PRÁCTICAS DE MATEMÁTICAS CON DERIVE

Autores:
Santiago Angulo Díaz-Parreño (sangulo@ceu.es)
José Rojo Montijano (jrojo.eps@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

Curso 2012-2013

CEU
Universidad
San Pablo

Índice general

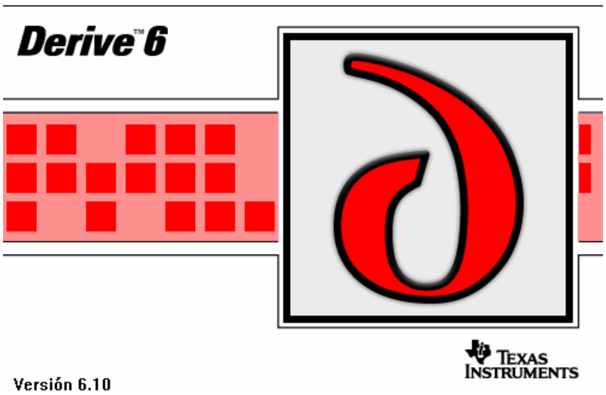
Práctica de Matemáticas con Derive 1

Introducción a Derive

1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas, ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Derive® * es uno de los programas de cálculo numérico y simbólico más utilizados. Aparte de sus capacidades el cálculo numérico, vectorial y matricial, también permite realizar representaciones gráficas, lo cual permite resolver multitud de problemas de álgebra, análisis, cálculo, geometría e incluso estadística. La ventaja de Derive frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, Mapple o MATLAB, radica en su sencillez y simplicidad de uso, lo cual lo hace idóneo para la enseñanza de las matemáticas.



El objetivo de esta práctica es introducir al alumno en la utilización de este programa, enseñándole a realizar las operaciones básicas más habituales.

2 Funciones básicas

Arranque

Como cualquier otra aplicación de Windows, para arrancar el programa hay que pulsar sobre la opción correspondiente del menú `Inicio->Programas`, o bien sobre el icono de escritorio

*Esta practica está basada en la versión 6.1 de Derive® para Windows en castellano.

Cuando el programa arranca, en la pantalla aparece la ventana principal del programa que se conoce como *ventana de Álgebra* (figura 1.1).

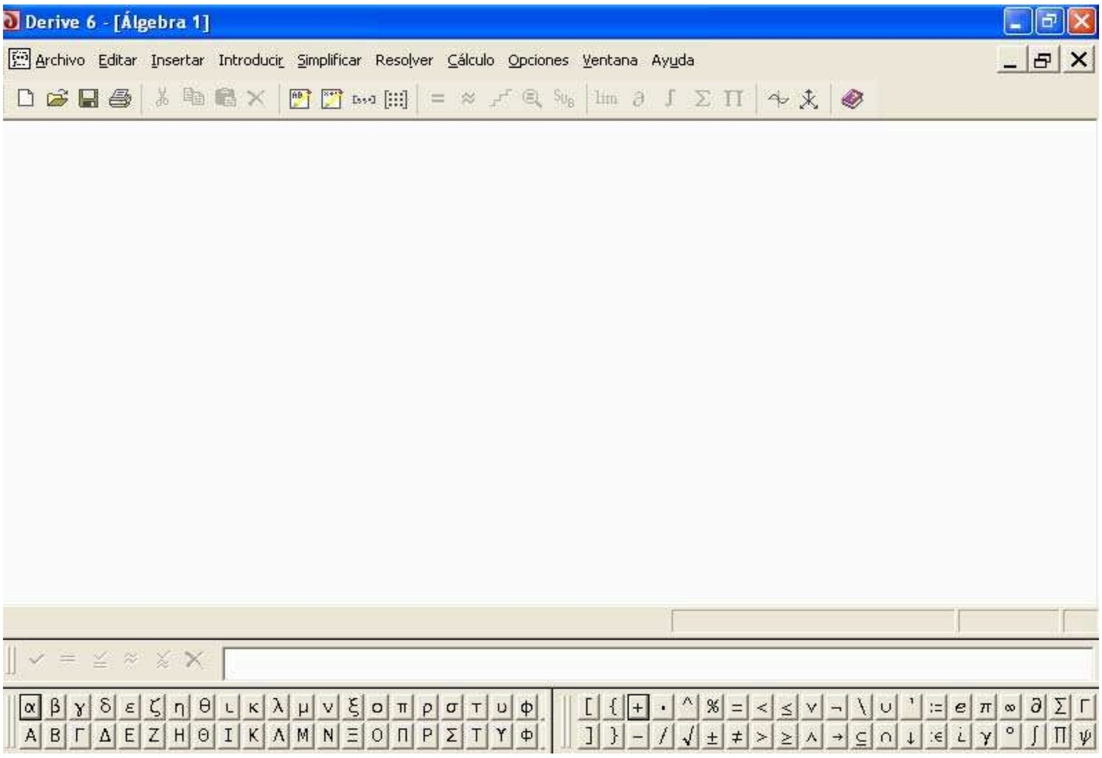


Figura 1.1 – Ventana principal de Derive.

Como cualquier otra ventana de aplicación de Windows, la ventana principal tiene una barra de título, una barra de menús con las distintas funciones que puede hacer Derive (cálculo de límites, derivadas, integrales, representaciones gráficas, etc.), una barra de botones que son atajos a las opciones más habituales de los menús, y una barra de estado en la parte inferior que nos indica lo que hace el programa en cada instante. Además, por defecto, en la parte inferior de la ventana aparece el editor de expresiones, que pasamos a describir a continuación.

Edición de expresiones

Antes de realizar cualquier cálculo sobre una expresión matemática, lo primero es escribir dicha expresión y aprender a manipularla.

Introducción de expresiones

Para introducir una expresión se utiliza el editor de expresiones (figura 1.2), el cual aparece directamente en la parte baja de la ventana de Álgebra.

Figura 1.2 – Editor de expresiones.

El editor de expresiones está compuesto por una línea de edición, que se utiliza para dar forma a las expresiones matemáticas (también permite introducir comentarios de texto) que vamos a utilizar con el programa, una barra con las letras del alfabeto griego, a menudo presentes en las expresiones matemáticas, y una barra de símbolos matemáticos con los operadores más habituales (suma, resta, producto, división, paréntesis, raíz cuadrada) y las constantes que más se utilizan (número e, número π...).

En el editor de expresiones podemos escribir números, letras (que serán variables), símbolos y operadores aritméticos y relacionales. Los operadores más habituales en la construcción de expresiones son los que aparecen en la siguiente tabla:

Símbolo	Operador
`+`	suma
`-`	resta
`*`	producto
`/`	cociente
`^`	potenciación

A la hora de escribir una expresión hay que tener en cuenta que Derive tiene establecido un orden de prioridad en la evaluación de los operadores. En primer lugar evalúa las funciones y constantes predefinidas, después evalúa las potencias, después productos y cocientes (ambos con igual prioridad y de izquierda a derecha), y por último sumas y restas (ambas con igual prioridad y de izquierda a derecha). Para forzar la evaluación de una subexpresión, saltándose el orden de evaluación de Derive, se utilizan paréntesis. Así, como se ve en el siguiente ejemplo, dependiendo de cómo se introduzca una expresión pueden obtenerse resultados diferentes.

Expresión introducida	Expresión resultante
`4x-1/x-5`	$4x-\frac{1}{x}-5$
`(4x-1)/x-5`	$\frac{4x-1}{x}-5$
`4x-1/(x-5)`	$4x-\frac{1}{x-5}$
`(4x-1)/(x-5)`	$\frac{4x-1}{x-5}$

Cada vez que introducimos una expresión, esta aparece en la ventana de Algebra etiquetada con un número precedido del símbolo de almoadilla `#`, tal y como se muestra en la figura 1.3. Posteriormente, cada vez que queramos hacer referencia a dicha expresión podremos utilizar su etiqueta en lugar de volver a escribir la expresión.

Es posible seleccionar cualquier expresión o subexpresión de la ventana Algebra con el ratón o bien con las teclas del cursor.

La tecla `F3` permite introducir la expresión que tengamos seleccionada en el editor de expresiones.

Modificación de expresiones

Una vez introducida una expresión, podemos volver a editarla para realizar cualquier corrección o cambio mediante el menú `Editar->Expresión` y aparecerá la ventana del editor de expresiones con la expresión seleccionada.

Eliminación de expresiones

Para eliminar una expresión de la ventana de Algebra, basta con seleccionarla y utilizar el menú `Editar->Borrar` y la expresión seleccionada desaparecerá automáticamente, mientras que el resto de las expresiones se renumeran automáticamente. También es posible eliminar bloques completos de expresiones consecutivas seleccionando previamente el bloque de expresiones a eliminar.

¡Importante!: Si hemos eliminado alguna expresión por equivocación, es posible recuperarla mediante el menú `Editar->Recuperar`.

Reordenación de expresiones

Es posible cambiar la posición que ocupa una expresión en la ventana de Álgebra marcándola y arrastrándola mediante el ratón hasta la posición que queremos que ocupe. Al cambiar la posición de una expresión, inmediatamente se renumeran las expresiones de la ventana de Álgegra.

Introducción de comentarios

Hay dos formas diferentes para introducir un comentario en la secuencia de expresiones. La primera consiste en utilizar la línea de edición escribiendo el texto del comentario entre comillas, y, si procedemos de esta manera, el comentario aparecerá como una expresión más, con su correspondiente etiqueta de ordenación. La segunda es mediante el menú `Insertar->Objeto de Texto`, y de esta forma el comentario aparece sin etiqueta de ordenación ya que se trata de un objeto más insertado en el archivo, como también lo sería una gráfica, un dibujo, una fotografía o una hoja de cálculo...

Nombres de variables

Por defecto Derive utiliza una sola letra para representar una variable, de manera que la expresión `xy`, no se interpreta como una variable de nombre xy, sino como el producto de la variable x por la variable y. Además, por defecto, no distingue entre mayúsculas y minúsculas. Por ejemplo, Derive interpretará que queremos trabajar con la función coseno tanto si introducimos en la línea de edición $\cos(x)$ como si introducimos $\cos(X)$. No obstante, es posible hacer que el programa utilice variables con más de una letra y distinga entre mayúsculas y minúsculas mediante el menú `Opciones->Ajustes de Modo->Introducción`.

Definición de constantes y funciones

Es posible definir constantes y funciones mediante el operador de definición `:=`. Para definir una constante basta con escribir el nombre de la constante seguido de `:=` y el valor de dicha constante. Por ejemplo para definir la constante de la aceleración de la gravedad, escribiríamos `g:=9.8`. Por otro lado, para definir una función se escribe el nombre de la función seguido de la lista de variables de la misma separadas por comas y entre paréntesis; después se escribe `:=` y por último la expresión que define la función. Así, por ejemplo, para definir la función que calcula el área de un triángulo de base b y altura h, escribiríamos `a(b,h):=(b*h)/2` (ver figura 1.3).

Con respecto a la definición de funciones, o de constantes, resultan especialmente **¡Importantes!** dos matizaciones:

- Si hemos definido una función o una constante, la definición permanece activa durante toda la sesión de trabajo con el documento, incluso si borramos la expresión en la que hemos procedido a la definición (al borrar en la pantalla no borramos la memoria interna en la que se almacenan las definiciones de las constantes y funciones). Para cambiar una definición previa no quedará más remedio que redefinir (g:=9.812), o dejar la asignación en blanco si lo que queremos es borrar la definición (g:=).
- En las definiciones de funciones sí que, por defecto, Derive distingue entre minúsculas y mayúsculas. De tal forma que, por ejemplo, distinguirá entre $a(b, h)$ y $A(b, h)$.

Funciones y constantes predefinidas

Derive tiene ya implementadas la mayoría de la funciones elementales y constantes que suelen utilizarse en los cálculos matemáticos. La sintaxis de algunas de estas funciones y constantes se muestra en la tabla 1.1, aunque, muy a menudo, en lugar de utilizar dicha sintaxis se utilizan los operadores y constantes que aparecen en la barra de símbolos. Por ejemplo, se puede observar cómo cambia el aspecto de la letra `e` introducida en la línea de edición como un variable más, o si en su lugar utilizamos `#e`, o la e que aparece en la barra de símbolos. En los dos últimos casos lo que hemos introducido en la línea de edición es la constante de Euler, base de los logaritmos naturales.

Para conocer todas las funciones predefinidas de Derive lo mejor es utilizar el menú `Ayuda->En Línea` y visitar la sección `Funciones y Constantes Internas`.

Sintaxis	Explicación
`#e`	Constante de Euler $e = 2{,}71828\ldots$
`pi`	El número $\pi = 3{,}14159\ldots$
`#i`	El número imaginario $i = \sqrt{-1}$
`inf`	Infinito ∞
`exp(x)`	Función exponencial e^x
`log(x,a)`	Logarítmo en base a, $\log_a x$
`ln(x)`	Logarítmo neperiano $\ln x$
`sqrt(x)`	Función raíz cuadrada $\sqrt{x}$
`sin(x)`	Función seno $\operatorname{sen} x$
`cos(x)`	Función coseno $\cos x$
`tan(x)`	Función tangente $\operatorname{tg} x$
`asin(x)`	Función arcoseno $\operatorname{arc\,sen} x$
`acos(x)`	Función arcocoseno $\arccos x$
`atan(x)`	Función arcotangente $\operatorname{arc\,tg} x$

Cuadro 1.1 – Sintaxis de algunas funciones elementales y constantes predefinidas en Derive.

¡Imporante!: en las funciones predefinidas, Derive, por defecto, no distingue entre mayúsculas y minúsculas. Por ejemplo, opera con la función coseno tanto si introducimos $\cos(x)$, $\text{Cos}(x)$, o $\text{COS}(x)$.

Vectores y matrices

Derive también permite la manipulación de vectores y matrices. Para crear un vector se utiliza el menú `Introducir->Vector`. Al seleccionar este menú aparece un cuadro de diálogo donde debemos introducir el número de elementos del vector, y tras pulsar `Sí` aparece otro cuadro de diálogo donde deben introducirse las componentes del mismo.

Otra forma de introducir vectores es mediante la línea de edición, introduciendo entre corchetes las componentes del vector separadas por comas. Por ejemplo, para introducir el vector (x, y, z) escribiríamos `[x,y,z]` (ver figura 1.3).

Para crear matrices se utiliza el menú `Introducir->Matriz`. Con este menú aparece un cuadro de diálogo donde debemos introducir las filas y las columnas de nuestra matriz, y tras pulsar `Sí`, aparece otro cuadro de diálogo donde deben introducirse las componentes de la misma.

