Talleres de Análisis Matemático

Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
https://aprendeconalf.es

Tabla de contenidos

Prefacio **3**

1 Cálculo del perímetro y el área del círculo **4**
1.1 Tareas 5

2 Análisis del fractal del copo de nieve **6**
2.1 Tareas 6

3 Sumas de Riemann **7**
3.0.1 Fórmulas de ayuda 8

4 Teorema Fundamental del Cálculo **9**
4.1 Tareas 9

5 Caída libre **10**
5.1 Tareas 11

6 Volúmenes de revolución **12**
6.1 Tareas 12

7 Peraltado de curvas **13**
7.1 Tareas 14

8 Aprendizaje de un perceptrón **15**
8.1 Tareas 17

Prefacio

Colección de talleres de Análisis Matemático aplicado.

1 Cálculo del perímetro y el área del círculo

En el siglo III A.C Arquímedes usó el método por agotamiento para calcular el área encerrada por una circunferencia (y de paso el valor de π). La idea consiste en inscribir la circunferencia en polígonos regulares con un número de lados cada vez mayor.

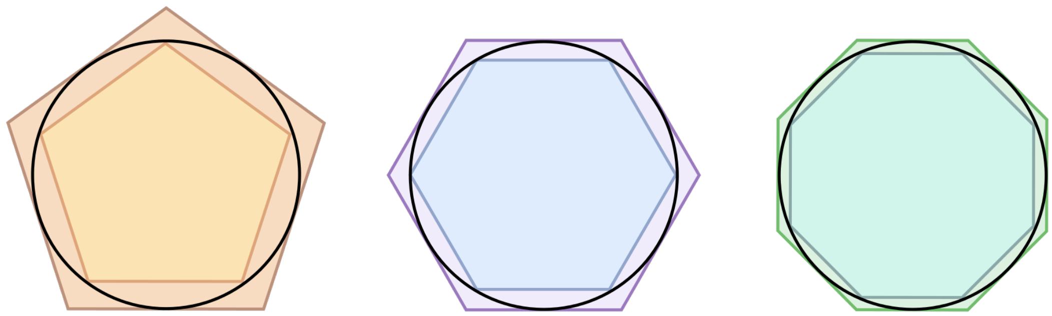


Figura 1.1: Aproximación del área de una circunferencia mediante polígonos regulares

El área de estos polígonos puede calcularse fácilmente descomponiendo los polígonos regulares en triángulos como en el siguiente ejemplo.

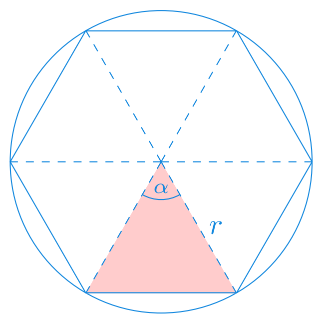


Figura 1.2: Descomposición de un hexágono en triángulos

1.1 Tareas

1. Calcular el término general de la sucesión que mide el perímetro del polígono regular de n lados inscrito dentro del círculo.
2. Estudiar la convergencia de la sucesión anterior. ¿Qué relación hay entre el perímetro del círculo y su radio?
3. Calcular el término general de la sucesión que mide el área del polígono regular de n lados inscrito dentro del círculo.
4. Estudiar la convergencia de la sucesión anterior. ¿Qué relación hay entre el área del círculo y su radio?
5. Repetir los apartados anteriores tomando los polígonos regulares en los que se inscribe el círculo.

2 Análisis del fractal del copo de nieve

El fractal del copo de nieve se construye partiendo de un triángulo equilátero y alterando, de forma recursiva, cada segmento de línea de las siguiente manera:

1. Dividir el segmento de linea en tres partes iguales.
2. Dibujar hacia el exterior de la figura un triángulo equilátero a partir del segmento medio obtenido en el paso anterior.
3. Borrar el segmento medio obtenido en el primer paso.

La siguiente figura ilustra el proceso para las 5 primeras iteraciones.

