Cálculo con Geogebra

Alfredo Sánchez Alberca
(asalber@ceu.es)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad CEU San Pablo

Septiembre 2018

CEU
Universidad
San Pablo

Cálculo con Geogebra
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

Índice general

Práctica 1

Introducción a Geogebra

1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Geogebra[1] es uno de los programas de cálculo numérico y simbólico más utilizados. Aparte de sus capacidades el cálculo numérico, vectorial y matricial, también puede realizar representaciones gráficas, lo cual permite resolver multitud de problemas de Álgebra, Análisis, Cálculo, Geometría e incluso Estadística, de manera interactiva. La ventaja de Geogebra frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, Mapple o MATLAB, radica en su sencillez y simplicidad de uso, y en que es software libre, por lo que puede instalarse sin coste alguno e incluso modificarse.

El programa puede descargarse de las página web `https://www.geogebra.org`. En esta web existe también una versión en linea del programa que permite usarlo como una aplicación web sin necesidad de instalarlo en el ordenador. Esta web dispone también de multitud de tutoriales y recursos educativos a disposición de los usuarios. De hecho, cualquier usuario puede registrarse y subir a esta web actividades desarrolladas con Geogebra.

El objetivo de esta práctica es introducir al alumno en la utilización de este programa, enseñándole a realizar las operaciones básicas más habituales en Cálculo.

2 Arranque

Como cualquier otra aplicación de Windows, para arrancar el programa hay que pulsar sobre la opción correspondiente del menú Inicio › Programas, o bien sobre el icono de escritorio .

Cuando el programa arranca, en la pantalla aparece la ventana de inicio del programa (figura 1.1), que nos permite seleccionar distintos entornos de trabajo o *Apariencias*.

[1]Esta practica está basada en la versión 6.1 de Geogebra Clásico

Figura 1.1 – Apariencia inicial de Geogebra.

3 Vistas

Geogebra dispone de varias ventanas de trabajo que se denominan *Vistas* y de distintos entornos de trabajo llamados *Apariencias* que combinan distintas vistas. Tanto las vistas como las apariencias se pueden activar en el menú principal de Geogebra que aparece en la esquina superior derecha. Las vistas más importantes que utilizaremos a lo largo de estas prácticas son:

Vista Algebraica Esta permite realizar construcciones algebraicas y geométricas. Dispone una Barra de Entrada donde se pueden introducir comandos y expresiones algebraicas. Esta vista aparece activa por defecto cuando arranca el programa.

Vista Gráfica Esta vista permite representar objetos geométricos en el plano real. Junto a la vista algebraica, esta vista también aparece activa por defecto cuando arranca el programa.

Vista Gráfica 3D Esta vista permite representar objetos geométricos en el espacio real. Esta vista no aparece por defecto cuando arranca el programa, así que hay que activarla cuando se necesite.

Vista CAS (Computer Algebra System) Esta vista permite realizar cálculos simbólicos. Dispone de una Barra de Entrada similar a la vista Algebraica donde se pueden introducir comandos y expresiones matemáticas y evaluarlas. Esta vista no aparece por defecto cuando arranca el programa, pero *será la que más utilizaremos durante las prácticas.*

4 Edición de expresiones en la Vista CAS

Antes de realizar cualquier cálculo sobre una expresión matemática, lo primero es escribir dicha expresión y aprender a manipularla.

Introducción de expresiones

Para introducir una expresión se utiliza Barra de Entrada de la Vista CAS (figura 1.2).

Figura 1.2 – Barra de entrada de expresiones.

La Barra de Entrada permite introducir expresiones matemáticas, comandos y también anotaciones de texto. En estas expresiones podemos introducir números, letras romanas, letras griegas, operadores matemáticos y cualquier símbolo matemático que aparece en el teclado virtual. También permite la entrada de código LaTeX[2] para formatear la expresiones. Por ejemplo es posible escribir superíndices con el comando ^ y subíndices con el comando _.

Cuando se presiona la tecla `Enter` después de introducir una expresión matemática, Geogebra trata de evaluarla y muestra el resultado de la evaluación justo debajo de la expresión, o bien un aviso de error cuando hay algo mal escrito en la expresión.

Los operadores más habituales en la construcción de expresiones son los que aparecen en la siguiente tabla:

Símbolo	Operador
`+`	suma
`-`	resta
`*`	producto
`/`	división
`^`	potencia

A la hora de escribir una expresión hay que tener en cuenta que Geogebra tiene establecido un orden de prioridad en la evaluación de los operadores. En primer lugar evalúa las funciones y constantes predefinidas, después evalúa las potencias, después productos y cocientes (ambos con igual prioridad y de izquierda a derecha), y por último sumas y restas (ambas con igual prioridad y de izquierda a derecha). Para forzar la evaluación de una subexpresión, saltándose el orden de prioridad, se utilizan paréntesis. Así, como se ve en el siguiente ejemplo, dependiendo de cómo se introduzca una expresión pueden obtenerse resultados diferentes.

Expresión introducida	Expresión evaluada
`4x-1/x-5`	$4x - \frac{1}{x} - 5$
`(4x-1)/x-5`	$\frac{4x-1}{x} - 5$
`4x-1/(x-5)`	$4x - \frac{1}{x-5}$
`(4x-1)/(x-5)`	$\frac{4x-1}{x-5}$

Cada vez que introducimos una expresión, esta aparece en la Vista CAS etiquetada con un número que permite identificarla. Posteriormente, cada vez que queramos hacer referencia a dicha expresión podremos utilizar su identificador en lugar de volver a escribir la expresión.

Existen dos formas de referirse a una expresión anterior, que son la referencia estática y la referencia dinámica. Para hacer una referencia estática debemos escribir el símbolo # seguido del número que identifica la expresión, mientras que para hacer una referencia dinámica debemos escribir el símbolo $ seguido del número que identifica la expresión. Una referencia estática no cambiará la expresión donde

[2] https://www.latex-project.org/

se hace la referencia aún cuando la expresión original cambie, mientras que en una referencia dinámica, cuando cambie la expresión original, la expresión donde se hace la referencia reflejará ese cambio.

Es posible seleccionar cualquier expresión o subexpresión de la Vista CAS y copiarla y pegarla en la Barra de Entrada.

Introducción de anotaciones de texto

Geogebra permite también la introducción de anotaciones o comentarios de texto en la Barra de Entrada. Para ello hay que hacer clic con el botón derecho del ratón en la Barra de Entrada y seleccionar el menú Texto del menú contextual que aparece. Las anotaciones de texto son muy útiles para explicar los pasos que se dan en una construcción matemática o para interpretar los resultados.

Eliminación de expresiones

Por supuesto, es posible eliminar una expresión de la Vista CAS. Para ello solo hay que ir a la línea que contiene la expresión que se quiere eliminar y hacer clic en el botón o hacer clic con el botón derecho del ratón y seleccionar el menú Eliminar fila del menú contextual que aparece.

Si cometemos un error introduciendo una expresión o eliminándola, es posible deshacer las últimas operaciones o rehacerlas haciendo clic sobre los botones o respectivamente.

Definición de variables

Para definir variables se pueden utilizar letras romanas o griegas. Los nombres de las variables pueden contener más de una letra y, en tal caso, pueden usarse también números, pero siempre debe comenzar por una letra. Así, para Geogebra, la expresión `xy`, no se interpreta como el producto de la variable x por la variable y, sino como la variable xy. Además, distingue entre mayúsculas y minúsculas, así que no es lo mismo xy que xY.

Definición de constantes y funciones

Es posible definir constantes y funciones mediante el operador de definición `:=`. Para definir una constante basta con escribir el nombre de la constante seguido de `:=` y el valor de dicha constante. Por ejemplo para definir la constante de la aceleración de la gravedad, escribiríamos `g:=9.81`.

Por otro lado, para definir una función se escribe el nombre de la función seguido de la lista de variables de la misma separadas por comas y entre paréntesis; después se escribe `:=` y por último la expresión que define la función. Así, por ejemplo, para definir la función que calcula el área de un triángulo de base b y altura h, escribiríamos `a(b,h):=(b*h)/2` (ver figura 1.3).

Si hemos definido una función o una constante, y posteriormente cambiamos la definición, los cambios se verán reflejados en cualquier expresión donde aparezca la constante o la función, a no ser que hayamos hecho una referencia estática a ella.

Para eliminar la definición y dejar libre el nombre de la constante o función, por ejemplo `c`, se puede utilizar el comando `Eliminar(c)` o bien el comando `c:=`.

Funciones y constantes predefinidas

Geogebra tiene ya predefinidas la mayoría de la funciones elementales y constantes que suelen utilizarse en los cálculos matemáticos. La sintaxis de algunas de estas funciones y constantes se muestra en la tabla 1.1, aunque, muy a menudo, en lugar de utilizar dicha sintaxis se utilizan los operadores y constantes que aparecen en el teclado virtual.

