Talleres de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Tabla de contenidos

Prefacio

Colección de talleres de Análisis Matemático aplicado.

1 Cálculo del perímetro y el área del círculo

En el siglo III A.C Arquímedes usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia (y de paso el valor de π). La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

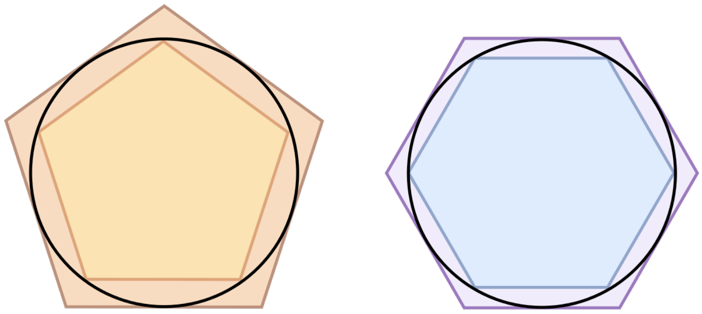


Figura 1.1: Aproximación del área de una circunferencia mediante polígonos regulares

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

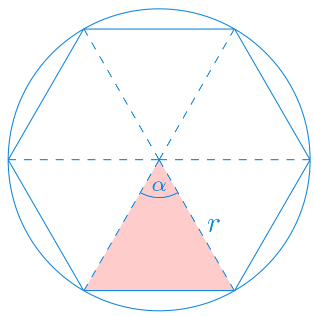


Figura 1.2: Descomposición de un hexágono en triángulos

a. Calcular el término general de la sucesión que mide el perímetro del polígono regular de n lados inscrito dentro del círculo.

b. Estudiar la convergencia de la sucesión anterior. ¿Qué relación hay entre el perímetro del círculo y su radio?

c. Calcular el término general de la sucesión que mide el área del polígono regular de n lados inscrito dentro del círculo.

d. Estudiar la convergencia de la sucesión anterior. ¿Qué relación hay entre el área del círculo y su radio?

e. Repetir los apartados anteriores tomando los polígonos regulares en los que se inscribe el círculo.

2 Análisis del fractal del copo de nieve

El fractal del copo de nieve se construye partiendo de un triángulo equilátero y alterando, de forma recursiva, cada segmento de línea de las siguiente manera:

1. Dividir el segmento de linea en tres partes iguales.
2. Dibujar hacia el exterior de la figura un triángulo equilátero a partir del segmento medio obtenido en el paso anterior.
3. Borrar el segmento medio obtenido en el primer paso.

La siguiente figura ilustra el proceso para las 5 primeras iteraciones.

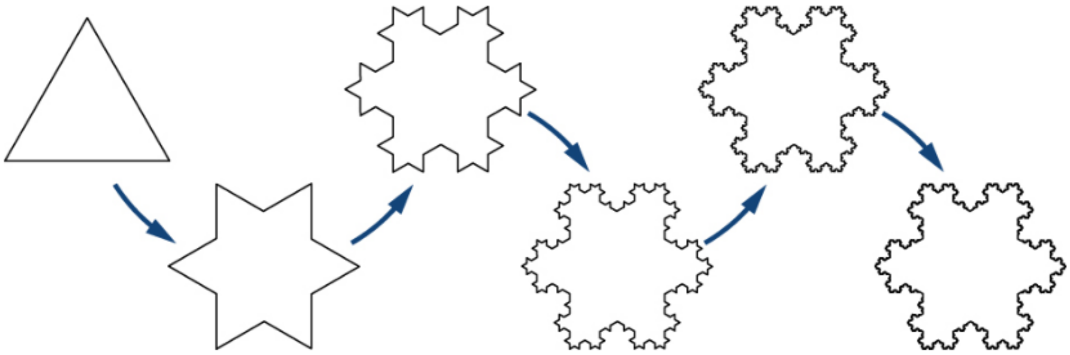


Figura 2.1: Creación del fractal del copo de nieve.

a. Estudiar la convergencia de la sucesión del número de lados.
b. Estudiar la convergencia de la sucesión de la longitud de los lados.
c. Estudiar la convergencia de la sucesión del perímetro del copo de nieve.
d. Calcular el area del copo de nieve en la etapa n.
e. Calcular el area total del fractal del copo de nieve (cuando $n \to \infty$).