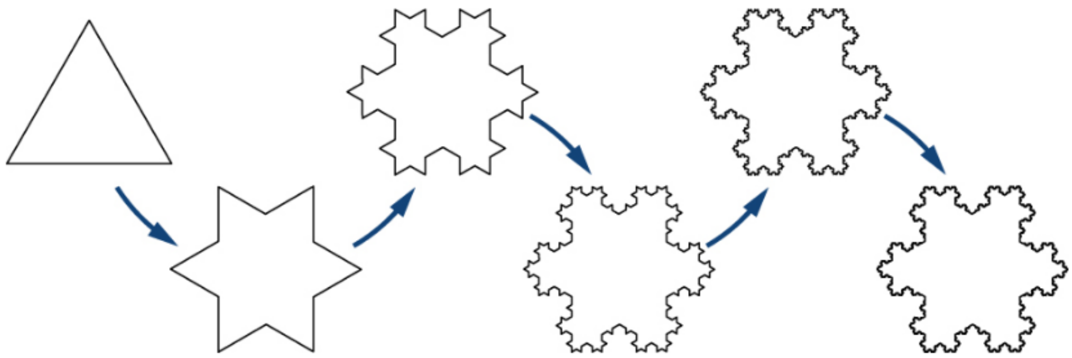


Figura 2.1: Creación del fractal del copo de nieve.

2.1 Tareas

1. Estudiar la convergencia de la sucesión del número de lados.
2. Estudiar la convergencia de la sucesión de la longitud de los lados.
3. Estudiar la convergencia de la sucesión del perímetro del copo de nieve.
4. Calcular el area del copo de nieve en la etapa n.
5. Calcular el area total del fractal del copo de nieve (cuando $n \to \infty$).

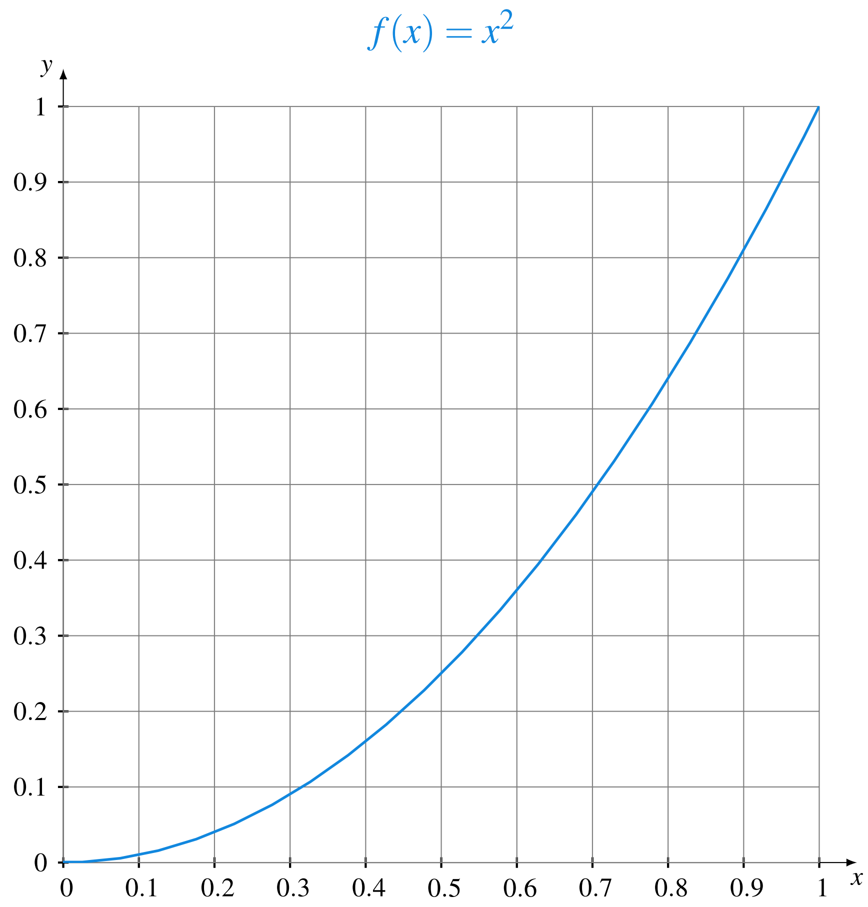
3 Sumas de Riemann

El cálculo de áreas encerradas por regiones del plano curvas ya fue estudiado en la antigua Grecia. Una de las técnicas desarrolladas en aquella época fue el método por agotamiento, qué básicamente consistía en aproximar el área de la región estudiada, inscribiendo en ella figuras geométricas de área conocida.