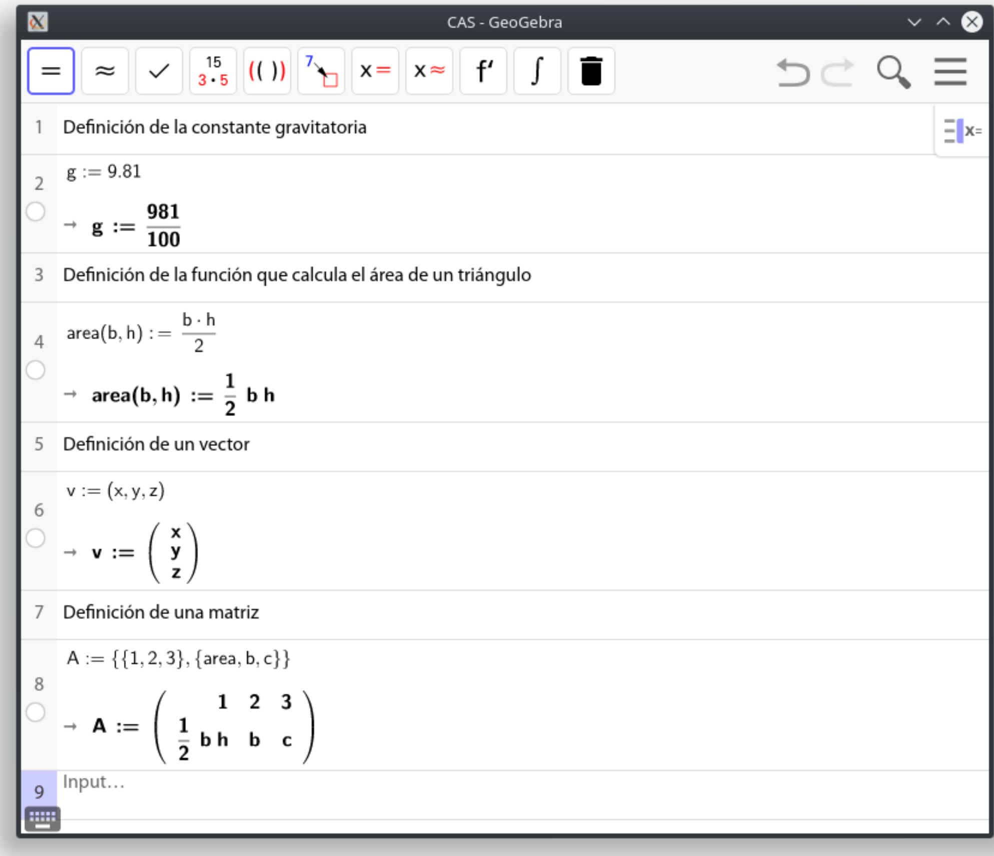

Figura 1.3 – Introducción de expresiones matemáticas en la Barra de Entrada.

Sintaxis	**Constante o función**
`pi`	El número $\pi = 3.14159\ldots$
`Alt+e`	Constante de Euler $e = 2.71828\ldots$
`Alt+i`	El número imaginario $i = \sqrt{-1}$
`inf`	Infinito ∞
`exp(x)`	Función exponencial e^x
`log(a,x)`	Función logarítmica con base a, $\log_a x$
`ln(x)`	Función logaritmo neperiano $\ln x$
`sqrt(x)`	Función raíz cuadrada $\sqrt{x}$
`sen(x)`	Función seno $\sin x$
`cos(x)`	Función coseno $\cos x$
`tan(x)`	Función tangente $\tan x$
`arcsin(x)`	Función arcoseno $\arcsin x$
`arccos(x)`	Función arcocoseno $\arccos x$
`arctan(x)`	Función arcotangente $\arctan x$

Cuadro 1.1 – Sintaxis de algunas funciones elementales y constantes predefinidas en Geogebra.

Vectores y matrices

Geogebra también permite la manipulación de vectores y matrices. Para definir un vector se escriben sus coordenadas separadas por comas entre paréntesis. Por ejemplo, para introducir el vector (x, y, z) escribiríamos `(x,y,z)` (ver figura 1.3). Si se quiere un vector columna se puede usar el comando `Vector((x,y,z))`.

Para definir una matriz se escriben sus elementos por filas, separados por comas y entre llaves. Así, para introducir por ejemplo la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

escribiríamos `{{1,2,3},{a,b,c}}` (ver figura 1.3).

Simplificación de expresiones

Geogebra trata de simplificar las expresiones cuando las evalúa. Por ejemplo, si se introduce $x + x$ el resultado será $2x$. Si no se desea evaluar una expresión se puede cambiar al modo de conservar las entradas haciendo clic en el botón ✓.

Sin embargo al evaluar una expresión Geogebra no realiza simplificaciones más complejas como por ejemplo simplificar la expresión $\operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Para ello dispone de tres comandos:

Simplifica Es el comando más sencillo y trata de simplificar al máximo una función. Por ejemplo, el comando `Simplifica(sen(x)^2+cos(x)^2)` devolverá `1`.

Desarrolla Este comando permite desarrollar una expresión realizando los potencias, productos, cocientes, sumas y restas que se puedan. Por ejemplo, el comando `Desarrolla((x+1)^2)` devolverá el resultado `x^2+2x+1`.

Factoriza Este comando permite factorizar una expresión. Por ejemplo, el comando `Factoriza(x^2+2x+1)` devolverá el resultado `(x+1)^2`.

En cualquiera de estas simplificaciones, Geogebra trabaja por defecto en modo exacto y por eso devuelve expresiones fraccionarias. Para obtener el valor de una expresión en modo aproximado, con decimales, hay que cambiar al modo de cálculo aproximado haciendo clic sobre el botón ≈. El número de cifras decimales se puede establecer en la configuración de Geogebra.

Por último, es posible sustituir cualquier variable de una expresión por un valor u otra expresión mediante el comando `Sustituye(<expresion>, <Lista de reemplazos>)`. Por ejemplo, el comando `Sustituye(2x+y, x=2, y=1)` devolverá el resultado `5`.

Ecuaciones e inecuaciones

Para definir ecuaciones en Geogebra hay que utilizar el símbolo de igualdad =. Por ejemplo, el comando `2x-y=1` define la ecuación de una recta.

Y para definir inecuaciones en Geogebra hay que utilizar los símbolos de menor <, mayor >, menor o igual <= o mayor o igual >=. Por ejemplo, el comando `x^2+y^2<=1` define el círculo de radio 1 centrado en el origen.

Para resolver ecuaciones e inecuaciones se utiliza el comando `Resuelve(<ecuaciones>)`. Por ejemplo, el comando `Resuelve(x^2-5x+4=0)` devolverá el resultado `{x=1, x=4}`. Se pueden indicar además restricciones para las variables. Por ejemplo, el comando `Resuelve(x^2-5x+4=0, x>3)` devolverá únicamente la solución `{x=4}`.

Para resolver sistemas de ecuaciones hay que poner la lista de ecuaciones entre llaves. Por ejemplo, el comando `Resuelve({2x+3y=12, y-x=-1})` devolverá el resultado `{x=3, y=2}`.

Este comando también permite resolver inecuaciones. Por ejemplo, el comando `Resuelve(3x-2<1)` devolverá el resultado `{x<1}`.

5 Representaciones gráficas

Uno de los puntos fuertes de Geogebra es su capacidad gráfica ya que permite representar multitud de objetos geométricos tanto en el plano como en el espacio real.

Representaciones gráficas en el plano real

Para representar objetos geométricos en el plano real $\mathbb{R}^2$, Geogebra dispone de la Vista Gráfica. Por defecto cualquier función que definamos en la Vista CAS aparecerá representada en esta vista. Para representar otros objetos como constantes, ecuaciones o inecuaciones es necesario hacer clic sobre el círculo que aparece a la izquierda de la expresión (ver figura 1.4). Para ocultar de nuevo el objeto en la Vista Gráfica basta con volver a hacer clic sobre ese círculo.

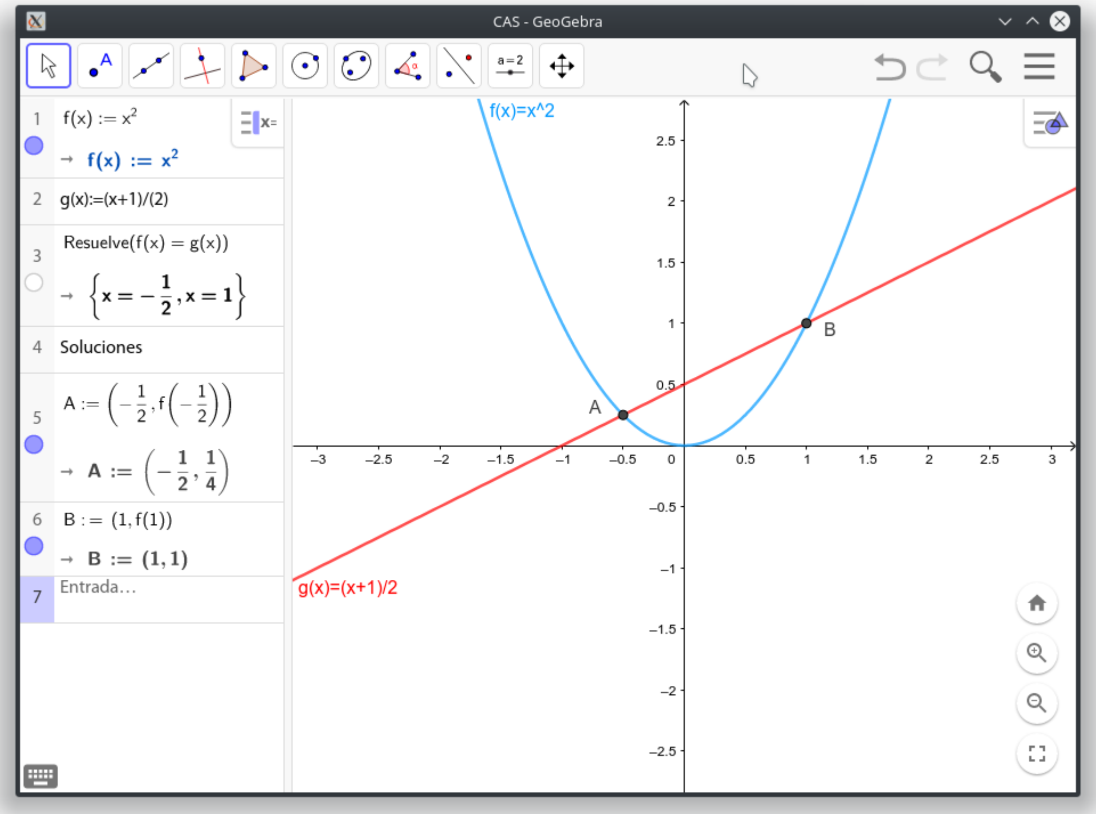

Figura 1.4 – Representaciones gráficas en la Vista Gráfica.