Otra forma de introducir matrices es mediante la línea de edición, introduciendo entre corchetes los vectores fila que componen la matriz separados por comas, teniendo en cuenta que, como se explica anteriormente, cada vector debe ir escrito a su vez entre corchetes. Así, para introducir por ejemplo la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

escribiríamos `[[1,2,3],[a,b,c]]` (ver figura 1.3).

Anotaciones

Es posible asociar a cada expresión una pequeña anotación, o nota. Para ello se selecciona la expresión y se utiliza el menú `Editar->Anotacion`. Dicha anotación aparecerá en la barra de estado cada vez que seleccionemos la expresión y también es posible imprimirlo junto a la expresión.

Manipulación de archivos

Las expresiones y los cálculos realizados dentro de la ventana de Álgebra suelen almacenarse en archivos.

Guardar un archivo

Para crear un archivo donde se guarden las expresiones de la ventana de Álgebra se utiliza el menú `Archivo->Guardar`, y en el cuadro de diálogo que aparece se le da nombre al archivo y se se-

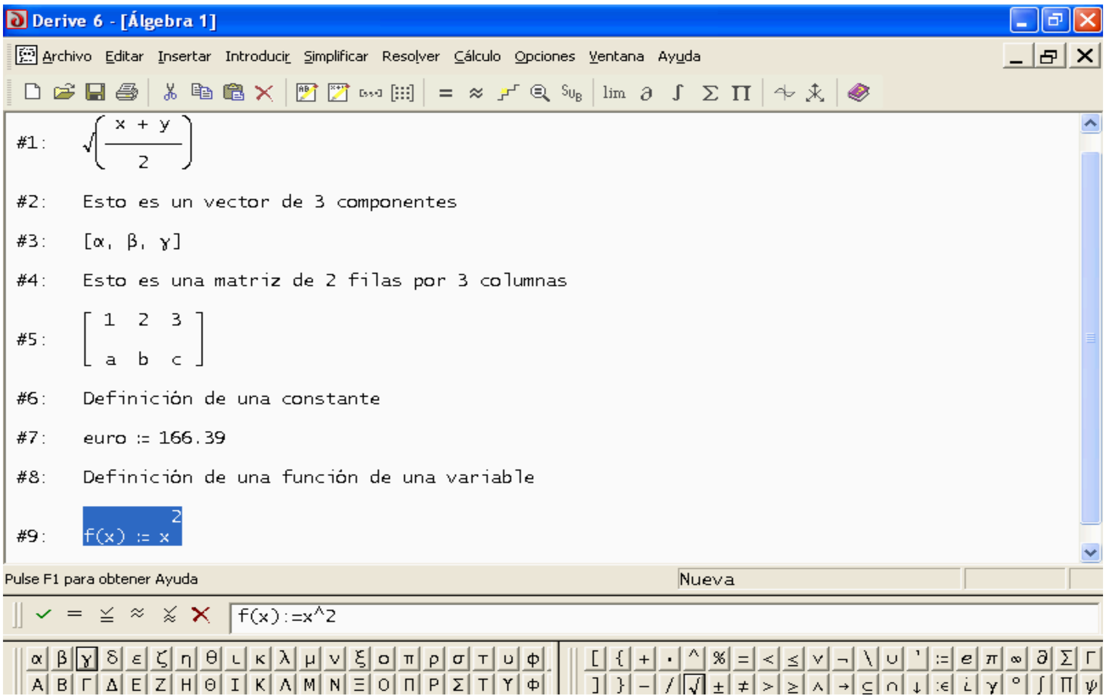


Figura 1.3 – Ventana de Algebra con distintos tipos de expresiones.

lecciona la carpeta donde queremos guardarlo. Derive le pone automáticamente la extensión `*.dfw` a sus archivos. Una vez creado el archivo, su nombre aparecerá en la barra de título de la ventana de Derive. Posteriormente, para guardar cambios en una ventana de Álgebra, bastará con seleccionar de nuevo el menú `Archivo->Guardar`, de manera que el archivo se actualizará.

Recuperar un archivo

Para recuperar en una ventana de Álgebra el contenido de un archivo se utiliza el menú `Archivo->Abrir`, y en en cuadro de diálogo que aparece se selecciona el archivo deseado. Automáticamente el contenido del archivo aparece en una ventana nueva de Álgebra.

Otra forma de abrir archivos es mediante el menú `Archivo->Leer->Math`, que se utiliza para almacenar en memoria la definición de nuevas funciones, presentes en los archivos con extensión *.mth, que expanden el potencial de cálculo del núcleo del programa, el cual queda operativo nada más arrancar Derive. Al igual que antes aparece un cuadro de diálogo donde debemos seleccionar el archivo que queremos abrir, sólo que ahora, el contenido del archivo no aparece en una nueva ventana de Álgebra, sino que se añade en la ventana de Álgebra activa, a continuación de las expresiones existentes. Otra forma de proceder con igual resultado es mediante el menú `Archivo->Leer->Utilidades`, que también permite acceder hasta, y cargar en memoria, los archivos con extensión *.mth, pero en este caso el conjunto de expresiones que componen dichos archivos no aparece en la pantalla, aunque sí que, al estar cargadas en la memoria del ordenador, serán operativas.

Cerrar y abrir nuevas ventanas de Álgebra

Cuando terminemos una sesión de trabajo, podemos cerrar la ventana de Álgebra correspondiente mediante el menú `Archivo->Cerrar`. Por otro lado, en cualquier momento de una sesión de trabajo podemos abrir, añadidas a la que aparece por defecto, tantas ventanas de Álgebra como estimemos oportunas mediante el menú `Archivo->Nuevo`. El programa trabaja con cada una de las ventanas de Álgebra activas de forma completamente independiente, lo cual implica, entre otras cosas, que podremos utilizar los mismos nombres de variables en todas las ventanas abiertas sin interferencia entre las mismas.

Impresión

Para imprimir el contenido de una ventana de Álgebra, o bien una gráfica, se utiliza el menú `Archivo->Imprimir`. En el caso de una ventana de Álgebra aparecerá un cuadro de diálogo donde se puede seleccionar `Todo`, para imprimir todo el contenido de la ventana, `Páginas` para imprimir un rango de páginas o `Selección` para imprimir la zona previamente seleccionada de la ventana. No obstante, antes de imprimir, conviene utilizar el menú `Archivo->Vista Previa` para ver por pantalla cómo quedaría la hoja impresa. Si todo está bien, bastaría con pulsar el botón `Imprimir` para que aparezca el cuadro de diálogo de impresión y desde ahí enviarlo a la impresora. La orientación y los márgenes pueden cambiarse con el menú `Archivo->Configurar Página`, mientras que otras opciones como el tipo de letra, o el encabezado y pie de página se controlan mediante el menú `Opciones->Impresión->Cabecera y Pie`.

Simplificación de expresiones

Derive incorpora varios sistemas de simplificación de expresiones. El más sencillo es la simplificación básica, que puede realizarse mediante el menú `Simplificar->Normal`. Este menú permite realizar simplificaciones simples como por ejemplo convertir la expresión $x + x$ en la expresión $2x$. Sin embargo, no permite pasar de un binomio como $(x + 1)^2$ a su desarrollo $x^2 + 2x + 1$, ya que no está claro cuál de las dos expresiones es más simple. Para obtener el desarrollo de este binomio se utiliza el menú `Simplificar->Expandir` que permite expandir una expresión con respecto sus variables. Por el contrario, si lo que queremos es pasar del desarrollo a la forma del binomio, se utiliza el menú `Simplificar->Factorizar` que permite factorizar una expresión con respecto a sus variables.

En cualquiera de estas simplificaciones, Derive trabaja por defecto en modo exacto y por eso devuelve expresiones fraccionarias. Para obtener el valor de una expresión en modo aproximado, con decimales, se utiliza el menú `Simplificar->Aproximar`. Con este menú aparece un cuadro de diálogo donde debemos introducir el número de decimales que queremos para la aproximación.

Por último, es posible sustituir cualquier variable de una expresión por un valor u otra expresión mediante el menú `Simplificar->Sustituir Variable`. En el cuadro de diálogo que aparece se elige la variable a sustituir y se introduce la expresión o el valor de sustitución en `Nuevo Valor`.

Representaciones gráficas

Derive permite representar gráficamente funciones en 2 y 3 dimensiones.

Gráficas en 2 dimensiones

Para representar una función o expresión de una variable, se selecciona la expresión y se utiliza el menú `Ventana->Nueva Ventana 2D`. Automáticamente aparece una ventana de gráficas en 2 dimensiones con unos ejes cartesianos, y para que aparezca la gráfica de la función, basta con pulsar el menú `Insertar->Gráfica` de esta ventana, o pulsar en su correspondiente botón de la barra de botones. En la figura 1.4 se muestra un ejemplo de gráfica en 2 dimensiones.

Si queremos que la gráfica, una vez obtenida, también aparezca en la ventana de Álgebra como un objeto más de la misma, desde la ventana 2D, utilizamos el menú `Archivo->Incrustar`.

Es posible representar más de una función en una misma gráfica, seleccionando la nueva expresión en la ventana de Álgebra, y pulsando de nuevo el menú `Insertar->Gráfica` en la ventana de gráficos en 2 dimensiones en que queramos que aparezca la representación gráfica de la expresión seleccionada. Cuando se quieren representar varias funciones, a veces resulta más cómodo mostrar al mismo tiempo la ventana de Álgebra y la de gráficas mediante el menú `Ventana->Mosaico Vertical`, tal y como se muestra en la figura 1.5.

También es posible borrar gráficas mediante el menú `Editar->Borrar Gráfica`. Si se elige la opción `Primera` se borra la primera gráfica dibujada, si se elige la opción `Última` se borra la última, y si se elige la opción `Anteriores` borra todas las gráficas excepto la última.

En la ventana de gráficas en 2 dimensiones existen distintos menús que permiten cambiar el aspecto de la gráfica representada. Una posibilidad muy interesante es cambiar la escala de los ejes mediante el menú `Seleccionar->Relación de Aspecto`.

También es posible ampliar la representación gráfica de una determinada zona del gráfico mediante el menú `Seleccionar->Rango de la Gráfica`, introduciendo las coordenadas de la zona que queremos

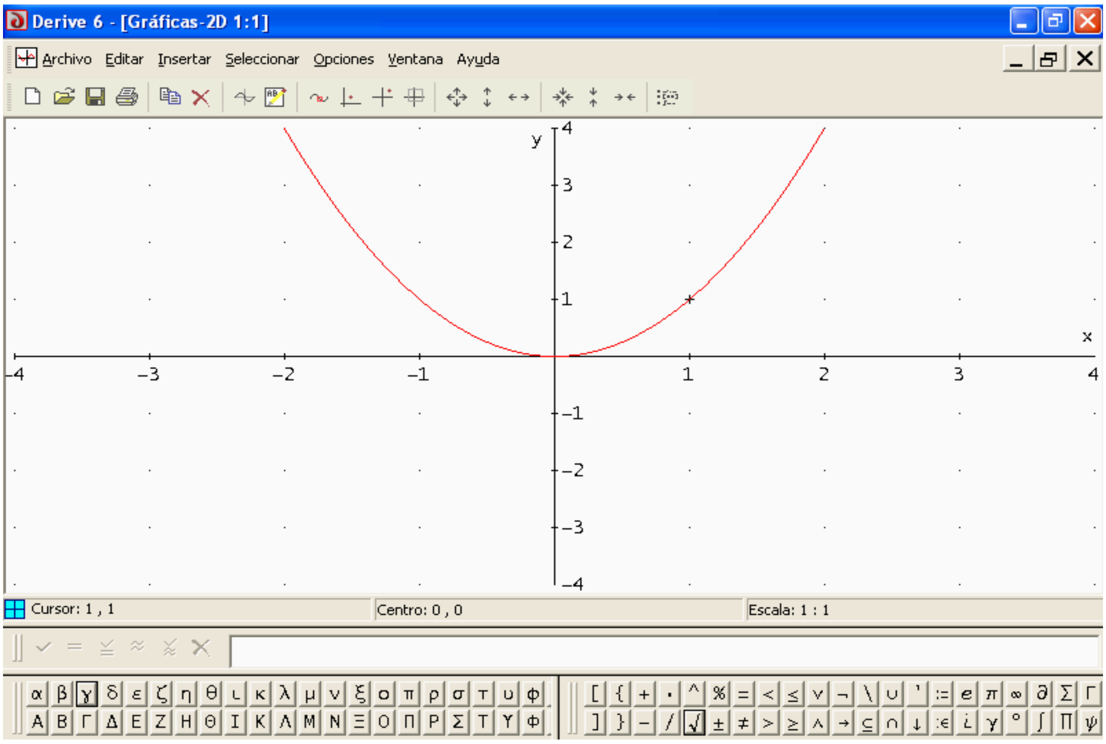


Figura 1.4 – Ventana de gráficas en 2 dimensiones.

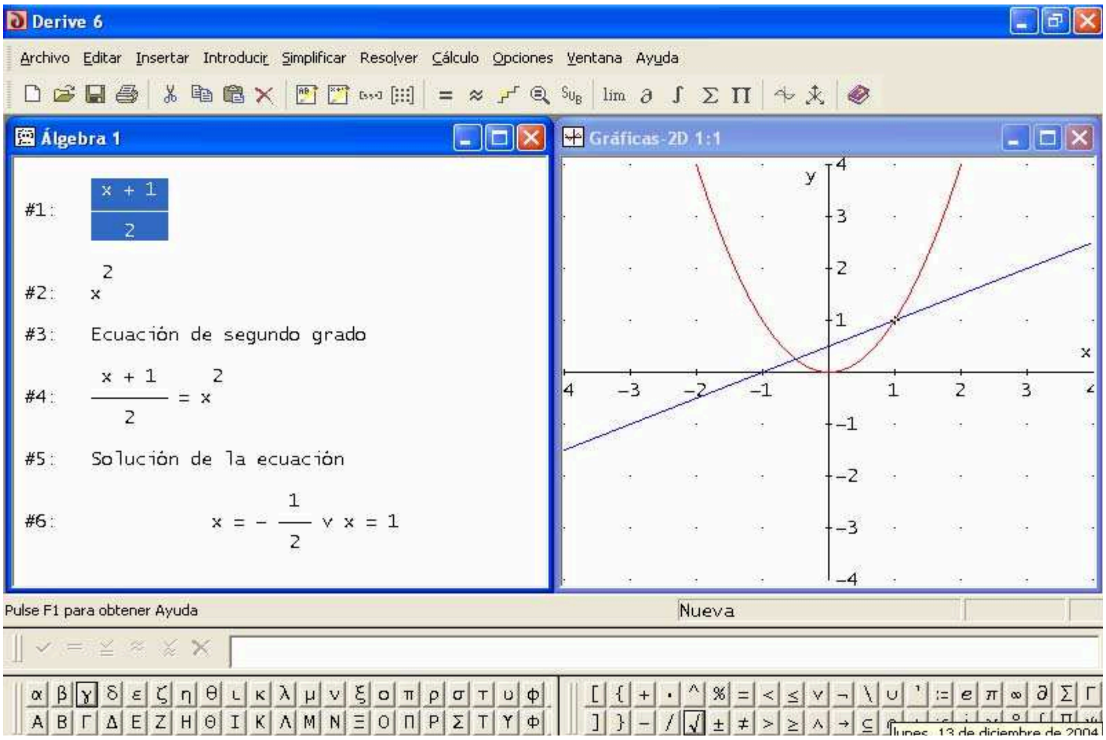


Figura 1.5 – Ventana de Álgebra y de gráficas en 2 dimensiones en una misma pantalla.

ampliar, aunque es más práctico utilizar el botón `Seleccionar el rango`, y después utilizar el ratón para delimitar la zona que queremos ampliar.