En este taller trataremos de usar esta idea, usando *sumas de Riemann*, para aproximar el área que queda entre la gráfica de una función $f(x) = x^2$ y el eje X, en el intervalo $I = [0, 1]$.

Para ello hay que seguir los siguientes pasos:

1. Dar una aproximación por defecto y por exceso calculando las sumas inferior y superior de Riemann para particiones de I en n subintervalos de igual tamaño, para $n = 2, 5$ y 10.
2. Calcular la sumas inferior y superior de Riemann para particiones de I en n subintervalos de igual tamaño.
3. Calcular la integral inferior de Riemann mediante el límite cuando n tiende a ∞ de la expresión obtenida en el apartado anterior para la suma inferior de Riemann.
4. Calcular la integral superior de Riemann mediante el límite cuando n tiende a ∞ de la expresión obtenida en el apartado anterior para la suma superior de Riemann.
5. Calcular el área encerrada entre la gráfica de f y el eje X en el intervalo dado.
6. Generalizar el proceso anterior para calcular el área encerrada entre la gráfica de f y el eje X en un intervalo cualquiera $I = [a, b]$.



3.0.1 Fórmulas de ayuda

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo fue enunciado a la vez por Newton y Leibniz en el siglo XVIII y establece el vínculo entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, que hasta entonces se habían desarrollado por caminos muy diferentes.

4.1 Tareas

En este taller trataremos de comprender esta conexión entre la derivada y la integral estudiando cómo varía el área y volumen de algunas figuras geométricas sencillas.

1. Area de un cuadrado. ¿Cómo varía el área de un cuadrado si se incrementa el lado una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Cómo se puede obtener el área de un cuadrado de lado a acumulando infinitas variaciones infinitesimales del area cada vez mayores?
2. Volumen de un cubo. ¿Cómo varía el volumen de un cubo si se incrementa el lado una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Cómo se puede obtener el volumen de un cubo de lado a acumulando infinitas variaciones infinitesimales del volumen cada vez mayores?
3. Area de un círculo. ¿Cómo varía el area de un círculo si se incrementa el radio una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Qué relación hay entre la fórmula del área y la del perímetro? ¿Cómo se puede calcular el área de un círculo de radio r acumulando infinitas variaciones infinitesimales del area cada vez mayores? ¿Qué otras formas se te ocurren de descomponer el área de un círculo para poder calcular su área mediante sumas de Riemann?
4. Volumen de una esfera. ¿Cómo varía el volumen de una esfera si se incrementa el radio una cantidad infinitesimal dx? Dar una explicación geométrica. ¿Qué relación hay entre la fórmula del volumen y la de la superficie? ¿Cómo se puede calcular el volumen de una esfera de radio r acumulando infinitas variaciones infinitesimales del volumen cada vez mayores? ¿Qué otras formas se te ocurren de descomponer el volumen de una esfera para poder calcular su área mediante sumas de Riemann?

5 Caída libre

Figura 5.1: Traje de alas (wingsuit) para planear.

Julia es una paracaidista apasionada. Tiene más de 300 saltos en su haber y ha dominado el arte de cambiar la posición de su cuerpo en el aire para controlar la velocidad de caída. Si arquea la espalda y apunta su vientre hacia el suelo, alcanza una velocidad límite de aproximadamente 54 m/s. Si más bien orienta su cuerpo con la cabeza hacia abajo, cae más rápido, alcanzando una velocidad límite de 67 m/s.

Como Julia se moverá (caerá) en dirección descendente, asumimos que la dirección descendente es positiva para simplificar nuestros cálculos. Julia ejecuta sus saltos desde una altitud de 3800 m. Al saltar de la aeronave, inmediatamente comienza a caer a una velocidad dada por v(t)=32t. Ella continúa acelerando según esta función de velocidad hasta que alcanza la velocidad límite. Cuando alcanza la velocidad límite, su velocidad se mantiene constante hasta que tira de la cuerda de seguridad y reduce la velocidad para aterrizar.