Geogebra permite también la representación de funciones paramétricas definiendo el vector de las funciones coordenadas en función de un parámetro. Por ejemplo, el comando `g(t):=(cos(t), 2sen(t)cos(t))` dibuja la curva que se muestra en la figura 1.5.

Es posible cambiar el aspecto de cualquier objeto geométrico haciendo clic con el botón derecho del ratón sobre él y seleccionando el menú Configuración del menú contextual que aparece. Esto abre un panel que permite cambiar el nombre del objeto, el color, el grosor o la transparencia del trazo, e incluso ponerle un rótulo que aparezca en la Vista Gráfica junto al objeto.

La Vista Gráfica aparece centrada en el origen de coordenadas por defecto, pero se puede hacer un zoom para acercar o alejar la vista haciendo clic en los botones y respectivamente. También es

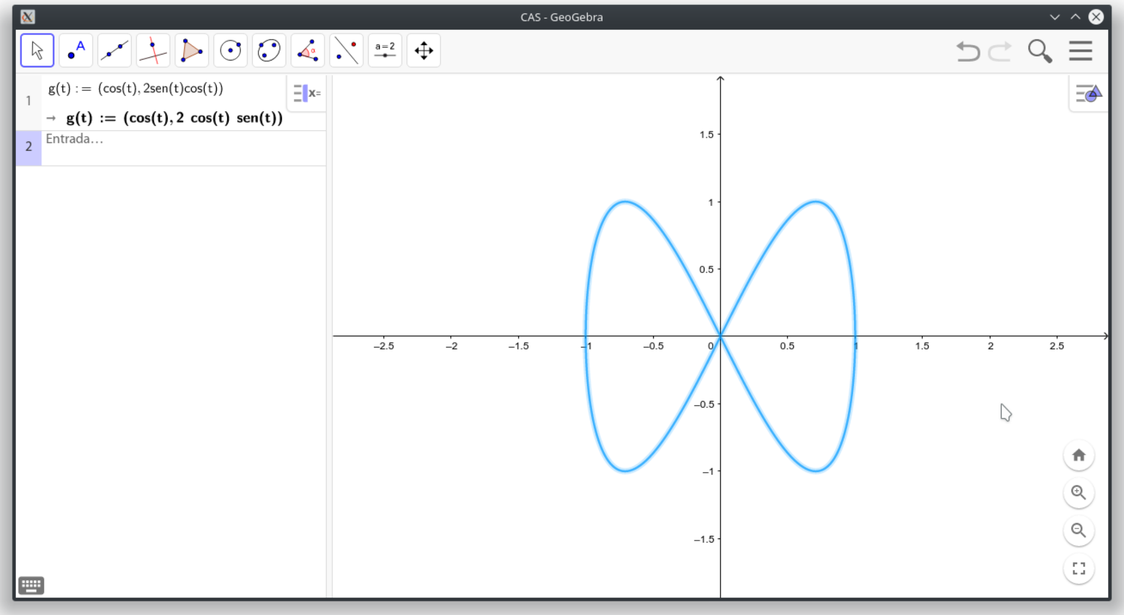

Figura 1.5 – Representación de una curva paramétrica en el plano.

posible desplazar la vista haciendo clic en cualquier posición y, sin soltar, desplazando el ratón. Para volver a la vista original centrada en el origen de coordenadas, basta con hacer clic en el botón .

Representaciones gráficas en el espacio real

Para representar objetos geométricos en el espacio real $\mathbb{R}^3$, Geogebra dispone de la Vista Gráficas 3D.

Por defecto cualquier función de dos variables que definamos en la Vista CAS aparecerá representada en esta vista. Para representar otros objetos como ecuaciones es necesario hacer clic sobre el círculo que aparece a la izquierda de la expresión (ver figura 1.6). Para ocultar de nuevo el objeto en la Vista Gráfica basta con volver a hacer clic sobre ese círculo.

También es posible la representación de curvas paramétricas al igual que en el plano real, pero introduciendo el vector con las tres funciones coordenadas en función de un parámetro. Por ejemplo, el comando `h(t):=(cos(t), sen(t), t/2)` dibuja la curva que se muestra en la figura 1.7.

Al igual que en la Vista Gráfica, es posible cambiar el aspecto de cualquier objeto geométrico haciendo clic con el botón derecho del ratón sobre él y seleccionando el menú Configuración del menú contextual que aparece. Esto abre un panel que permite cambiar el nombre del objeto, el color, el grosor o la transparencia del trazo, e incluso ponerle un rótulo que aparezca en la Vista Gráfica junto al objeto.

Del mismo modo, es posible hacer un zoom para acercar o alejar la vista haciendo clic en los botones y respectivamente. También se puede mover la vista con el botón o rotarla con el botón .

6 Gestión de archivos

Las expresiones y los cálculos realizados dentro de la Vista CAS se pueden guardar en un archivo.

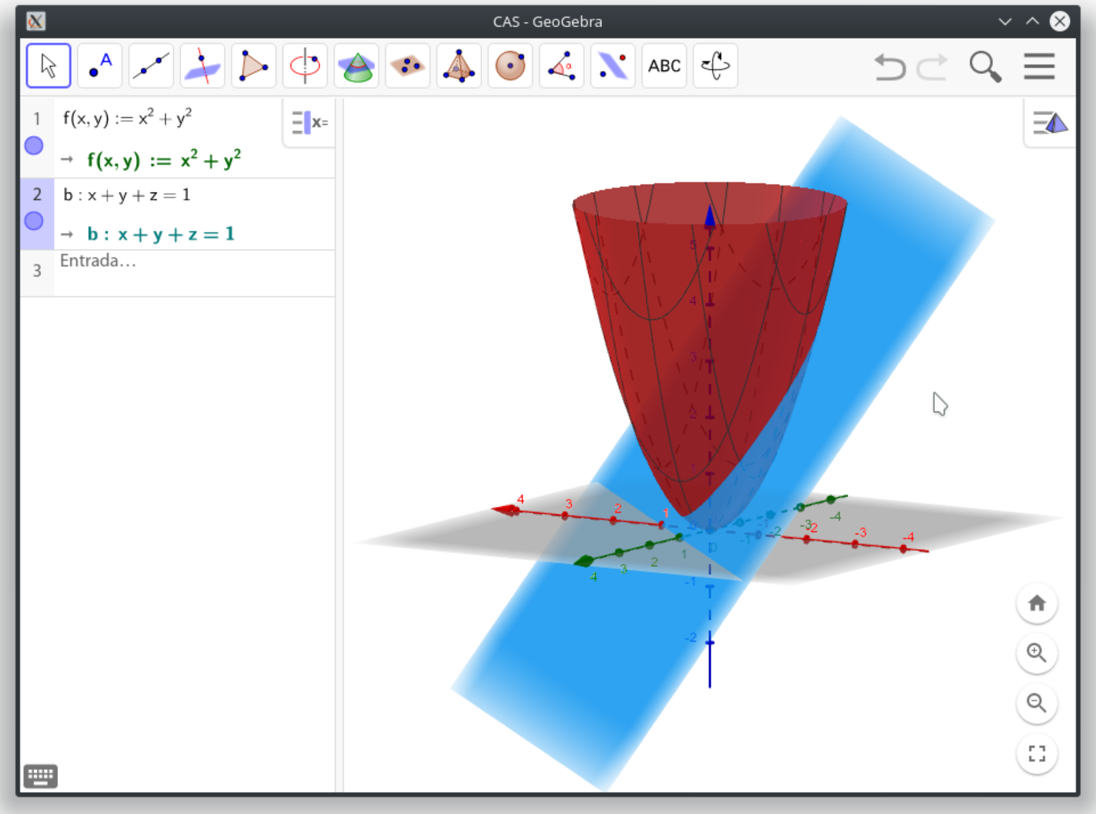

Figura 1.6 – Representaciones gráficas en la Vista Gráfica 3D.

Guardar un archivo

Para guardar las expresiones y los resultados de la Vista CAS se puede utiliza el menú Archivo > Guardar. Si no hemos iniciado sesión en el servidor de Geogebra nos preguntará el nombre de usuario y la contraseña para iniciar la sesión (ver figura 1.8). Si aún no se dispone de una cuenta de usuario es posible registrarse también en este momento, pero si no se desea identificarse se puede hacer clic en el enlace `Continuar sin identificarse ahora`.