En la ventana de gráficas en 2 dimensiones aparece una cruz que representa al cursor. Las coordenadas del cursor siempre aparecen en la barra de estado. Cuando se pulsa la tecla `F3`, la cruz se transforma en un cuadradito y se pasa a *modo de traza*. En este modo, al mover el cursor con las flechas del teclado, el cursor sigue la trayectoria de la función representada, con lo que podemos averiguar los valores que toma la misma en la barra de estado, tal y como se muestra en la figura 1.6.

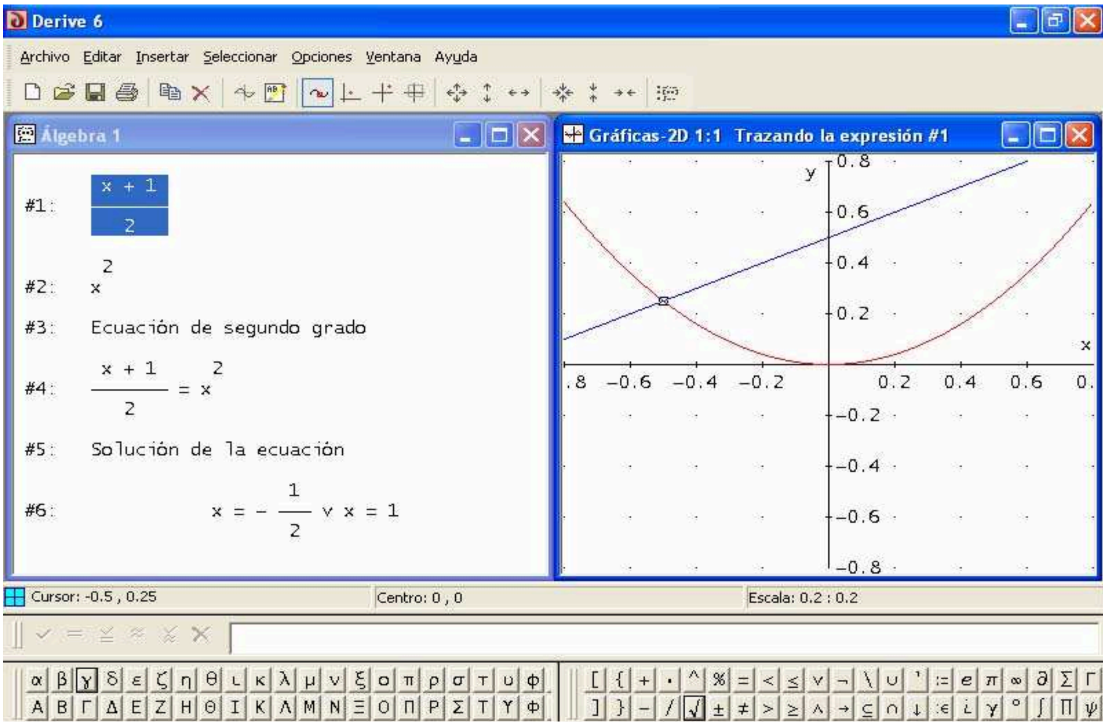


Figura 1.6 – Ventana de gráficas en 2 dimensiones en modo de traza con una gráfica ampliada.

Es posible centrar la gráfica de una función en cualquier punto mediante el menú `Seleccionar->Rango de la Gráfica->Longitud/Centro`, aunque, de nuevo, tal vez sea más operativo hacerlo mediante los botones `Centrar en el cursor` y `Centrar en el origen`.

Gráficas en 3 dimensiones

Para representar una función o expresión de dos variables, se selecciona la expresión y se utiliza el menú `Ventana->Nueva Ventana 3D`. Automáticamente aparece una ventana de gráficas en 3 dimensiones con unos ejes cartesianos, y para que aparezca la gráfica de la función, basta con pulsar el menú `Insertar->Gráfica` de esta ventana. En la figura 1.7 se muestra un ejemplo de gráfica en 3 dimensiones.

Al igual que en el caso de las gráficas de 2 dimensiones, existen distintos menús que permiten cambiar el aspecto de la gráfica representada. De todos ellos, sólo comentaremos el menú `Editar->Gráfica->Número de Paneles` que permite cambiar la resolución del gráfico, y el menú `Seleccionar->Posición de Ojo` que permite cambiar la posición desde donde se mira la gráfica.

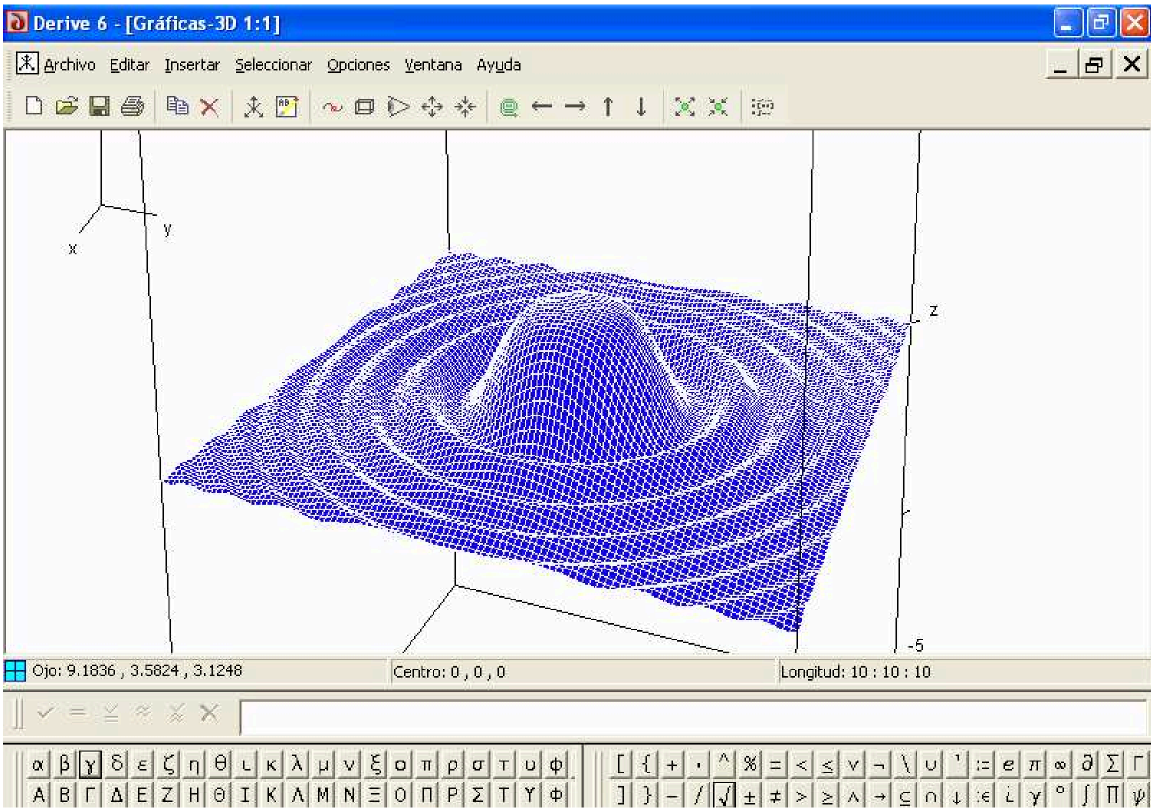


Figura 1.7 – Ventana de gráficas en 3 dimensiones.

Práctica de Matemáticas con Derive 2

Funciones Elementales

1 Fundamentos teóricos

En esta práctica se introducen los conceptos básicos sobre funciones reales de variable real, esto es, funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

1.1 Dominio e imagen

El *Dominio* de la función f es el conjunto de los números reales x para los que existe $f(x)$ y se designa mediante $\operatorname{Dom} f$.

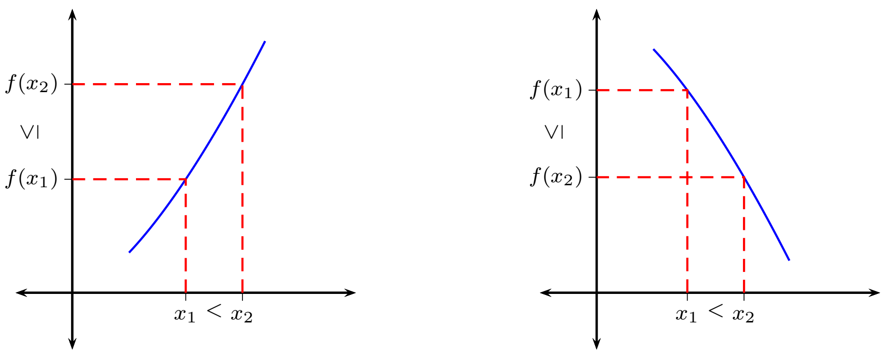
La *Imagen* de f es el conjunto de los números reales y para los que existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, y se denota por $\operatorname{Im} f$.

1.2 Signo y crecimiento

El *signo* de la función es positivo $(+)$ en los valores de x para los que $f(x) > 0$ y negativo $(-)$ en los que $f(x) < 0$. Los valores de x en los que la función se anula se conocen como *raíces* de la función.

Una función $f(x)$ es *creciente* en un intervalo I si $\forall\, x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Del mismo modo, se dice que una función $f(x)$ es *decreciente* en un intervalo I si $\forall\, x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \geq f(x_2)$. En la figura 2.1 se muestran estos conceptos.



(a) Función creciente. (b) Función decreciente.

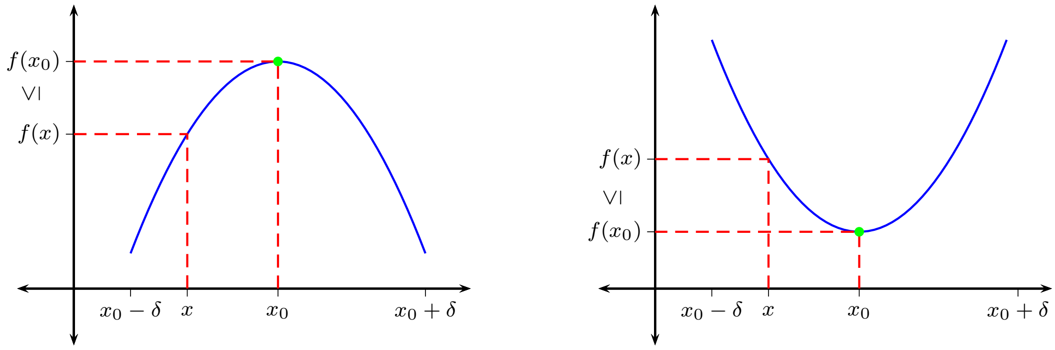
Figura 2.1 – Crecimiento de una función.

1.3 Extremos Relativos

Una función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en x_0 si existe un entorno A de x_0 tal que $\forall x \in A$ se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.

Una función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en x_0 si existe un entorno A de x_0 tal que $\forall x \in A$ se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

Diremos que la función $f(x)$ tiene un *extremo relativo* en un punto si tiene un *máximo o mínimo relativo* en dicho punto. Estos conceptos se muestran en la figura 2.2.



(a) Máximo relativo.

(b) Mínimo relativo.

Figura 2.2 – Extremos relativos de una función.

Una función $f(x)$ está *acotada superiormente* si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f$. Análogamente, se dice que una función $f(x)$ está *acotada inferiormente* si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq K$ $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f$.

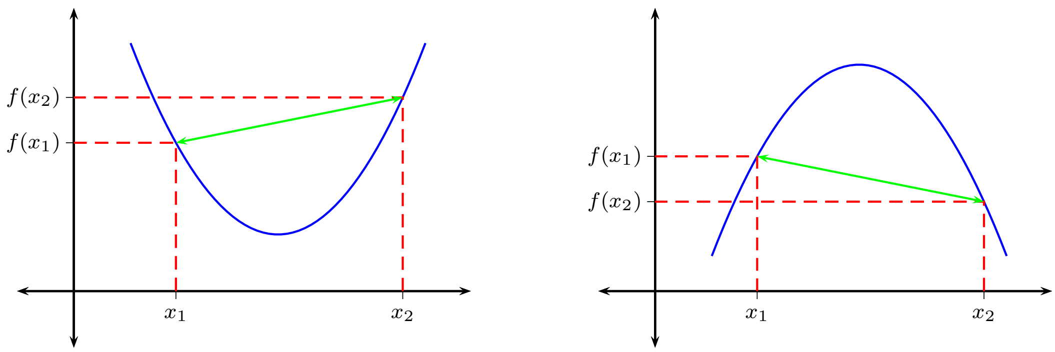
Una función $f(x)$ está *acotada* si lo está superior e inferiormente, es decir si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f$.

1.4 Concavidad

De forma intuitiva se puede decir que una función $f(x)$ es *cóncava* en un intervalo I si $\forall\, x_1, x_2 \in I$, el segmento de extremos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de f.

Análogamente se dirá que es *convexa* si el segmento anterior queda por debajo de la gráfica de f.

Diremos que la función $f(x)$ tiene un *punto de inflexión* en x_0 si en ese punto la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. Estos conceptos se ilustran en la figura 2.3.



(a) Función cóncava.

(b) Función convexa.

Figura 2.3 – Concavidad de una función.

