de contorno?

Empareja la función con su gráfica.

$$f(x, y) = \frac{Fr \operatorname{sen}(2x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

D

A

C

B

(Select an answer)

$$h(x, y) = \cos(x) - Frsen(2y)$$

D

A

C

B

(Select an answer)

$$i(x, y) = \frac{1}{2}(Fr\text{sen}(x^2) - \cos(y^2))$$

D

A

C

B

(Select an answer)

$$g(x, y) = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

D

A

C

B

(Select an answer)

**Ejercicio 9.13.** Dada la función

$$f(x, y) = \frac{\ln(\sqrt{\cos(x^2y)})}{z^2},$$

calcular  $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$  en el punto  $(2, \pi, 1)$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 9.14.** La velocidad de una reacción química típicamente depende de la temperatura y de la concentración de los reactivos. En una reacción de hidrólisis del acetato de etilo por hidróxido de sodio ( $\text{NaOH}$ ) en una solución acuosa, la velocidad de reacción viene dada por la fórmula  $R(t, e, s) = \frac{t}{3} \sqrt[3]{e^2 s^2}$ , donde  $t$  es la temperatura de la reacción,  $e$  la concentración de acetato de etilo y  $s$  la concentración de hidróxido de sodio.

- a. ¿En qué dirección debe cambiarse la temperatura y las concentraciones de los reactivos para que la velocidad de reacción aumente lo más rápidamente posible si la temperatura y las concentraciones actuales son  $40^\circ\text{C}$ ,  $0.4 \text{ mol/l}$  y  $0.5 \text{ mol/l}$  respectivamente?

Dirección de cambio de la temperatura: \_\_\_\_\_

Dirección de cambio del acetato de etilo: \_\_\_\_\_

Dirección de cambio del hidróxido de sodio: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cómo cambiará la velocidad de reacción en ese instante si la temperatura disminuye al mismo ritmo que aumenta la concentración del acetato de etilo y la concentración de acetato de etilo aumenta la mitad de lo que aumenta la concentración del hidróxido de sodio?

\*Hint: \*

Introducir hasta 5 decimales

**Ejercicio 9.15.** La superficie  $\frac{e^{z \cos(xy)}}{xz} = \frac{1}{e}$  define a  $z$  como función implícita  $z = f(x, y)$ .

- a. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- La variable  $z$  disminuye lo mismo que aumenta  $y$ , si  $x$  se mantiene constante.
- La variable  $z$  aumenta la mitad de lo que aumenta  $x$ , si  $y$  se mantiene constante.
- Las otras opciones son falsas.
- La variable  $z$  aumenta  $1/e$  unidades por cada unidad que aumente  $x$ , si  $y$  se mantiene constante.
- La variable  $z$  se mantiene constante cuando se incrementa  $x$ , si  $y$  se mantiene constante.

b. ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en el punto  $(1, \pi, 1)$ ?



$$z = (\pi + 1)x - y$$



$$z = 1 - x + \frac{y}{\pi}$$



$$z = \frac{3 - x}{2}$$

Las otras opciones son falsas.



$$z = x + y - (\pi + 2)$$

**Ejercicio 9.16.** Dada la función  $f(x, y) = -\frac{y}{9 + x^2 + y^2}$ , ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- Tiene un máximo relativo en el punto  $(0, -3)$  y un mínimo relativo en el punto  $(0, 3)$ .
- Tiene un máximo relativo en el punto  $(0, 3)$  y un mínimo relativo en el punto  $(0, -3)$ .
- Tiene un máximo relativo en el punto  $(0, -3)$  y un punto de silla en el punto  $(0, 3)$ .
- Tiene un máximo relativo en el punto  $(3, -3)$ .
- No tiene extremos relativos.

**Ejercicio 9.17.** Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de la función  $f(x, y) = Frsen(x/y)$  en el punto  $(\pi/2, 1)$  y utilizarlo para calcular el valor aproximado de  $f(1.5, 1)$ .

\*Hint: \*

Introducir hasta 8 decimales