Si hemos iniciado sesión en el servidor, nos preguntará el nombre que queremos darle al archivo y se subirá automáticamente a la nube de Geogebra. De este modo estará disponible en la web de Geogebra cuando nos conectemos con nuestro cuenta de usuario.

Si no se ha iniciado sesión en el servidor, entonces aparecerá un cuadro de diálogo donde podremos indicar el nombre que queremos darle al fichero y la seleccionar la carpeta donde queremos guardarlo. Los archivos de geogebra tienen extensión `*.ggb`.

Una vez guardado el archivo, su nombre aparecerá en la barra de título de la ventana de Geogebra.

Abrir un archivo

Para abrir un archivo de geogebra se utiliza el Archivo > Abrir. En el cuadro de diálogo que aparece se puede optar por abrir un archivo de la web de Geogebra, o bien abrir un archivo local.

En el caso de que hayamos iniciado sesión en el servidor, automáticamente aparecerán nuestros archivos de la nube de Geogegra. Si no hemos iniciado sesión en el servidor entonces se puede abrir cualquier archivo público de la web de Geogebra. Para ello podemos introducir cualquier término en la

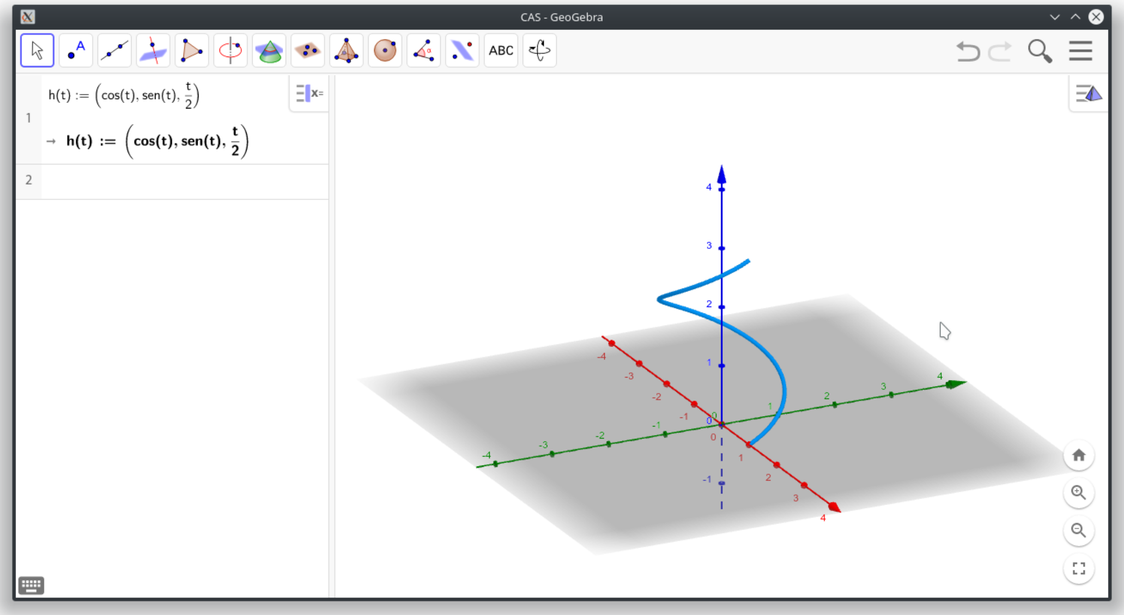

Figura 1.7 – Representación de una curva paramétrica en el espacio.

Figura 1.8 – Inicio de sesión en el servidor de Geogebra

barra de búsqueda que aparece y nos aparecerán los archivos que incluyen esos términos. Seleccionando cualquiera de ellos se descargará y se abrirá en Geogebra.

Si se desea abrir un archivo local hay que hacer clic en la carpeta que aparece y se abrirá un cuadro de diálogo donde debemos indicar el archivo que queremos abrir.

7 Impresión

Geogebra permite imprimir las vistas gráficas seleccionando el menú Previsualización. Tras esto aparece un cuadro de diálogo donde se puede seleccionar la ventana gráfica que se desea imprimir y las unidades de los ejes. Finalmente aparece el cuadro de diálogo de las impresoras donde hay que seleccionar la impresora con la que se quiere imprimir.

También es posible exportar las vistas gráficas a diferentes formatos con el menú Descargar como. Si se desea imprimir además de las gráficos las expresiones de la Vista CAS hay que seleccionar la opción Construcción dinámica con página web (html). Esto genera una página web que puede abrirse con cualquier navegador y después imprimirse de la forma habitual.

8 Ejercicios resueltos

1. Introducir y evaluar las siguientes expresiones matemáticas.

   (a) $4x - \dfrac{1}{x} - 5$.

   > Introducir la expresión `4x-1/x-5` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

   (b) $\dfrac{4x-1}{x} - 5$.

   > Introducir la expresión `(4x-1)/x-5` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

   (c) $4x - \dfrac{1}{x-5}$.

   > Introducir la expresión `4x-1/(x-5)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

   (d) $\dfrac{4x-1}{x-5}$.

   > Introducir la expresión `(4x-1)/(x-5)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

2. Definir los siguientes objetos matemáticos y dibujarlos.

   (a) Las constantes $a = 2$ y $b = 3$.

   > 1) Introducir el comando `a:=2` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
   > 2) Para dibujar el deslizador de la constante hacer clic sobre el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
   > 3) Introducir el comando `b:=3` en la Barra de Entrada.
   > 4) Para dibujar el deslizador de la constante hacer clic sobre el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

   (b) La recta $f(x) = a + bx$. Utilizar los deslizadores de las constantes para ver cómo cambia la recta.

Introducir el comando `f(x):=a+b*x` en la Barra de Entrada.

(c) La ecuación $ax^2 + by^2 = 8$. Utilizar los deslizadores de las constantes para ver cómo cambia la cónica.

Introducir el comando `a*x^2+b*y^2=8` en la Barra de Entrada.

3. Definir las siguientes funciones y dibujarlas.

(a) $f(x) := x^2$.

Introducir el comando `f(x):=x^2` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

(b) $g(x) := \log(x)$.

Introducir el comando `g(x):=log(x)` en la Barra de Entrada.

(c) $h(x) := \operatorname{sen}(x)$.

Introducir el comando `g(x):=sen(x)` en la Barra de Entrada.

(d) $g \circ f(x)$.

Introducir el comando `g(f(x))` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión.

(e) $h \circ g \circ f(x)$.

Introducir el comando `h(g(f(x)))` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión.

(f) $f \circ g \circ h(x)$.

Introducir el comando `f(g(h(x)))` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión.

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

y el vector $v = (x, y, z)$, se pide:

(a) Definir las matrices A y B, y el vector v.

1) Introducir el comando `A:={{a_11,a_12},{a_21,a_22},{a_31,a_32}}` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Introducir el comando `B:={{1,2,3},{4,5,6}}` en la Barra de Entrada.
3) Introducir el comando `v:=(x,y,z)` en la Barra de Entrada.

(b) Calcular $A \cdot B$.

> Introducir el comando `A*B` en la Barra de Entrada.

(c) Calcular $B \cdot A$.

> Introducir el comando `B*A` en la Barra de Entrada.

(d) Calcular $v \cdot A$.

> Introducir el comando `v*A` en la Barra de Entrada.

(e) Calcular $B \cdot v$.

> Introducir el comando `B*v` en la Barra de Entrada.

(f) Sustituir $x = 1$, $y = 1$ y $z = 0$ en el vector anterior y dibujarlo.

> Introducir el comando `Sustituye($,{x=1,y=1,z=0})` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión.

(g) Calcular el módulo del vector anterior.

> Introducir el comando `|$|` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión.

(h) Cambiar la sustitución anterior por $x = 0$, $y = 0$ y $z = 1$ y observar cómo cambia el módulo del vector resultante.

> Editar la línea de la sustitución anterior y cambiarla por `Sustituye($,{x=0,y=0,z=1})` en la Barra de Entrada.

5. Encontrar los puntos donde se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$ y dibujarlos.

   (a) Introducir el comando `f(x):=x^2` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

   (b) Introducir el comando `g(x):=(x+1)/2` en la Barra de Entrada.

   (c) Para resolver la ecuación, introducir el comando `Resuelve(f=g)` en la Barra de Entrada.

   (d) Para dibujar los puntos de intersección, introducir el comando `Interseca(f,g)` en la Barra de Entrada y hacer clic sobre el círculo que aparece a la izquierda de la expresión.

6. Dibujar la función paramétrica

$$g(t) = \begin{cases} \cos(t) \\ 2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

> Introducir el comando `g(t):=(cos(t), 2sen(t)cos(t))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

7. Representar gráficamente las siguientes superficies

$$f(x,y) = \frac{2\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad x^2 + y2 + (z-2)^2 = 1$$

y la curva paramétrica

$$h(t) = \begin{cases} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \\ t/2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1) Introducir el comando `f(x,y):=2sen(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica 3D.
2) Introducir el comando `x^2+y^2+(z-2)^2=1` en la Barra de Entrada.
3) Introducir el comando `h(t):=(sen(t),cos(t),t/2)` en la Barra de Entrada.

Práctica 2

Funciones Elementales

1 Ejercicios resueltos

1. Se considera la función

$$f(t) = \frac{t^4 + 19t^2 - 5}{t^4 + 9t^2 - 10}.$$

Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:

(a) Dominio.