1.5 Asíntotas

La recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la función $f(x)$ si al menos uno de los límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es $+\infty$ o $-\infty$, es decir cuando se verifique alguna de las siguientes igualdades

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

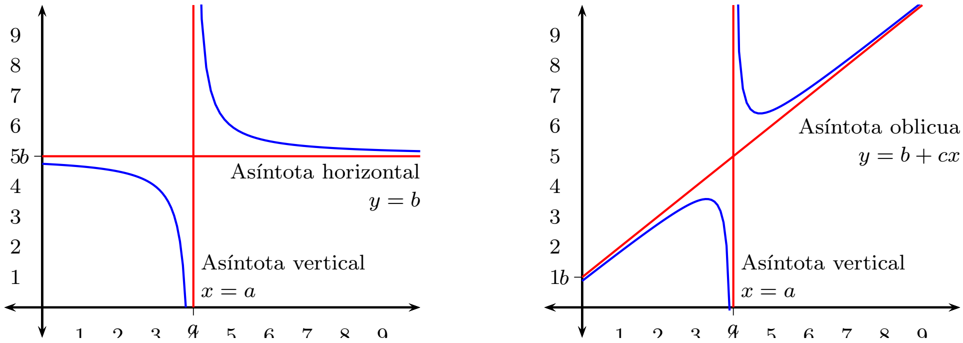
La recta $y = b$ es una *asíntota horizontal* de la función $f(x)$ si alguno de los límites de $f(x)$ cuando x tiende hacia $+\infty$ o $-\infty$ es igual a b, es decir cuando se verifique

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$

La recta $y = mx+n$ es una *asíntota oblicua* de la función $f(x)$ si alguno de los límites de $f(x)-(mx+n)$ cuando x tiende hacia $+\infty$ o $-\infty$ es igual a 0, es decir si

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = n \quad \text{o} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = n$$

En la figura 2.4 se muestran los distintos tipos de asíntotas.



(a) Asíntota horizontal y vertical. (b) Asíntota vertical y oblicua.

Figura 2.4 – Tipos de asíntotas de una función.

1.6 Periodicidad

Una función $f(x)$ es *periódica* si existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(x+h) = f(x)\ \forall x \in \operatorname{Dom} f$$

siendo el período T de la función, el menor valor h que verifique la igualdad anterior.

En una función periódica, por ejemplo $f(x) = A\,\mathrm{sen}(wt)$, se denomina *amplitud* al valor de A, y es la mitad de la diferencia entre los valores máximos y mínimos de la función. En la figura 2.5 se ilustran estos conceptos.

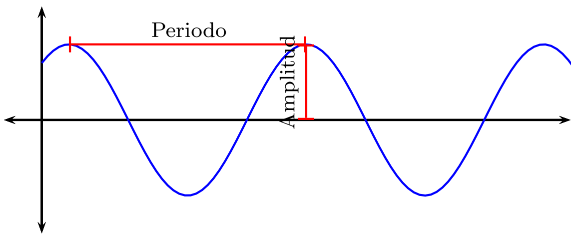


Figura 2.5 – Periodo y amplitud de una función periódica.

2 Ejercicios resueltos

1. Se considera la función

$$f(t) = \frac{t^4 + 19 \cdot t^2 - 5}{t^4 + 9 \cdot t^2 - 10}.$$

Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:

a) Dominio.

Indicación
1) Para representarla, podemos definir la función en la línea de editor (o introducirla directamente, sin generar una definición), y posteriormente utilizamos el botón `Ventana 2D` para pasar a la ventana de gráficas 2D, y allí pinchamos en el botón `Representar Expresión`).
2) Una vez en la Ventana 2D, y ya que vamos a trabajar con la gráfica de la función durante todo el ejercicio, probablemente convenga el Modo de Traza, en el que el cursor se desplaza a lo largo de la gráfica. Para ello pinchar en el botón `Trazar las Gráficas`.
3) Para determinar el dominio tan sólo hay que determinar los valores de x en los que existe la función.
4) Recordar que, tanto para éste como para el resto de los apartados del ejercicio, pretendemos llegar a conclusiones aproximadas que tan sólo sacamos del análisis de la gráfica.

b) Imagen.

Indicación
Fijarse en los valores de la variable y hasta los que llega la función.

c) Asíntotas.

Indicación
Son las líneas rectas, ya sea horizontales, verticales u oblicuas, hacia las que tiende la función.

d) Raíces.

Indicación
Son los valores de la variable x, si los hay, en los que la función vale 0.

e) Signo.

Indicación
Hay que determinar, aproximadamente, por un lado los intervalos de variable x en los que la función es positiva, y por el otro aquellos en los que es negativa.

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Indicación
De nuevo, por un lado hay que determinar los intervalos de variable x en los que a medida que crece x también lo hace y, que serían los intervalos de crecimiento, y también aquellos otros en los que a medida que crece x decrece y, que serían los intervalos de decremimiento.

g) Intervalos de concavidad y convexidad.

Indicación
Para los intervalos de concavidad y convexidad, nos fijamos en el segmento de línea recta que une dos puntos cualquiera del intervalo. Si dicho segmento queda por encima de la gráfica, entonces la función es cóncava en el intervalo, mientras que si queda por debajo, entonces es convexa en el mismo.

h) Extremos relativos.

Indicación
Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que se encuentran los máximos y mínimos relativos de la función.

i) Puntos de inflexión.

Indicación
Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que la función cambia de curvatura, de cóncava a convexa o a la inversa.

2. Representar en una misma gráfica las funciones $2^x, e^x, 0{,}7^x, 0{,}5^x$.

a) A la vista de las gráficas obtenidas, indicar cuáles de las funciones anteriores son crecientes y cuáles son decrecientes.

Indicación
1) Aunque podríamos representar en una misma gráfica todas las funciones dadas a la vez (sin más que introducir sus expresiones, marcar todas ellas, irnos a la ventana 2D, y pinchando en el botón `Representar Expresiones`), más bien conviene representar las funciones una a una, y utilizar el botón `Insertar Anotación` para asignara a cada una de las gráficas una pequeña anotación que nos ayude a distinguirla de las demás. Si desactivamos el modo de trazado y pasamos al modo habitual en el que podemos situarnos con el cursor en cualquier punto de la gráfica, podemos trasladar la anotación desde la posición inicialmente escogida para su ubicación en cualquier otro punto de la gráfica, sin más que pinchar con el ratón en la anotación, y, manteniendo pulsado el mismo, arrastrar hasta la nueva ubicación.

b) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será creciente la función a^x.

c) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será decreciente la función a^x.

Indicación
Para los dos apartados anteriores, si no somos capaces de determinar para qué valores de a la exponencial es creciente o decreciente, representar en una nueva gráfica las funciones: $(1,1)^x, 1^x$ y $(0,9)^x$.

3. Representar en una misma gráfica las funciones siguientes, indicando su período y amplitud.

a) $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x + 2$, $\operatorname{sen}(x+2)$.

b) $\operatorname{sen} 2x$, $2 \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

Indicación
De nuevo, en ambos apartados conviene representar las funciones una a una, e incluir anotaciones que nos hagan recordar a qué función corresponde cada gráfica.

4. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Indicación
Para representar funciones a trozos, Derive utiliza una función predefinida llamada chi. La sintaxis de esta función es CHI (a, x, b), donde a u b son los límites de un intervalo, y x es la variable de la función, y se define cómo:

$$\mathrm{CHI}(a,x,b) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

Según esto, para representar la función anterior, habría que introducir la expresión

$$-2x\,\mathrm{CHI}(-inf, x, 0) + x^2\,\mathrm{CHI}(0, x, inf)$$

¡Cuidado!: a pesar de que la función CHI es una función interna del programa, y que, por tanto, debería permitir que se introdujese en mayúsculas o en minúsculas indistintamente, al intentar introducirla en minúsculas da errores. Por ello, es conveniente, y puede que incluso indispensable, introducirla en mayúsculas.

3 Ejercicios propuestos

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones a partir de sus representaciones gráficas:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}$

   b) $g(x) = \sqrt[2]{x^4-1}$.

   c) $h(x) = \cos\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

   d) $l(x) = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{1+x}$.

2. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3+x+2}{5x^3-9x^2-4x+4}.$$

   Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:

   a) Dominio.

   b) Imagen.

   c) Asíntotas.

   d) Raíces.

   e) Signo.

   f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   g) Intervalos de concavidad y convexidad.

   h) Extremos relativos.

   i) Puntos de inflexión.

3. Representar en una misma gráfica las funciones $\log_{10} x$, $\log_2 x$, $\log x$, $\log_{0,5} x$.

   a) A la vista de las gráficas obtenidas, indicar cuáles de las funciones anteriores son crecientes y cuáles son decrecientes.

   b) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será creciente la función $\log_a x$.

   c) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será decreciente la función $\log_a x$.

4. Completar las siguientes frases con la palabra igual, o el número de veces que sea mayor o menor en cada caso:

   a) La función $\cos 2x$ tiene un período............ que la función $\cos x$.

   b) La función $\cos 2x$ tiene una amplitud............ que la función $\cos x$.

   c) La función $\cos\dfrac{x}{2}$ tiene un período............ que la función $\cos 3x$.

   d) La función $\cos\dfrac{x}{2}$ tiene una amplitud............ que la función $\cos 3x$.

   e) La función $3\cos 2x$ tiene un período............ que la función $\cos\dfrac{x}{2}$.

   f) La función $3\cos 2x$ tiene una amplitud............ que la función $\cos\dfrac{x}{2}$.

5. Hallar a partir de la representación gráfica, las soluciones de $e^{-1/x} = \dfrac{1}{x}$.

6. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Práctica de Matemáticas con Derive 3

Límites y Continuidad

1 Fundamentos teóricos

En esta práctica se introducen los conceptos de límite y continuidad de una función real, ambos muy relacionados.

1.1 Límite de una función en un punto

El concepto de límite está muy relacionado con el de proximidad y tendencia de una serie de valores. De manera informal, diremos que $l \in \mathbb{R}$ es el *límite* de una función $f(x)$ en un punto $a \in \mathbb{R}$, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a l, a medida que x se aproxima a a, y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Si lo que nos interesa es la tendencia de $f(x)$ cuando nos aproximamos al punto a sólo por un lado, hablamos de *límites laterales*. Diremos que l es el *límite por la izquierda* de una función $f(x)$ en un punto a, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a l, a medida que x se aproxima a a por la izquierda, es decir con valores $x < a$, y se denota por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

Del mismo modo, diremos que l es el *límite por la derecha* de una función $f(x)$ en un punto a, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a l, a medida que x se aproxima a a por la derecha, es decir con valores $x > a$, y se denota por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l.$$

Por supuesto, para que exista el límite global de la función $f(x)$ en el punto a, debe existir tanto el límite por la izquierda, como el límite por la derecha, y ser iguales, es decir

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l.$$

1.2 Álgebra de límites

Para el cálculo práctico de límites, se utiliza el siguiente teorema, conocido como Teorema de *Álgebra de Límites*.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, entonces se cumple que:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ si $l_2 \neq 0$.

1.3 Asíntotas

Como interpretación geométrica de los límites, definiremos rectas particulares a las que tiende (se "pega") la gráfica de una función cuando la variable tiende a un cierto valor, finito o infinito.

Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una *Asíntota Vertical* de la función $f(x)$ si al menos uno de los límites laterales de f en a es $+\infty$ ó $+\infty$. Es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas Horizontales

La recta $y = b$ es una *Asíntota Horizontal* de la función $f(x)$ si se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Asíntotas Oblicuas

La recta $y = mx + n$, donde $m \neq 0$, es *Asíntota Oblicua* de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$$

La determinación práctica de m y n se realiza del siguiente modo:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

o bien lo mismo con los límites en $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx]$$

En cualquiera de los casos, si obtenemos un valor real para m (no puede ser ni $+\infty$ ni $-\infty$) distinto de 0, procedemos después a calcular n, que también debe ser real (sí que puede ser 0).

Si $m = \pm\infty$ entonces la función crece (decrece) más deprisa que cualquier recta, y si $m = 0$ la función crece (decrece) más despacio que cualquier recta, y en cualquiera de los dos casos decimos que la función tiene una *Rama Parabólica*.

1.4 Continuidad de una función en un punto

Diremos que una función $f(x)$ es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$, si se cumple

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

donde $f(a) \in \mathbb{R}$.

La definición anterior implica a su vez que se cumplan estas tres condiciones:

- Existe el límite de f en $x = a$.
- La función está definida en $x = a$; es decir, existe $f(a)$.
- Los dos valores anteriores coinciden.

Si la función f no es continua en $x = a$, diremos que es *discontinua* en el punto a, o bien que f tiene una *discontinuidad* en a.

Intuitivamente, una función es continua cuando puede dibujarse su gráfica sin levantar el lápiz.

Continuidad lateral en un punto

Si nos restringimos a los valores que toma una función a la derecha de un punto $x = a$, o a la izquierda, se habla de continuidad por la derecha o por la izquierda según la siguiente definición.

Una función es *continua por la derecha* en un punto $x = a$, y lo notaremos como f continua en a^+, si existe el límite por la derecha en dicho punto y coincide con el valor de la función en el mismo:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

De igual manera, la función es *continua por la izquierda* en un punto $x = a$, y lo notaremos como f continua en a^-, si existe el límite por la izquierda en dicho punto y coincide con el valor de la función en el mismo:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Propiedades de la continuidad en un punto

Como consecuencia de la definición de continuidad en un punto, podrían demostrarse toda una serie de teoremas, algunos de ellos especialmente importantes.

- **Álgebra de funciones continuas**. Si f y g son funciones continuas en $x = a$, entonces $f \pm g$ y $f \cdot g$ son también continuas en $x = a$. Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g también es continua en $x = a$.
- **Continuidad de funciones compuestas**. Si f es continua en $x = a$ y g es continua en $b = f(a)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en $x = a$.
- **Continuidad y cálculo de límites**. Sean f y g dos funciones tales que existe $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ y g es una función continua en l. Entonces:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(l)$$

Tipos de discontinuidades

Puesto que la condición de continuidad puede no satisfacerse por distintos motivos, existen distintos tipos de discontinuidades:

- **Discontinuidad evitable**. Se dice que $f(x)$ tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a, si existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función en el punto (bien porque sea diferente, bien por que la función no esté definida en dicho punto), es decir

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \neq f(a).$$

- **Discontinuidad de salto**. Se dice que $f(x)$ tiene una *discontinuidad de salto* en el punto a, si existe el límite de la función por la izquierda y por la derecha pero son diferentes, es decir,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

A la diferencia entre ambos límites $l_1 - l_2$, se le llama *amplitud del salto*.

- **Discontinuidad esencial**. Se dice que $f(x)$ tiene una *discontinuidad esencial* en el punto a, si no existe alguno de los límites laterales de la función.

2 Ejercicios resueltos

1. Se considera la función:

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2}$$

a) Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites: 2

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
2) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
3) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$
4) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$
5) $\lim_{x \to 2} f(x)$
6) $\lim_{x \to 0} f(x)$

Indicación

1) Para representar la gráfica de la función, introducir su expresión, acceder a la ventana 2D, y pinchar en el botón Representar Expresión. Probablemente haya que cambiar la escala de la representación original pinchando en el botón de Zoom hacia fuera en ambos ejes, para tener una perspectiva más amplia de la forma de la función.
2) Para predecir cuáles pueden ser los valores de los límites pedidos, observar hacia qué valores tiende la función cuando la variable x se acerca al valor que aparece en cada límite. Para ello, puede resultar conveniente pinchar en el botón Trazar gráficas, para que el cursor sólo pueda desplazarse a lo largo de la misma.

b) Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?.