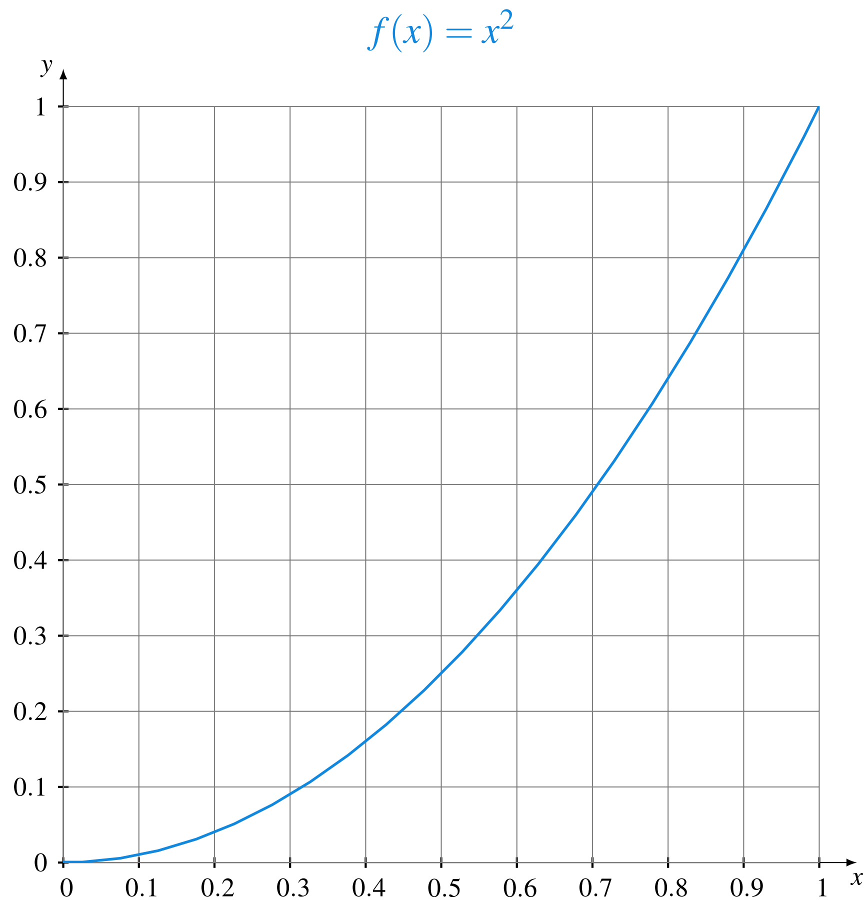
3 Sumas de Riemann

El cálculo de áreas encerradas por regiones del plano curvas ya fue estudiado en la antigua Grecia. Una de las técnicas desarrolladas en aquella época fue el método por agotamiento, qué básicamente consistía en aproximar el área de la región estudiada, inscribiendo en ella figuras geométricas de área conocida.

En este taller trataremos de usar esta idea, usando *sumas de Riemann*, para aproximar el área que queda entre la gráfica de una función $f(x) = x^2$ y el eje X, en el intervalo $I = [0, 1]$.

Para ello hay que seguir los siguientes pasos:

1. Dar una aproximación por defecto y por exceso calculando las sumas inferior y superior de Riemann para particiones de I en n subintervalos de igual tamaño, para $n = 2, 5$ y 10.
2. Calcular la sumas inferior y superior de Riemann para particiones de I en n subintervalos de igual tamaño.
3. Calcular la integral inferior de Riemann mediante el límite cuando n tiende a ∞ de la expresión obtenida en el apartado anterior para la suma inferior de Riemann.
4. Calcular la integral superior de Riemann mediante el límite cuando n tiende a ∞ de la expresión obtenida en el apartado anterior para la suma superior de Riemann.
5. Calcular el área encerrada entre la gráfica de f y el eje X en el intervalo dado.
6. Generalizar el proceso anterior para calcular el área encerrada entre la gráfica de f y el eje X en un intervalo cualquiera $I = [a, b]$.