1) Para representarla gráficamente, introducir la función en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Para determinar el dominio tan sólo hay que determinar los valores de x en los que existe la función.
3) Recordar que, tanto para éste como para el resto de los apartados del ejercicio, pretendemos llegar a conclusiones aproximadas que tan sólo sacamos del análisis de la gráfica.

(b) Imagen.

Fijarse en los valores de la variable y hasta los que llega la función.

(c) Asíntotas.

Son las líneas rectas, ya sea horizontales, verticales u oblicuas, hacia las que tiende la función.

(d) Raíces.

Son los valores de la variable x, si los hay, en los que la función vale 0.

(e) Signo.

Hay que determinar, aproximadamente, por un lado los intervalos de variable x en los que la función es positiva, y por el otro aquellos en los que es negativa.

(f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

De nuevo, por un lado hay que determinar los intervalos de variable x en los que a medida que crece x también lo hace y, que serían los intervalos de crecimiento, y también aquellos otros en los que a medida que crece x decrece y, que serían los intervalos de decremimiento.

(g) Intervalos de concavidad y convexidad.

> Para los intervalos de concavidad y convexidad, nos fijamos en el segmento de línea recta que une dos puntos cualquiera del intervalo. Si dicho segmento queda por encima de la gráfica, entonces la función es cóncava en el intervalo, mientras que si queda por debajo, entonces es convexa en el mismo.

(h) Extremos relativos.

> Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que se encuentran los máximos y mínimos relativos de la función.

(i) Puntos de inflexión.

> Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que la función cambia de curvatura, de cóncava a convexa o a la inversa.

2. Representar en una misma gráfica las funciones $2^x, e^x, 0.7^x, 0.5^x$. A la vista de las gráficas obtenidas, ¿para qué valores de la base será la función creciente? ¿Y para qué valores será decreciente?

> 1) Introducir la función `2^x` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
> 2) Introducir la función `e^x` en la Barra de Entrada.
> 3) Introducir la función `0.7^x` en la Barra de Entrada.
> 4) Introducir la función `0.5^x` en la Barra de Entrada.
> 5) La función exponencial a^x será creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $0 < a < 1$.

3. Representar en una misma gráfica las funciones siguientes, indicando su período y amplitud.

(a) $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x + 2$, $\operatorname{sen}(x + 2)$.

(b) $\operatorname{sen} 2x$, $2 \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

> 1) Introducir la función `sen(x)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
> 2) Introducir la función `sen(x)+2` en la Barra de Entrada.
> 3) Introducir la función `sen(x+2)` en la Barra de Entrada.
> 4) Introducir la función `sen(2x)` en la Barra de Entrada.
> 5) Introducir la función `2sen(x)` en la Barra de Entrada.
> 6) Introducir la función `sen(x/2)` en la Barra de Entrada.

4. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

> Introducir la función `Si(x<=0, -2x, x^2)` en la Barra de Entrada.

2 Ejercicios propuestos

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones a partir de sus representaciones gráficas:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}$

(b) $g(x) = \sqrt[2]{x^4-1}$.

(c) $h(x) = \cos\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

(d) $l(x) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{1+x}$.

2. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3+x+2}{5x^3-9x^2-4x+4}.$$

Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:

(a) Dominio.
(b) Imagen.
(c) Asíntotas.
(d) Raíces.
(e) Signo.
(f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(g) Intervalos de concavidad y convexidad.
(h) Extremos relativos.
(i) Puntos de inflexión.

3. Representar en una misma gráfica las funciones $\log_{10} x$, $\log_2 x$, $\log x$, $\log_{0.5} x$.

(a) A la vista de las gráficas obtenidas, indicar cuáles de las funciones anteriores son crecientes y cuáles son decrecientes.
(b) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será creciente la función $\log_a x$.
(c) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será decreciente la función $\log_a x$.

4. Completar las siguientes frases con la palabra igual, o el número de veces que sea mayor o menor en cada caso:

(a) La función $\cos 2x$ tiene un período............ que la función $\cos x$.
(b) La función $\cos 2x$ tiene una amplitud............ que la función $\cos x$.
(c) La función $\cos\dfrac{x}{2}$ tiene un período............ que la función $\cos 3x$.
(d) La función $\cos\dfrac{x}{2}$ tiene una amplitud............ que la función $\cos 3x$.
(e) La función $3\cos 2x$ tiene un período............ que la función $\cos\dfrac{x}{2}$.
(f) La función $3\cos 2x$ tiene una amplitud............ que la función $\cos\dfrac{x}{2}$.

5. Hallar a partir de la representación gráfica, las soluciones de $e^{-1/x} = \dfrac{1}{x}$.

6. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Práctica 3

Límites y Continuidad

1 Ejercicios resueltos

1. Dada la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2},$$

se pide:

(a) Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites:

i. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

ii. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

iii. $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

iv. $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

v. $\lim_{x\to 2} f(x)$

vi. $\lim_{x\to 0} f(x)$

1) Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=(1+2/x)^(x/2)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Para predecir cuáles pueden ser los valores de los límites pedidos, crear un deslizador introduciendo la expresión `a:=0` en la Barra de Entrada.
3) Introducir el punto `(a,f(a))` para dibujar el punto sobre la gráfica de la función.
4) Desplazar el deslizador y observar el valor de la coordenada y en el punto A cuando x tiende a cada uno de los valores de los límites.

(b) Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?.

1) Para calcular $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f(x), -2)` en la Barra de Entrada.
2) Para calcular $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f(x), -2)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), -inf)` en la Barra de Entrada.
4) Para calcular $\lim_{x\to \infty} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), inf)` en la Barra de Entrada.
5) Para calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), 2)` en la Barra de Entrada.
6) Para calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), 0)` en la Barra de Entrada.

2. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{2x-6} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

(a) Dibujar la gráfica de g y determinar gráficamente si existen asíntotas.

1) Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=Si(x<=0, x/(x-2), x^2/(2x-6))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Para ver si existen asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, hay que ver si existen rectas verticales, horizontales su oblicuas a las que la gráfica de g se aproxima cada vez más (aunque nunca lleguen a tocarse).

(b) Calcular las asíntotas verticales de g y dibujarlas.

1) La función no está definida en los valores que anulen los denominadores en ambos trozos. Para ver las raíces del denominador del primer trozo introducir el comando `Raíz(x-2)` en la Barra de Entrada. La única raíz es $x = 2$ pero queda fuera de la región correspondiente a este trozo.
2) Para ver las raíces del denominador del segundo trozo introducir el comando `Raíz(2x-6)` en la Barra de Entrada. La única raíz es $x = 3$, así que la función f no está definida en este punto y es un posible punto de asíntota vertical.
3) Para ver si existe asíntota vertical en ese punto hay que calcular los límites laterales $\lim_{x\to 3^-} g(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x)$.
4) Para calcular el límite por la izquierda introducir el comando `LímiteIzquierda(g, 3)` en la Barra de Entrada.
5) Para calcular el límite por la derecha introducir el comando `LímiteDerecha(g, 3)` en la Barra de Entrada.
6) Como $\lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$, existe una asíntota vertical en $x = 3$. Para dibujarla introducir la expresión `x=3` en la Barra de Entrada.

(c) Calcular las asíntotas horizontales de g y dibujarlas.

1) Para ver si existen asíntotas horizontales hay que calcular los límites $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$.
2) Para calcular el límite en $-\infty$ introducir el comando `Límite(g, -inf)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular el límite en ∞ introducir el comando `Límite(g, inf)` en la Barra de Entrada.
4) Como $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 1$, existe una asíntota horizontal $y = 1$. Para dibujarla introducir la expresión `y=1` en la Barra de Entrada.
5) Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, no hay asíntota horizontal por la derecha.

(d) Calcular las asíntotas oblicuas de g.

1) Por la izquierda no hay asíntota oblicua puesto que hay una asíntota horizontal. Para ver si existen asíntota oblicua por la derecha hay que calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x}$. Para ello introducir el comando `Límite(g/x, inf)` en la Barra de Entrada.
2) Como $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0.5$, existe asíntota oblicua por la derecha y su pendiente es 0.5.
3) Para determinar el término independiente hay que calcular el límite $\lim_{x\to\infty} g(x) - 0.5x$. Para ello introducir el comando `Límite(g(x)-0.5x, inf)` en la Barra de Entrada.
4) Como $\lim_{x\to\infty} g(x) - 0.5x = 1.5$ entonces la ecuación de la asíntota oblicua es $y = 0.5x + 1.5$. Para dibujarla introducir la expresión `y=0.5x+1.5` en la Barra de Entrada.

3. Reprentar gráficamente las siguientes funciones y clasificar sus discontinuidades en los puntos que se indica.

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = 0$.

1) Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=sen(x)/x` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 0)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 0)` en la Barra de Entrada.
4) Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, f tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{2^{1/x}}$ en $x = 0$.

1) Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=1/2^(1/x)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(g, 0)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(g, 0)` en la Barra de Entrada.
4) Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \infty$, g tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$.

(c) $h(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$ en $x = 1$.

1) Para representarla gráficamente, introducir la función `h(x):=1/(1+e^(1/(1-x)))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^-} h(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(h, 1)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^+} h(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(h, 1)` en la Barra de Entrada.
4) Como $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 0$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, h tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$.