Indicación

1) Utilizar el menú `Cálculo->Límites`, o su correspondiente botón de la barra de botones.
2) En el cuadro de diálogo que aparece, seleccionar tanto la variable del límite como el punto en el que queremos calcularlo, y la tendencia (izquierda, derecha, o ambas).

2. Para la función: $\ln(x^2 - 1)$

a) Representar la gráfica. A la vista de la gráfica, ¿que tipo de asíntotas crees que tiene la función?.

Indicación

1) Para representar la gráfica, seguimos el proceso comentado en apartados anteriores (introducir la expresión, acceder a la ventana 2D, y utilizar el botón Representar Expresiones).
2) Para determinar, de forma gráfica, la presencia de asíntotas, hay que ver si la gráfica tiende a una forma rectilínea en $\pm\infty$, con lo que tendríamos una asíntota horizontal (tendencia a una recta horizontal), u oblicua (si la tendencia es a una recta de pendiente no nula); y también ver si la gráfica tiende a parecerse a una recta vertical en algún valor concreto de la variable, con lo cual tendríamos una asíntota vertical en dicho punto.

b) Calcular los límites cuando x tiende a 1 por la derecha y a -1 por la izquierda para demostrar la presencia de asíntotas verticales.

Indicación

Utilizar el botón Calcular un Límite, y escoger la variable, el punto y la tendencia. Si alguno de los límites realizados en igual a $+\infty$ ó $-\infty$, entonces sí que hay una asíntota vertical en los puntos considerados.

c) Calcular los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ para analizar la presencia de asíntotas horizontales. ¿Qué se concluye a la vista de los resultados obtenidos?.

Indicación

1) Para calcular los límites, proceder de la misma forma que en el punto anterior pero escogiendo el ∞ de la barra de operadores y constantes. En cuanto a la tendencia, a pesar de que a $+\infty$ sólo se puede tender desde la izquierda, y a $-\infty$ desde la derecha, en los límites en $\pm\infty$ da igual la forma de tendencia que escojamos.
2) En cuanto a la presencia o no de asíntotas horizontales, es necesario que los límites anteriores valgan 0.

d) Calcular los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ de la función dividida entre x para analizar la presencia de asíntotas oblicuas. ¿Qué se concluye a la vista de los resultados obtenidos?.

Indicación
Recordar que, en caso de que la función tenga asíntotas oblicuas, la pendiente de la asíntota en $+\infty$ vendría dada por:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e igual en $-\infty$, cambiando el $+\infty$ por $-\infty$.
Por lo tanto, se divide la función entre x y se procede a calcular los límites anteriores mediante el botón Calcular un límite. Si los límites obtenidos valen 0, quiere decir que no hay asíntotas oblicuas, que la tendencia creciente de la función es menos marcada que la de cualquier recta con pendiente no nula.

3. Clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones en los puntos que se indica. 2

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = 0$.

b) $g(x) = \dfrac{1}{2^{1/x}}$ en $x = 0$.

c) $h(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$ en $x = 1$.

Indicación
Para clasificar las discontinuidades en los puntos que se indican, además de definir cada una de las funciones, conviene representar su gráfica, lo cual, aunque no sirve para demostrar la presencia de una discontinuidad, sí que nos puede dar una idea sobre las discontinuidades presentes y su tipo (las discontinuidades evitables apenas aparecen visibles en la gráfica, aunque sí que Derive deja un pequeño hueco en la misma):

a) Calcular el valor del límite en el punto. Para ello, se puede utilizar el botón Calcular un límite de la barra de botones, y activar la tendencia por `Ambas` en el cuadro de diálogo que aparece. Si dicho límite existe, entonces la discontinuidad es evitable.

b) Si el límite no existe, puede que sí que existan los laterales. Para calcularlos utilizar el botón Calcular un límite y activar la tendencia por la `Izquierda` y luego por la `Derecha`. Si ambos límites laterales existen pero no son iguales, la discontinuidad será de salto.

c) Si alguno de los límites laterales no existe, entonces la discontinuidad es esencial.

4. Hallar los puntos de discontinuidad y estudiar el carácter de dichas discontinuidades en la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Indicación

a) Para delimitar los posibles puntos de discontinuidad, previamente definir la función teniendo en cuenta que se trata de una función definida a trozos. Por lo tanto, habrá que multiplicar el primer tramo por $\mathtt{CHI}(\infty, x, 0)$, y el segundo por $\mathtt{CHI}(0, x, \infty)$.

b) Aunque no sirve para demostrar la presencia o no de una discontinuidad, si representamos la gráfica de la función podemos darnos una idea sobre los puntos en los que aparecen las discontinuidades, teniendo muy presente que las discontinuidades evitables apenas resultan visibles en la gráfica, aunque sí que Derive deja un pequeño hueco en la misma.

c) Una vez definida la función, hay que encontrar los puntos que quedan fuera del dominio de cada uno de los tramos. Para ello, hay que analizar dónde se anulan los denominadores presentes en las definiciones de ambos tramos. Por ejemplo, si $x < 0$, el denominador $x^2 - 1$ se anula en $x = \pm 1$; sin embargo tan sólo nos interesa $x = -1$ ya que la definición impone que $x < 0$.

d) Cuando ya hemos descubierto cuáles son los puntos que están fuera del dominio, y por tanto son discontinuidades de la función, hay que analizar cual es su tipo. Para ello, aplicamos el mismo proceso que en el ejercicio anterior (vemos si existe el límite, con lo cual sería discontinuidad evitable, y si no existe analizamos los laterales para ver si es discontinuidad de salto; si no existe alguno de los laterales es discontinuidad esencial).

e) Por último, también hay que analizar los puntos en los que hay un cambio de definición de la función. En nuestro caso, en $x = 0$, y, de nuevo, analizando el límite general y los límites laterales.

3 Ejercicios propuestos

1. Calcular los siguientes límites si existen: 2

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

   b) $\lim_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$.

   c) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x+2}{e^{2x}}$.

   d) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\log(x^2-1)}{x+2}$.

   e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log(1/x)}{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})}$.

   f) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a} \quad n\in\mathbb{N}$.

   g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \quad n,m\in\mathbb{Z}$.

   h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

   i) $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

   j) $\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

   k) $\lim_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

   l) $\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x^2}$.

   m) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

   n) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen} x}$.

   ñ) $\lim_{x\to 0} \dfrac{6}{4+e^{-1/x}}$.

   o) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$.

   p) $\lim_{x\to \pi/2} \sec x - \operatorname{tg} x$.

2. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+3} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}} & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

   Calcular todas sus asíntotas.

3. Las siguientes funciones no están definidas en $x=0$. Determinar, cuando sea posible, su valor en dicho punto de modo que sean continuas. 2

   a) $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$.

   b) $h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$.

c) $j(x) = \dfrac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$.

d) $k(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Derivadas

1 Fundamentos teóricos

El concepto de derivada es uno de los más importantes del Cálculo pues resulta de gran utilidad en el estudio de funciones y tiene multitud de aplicaciones. En esta práctica introducimos este concepto y presentamos algunas de sus aplicaciones, tanto en funciones de una como de varias variables.

1.1 Tasas de variación media e instantánea. La derivada

Cuando queremos conocer la variación que experimenta una función real $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, se calcula la diferencia $f(b)-f(a)$ que se conoce como *incremento* de f, y se nota $\Delta f[a,b]$, aunque, a veces, simplemente se escribe Δf.

En muchas otras ocasiones veces resulta importante comparar la variación que experimenta la función f con relación a la variación que experimenta su argumento x en un intervalo $[a,b]$. Si tenemos en cuenta que $b=a+\Delta x$, esto viene dado por la *tasa de variación media*, que se define como:

$$\mathrm{TVM}f[a,b]=\mathrm{TVM}f[a,a+\Delta x]=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

También resulta muy común llamar a Δx con la letra h, por lo que la expresión anterior queda de la forma:

$$\mathrm{TVM}f[a,b]=\mathrm{TVM}f[a,a+h]=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Desde el punto de vista geométrico, la tasa de variación media de f en el intervalo $[a,a+\Delta x]$ es la pendiente de la recta secante a f en los puntos $(a,f(a))$ y $(a+\Delta x,f(a+\Delta x))$, tal y como se muestra en la figura 4.1.

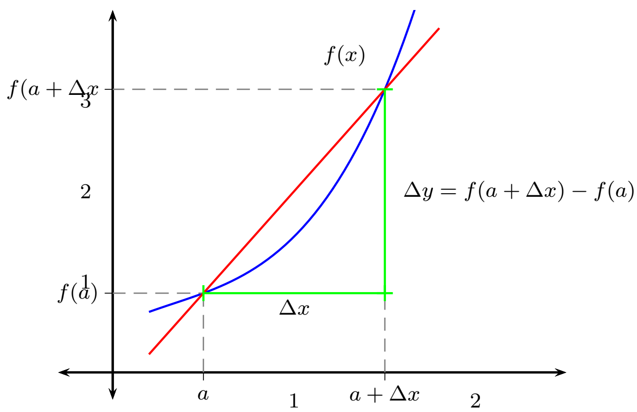


Figura 4.1 – La tasa de variación media como la pendiente de la recta secante a una función en dos puntos.

Y, a veces, incluso más importante que la tasa de variación media, es estudiar la tasa de variación que experimenta la función, no en un intervalo, sino en un punto, tomando para ello límites cuando el incremento en la variable independiente tiende 0. Definimos la tasa de variación de una función en un punto a, o también tasa de variación instantánea, a partir de la tasa de variación media de la función en el intervalo $[a, a + \Delta x]$. Dicha tasa, si existe, recibe el nombre de *derivada* de la función real $f(x)$ en un punto $a \in \mathbb{R}$, y se nota como $f'(a)$, o bien $\frac{df}{dx}(a)$:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando este límite existe, se dice que la función f es *derivable* o *diferenciable* en el punto a.

Geométricamente, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva de $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, tal y como se aprecia en la figura 4.2.

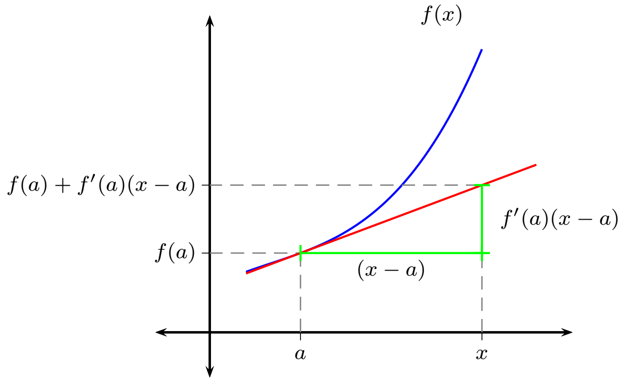


Figura 4.2 – La derivada como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto.

Recta tangente y normal a una función en un punto

De la gráfica anterior, fácilmente se deduce que la ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Y teniendo en cuenta que la pendiente de la recta normal (recta perpendicular a la recta tangente) es la inversa cambiada de signo, la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

1.2 Función derivada y derivadas sucesivas

El límite que nos sirve para calcular la derivada de una función en un punto, define una nueva función f' cuyo dominio está formado por los puntos en los que f es diferenciable. La función $f'(x)$, o también $\frac{df}{dx}$, se llama *primera derivada* de f.

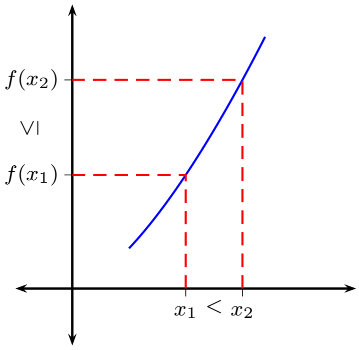
Puesto que f' es una función, puede derivarse a su vez, y la primera derivada de f' se conoce como segunda derivada de f, y se nota $f''(x)$ o $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Análogamente, la *n-ésima derivada* de f, designada por $f^{(n}$ o $\frac{d^n f}{dx^n}$, es la primera derivada de $f^{(n-1}$, para $n = 2, 3, \ldots$, es decir

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) \quad n = 2, 3, \ldots$$

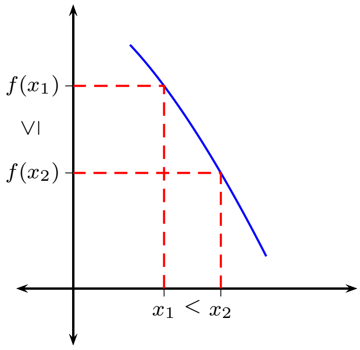
1.3 Estudio del crecimiento de una función

Una función $f(x)$ es *creciente* en un intervalo I si $\forall x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Del mismo modo, se dice que una función $f(x)$ es *decreciente* en un intervalo I si $\forall x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \geq f(x_2)$. En la figura 4.3 se muestran estos conceptos.



(a) Función creciente.



(b) Función decreciente.

Figura 4.3 – Crecimiento de una función.

Si f es una función derivable en el intervalo I, el signo de la derivada puede utilizarse para estudiar el crecimiento de la función ya que se cumple:

- f es creciente en $x_0 \in I$, si y sólo si, $f'(x_0) \geq 0$.
- f es decreciente en $x_0 \in I$, si y sólo si, $f'(x_0) \leq 0$.

Desde el punto de vista geométrico, esto es evidente, ya en los intervalos donde f es creciente, cualquier recta tangente tiene pendiente positiva, mientras que en los intervalos donde f es decreciente, las tangentes tienen pendiente negativa, tal y como se observa en la figura 4.3.

1.4 Determinación de los extremos relativos

Una función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en x_0 si existe un entorno A de x_0 tal que $\forall x \in A$ se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.