5.1 Tareas

1. En su primer salto del día, Julia se orienta en la posición más lenta “panza abajo”. ¿Cuánto tiempo después de saltar del avión Julia alcanza la velocidad límite?
2. Según la respuesta anterior, dar una expresión que implique una o más integrales que representen la distancia a la que cae Julia después de 30 segundos.
3. Si Julia tira de la cuerda de apertura del paracaídas a una altitud de 900 m, ¿cuánto tiempo pasa en caída libre?

   Julia tira de su cuerda de seguridad a 900 m. El paracaídas tarda 5 segundos en abrirse por completo y en frenar, tiempo durante el cual cae otros 120 m. Después de que su paracaídas está completamente abierto, su velocidad se reduce a 4 m/s. Hallar el tiempo total que Julia pasa en el aire, desde que sale del avión hasta que sus pies tocan el suelo.
4. En el segundo salto del día, Julia decide que quiere caer un poco más rápido y se orienta en la posición “cabeza abajo”. En este caso ¿cuánto tarda Julia en alcanzar la velocidad límite?

   Antes de tirar de la cuerda de seguridad, Julia reorienta su cuerpo en la posición “panza abajo” para no moverse tan rápido cuando se abra el paracaídas. Si comienza esta maniobra a una altitud de 1200 m, ¿cuánto tiempo pasa en caída libre antes de comenzar la reorientación?
5. Algunos saltadores llevan “trajes de alas” como el de la figura. Estos trajes tienen paneles de tela entre los brazos y las piernas y permiten al usuario deslizarse en caída libre, como una ardilla voladora. Cuando se llevan estos trajes, la velocidad límite puede reducirse a unos 13 m/s, lo que permite a los usuarios un tiempo mucho más largo en el aire. Si Julia se pone un traje de este tipo antes de su tercer salto del día y tira de su paracaídas a una altitud de 900 m, ¿cuánto tiempo puede pasar planeando en el aire?

6 Volúmenes de revolución

Los *volúmenes* o *sólidos de revolución* son figuras geométricas en el espacio real que se obtienen rotando una función $y = f(x)$ alrededor del eje x o una función $x = g(y)$ alrededor del eje y.

El volumen de estas figuras puede aproximarse mediante sumas de Riemann de volúmenes de figuras geométricas regulares, típicamente cilindros o anillos, y en última instancia puede calcularse mediante integrales definidas.

6.1 Tareas

En este taller se propone realizar el cálculo de los siguientes volúmenes de revolución usando distintas estrategias para descomponer el estas figuras en distintos tipos de figuras geométricas regulares.

1. Volumen de una esfera
2. Volumen de una pirámide
3. Volumen de un cono
4. Volumen de un paraboloide
5. Volumen de un toro

7 Peraltado de curvas

Cuando un vehículo toma una curva experimenta siempre una fuerza en dirección hacia el exterior de la curva, que se conoce como *fuerza centrífuga*.

Para que el vehículo no se salga de la curva, debe contrarrestar esa fuerza con otra opuesta, que normalmente proporciona el agarre de los neumáticos a la carretera o bien el peralte de la curva, que consiste en inclinar un poco la curva, proporcionándole una pequeña pendiente.

Figura 7.1: Curva peraltada

En este taller veremos cómo calcular la velocidad máxima a la que puede tomarse una curva en función de la inclinación del peralte.

7.1 Tareas

1. Suponiendo que el vehículo toma la curva con rapidez constante, calcular el vector aceleración asociado al movimiento del vehículo. ¿Cuánto vale su componente tangencial? ¿Y su componente normal?
2. Suponiendo que la curva no está peraltada. ¿cuál es la fuerza de agarre que deben tener los neumáticos para que el vehículo no se salga de la carretera? Calcular esa fuerza para una curva de radio 100 m y una rapidez de 50 km/h.
3. Suponiendo que los neumáticos no proporcionan ningún agarre (por ejemplo porque hay hielo en la carretera), ¿cuánto habría que peraltar la carretera para que el vehículo no se salga de ella? Expresar el ángulo del peralte en función del radio de la curva y del la rapidez con que la que se toma.
4. Si un coche es capaz de tomar una curva sin peralte de radio 100 m con una rapidez máxima de 50 km/h, ¿cuál será la velocidad máxima con la que podría tomar esa misma curva peraltada 10 grados?