4. Representar gráficamente y clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1) Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=Si(x<0, (x+1)/(x^2-1), 1/e^(1/(x^2-1)))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) En primer lugar hay que encontrar los puntos que quedan fuera del dominio de cada uno de los tramos. Para ello, hay que analizar dónde se anulan los denominadores presentes en las definiciones de cada trozo. Para ver donde se anula x^2-1 introducir el comando `Raíz(x^2-1)` en la Barra de Entrada.
3) Como la ecuación anterior tiene soluciones $x = -1$ y $x = 1$, en estos puntos la función no está definida y es, por tanto, discontinua. Además de estos dos puntos hay que estudiar la posible discontinuidad en $x = 0$ que es donde cambia la definición de la función.
4) Para calcular el límite $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, -1)` en la Barra de Entrada.

5) Para calcular el límite $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, -1)` en la Barra de Entrada.
6) Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = -0.5$, f tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.
7) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 0)` en la Barra de Entrada.
8) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 0)` en la Barra de Entrada.
9) Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e$, f tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.
10) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 1)` en la Barra de Entrada.
11) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 1)` en la Barra de Entrada.
12) Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, f tiene una discontinuidad esencial en $x = 1$.

2 Ejercicios propuestos

1. Calcular los siguientes límites si existen:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^{2x}}$.

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\log(x^2 - 1)}{x + 2}$.

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1/x)}{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})}$.

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \quad n \in \mathbb{N}$.

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} \quad n, m \in \mathbb{Z}$.

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

   (k) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$.

   (l) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x^2}$.

   (m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

   (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen} x}$.

   (o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6}{4 + e^{-1/x}}$.

   (p) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1}\right)$.

   (q) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \sec x - \operatorname{tg} x$.

2. Dada la función:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   Calcular todas sus asíntotas.

3. Las siguientes funciones no están definidas en $x = 0$. Determinar, cuando sea posible, su valor en dicho punto de modo que sean continuas.

   (a) $f(x) = \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$.

   (b) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

   (c) $j(x) = \dfrac{\log(1 + x) - \log(1 - x)}{x}$.

   (d) $k(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Práctica 4

Derivadas de funciones de una variable

1 Ejercicios resueltos

1. Representar gráficamente y estudiar mediante la definición de derivada la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

   (a) $f(x) = |x-1|$ en $x = 1$.

   1) Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=|x-1|` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
   2) Para calcular la derivada de f por la izquierda en $x = 1$ introducir el comando `LímiteIzquierda((f(1+h)-f(1))/h, 0)` en la Barra de Entrada.
   3) Para calcular la derivada de f por la derecha en $x = 1$ introducir el comando `LímiteDerecha((f(1+h)-f(1))/h, 0)` en la Barra de Entrada.
   4) Como $lim_{x\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -1$ es distinto de $lim_{x\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$, la función no es derivable en $x = 1$.

   (b) $g(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ en $x = 0$.

   1) Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=Si(x!=0, sen(1/x), 0)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
   2) Para calcular la derivada de g por la izquierda en $x = 0$ introducir el comando `LímiteIzquierda((g(h)-g(0))/h, 0)` en la Barra de Entrada.
   3) Para calcular la derivada de g por la derecha en $x = 0$ introducir el comando `LímiteDerecha((g(h)-g(0))/h, 0)` en la Barra de Entrada.
   4) Como ninguno de los dos límites anteriores existe g no es derivable en $x = 0$.

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones hasta el orden 4 y conjeturar cuál sería el valor de la derivada de orden n.

   (a) $f(x) = a^x \log(a)$.

   1) Introducir la función `f(x):=a^xlog(a)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
   2) Para la primera derivada introducir la expresión `f'(x)` en la Barra de Entrada.
   3) Para la segunda derivada introducir la expresión `f''(x)` en la Barra de Entrada.
   4) Para la tercera derivada introducir la expresión `f'''(x)` en la Barra de Entrada.
   5) Para la cuarta derivada introducir la expresión `f''''(x)` en la Barra de Entrada.
   6) La derivada de orden n será por tanto $f^n(x) = a^x \log(a)^{n+1}$.

(b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$.

1) Introducir la función `g(x):=(sen(x)+cos(x))/2` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.de la Vista CAS.
2) Para la primera dede la Vista CAS.g'(x) en la Barra de Entrada.
3) Para la segunda dede la Vista CAS.g''(x) en la Barra de Entrada.
4) Para la tercera dede la Vista CAS.g'''(x) en la Barra de Entrada.
5) Para la cuarta derivada introducir la expresión `g''''(x)` en la Barra de Entrada.
6) A partir de aquí las derivadas se repiten, por lo que la derivada de orden n será

$$f^n(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2} & \text{si } x = 4k \\ \frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{2} & \text{si } x = 4k+1 \\ \frac{-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{2} & \text{si } x = 4k+2 \\ \frac{-\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{2} & \text{si } x = 4k+3 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

3. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \log(\sqrt{x+1})$ en $x = 1$. Dibujar la gráfica de la función y de la recta tangente.

1) Introducir la función `f(x):=log(sqrt(x+1))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para obtener la ecuación de la recta tangente a f en $x = 1$ introducir la ecuación $y = f(1) + f'(1)(x-1)$ en la Barra de Entrada.
3) Para dibujar la recta tangente hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
4) Para obtener la ecuación de la recta normal a f en $x = 1$ introducir la ecuación $y = f(1) - 1/f'(1)(x-1)$ en la Barra de Entrada.
5) Para dibujar la recta normal hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

4. Dada la función

$$g(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + 1}$$

(a) Representar la gráfica de g.

Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=(2x^3-3x)/(x^2+1)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

(b) Calcular la función derivada $g'(x)$ y representar su gráfica.

1) Para obtener la derivada de g introducir la expresión `g'(x):=Derivada(g)` en la Barra de Entrada.
2) Para dibujar la gráfica de g' hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(c) Calcular las raíces de $g'(x)$.

1) Para calcular las raíces de g' introducir la expresión `Raíz(g'(x))` en la Barra de Entrada y hacer clic sobre el botón de evaluación aproximada.
2) g' tiene dos raíces en $x = -0.56$ y $x = 0.56$ aproximadamente.

(d) A la vista de las raíces y de la gráfica de la función derivada, determinar los extremos relativos de la función y los intervalos de crecimiento.

1) $g'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -0.56)$, luego g es creciente en ese intervalo.
2) $g'(x) < 0$ para $x \in (-0.56, 0.56)$, luego g es decreciente en ese intervalo.
3) $g'(x) > 0$ para $x \in (-0.56, \infty)$, luego g es creciente en ese intervalo.
4) g tiene un máximo en $x = -0.56$ ya que g' se anula en este punto y a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente.
5) g tiene un mínimo en $x = 0.56$ ya que g' se anula en este punto y a la izquierda la función es decreciente y a la derecha creciente.

(e) Calcular la segunda derivada $g''(x)$ y representar su gráfica.

1) Para obtener la segunda derivada de g introducir la expresión `g''(x):=Derivada(g, 2)` en la Barra de Entrada.
2) Para dibujar la gráfica de g'' hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(f) Calcular las raíces de $g''(x)$.

1) Para calcular las raíces de g'' introducir la expresión `Raíz(g''(x))` en la Barra de Entrada y hacer clic sobre el botón de evaluación aproximada.
2) g'' tiene tres raíces en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

(g) A la vista de las raíces y de la gráfica de la segunda derivada, determinar los intervalos de concavidad de la función y los puntos de inflexión.

1) $g''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, luego g es cóncava en ese intervalo.
2) $g''(x) < 0$ para $x \in (-\sqrt{3}, 0)$, luego g es convexa en ese intervalo.
3) $g''(x) > 0$ para $x \in (0, \sqrt{3})$, luego g es cóncava en ese intervalo.
4) $g''(x) < 0$ para $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, luego g es convexa en ese intervalo.
5) g tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ pues g'' se anula en estos puntos y la concavidad a la izquierda y derecha de ellos cambia.

2 Ejercicios propuestos

1. Probar que no es derivable en $x = 0$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto x_0 indicado.

   (a) $y = x^{\operatorname{sen} x}$, $\quad x_0 = \pi/2$.

   (b) $y = (3 - x^2)^4 \sqrt[3]{5x - 4}$, $\quad x_0 = 1$.

   (c) $y = \log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \operatorname{arctg} x$, $\quad x_0 = 0$.

3. Estudiar el crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$.
4. Se ha diseñado un envoltorio cilíndrico para cápsulas. Si el contenido de las cápsulas debe ser de 0.15 ml, hallar las dimensiones del cilindro para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.
5. La cantidad de trigo en una cosecha C depende de la cantidad de nitrógeno en el suelo n según la ecuación

$$C(n) = \frac{n}{1+n^2}, \quad n \geq 0$$

¿Para qué cantidad de nitrógeno se obtendrá la mayor cosecha de trigo?