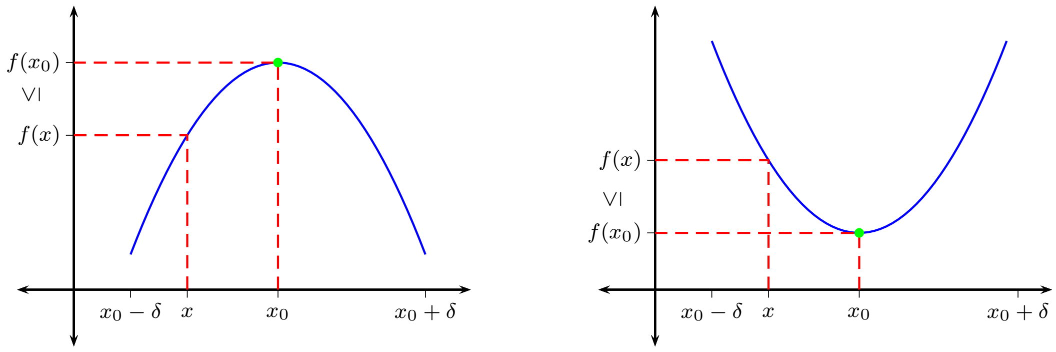
Una función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en x_0 si existe un entorno A de x_0 tal que $\forall x \in A$ se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

Diremos que la función $f(x)$ tiene un *extremo relativo* en un punto si tiene un *máximo o mínimo relativo* en dicho punto.

Cuando f es una función continua, entonces también se puede definir un extremo relativo como aquel punto donde cambia el crecimiento de la función. Así, un máximo relativo es un punto donde la función pasa de ser creciente a ser decreciente, y un mínimo relativo es un punto donde la función pasa de ser decreciente a ser creciente, tal y como se muestra en la figura 4.4.

Si f tiene un extremo relativo en un punto x_0 y existe la derivada en dicho punto, entonces se cumple que $f'(x_0) = 0$, es decir, la tangente a la gráfica de f en dicho punto es horizontal (figura 4.4). El recíproco no es cierto en general, de modo que esta es una condición necesaria pero no suficiente. No obstante, si f es una función derivable en un intervalo I, podemos utilizar esta propiedad para detectar los puntos entre los que se encontrarán los extremos relativos del intervalo I. Los puntos donde se anula la primera derivada, se conocen como *puntos críticos* y serán candidatos a extremos. Una vez detectados los puntos críticos, para ver si se trata de un extremo relativo o no, basta con estudiar el crecimiento de la función a la izquierda y a la derecha del punto tal y como se indicaba en la sección anterior. Resumiendo, si $f'(x_0) = 0$, entonces:

- Si existe un $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (derivada positiva a la izquierda de x_0) y $f'(x) < 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (derivada negativa a la derecha de x_0), x_0 es un máximo relativo.



(a) Máximo relativo. (b) Mínimo relativo.

Figura 4.4 – Extremos relativos de una función.

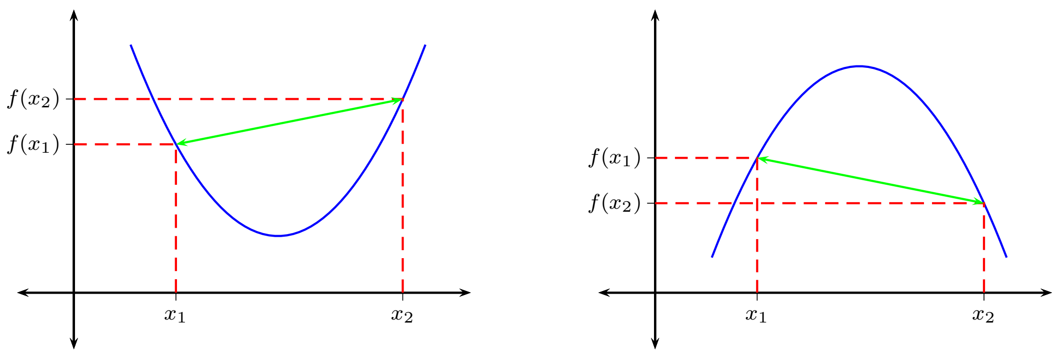
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (derivada negativa a la izquierda de x_0) y $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (derivada positiva a la derecha de x_0), x_0 es un mínimo relativo.
- En cualquier otro, x_0 es un *punto de inflexión*.

1.5 Estudio de la concavidad de una función

Se dice que una función $f(x)$ es *cóncava* en un intervalo I si $\forall \, x_1, x_2 \in I$, el segmento de extremos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de f.

Análogamente se dirá que es *convexa* si el segmento anterior queda por debajo de la gráfica de f.

Diremos que la función $f(x)$ tiene un *punto de inflexión* en x_0 si en ese punto la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. Estos conceptos se ilustran en la figura 4.5.



(a) Función cóncava. (b) Función convexa.

Figura 4.5 – Concavidad de una función.

Si f es una función derivable en el intervalo I, el signo de la segunda derivada puede utilizarse para estudiar la concavidad de la función ya que se cumple:

- f es cóncava en $x_0 \in I$, si y sólo si, $f''(x_0) \geq 0$.
- f es convexa en $x_0 \in I$, si y sólo si, $f''(x_0) \leq 0$.

1.6 Derivadas parciales de una función de n variables

Recordemos que la derivada de una función de una única variable en un punto $x = a$ se define como la tasa de variación instantánea de la función en dicho punto. Si llamamos h al incremento en la variable, la derivada de la función en $x = a$ se nota como $f'(a)$ ó $\dfrac{df}{dx}(a)$, y se calcula como:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Y, en general, para cualquier x en un conjunto en el que la función de una única variable sea derivable, puede definirse la función derivada $f'(x)$ ó $\frac{df}{dx}$, mediante el límite:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que, no obstante, se calcula aplicando las adecuadas reglas de derivación, más bien que acudiendo a la resolución directa del límite.

De igual forma, si tenemos una función de n variables $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, se pueden definir esas mismas tasas de variación instantáneas con respecto a cada una de las variables en un punto $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, para obtener las *Derivadas Parciales* de la función con respecto a cada una de las variables en el punto $\vec{x} = \vec{a}$, que se notarán como $f_{x_i}(\vec{a})$, o bien por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$:

$$f_{x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h},$$

Y la *Función Derivada Parcial* con respecto a cualquiera de las variables x_i, para todos los $\vec{x}$ de un conjunto, que se notará como f_{x_i}, o $\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h},$$

Lo cual, a efectos de cálculo, se resume en que la derivada parcial de una función de varias variables se obtiene como la derivada de una función de una única variable, que es aquella con respecto a la que se deriva, y constantes el resto. Como consecuencia, las reglas de derivación también se aplican en el cálculo de las derivadas parciales de este tipo de funciones, sin más que considerar constantes todas las variables con respecto a las que no estamos derivando.

Si para las funciones de una variable la derivada en un punto a tiene una interpretación gráfica sencilla como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$, también para funciones de dos variables la derivada parcial con respecto a x en el punto $\vec{a} = (x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

representa la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene al cortar la gráfica de la función en el punto $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ mediante el plano en el que y permanece constante e igual a y_0, y tan sólo varía el valor de x. E igualmente, la derivada parcial con respecto a y será la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene al cortar la gráfica de la función en $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ mediante el plano $x = x_0$.

1.7 Derivadas parciales sucesivas de una función de n variables

De la misma forma que en las funciones de una variable, mediante los límites que las definen, siempre y cuando existan, obtenemos las segundas, terceras y derivadas de cualquier orden. Es decir, si f es una función real de n variables, con sus correspondientes derivadas parciales, a su vez también las mismas son funciones de n variables que, en determinadas condiciones, podrán derivarse de nuevo con respecto a sus n variables para obtener derivadas parciales segundas, y así sucesivamente hasta órdenes superiores de derivación.

Para la derivada parcial de segundo orden se utiliza la notación $f_{x_i x_j}$ ó $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$:

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Por ejemplo, para una función de dos variables $f(x, y)$, tenemos dos derivadas parciales de primer orden, que siguen siendo funciones de las variables x e y:

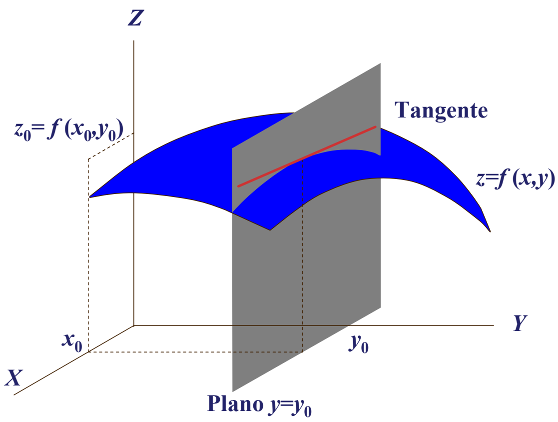


Figura 4.6 – La derivada parcial de una función $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0), como la pendiente de la recta tangente a la curva descrita por la intersección de la superficie de f y el plano de ecuación $y = y_0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

y cuatro diferentes de segundo orden, que también serán funciones de x e y, aunque ya no se refleje para aligerar la notación:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

La primera y la última reciben el nombre de derivadas segundas, mientras que la segunda y tercera se denominan derivadas cruzadas.

Si procedemos con las derivadas parciales de tercer orden tendríamos ocho diferentes, y el número es más amplio con funciones de tres o más variables. No obstante, el teorema conocido con *Teorema de Schwartz de las Derivadas Cruzadas* reduce el número de derivadas parciales diferentes ya que afirma:

Si f es una función de n variables con derivadas parciales segundas cruzadas continuas en un conjunto abierto que contiene al punto $\vec{a}$, entonces en dicho punto se cumple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

e igual con las derivadas cruzadas de tercer y superior orden.

Es decir, si se cumplen las hipótesis del teorema de Schwartz concluimos que, a efectos de cálculo, tan sólo importa el número de veces que se deriva respecto a cada variable, pero no el orden de la derivación.

1.8 Vector gradiente y matriz hessiana

Entre las múltiples aplicaciones de las derivadas parciales de funciones de varias variables, destacan como herramientas indispensables:

- El vector gradiente, muy utilizado, entre otras cosas, para determinar los puntos críticos de la función, así como la dirección y sentido de máximo crecimiento de la misma.

- La matriz Hessiana, y su determinante, que se utilizan para determinar el carácter de los puntos críticos de las funciones de varias variables (máximos, mínimos y puntos silla).

Vector gradiente

El conjunto de las n derivadas parciales de una función de n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, expresado en forma vectorial, recibe el nombre de *Vector Gradiente de f*. Es decir:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)$$

El gradiente de f también puede expresarse como la actuación de un operador diferencial (entendemos como operador una expresión matemática formal que tendrá sentido matemático una vez aplicado sobre una función) llamado *Operador Nabla*, que se nota como $\vec{\nabla}$, sobre f. La expresión del operador nabla en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Con ello, el gradiente de f toma la forma compacta:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f = \vec{\nabla} f$$

Y el gradiente de f en el punto $\vec{a}$:

$$\vec{\nabla} f(\vec{a})$$

Matriz hessiana

Con el conjunto de todas las derivadas parciales segundas se define la *Matriz Hessiana* de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y se nota H_f, de tal manera que la fila i es el vector gradiente de la derivada parcial de f con respecto a x_i, es decir:

$$H_f = \left(\vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Con ello, la matriz Hessiana en $\vec{a}$:

$$H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{a}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Y al determinante de esta matriz, $|H_f(\vec{a})|$, se le llama *Hessiano* de f en $\vec{a}$.

2 Ejercicios resueltos

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 2}{x + 3}$, se pide:

   a) Calcular la tasa de variación media de f en los intervalos $[-1, 3]$, $[-1, 0]$ y $[-1, -0{,}5]$, y calcular las correspondientes rectas secantes.

   Indicación

   1) Para calcular la tasa de variación media, definir previamente la función, y luego, por ejemplo para el intervalo $[-1, 3]$, aplicamos la fórmula vista en la teoría:
   $$\mathrm{TVM}f[-1,3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}.$$
   2) Para calcular la ecuación de la recta secante, podemos utilizar, por ejemplo, la ecuación de la recta de la que conocemos un punto por el que pasa, (x_0, y_0) y su pendiente, m:
   $$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$
   En nuestro caso, para el primero de los intervalos considerados, el punto puede ser, por ejemplo el $(-1, f(-1))$; y la pendiente viene dada por la tasa de variación media de la función en dicho intervalo. Es decir, la recta que buscamos tendrá como ecuación:
   $$y - f(-1) = \mathrm{TVM}f[-1,3]\,(x - (-1))$$
   3) Después de calcular la ecuación de la recta secante, podemos comprobar que la misma corta a la función en los puntos adecuados sin más que representar en la misma gráfica tanto f como la recta calculada.

   b) Calcular la tasa de variación instantánea de f en el punto -1 haciendo uso de límites, y calcular la correspondiente recta tangente.

   Indicación

   1) Como ya sabemos por la teoría, las tasa de variación instantánea de la función en un punto dado si existe, recibe el nombre de derivada de la función en el punto, y se calcula mediante el límite:
   $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
   en donde, por aligerar la notación, hemos llamado h a lo que en la teoría denominábamos Δx.
   Por lo tanto, para calcular la derivada de la función f en $a = -1$ mediante la definición, procedemos con:
   $$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$
   Para calcular el límite, podemos utilizar el botón Calcular un límite de la barra de botones.
   2) Para el cálculo de la recta tangente, de nuevo sabemos que la misma pasa por el punto $(-1, f(-1))$, y que su pendiente vale $f'(-1)$. Por lo tanto su ecuación es:
   $$y - f(-1) = f'(-1)\,(x - (-1))$$
   3) De nuevo, conviene representar en la misma gráfica tanto la función como la recta tangente en el punto considerado, para comprobar que los cálculos han sido los correctos.

2. Estudiar mediante la definición de derivada la derivabilidad de las funciones siguientes:

$$f(x) = |x - 1| \quad \text{en } x = 1,$$

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad \text{en } x = 0.$$

Indicación

a) Para la función $f(x)$, podemos inicialmente definirla, teniendo en cuenta que la sintaxis de la función valor absoluto es `Abs`, y después utilizar la definición de derivada en un punto dada en el problema anterior, y calcular el límite mediante el botón Calcular un límite. Por lo tanto, si existe la derivada en $x = 1$ su valor es:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

b) Para la función $g(x)$, podemos, para su definición, utilizar la función condicional de Derive `If(condición,opción 1,opción 2)`, de tal forma que si se cumple la `condición` el programa realizará la `opción 1`, y si no se cumple realizará la `opción 2`. La función condicional de Derive, `If`, entre otras muchas posibilidades, sirve para introducir funciones definidas a trozos. En nuestro caso la `condición` es $x \neq y$, la `opción 1` es $x \sin(1/x)$, y la `opción 2` es 0.

Así, la función $g(x)$ puede definirse mediante:

$$g(x) := \texttt{IF}(x \neq 0, x\sin(1/x), 0)$$

Y con ello, para calcular la derivada en $x = 0$, procedemos mediante la definición de derivada en un punto:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones hasta el orden 4:

a) $a^x \log a$.

b) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

A la vista de los resultados, ¿cual sería la expresión de la derivada n-ésima de cada una de estas funciones?