8 Aprendizaje de un perceptrón

Un perceptrón es un tipo de neurona artificial utilizada las redes neuronales artificiales. Fue desarrollado por Frank Rosenblatt en 1957 como un modelo simplificado de una neurona biológica.

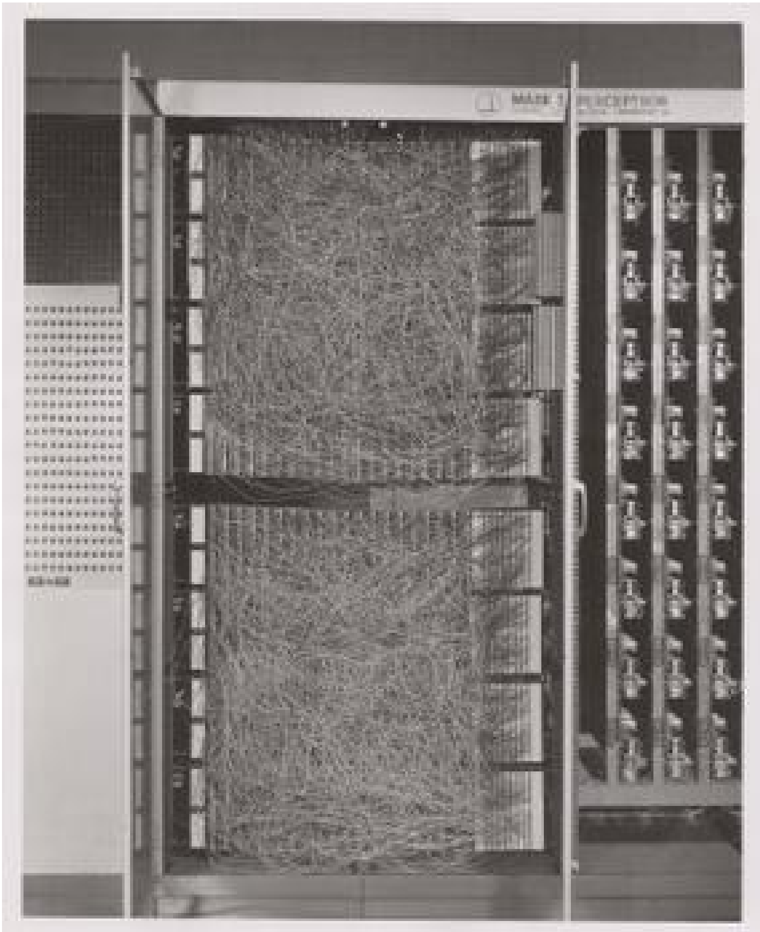


Figura 8.1: Primera implementación hardware de un perceptrón (Mark I) desarrollado por Frank Rosenblatt en 1957.

Un perceptrón consta de los siguientes elementos:

- **Conexiones de entrada**. Contienen los datos que llegan a la unidad de procesamiento de la neurona artificial. Cada conexión tiene asociado un peso que se van ajustando durante el proceso de entrenamiento de la red.
- **Unidad de procesamiento**. Se encarga de aplicar una *función de activación* a la suma de los datos de entrada ponderado por los pesos de las conexiones. Existen distintos tipos de funciones de activación, aunque las más habituales son
  - *Función escalón*:
  $$\begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$
  Es la función de activación más simple y devuelve 1 si la suma ponderada de las entradas alcanza un determinado valor umbral, y 0 en caso contrario.
  - *Función sigmoidal*: $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
  Devuelve valores entre 0 y 1 de manera continua y suele utilizarse en modelos donde la salida es una probabilidad.
  - *Función tangente hiperbólica*: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
  Es similar a la función sigmoidal, pero devuelve valores entre -1 y 1. La principal diferencia con la sigmoidal es que está normalizada para centrar la salida en 0.
- **Salida**. Es el resultado de la función de activación, y suele ser la entrada de la siguiente neurona en la red.