Práctica 5

Integrales

1 Ejercicios resueltos

1. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\int x^2 \log x \, dx$

   > Introducir el comando `Integral(x^2log(x))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

   (b) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x} \, dx$

   > Introducir el comando `Integral(log(log(x))/x)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

   (c) $\displaystyle\int \frac{5x^2+4x+1}{x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x} \, dx$

   > Introducir el comando `Integral((5x^2+4x+1)/(x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

   (d) $\displaystyle\int \frac{6x+5}{(x^2+x+1)^2} \, dx$

   > Introducir el comando `Integral((6x+5)/((x^2+x+1)^2))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

2. Calcular las siguientes integrales definidas y representarlas gráficamente:

   (a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^3}{x^2+x+1} \, dx$

   > 1) Introducir la función `f(x):=x^3/(x^2+x+1)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
   > 2) Introducir el comando `Integral(f(x), -1/2, 0)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
   > 3) Para representar gráficamente la región que abarca la integral definida, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

   (b) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} \, dx$

1) Introducir la función `g(x):=sqrt(16-x^2)/x` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Introducir el comando `Integral(g(x), 2, 4)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
3) Para representar gráficamente la región que abarca la integral definida, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos(2x)}$

1) Introducir la función `h(x):=1/(3+cos(2x))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Introducir el comando `Integral(h(x), 0, pi/2)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
3) Para representar gráficamente la región que abarca la integral definida, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

3. Calcular la siguiente integral impropia $\int_2^\infty x^2 e^{-x}\,dx$ y representarla gráficamente.

1) Introducir la función `f(x):=x^2 exp(-x)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Introducir el comando `Integral(f(x), 2, inf)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
3) Para representar gráficamente la región que abarca la integral impropia, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

4. Representar la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, y calcular el área limitada por dicha parábola, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.

1) Introducir la función `f(x):=x^2-7x+6` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Como f toma valores positivos y negativos en el intervalo $(2, 7)$, para obtener el área comprendida entre la f y el eje de abscisas en este intervalo hay que calcular la integral del valor absoluto de f. Para ello introducir el comando `Integral(abs(f(x)), 2, 7)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
3) Para representar gráficamente la región que abarca la integral impropia, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

5. Calcular y dibujar el área comprendida entres las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

1) Introducir la función `f(x):=sen(x)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Introducir la función `g(x):=cos(x)` en la Barra de Entrada.
3) Introducir el comando `Integral(abs(f(x)-g(x)), 0, 2pi)` en la Barra de Entrada y hacer clic en el botón de Valor numérico.
4) Para representar gráficamente el área, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
5) Otra alternativa es utilizar el comando `Integral(Máximo(f(x),g(x)), Mínimo(f(x),g(x)), 0, 2pi)`.

6. Representar gráficamente la región del primer cuadrante limitada por la función $f(x) = (x + \operatorname{sen} x)^2$, la recta $x = 2\pi$ y el eje OX, y hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OX de la región anterior.

1) Introducir la función `f(x):=sen(x)+2` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
2) Para calcular el área plana introducir el comando `Integral(f(x), 0, 2pi)` en la Barra de Entrada y hacer clic en el botón de Valor numérico.
3) Para representar gráficamente el área, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
4) Para calcular el volumen de revolución introducir el comando `Integral(pif(x)^2, x, 0, 2pi)`.

2 Ejercicios propuestos

1. Calcular las siguientes integrales:
   (a) $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 16}{x(x^2+4)^2}\, dx$
   (b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\, dx$
2. Hallar el área encerrada la parábola $y = 9 - x^2$ y la recta $y = -x$.
3. Hallar el área encerrada por la curva $y = e^{-|x|}$ y su asíntota.
4. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OX de la región plana limitada por la parábola $y = 2x^2$, las rectas $x = 0$, $x = 5$ y el eje OX, representando previamente dicha región plana.
5. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OY del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$.

Práctica 6

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1 Ejercicios resueltos

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables y dibujar sus curvas integrales para distintos valores de la constante de integración.

   (a) $xdy = ydx$.

   1) Introducir el comando `ResuelveEDO(y'=y/x)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
   2) Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
   3) Para hacer variar la constante de integración y obtener diferentes soluciones particulares abrir la Vista de Álgebra y mover el deslizador correspondiente a la constante.

   (b) $-2x(1+e^y) + e^y(1+x^2)y' = 0$.

   1) Introducir el comando `ResuelveEDO(-2x(1+e^y)+e^y(1+x^2)y'=0)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
   2) Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
   3) Para hacer variar la constante de integración y obtener diferentes soluciones particulares abrir la Vista de Álgebra y mover el deslizador correspondiente a la constante.

   (c) $y - xy' = 1 + x^2y'$.

   1) Introducir el comando `ResuelveEDO(y-x*y'=1+x^2*y')` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
   2) Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
   3) Para hacer variar la constante de integración y obtener diferentes soluciones particulares abrir la Vista de Álgebra y mover el deslizador correspondiente a la constante.

2. Resolver y representar gráficamente las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

   (a) $xdy = ydx$, con la condición inicial $y(1) = 2$.

   1) Introducir el comando `ResuelveEDO(y'=y/x, (1,2))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

2) Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(b) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$, con la condición inicial $y(0) = 1$.

1) Introducir el comando `ResuelveEDO(x*sqrt(1-y^2)+y*sqrt(1-x^2)y'=0, (0,1))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(c) $s' + s\cos t = \operatorname{sen} t \cos t$ con la condición inicial $s(0) = 1$.

1) Introducir el comando `ResuelveEDO(s'+s*cos(t)=sen(t)cos(t), s, t, (0,1))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(d) $(1+e^x)yy' = e^y$, con la condición inicial $y(0) = 0$.

1) Introducir el comando `ResuelveEDO((1+e^x)yy'=e^y, (0,0))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) En este caso, Geogegra no es capaz de encontrar la solución particular de esta ecuación, pero podemos intentar resolverla separando las variables e integrando.
3) Tras separar las variables se tiene la igualdad $\frac{y}{e^y}dy = \frac{1}{1+e^x}dx$, de manera que sólo hay que integrar a cada lado. Para ello introducir el comando `Integral(y/e^y) = Integral(1/(1+e^x))` en la Barra de Entrada.
4) En la solución aparecen dos constantes c_1 y c_2, pero realmente se puede eliminar una pasándola al otro lado. Para ello introducir el comando `Sustituye($, c_1=c, c_2=0)` en la Barra de Entrada.
5) Para imponer la condición inicial introducir el comando `Sustituye($, x=0, y=0)` en la Barra de Entrada.
6) Para obtener el valor de la constante, introducir el comando `Resuelve($)` en la Barra de Entrada.
7) Para sustituir el valor de la constante en la solución particular introducir el comando `Sustituye($n, $)` en la Barra de Entrada, donde `n` es el número de la fila donde aparece la solución particular de la ecuación.
8) Finalmente, para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

3. El azúcar se disuelve en el agua con una velocidad proporcional a la cantidad que queda por disolver. Si inicialmente había 13.6 kg de azúcar y al cabo de 4 horas quedan sin disolver 4.5 kg, ¿cuánto tardará en disolverse el 95% del azúcar contando desde el instante inicial?

1) La ecuación diferencial que explica la disolución del azúcar es $a' = ka$, donde a es la cantidad de azúcar que queda por disolver, t es el tiempo y k es la constante de disolución del azúcar.
2) Para resolver la ecuación diferencial introducir el comando `ResuelveEDO(a'=k*a, a, t, (0, 13.6)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
3) Para imponer la segunda condición inicial introducir el comando `Sustituye($, t=4, a=4.5)` en la Barra de Entrada.
4) Para obtener el valor de la constante de disolución introducir el comando `Resuelve($)` en la Barra de Entrada.

5) Para sustituir el valor de la constante de disolución en la solución particular introducir el comando `Sustituye($n,$)` en la Barra de Entrada, donde n es el número de la fila que contiene la solución particular de la ecuación diferencial.
6) El azúcar que quedará sin disolver tras disolverse el 95% de la cantidad inicial es el 5% de esta cantidad. Para sustituir esta cantidad de azúcar en la solución de la ecuación diferencial introducir el comando `Sustituye($,13.6*0.05)` en la Barra de Entrada.
7) Finalmente, para obtener la predicción del tiempo introducir el comando `Resuelve($)` en la Barra de Entrada.

2 Ejercicios propuestos

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
   (a) $(1+y^2)+xyy'=0$.
   (b) $xy'-4y+2x^2+4=0$.
   (c) $(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$.
   (d) $(x^3-y^3)dx+2x^2ydy=0$.
   (e) $(x^2+y^2+x)+xydy=0$.
2. Hallar las curvas tales que en cada punto (x,y) la pendiente de la recta tangente sea igual al cubo de la abscisa en dicho punto. ¿Cuál de estas curvas pasa por el origen?
3. Al introducir glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio de concentración global de glucosa con respecto al tiempo $c(t)$ se explica mediante la siguiente ecuación diferencial
$$\frac{dc}{dt}=\frac{G}{100V}-kc,$$
donde G es la velocidad constante a la que se suministra la glucosa, V es el volumen total de la sangre en el cuerpo y k es una constante positiva que depende del paciente. Se pide calcular $c(t)$.
4. En una reacción química, un cierto compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional a la cantidad no transformada. Si había inicialmente 100 gr de sustancia original y 60 gr tras una hora, ¿cuanto tiempo pasará hasta que se haya transformado el 80% del compuesto?

Práctica 7

Derivadas de funciones de varias variables

1 Ejercicios resueltos

1. Calcular la recta tangente y el plano normal a la trayectoria

$$f(t) = \begin{cases} x = \sin(t), \\ y = \cos(t), \\ z = \sqrt(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

en el instante $t = \pi$ y dibujarlos.