Indicación

a) Para cada una de las funciones, introducir la expresión de la misma, y proceder al cálculo de la sucesivas derivadas, desde orden 1 hasta orden 4, utilizando, por ejemplo, el botón Hallar una derivada de la barra de botones, escogiendo el orden adecuado.

b) Para el cálculo de la derivada n-ésima, teniendo en cuenta que en el cuadro de diálogo que aparece al pinchar en el botón Hallar una derivada tan sólo podemos introducir como orden de la misma un número entero, pero nunca un parámetro como n, no queda otra posibilidad que proceder por inducción, y a la vista de las primeras derivadas suponer cuál sería el valor de la derivada de orden n. Posteriormente, podemos comprobar que nuestra suposición es correcta utilizando la fórmula que hemos encontrado para calcular una derivada de orden bastante alto y comparando con el valor que da Derive para esa misma derivada.

4. Dada la función:

$$g(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + 1}$$

a) Representar la gráfica de g.

Indicación
Una vez introducida la función en Derive, utilizar el botón Ventana 2D para pasar al entorno de dibujo de funciones de una única variable, y allí utilizar el botón Representar Expresión para representar la gráfica.

b) Calcular la función derivada $g'(x)$, y representar su gráfica.

Indicación
Marcar la expresión de la función y utilizar el botón Hallar una derivada y escoger la variable x y el orden 1. Para representar la gráfica de la función derivada, seguir el proceso del punto anterior.

c) Calcular las raíces de $g'(x)$.

Indicación
Para calcular las raíces, marcar la expresión de la función derivada y utilizar el botón Resolver o despejar, escogiendo la variable x, y conviene utilizar el dominio Real para obtener únicamente la raíces reales, que son las que nos interesan.

d) A la vista de las raíces y de la gráfica de la función derivada, determinar los extremos relativos de la función y los intervalos de crecimiento.

Indicación
Tener en cuenta que la función es creciente en los puntos en los que la derivada es positiva, decreciente si la derivada es negativa, y aquellos puntos en los que la derivada vale cero (puntos críticos) serán extremos relativos si en ellos cambia el crecimiento de la función.

e) Calcular la segunda derivada $g''(x)$, y representar su gráfica.

Indicación
La podemos obtener derivando, mediante el botón Hallar una derivada, la función de partida, y escogiendo como orden de derivación 2; o también podemos directamente derivar la función derivada escogiendo como orden de derivación 1. Para representar la gráfica seguimos los pasos de cualquier otra representación.

f) Calcular las raíces de $g''(x)$.

Indicación
Igual que en apartados anteriores, marcamos la expresión de la segunda derivada y utilizamos el botón Resolver o despejar.

g) A la vista de las raíces y de la gráfica de la segunda derivada, determinar los intervalos de concavidad de la función y los puntos de inflexión.

Indicación
Recordar que la función de partida es cóncava si la derivada segunda es mayor que 0, convexa si la derivada segunda es menor que 0, y en los puntos en los que valga cero hay un candidato a punto de inflexión, que confirmaremos si lo es viendo si la función cambia de concavidad en dicho punto.

5. Estudiar el crecimiento, la concavidad, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$$

Indicación

a) Calcular la primera derivada (botón Hallar una derivada) y encontrar sus raíces (botón Resolver o despejar). Con ello podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos, si los hay (puede suceder que no encontremos raíces de la función derivada).

b) De igual forma, proceder al cálculo de la segunda derivada y de sus raíces para determinar concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

c) Puede resultar muy ilustrativo representar tanto la gráfica de la función de partida como las de su primera y segunda derivada para corroborar las conclusiones de los apartados anteriores.

6. Calcular las siguientes derivadas parciales:

a) $\dfrac{\partial}{\partial V}\dfrac{nRT}{V}$.

Indicación
1) Introducir la expresión en Derive.
2) Utilizar el botón Hallar una derivada, desplegando la lista de hipotéticas variables en las que podemos derivar (evidentemente, para Derive tanto n como R también son variables), y escoger la variable V y el orden 1.

b) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{x+y} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}$.

Indicación
1) Introducir la expresión en Derive. Tener en cuenta la sintaxis adecuada de la función seno: `sin`.
2) Utilizar el botón Hallar una derivada, desplegando la lista de hipotéticas variables en las que podemos derivar y escoger la variable y y el orden 1. Con ello, obtenemos la primera derivada con respecto a y.
3) Una vez obtenida primera derivada con respecto a y, para obtener la segunda con respecto a x, marcamos la expresión obtenida en el apartado anterior y volvemos a derivarla (botón Hallar una derivada) pero con respecto a x, escogiendo como orden de derivación el 1.

c) $\dfrac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} e^{x+y} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}$.

Indicación

1) Como ya tenemos la expresión de la función introducida para el apartado anterior, la marcamos y pasamos directamente a la derivación.
2) En primer lugar realizamos la derivada de segundo orden con respecto a x. Para ello, botón Hallar una derivada, escoger como variable de derivación x y como orden 2.
3) Para la derivada de orden 3, partiendo de la expresión generada en el apartado anterior, volvemos a derivar pero ahora con respecto a y y de orden 1.

7. Dada la función

$$f(x, y, z) = \operatorname{sen}\left(\left(x^2 - y^2\right) z\right)$$

a) Definir la función en Derive y calcular $f(0, -1, \pi/2)$.

Indicación

1) Para definirla, tan sólo introducir la expresión con su correspondiente operador de definición y la sintaxis adecuada de la función seno:

$$f(x, y, z) := \sin((x^2 - y^2)z)$$

2) Una vez definida, para calcular $f(0, -1, \pi/2)$, introducir directamente la expresión en la línea de edición y simplificar.

b) Calcular su vector gradiente.

Indicación

Para calcular su vector gradiente, utilizar la función `GRAD`, indicando también las variables en las que se realizarán las derivadas parciales:

$$\texttt{GRAD}(F(x, y, z), [x, y, z])$$

c) Calcular su matriz Hessiana.

Indicación

Para calcular la matriz Hessiana, aplicar de nuevo el gradiente sobre la expresión del gradiente calculado en el apartado anterior. Para ello, simplemente marcar la expresión anterior y volver a aplicar el gradiente, o directamente: $\texttt{GRAD}(\texttt{GRAD}(F(x, y, z), [x, y, z]), [x, y, z])$

d) Comprobar que se cumple el teorema Schwartz de las derivadas para las derivas cruzadas, calculando:

1) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$
2) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$
3) ¿Puedes predecir el valor de: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}$?

Indicación

1) Para el primero de los apartados, calcular, mediante el botón Hallar una derivada, en primer lugar la derivada de orden 1 con respecto a y. A continuación derivar, con orden de derivación 1, la expresión resultante con respecto a z. Y posteriormente derivar, de nuevo con orden 1, con respecto a x.
2) Para el segundo de los apartados, proceder como en el primero pero cambiando el orden de derivación: en primer lugar con respecto a y, luego con respecto a x, y por último con respecto a z. Observar cómo, a pesar de haber cambiado el orden de derivación, el resultado final no ha variado.
3) En el último de los apartados, se puede predecir fácilmente que el resultado será el mismo, ya que únicamente hemos cambiado el orden de derivación. No obstante, puede comprobarse fácilmente.

3 Ejercicios propuestos

1. Probar que no es derivable en $x = 0$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto x_0 indicado.

   a) $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad x_0 = \pi/2.$

   b) $y = (3 - x^2)^4 \sqrt[3]{5x - 4}, \quad x_0 = 1.$

   c) $y = \log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \operatorname{arc\,tg} x, \quad x_0 = 0.$

3. Una nave espacial está en problemas cerca del sol. Se encuentra en la posición $(1, 1, 1)$ y la temperatura de la nave cuando está en la posición (x, y, z) viene dada por $T(x, y, z) = \mathrm{e}^{-x^2-2y^2-3z^2}$ donde x, y, z se miden en metros. ¿En qué dirección debe moverse la nave para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible?

Práctica de Matemáticas con Derive 5

Polinomios de Taylor

1 Fundamentos teóricos

A veces, las funciones elementales como las trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas, o composiciones de las mismas, son difíciles de tratar y suelen aproximarse mediante polinomios que son funciones mucho más simples y con muy buenas propiedades, ya que son continuas y derivables (a cualquier orden) en todos los reales.

1.1 Polinomio de Taylor

Dada una función $f(x)$, n veces derivable en un punto a, se llama *polinomio de Taylor* de orden n para f en a, al polinomio

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Este polinomio es el polinomio de grado menor o igual que n que mejor aproxima a f en un entorno del punto a, y por tanto, si x está próximo a a, $f(x) \approx P_{n,f,a}(x)$. Además, cuanto mayor es el grado del polinomio, mejor es la aproximación, tal y como se muestra en el ejemplo de la figura 5.1.

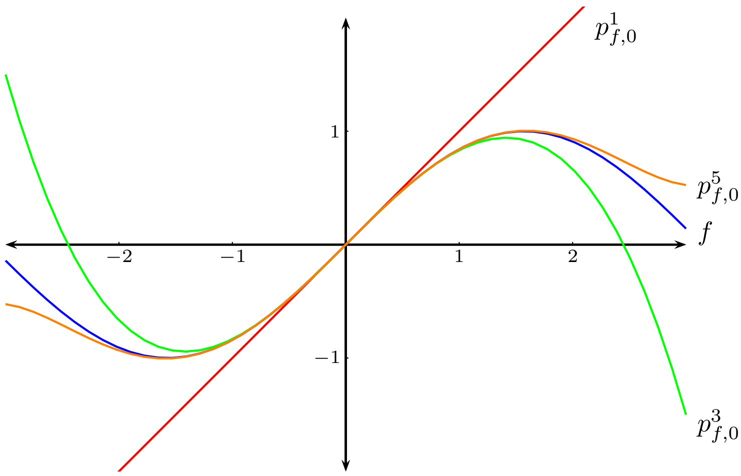


Figura 5.1 – Polinomios de Taylor de distintos grados para la función $\operatorname{sen} x$ en el punto 0.

Cuando nos interesa aproximar una función en un entorno del 0, la ecuación del polinomio de Taylor resulta especialmente simple:

$$P_{n,f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}x^i,$$

y este polinomio se conoce como *polinomio de Mc Laurin* de orden n de f.

1.2 Resto de Taylor

Los polinomios de Taylor nos permiten calcular el valor aproximado de una función en un entorno de un punto, pero normalmente el valor que proporciona el polinomio de Taylor difiere del valor real de la función, es decir, se comete un error en la aproximación. Dicho error se conoce como el *resto de Taylor* de orden n para f en a, y es

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x).$$

El resto mide el error cometido al aproximar $f(x)$ mediante $P_{n,f,a}(x)$ y nos permite expresar la función f como la suma de un polinomio de Taylor más su resto correspondiente:

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x).$$

Esta última expresión se conoce como *fórmula de Taylor* de orden n para f en el punto a.

Forma de Lagrange del resto

Normalmente, cuando se aproxima una función mediante un polinomio de Taylor, no se conoce el error cometido en la aproximación. No obstante, es posible acotar dicho error de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema 1 *Sea f una función para la que las $n+1$ primeras derivadas están definidas en el intervalo $[a,x]$. Entonces existe un $t \in (a,x)$ tal que el resto de Taylor de orden n para f en el punto a viene dado por*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Esta expresión se conoce como *forma de Lagrange del resto*.

Este teorema nos permite acotar el resto en valor absoluto, ya que una vez fijado el valor de x donde queremos aproximar el valor de la función, el resto en la forma de Lagrange es una función que sólo depende de t. Puesto que $t \in (a,x)$, basta con encontrar el máximo del valor absoluto de esta función en dicho intervalo para tener una cota del error cometido.

2 Ejercicios resueltos

1. Calcular los polinomios de Taylor de la función $\log x$ en el punto 1, hasta el grado 4 y representarlos junto a la función en la misma gráfica. ¿Qué polinomio aproxima mejor a la función en un entorno del punto 1?

Indicación

a) Introducir $\log(x)$ en la línea de edición. Utilizar el menú `Cálculo/Polinomios de Taylor`. En el cuadro que aparece, mantener en el campo `Variable` la x, escribir 1 en el campo `Punto`, por ser 1 el punto en que se desea realizar el cálculo, y escribir 1 en el campo `Grado` para calcular el polinomio de grado 1. Pinchar en `Simplificar` y se obtiene el polinomio de grado 1.

b) Marcando la expresión $\log(x)$ y repitiendo el proceso anterior con grados 2,3 y 4 sucesivamente, se obtienen los polinomios pedidos.

c) Para representar la función $\log(x)$ se marca dicha expresión, a continuación se pincha en el botón `Ventana 2D` de la barra de botones para acceder al entorno de gráficos de dos dimensiones, y una vez allí se pincha en el botón `Representar Expresión`.

d) Para volver a la Ventana de Álgebra se pincha en el botón `Activar la Ventana de Álgebra`, y una vez en ella se realiza lo indicado en el apartado anterior sucesivamente con los polinomios de grados 1,2,3 y 4 para obtener sus representaciones gráficas.

e) Al haber cinco gráficas en la misma ventana es conveniente indicar a qué polinomio corresponde cada una de ellas. Para ello, en la Ventana de Gráficos-2D se pincha en el punto del gráfico en que se desea colocar la anotación. A continuación se utiliza el menú `Insertar/Anotación`, se escribe en el campo `Texto` del cuadro la anotación que se desea que aparezca y se pincha en el botón `Sí`.

2. Dar el valor aproximado de $\log 1{,}2$ utilizando los polinomios del ejercicio anterior y calcular el error cometido en cada caso. Rellenar la siguiente tabla.

Punto	Grado	Aproximación	Error Cometido

Indicación

a) Para calcular los valores aproximados de $\log 1{,}2$ proporcionados por cada uno de los polinomios obtenidos en el ejercicio anterior, desde la Ventana de Álgebra se utiliza el menú `Introducir/Valor de una Variable`. En el cuadro que aparece se introduce x en el campo `Nombre de la Variable` y 1.2 en el campo `Valor a asignar`, y una vez hecho esto se pincha en el botón `Sí`. Se marcan sucesivamente los polinomios obtenidos y se pincha en el símbolo $\approx$ para obtener las aproximaciones dadas por cada polinomio.

b) Para calcular el error cometido en cada caso se calcula el valor absoluto de la diferencia entre $\log(1{,}2)$ y la aproximación obtenida. Así, si la aproximación obtenida con el polinomio de grado 1 fue 0,2 se introduce en la línea de edición $ABS(\log(1\,.\,2) - 0\,.\,2)$ y se pincha en el símbolo $\approx$.

3. Calcular el polinomio de Mc Laurin de orden 3 para la función $\operatorname{sen} x$, y utilizarlo para aproximar el valor de $\operatorname{sen} 1/2$, dando una cota del error cometido. Hacer lo mismo para orden 5.