3.0.1 Fórmulas de ayuda

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo fue enunciado a la vez por Newton y Leibniz en el siglo XVIII y establece el vínculo entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, que hasta entonces se habían desarrollado por caminos muy diferentes.

En este taller trataremos de comprender esta conexión entre la derivada y la integral estudiando cómo varía el área y volumen de algunas figuras geométricas sencillas.

1. Area de un cuadrado. ¿Cómo varía el área de un cuadrado si se incrementa el lado una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Cómo se puede obtener el área de un cuadrado de lado a acumulando infinitas variaciones infinitesimales del area cada vez mayores?

2. Volumen de un cubo. ¿Cómo varía el volumen de un cubo si se incrementa el lado una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Cómo se puede obtener el volumen de un cubo de lado a acumulando infinitas variaciones infinitesimales del volumen cada vez mayores?

3. Area de un círculo. ¿Cómo varía el area de un círculo si se incrementa el radio una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Qué relación hay entre la fórmula del área y la del perímetro? ¿Cómo se puede calcular el área de un círculo de radio r acumulando infinitas variaciones infinitesimales del area cada vez mayores? ¿Qué otras formas se te ocurren de descomponer el área de un círculo para poder calcular su área mediante sumas de Riemann?

4. Volumen de una esfera. ¿Cómo varía el volumen de una esfera si se incrementa el radio una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Qué relación hay entre la fórmula del volumen y la de la superficie? ¿Cómo se puede calcular el volumen de una esfera de radio r acumulando infinitas variaciones infinitesimales del volumen cada vez mayores? ¿Qué otras formas se te ocurren de descomponer el volumen de una esfera para poder calcular su área mediante sumas de Riemann?

5 Volúmenes de revolución

Los *volúmenes* o *sólidos de revolución* son figuras geométricas en el espacio real que se obtienen rotando una función $y = f(x)$ alrededor del eje x o una función $x = g(y)$ alrededor del eje y.

El volumen de estas figuras puede aproximarse mediante sumas de Riemann de volúmenes de figuras geométricas regulares, típicamente cilindros o anillos, y en última instancia puede calcularse mediante integrales definidas.

En este taller se propone realizar el cálculo de los siguientes volúmenes de revolución usando distintas estrategias para descomponer el estas figuras en distintos tipos de figuras geométricas regulares.

a. Volumen de una esfera

b. Volumen de una pirámide

c. Volumen de un cono

d. Volumen de un paraboloide

e. Volumen de un toro

6 Peraltado de curvas

Cuando un vehículo toma una curva experimenta siempre una fuerza en dirección hacia el exterior de la curva, que se conoce como *fuerza centrífuga*.

Para que el vehículo no se salga de la curva, debe contrarrestar esa fuerza con otra opuesta, que normalmente proporciona el agarre de los neumáticos a la carretera o bien el peralte de la curva, que consiste en inclinar un poco la curva, proporcionándole una pequeña pendiente.

Figura 6.1: Curva peraltada

En este taller veremos cómo calcular la velocidad máxima a la que puede tomarse una curva en función de la inclinación del peralte.

6.1 Tareas

1. Suponiendo que el vehículo toma la curva con rapidez constante, calcular el vector aceleración asociado al movimiento del vehículo. ¿Cuánto vale su componente tangencial? ¿Y su componente normal?

2. Suponiendo que la curva no está peraltada. ¿cuál es la fuerza de agarre que deben tener los neumáticos para que el vehículo no se salga de la carretera? Calcular esa fuerza para una curva de radio 100 m y una rapidez de 50 km/h.

3. Suponiendo que los neumáticos no proporcionan ningún agarre (por ejemplo porque hay hielo en la carretera), ¿cuánto habría que peraltar la carretera para que el vehículo no se salga de ella? Expresar el ángulo del peralte en función del radio de la curva y del la rapidez con que la que se toma.

4. Si un coche es capaz de tomar una curva sin peralte de radio 100 m con una rapidez máxima de 50 km/h, ¿cuál será la velocidad máxima con la que podría tomar esa misma curva peraltada 10 grados?