> 1) Introducir el comando `f(t):=(sen(t),cos(t),sqrt(t))` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráficas 3D.
> 2) Para dibujar el punto de tangencia en la trayectoria, introducir el comando `f(pi)` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de esta expresión.
> 3) Para calcular y dibujar la recta tangente a la trayectoria, introducir el comando `g(t):=f(pi)+f'(pi)t` en la Barra de Entrada.
> 4) Para calcular el plano normal a la trayectoria, introducir el comando `((x,y,z)-f(pi))f'(pi)=0` en la Barra de Entrada.
> 5) Para dibujar el plano normal a la trayectoria, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

2. Dada la función $f(x, y) = y^2 - x^2$, se pide:

(a) Dibujar su gráfica y el punto $(1, 2, f(1, 2))$.

> 1) Introducir el la función `f(x,y):=y^2-x^2` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráficas 3D.
> 2) Introducir el punto `(1,2,f(1,2))` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de esta expresión.

(b) Dibujar el plano $x = 1$. ¿Qué figura forma la intersección de este plano con la gráfica de f?

> Introducir el comando `x=1` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de esta expresión.

(c) Calcular la derivada de $f(1, y)$ en $y = 2$.

1) Introducir la expresión `Derivada(f(1,y))` en la Barra de Entrada.
2) Introducir la expresión `Sustituye($, y=2)` en la Barra de Entrada.

(d) Dibujar el plano $y = 2$. ¿Qué figura forma la intersección de este plano con la gráfica de f?

Introducir el comando `y=2` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de esta expresión.

(e) Calcular la derivada de $f(x, 2)$ en $x = 1$.

1) Introducir la expresión `Derivada(f(x,2))` en la Barra de Entrada.
2) Introducir la expresión `Sustituye($, x=1)` en la Barra de Entrada.

(f) Calcular la derivadas parciales de f en el punto $(1, 2)$. ¿Qué conclusiones sacas?

1) Para calcular la derivada parcial con respecto a x, introducir el comando `f'_x(x,y):= Derivada(f, x)` en la Barra de Entrada.
2) Para calcular el valor de la derivada parcial con respecto a x en el punto $(1, 2)$, introducir la función `f'_x(1,2)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular la derivada parcial con respecto a y, introducir el comando `f'_y(x,y):= Derivada(f, y)` en la Barra de Entrada.
4) Para calcular el valor de la derivada parcial con respecto a y en el punto $(1, 2)$, introducir la función `f'_y(1,2)` en la Barra de Entrada.

3. Calcular las siguientes derivadas parciales:

(a) $\dfrac{\partial}{\partial V}\dfrac{nRT}{V}$.

Introducir el comando `Derivada(nRT/V, V)` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.

(b) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{x+y} \operatorname{sen}(x/y)$.

Introducir el comando `Derivada(Derivada(e^(x+y)sen(x/y), y), x)` en la Barra de Entrada.

4. Dada la función $f(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, se pide calcular en el punto $(2, -3)$:

(a) Vector gradiente.

1) Introducir la función `f(x,y):=20-4x^2-y^2` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para calcular la derivada parcial con respecto a x, introducir el comando `f'_x(x,y):= Derivada(f, x)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular la derivada parcial con respecto a y, introducir el comando `f'_y(x,y):= Derivada(f, y)` en la Barra de Entrada.
4) Para calcular el vector gradiente, introducir el comando `f'(x,y):=(f'_x, f'_y)` en la Barra de Entrada.
5) Para calcular el vector gradiente en el punto $(2, -3)$, introducir la función `f'(2,-3)`.

(b) Matriz hessiana.

1) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial x^2}$, introducir el comando `f''_{xx}(x,y):=Derivada(f'_x, x)` en la Barra de Entrada.
2) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial y \partial x}$, introducir el comando `f''_{xy}(x,y):=Derivada(f'_x, y)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial x \partial y}$, introducir el comando `f''_{yx}(x,y):=Derivada(f'_y, x)` en la Barra de Entrada.
4) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial y^2}$, introducir el comando `f''_{yy}(x,y):=Derivada(f'_y, y)` en la Barra de Entrada.
5) Para calcular la matriz Hessiana, introducir el comando `f''(x,y):={{f''_{xx}, f''_{yx}}, {f''_{xy}, f''_{yy}}}` en la Barra de Entrada.
6) Para calcular la matriz Hessiana en el punto $(2, -3)$, introducir la función `f''(2,-3)` en la Barra de Entrada.

(c) Hessiano.

Introducir la expresión `Determinante($)` en la Barra de Entrada.

5. Hallar la recta normal y el plano tangente a la superficie $S : x + 2y - \log z + 4 = 0$ en el punto $(0, -2, 1)$ y dibujarlos.

1) Introducir la función `f(x,y,z):=x+2y-log(z)+4` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para dibujar la gráfica de la función, introducir la ecuación `f(x,y,z)=0` en la Barra de Entrada y activar a Vista Gráficas 3D.
3) Para dibujar el punto, introducir el punto `(0,-2,1)` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de esta expresión.
4) Para calcular el gradiente, introducir la expresión `f'(x,y,z):=(Derivada(f,x), Derivada(f,y), Derivada(f,z))` en la Barra de Entrada.
5) Para dibujar la recta normal, introducir la expresión `n(t):=(0,-2,1)+f'(0,-2,1)t` en la Barra de Entrada.
6) Para dibujar el plano tangente, introducir la expresión `((x,y,z)-(0,-2,1))f'(0,-2,1)=0` en la Barra de Entrada y hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de esta expresión.

6. Calcular la derivada direccional de la función $h(x, y) = 3x^2 + y$ en el punto $(0, 0)$, en la dirección del vector $(1, 1)$.

1) Introducir la función `h(x,y):=3x^2+y` en la Barra de Entrada de la Vista CAS.
2) Para calcular la derivada parcial con respecto a x, introducir el comando `h'_x(x,y):= Derivada(h, x)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular la derivada parcial con respecto a y, introducir el comando `h'_y(x,y):= Derivada(h, y)` en la Barra de Entrada.
4) Para calcular el vector gradiente, introducir el comando `h'(x,y):= (h'_x, h'_y)` en la Barra de Entrada.
5) Para calcular la derivada direccional en el punto $(0, 0)$ en la dirección del vector $(1, 1)$, introducir el comando `h'(0,0)VectorUnitario((1,1))`.

7. Dada la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, se pide:

(a) Definirla y dibujar su gráfica. ¿Puedes identificar a simple vista sus extremos relativos?

Introducir la función `f(x,y):=x^3+y^3-3x*y` en la Barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráficas 3D.

(b) Calcular los puntos críticos que anulan el vector gradiente de f.

1) Para calcular la derivada parcial con respecto a x, introducir el comando `f'_x(x,y):= Derivada(f, x)` en la Barra de Entrada.
2) Para calcular la derivada parcial con respecto a y, introducir el comando `f'_y(x,y):= Derivada(f, y)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular el vector gradiente, introducir el comando `f'(x,y):= (f'_x, f'_y` en la Barra de Entrada.
4) Para obtener los puntos críticos, introducir el comando `Resuelve(f'(x,y)=(0,0))` en la Barra de Entrada.

(c) Determinar los extremos relativos y los puntos de silla de f.

1) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial x^2}$, introducir el comando `f''_{xx}(x,y):=Derivada(f'_x, x)` en la Barra de Entrada.
2) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial y \partial x}$, introducir el comando `f''_{xy}(x,y):=Derivada(f'_x, y)` en la Barra de Entrada.
3) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial x \partial y}$, introducir el comando `f''_{yx}(x,y):=Derivada(f'_y, x)` en la Barra de Entrada.
4) Para calcular la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial 2f}{\partial y^2}$, introducir el comando `f''_{yy}(x,y):=Derivada(f'_y, y)` en la Barra de Entrada.
5) Para calcular la matriz Hessiana, introducir el comando `f''(x,y):={{f''_{xx}, f''_{yx}}, {f''_{xy}, f''_{yy}}}` en la Barra de Entrada.
6) Para calcular el Hessiano, introducir el comando `H(x,y):=Determinante(f'')` en la Barra de Entrada.
7) Para calcular el Hessiano en el punto crítico $(0,0)$ introducir el comando `H(0,0)` en la Barra de Entrada. Como sale negativo hay un punto de silla en $(0,0)$.
8) Para calcular el Hessiano en el punto crítico $(1,1)$ introducir el comando `H(1,1)` en la Barra de Entrada. Como sale positivo hay un extremo relativo en $(1,1)$.
9) Introducir el comando `f''_{xx}(1,1)` en la Barra de Entrada. Como sale positivo se trata de un mínimo relativo en $(1,1)$.

2 Ejercicios propuestos

1. Una nave espacial está en problemas cerca del sol. Se encuentra en la posición $(1,1,1)$ y la temperatura de la nave cuando está en la posición (x,y,z) viene dada por

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2},$$

donde x,y,z se miden en metros. ¿En qué dirección debe moverse la nave para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible?

2. Calcular el vector gradiente, la matriz hessiana y el hessiano de la función

$$g(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

en el punto $(1, 1, 1)$ y en el punto $(0, 3, 4)$.

3. Obtener los puntos del elipsoide $S : x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $\Pi : x - y + 2z^2 = 0$.
4. Estudiar los extremos relativos de la función
$$f(x) = -\frac{y}{9 + x^2 + y^2}.$$
5. Calcular la derivada direccional del campo escalar $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xyz^3 - zx$ en el punto $(1, 2, 3)$ y en la dirección del vector $(1, -1, 0)$.