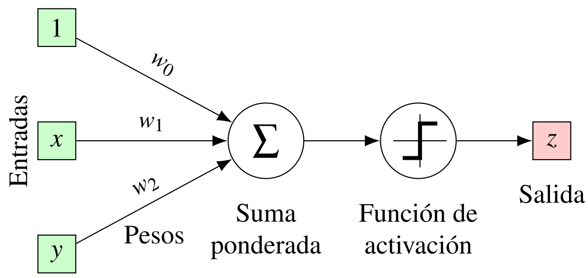


Figura 8.2: Perceptrón con dos entradas

Para entrenar al perceptrón de la figura se utiliza una colección de n ejemplos (x_i, y_i, z_i) para los que se conoce la el valor real de z_i asociado a cada par (x_i, y_i). Para cada ejemplo se realizan los siguientes pasos:

1. Proporcionarle al perceptrón los valores de entrada (x_i, y_i) y calcular la salida correspondiente a estos valores, $\hat{z}_i = f(w_0 + w_1 x + w_2 y)$, donde f es la función de activación.
2. Calcular el error cometido $e_i = z_i - \hat{z}_i$.
3. Actualizar los pesos proporcionalmente a la dirección en la que error decrezca lo más rápidamente posible. Se suele tomar una pequeña constante de proporcionalidad η llamada *tasa de aprendizaje*.

Este procedimiento se conoce como el algoritmo del *gradiente descendente*.

Cuando se acaba con la colección de ejemplos se vuelve a repetir el procedimiento hasta que el error sea lo suficientemente pequeño o se alcance un número preestablecido de iteraciones.

8.1 Tareas

1. Dar una fórmula para la actualización de los pesos de las conexiones de entrada al perceptrón en cada iteración para las funciones de activación sigmoidal y tangente hiperbólica.

2. Usar la formula anterior para realizar las primeras iteraciones del entrenamiento del perceptrón para aprender la función lógica `AND`, tomando el siguiente conjunto de entrenamiento y partiendo de pesos aleatorios entre -1 y 1.

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. ¿Cómo influye la tasa de aprendizaje η en el ajuste de los pesos? ¿Cómo debería ser la tasa de aprendizaje para que el algoritmo converja hacia el mínimo error?

4. Generalizar las fórmulas de actualización de los pesos para una red neuronal con dos entradas, una capa de neuronas intermedia con dos neuronas y dos neuronas de salida, como la de la siguiente figura.

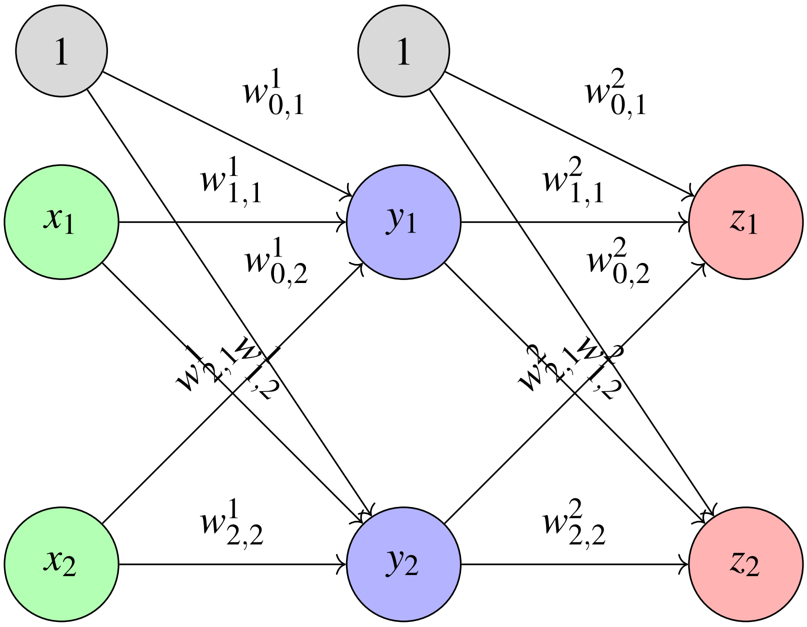


Figura 8.3: Red neuronal con dos entradas, una capa intermedia con dos neuronas y dos neuronas de salida