Indicación
Para realizar este ejercicio basta seguir las indicaciones realizadas en los ejercicios anteriores, teniendo en cuenta que al tratarse de polinomios de Mc Laurin en el campo `Punto` habrá que poner 0.

3 Ejercicios propuestos

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se pide:

a) El polinomio de Taylor de cuarto grado de f en $x = 0$.

b) Calcular un valor aproximado de $\sqrt{1{,}02}$ utilizando un polinomio de segundo grado y otro utilizando un polinomio de cuarto grado. Dar una cota del error cometido en cada caso.

2. Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \cos x$, se pide:

   a) Calcular los polinomios de McLaurin de segundo grado para f y g.

   b) Utilizar los polinomios anteriores para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}.$$

Práctica de Matemáticas con Derive 6

Integrales

1 Fundamentos teóricos

Junto al concepto de derivada, el de integral es otro de los más importantes del cálculo matemático. Aunque dicho concepto surge en principio, como técnica para el cálculo de áreas, el teorema fundamental del cálculo establece su relación con la derivada, de manera que, en cierto sentido, la diferenciación y la integración son operaciones inversas.

En esta práctica se introduce el concepto de integral como antiderivada, y también el de integral de Riemann, que permite calcular áreas por debajo de funciones acotadas en un intervalo.

1.1 Primitivas e Integrales

Función Primitiva

Se dice que la función $F(X)$ es una *función primitiva* de $f(x)$ si se verifica que $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \operatorname{Dom} f$.

Como dos funciones que difieran en una constante tienen la misma derivada, si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ también lo será toda función de la forma $F(x) + k$ $\forall k \in \mathbb{R}$.

Función integral indefinida

Se llama *función integral indefinida* de la función $f(x)$ al conjunto de todas sus funciones primitivas y se representa como:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

siendo $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ y C una constante arbitraria.

Linealidad de la integral

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que admiten primitiva, y una constante $k \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

y:

$$\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

1.2 Integral de Riemann

Se llama *partición* de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, a una colección finita de puntos del intervalo, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, tales que $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, con lo que el intervalo $[a, b]$ queda dividido en n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, ..., n-1$.

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$, se llama *suma inferior* de f en relación a P, y se designa por $L(P, f)$, a:

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

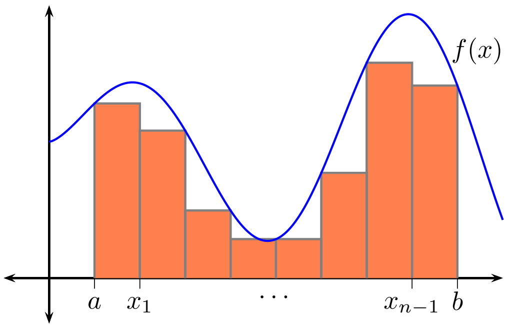
donde $m_i = \text{ínf}\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$.

Análogamente se llama *suma superior* de f en relación a P, y se designa por $U(P, f)$, a:

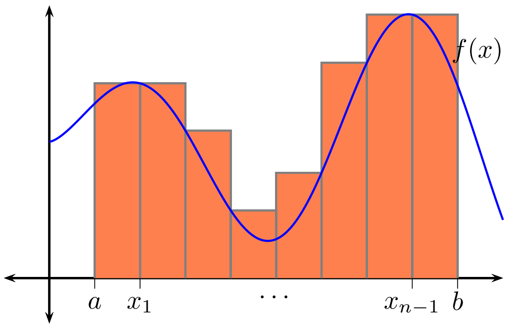
$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$.

La *suma inferior* y la *suma superior* así definidas representan las sumas de las áreas de los rectángulos que tienen por bases los subintervalos de la partición, y por alturas los valores mínimo y máximo respectivamente de la función f en los subintervalos considerados, tal y como se muestra en la figura 6.1. Así, los valores de $L(P, f)$ y $U(P, f)$ serán siempre menores y mayores respectivamente, que el área encerrada por la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[a, b]$.



(a) Suma inferior $L(P, f)$.



(b) Suma superior$U(P, f)$.

Figura 6.1 – Áreas medidas por las sumas superior e inferior correspondientes a una partición.

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada es *integrable* en el intervalo $[a, b]$ si se verifica que:

$$\sup\{L(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\} = \text{ínf}\{U(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\}$$

y ese número se designa por $\int_a^b f(x)\,dx$ o simplemente por $\int_a^b f$.

Propiedades de la Integral

1. **Linealidad**

   Dadas dos funciones f y g integrables en $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

   y

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

2. **Monotonía**

   Dadas dos funciones f y g integrables en $[a,b]$ y tales que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ se verifica que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

3. **Acotación**

   Si f es una función integrable en el intervalo $[a,b]$, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \ M(b-a)$$

4. **Aditividad**

   Si f es una función acotada en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$, verificándose además:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea G una función continua en $[a,b]$. Entonces G es derivable en (a,b) y $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$ si y sólo si:

$$G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Regla de Barrow

Si f es una función continua en $[a,b]$ y G es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$ entonces:

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

De aquí se deduce que:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

1.3 Integrales impropias

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama *impropia* si el intervalo (a,b) no está acotado o si la función $f(x)$ no está acotada en el intervalo (a,b).

Si el intervalo (a,b) no está acotado, se denomina integral impropia de primera especie mientras que si la función no está acotada en el intervalo se denomina integral impropia de segunda especie.

1.4 Cálculo de áreas

Una de las principales aplicaciones de la integral es el cálculo de áreas.

Área de una región plana encerrada por dos curvas

Si f y g son dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$ y se verifica que $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a, b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Observaciones

1. El intervalo (a, b) puede ser infinito y la definición sería análoga, pero en ese caso es preciso que la integral impropia sea convergente.

2. Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) = 0$ al calcular la integral entre a y b se obtiene el área encerrada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (figura 6.2).

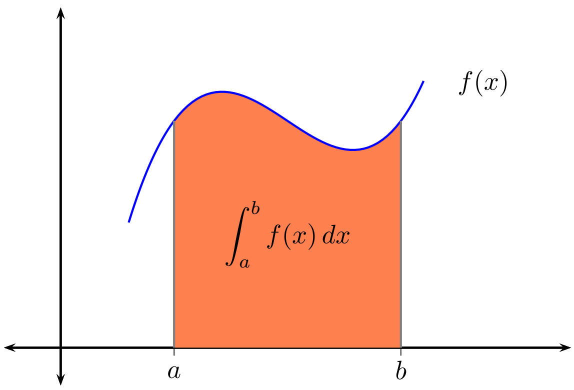


Figura 6.2 – Cálculo de área encerrada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ mediante la integral definida.

3. Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, c]$ y $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [c, b]$, el área de la región plana encerrada por f, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje de abscisas se calcula mediante:

$$A = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx.$$

4. Si las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en los puntos de abscisas a y b, no cortándose en ningún otro punto cuya abscisa esté comprendida entre a y b, el área encerrada por dichas curvas entre esos puntos de corte puede calcularse mediante:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

1.5 Cálculo de Volúmenes

Volumen de un sólido

Si se considera un cuerpo que al ser cortado por un plano perpendicular al eje OX da lugar, en cada punto de abscisa x, a una sección de área $A(x)$, el volumen de dicho cuerpo comprendido entre los planos perpendiculares al eje OX en los puntos de abscisas a y b es:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Volumen de un cuerpo de revolución

Si se hace girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX se genera un sólido de revolución cuyas secciones perpendiculares al eje OX tienen áreas $A(x) = \pi(f(x))^2$, y cuyo volumen comprendido entre las abscisas a y b será:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

En general, el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje OX la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$V = \int_a^b \pi|(f(x))^2 - (g(x))^2|\,dx$$

De manera análoga se calcula el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la rotación de una curva $x = f(y)$ alrededor del eje OY, entre los planos $y = a$ e $y = b$, mediante:

$$V = \int_a^b \pi(f(y))^2 dy = \pi \int_a^b (f(y))^2 dy$$

2 Ejercicios resueltos

1. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\int x^2 \log x\,dx$

   Indicación
   Introducir $x^2\log(x)$ en la línea de edición. Utilizar el menú `Cálculo->Integrales`, eligiendo `Integral Indefinida`, `Constante` c y pinchar en el botón Simplificar.

   b) $\int \dfrac{5x^2+4x+1}{x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x}\,dx$

   Indicación
   Proceder de la forma indicada en el apartado *a*).

   c) $\int \dfrac{6x+5}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

   Indicación
   Proceder de la forma indicada en el apartado *a*).

2. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$

   Indicación
   Introducir:

   $$\frac{x^3}{x^2+x+1}$$

   en la línea de edición. Utilizar el menú `Cálculo->Integrales` y elegir `Integral Definida`. Introducir $-\frac{1}{2}$ en `Límite Inferior` y 0 en `Límite Superior`, y pinchar en Simplificar.

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$

Indicación
Seguir las indicaciones realizadas en el apartado *a*), introduciendo:

$$\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$

en la línea de edición y los valores 2 y 4 en `Límite Inferior` y `Límite Superior` respectivamente.

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos 2x}$

Indicación
Seguir las indicaciones realizadas en el apartado *a*), introduciendo:

$$\frac{1}{3+\cos 2x}$$

en la línea de edición y los valores 0 y $\pi/2$ en `Límite Inferior` y `Límite Superior` respectivamente.

3. Calcular la siguiente integral

$$\int_2^{\infty} x^2e^{-x}\,dx.$$

Indicación
Seguir las indicaciones realizadas en el apartado *a*) del ejercicio 1, introduciendo x^2e^{-x} en la línea de edición y los valores 2 e ∞ en `Límite Inferior` y `Límite Superior` respectivamente.

4. Representar la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, y calcular el área limitada por dicha parábola, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

Indicación

a) Se introduce $x^2 - 7x + 6$ en la línea de edición, se pincha en el botón Ventana 2D de la barra de botones para acceder al entorno de gráficos de dos dimensiones, y una vez allí se pincha en el botón Representar Expresión.

b) Para volver a la Ventana de Álgebra se pincha en el botón Activar la Ventana de Álgebra, y una vez en ella se realiza lo indicado en el apartado anterior sucesivamente con las expresiones $x = 2$ y $x = 6$ para obtener sus representaciones gráficas.

c) Puede observarse en la gráfica que, entre $x = 2$ y $x = 6$, la parábola $y = x^2 - 7x + 6$ se encuentra por debajo del eje de abscisas, por lo que si se calcula el valor de la integral definida de $x^2 - 7x + 6$ entre esos límites el resultado será negativo. Para hallar el área encerrada habrá que cambiar el signo al resultado.

d) Seleccionar $x^2 - 7x + 6$. Utilizar el menú `Cálculo->Integrales` y elegir `Integral Definida`. Introducir 2 en `Límite Inferior` y 6 en `Límite Superior`, y pinchar en Simplificar. El área buscada será el número obtenido cambiado de signo.

e) También podría haberse hallado el área pedida calculando la integral definida de $-(x^2 - 7x + 6)$, o la de $|x^2 - 7x + 6|$, entre $x = 2$ y $x = 6$.

5. Representar gráficamente la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$, la recta $x = 2$ y el eje OX, y hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OX de la región anterior.

Indicación

a) Se introduce $y^2 = 8x$ en la línea de edición, se pincha en el botón Ventana 2D de la barra de botones para acceder al entorno de gráficos de dos dimensiones, y una vez allí se pincha en el botón Representar Expresión.

b) Para volver a la Ventana de Álgebra se pincha en el botón Activar la Ventana de Álgebra, y una vez en ella se realiza lo indicado en el apartado anterior con la expresión $x = 2$ y se observa en la gráfica la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$, la recta $x = 2$ y el eje OX.

c) Para calcular el volumen generado en la rotación alrededor del eje OX de la región anterior, se calcula la integral de $\pi 8x$ entre 0 y 2, siguiendo las indicaciones incluidas en el ejercicio 1 apartado *a*).

3 Ejercicios propuestos

1. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\int \dfrac{2x^3+2x^2+16}{x(x^2+4)^2}\,dx$

   b) $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx$

2. Hallar el área encerrada la parábola $y = 9 - x^2$ y la recta $y = -x$.

3. Hallar el área encerrada por la curva $y = e^{-|x|}$ y su asíntota.

4. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OX de la región plana limitada por la parábola $y = 2x^2$, las rectas $x = 0$, $x = 5$ y el eje OX, representando previamente dicha región plana.

5. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OY del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1 Fundamentos teóricos

Muchos fenómenos de la naturaleza como la desintegración radiactiva, algunas reacciones químicas, el crecimiento de poblaciones o algunos problemas gravitatorios responden a determinadas ecuaciones en las que se relaciona una función con sus derivadas. Este tipo de ecuaciones se conocen como *ecuaciones diferenciales* y en esta práctica estudiaremos cómo resolverlas.

1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.)

Se llama *ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.)* a una relación entre una variable independiente x, una función desconocida $y(x)$, y alguna de las derivadas de y con respecto a x. Esto es, a una expresión de la forma

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Llamaremos *orden de la ecuación diferencial ordinaria* al mayor orden de las derivadas que aparezcan en la ecuación. Así, la forma más general de una E.D.O. de primer orden es $F(x, y, y') = 0$, que puede quedar de la forma $y' = G(x, y)$ si se puede despejar y'.

Solución de una E.D.O.

Diremos que una función $f(x)$ es *solución* o *integral* de la EDO $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, si al sustituir en ella y y sus derivadas por $f(x)$ y sus derivadas respectivas, la ecuación se satisface, es decir $F(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n}(x)) = 0$.

En general una ecuación diferencial admite infinitas soluciones, y se limita su número imponiendo condiciones iniciales.

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' = F(x, y).$$

Esta es la forma estándar de escribir la ecuación, aunque a veces, también se suele representar en la forma diferencial como

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Soluciones general y particular de una E.D.O. de primer orden

Se llama *solución general* o *integral general* de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden a una función $y = f(x, c)$, donde c es una constante real, tal que para cada valor de c, la función $y = f(x, c)$ es una solución de la ecuación diferencial. A esta solución así obtenida para un valor concreto de c se le denomina *solución particular* o *integral particular* de la ecuación diferencial.

En la práctica, la determinación de las constantes que conducen a una solución particular se realiza imponiendo ciertas condiciones iniciales en el problema, que son los valores que debe tomar la solución en determinados puntos. Así, para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = F(x, y)$, una condición inicial se expresaría de la forma $y(x_0) = y_0$, y la solución particular sería una función $y = f(x)$ tal que $f'(x) = F(x, f(x))$, y $f(x_0) = y_0$.

Por ejemplo, si consideramos la ecuación diferencial $y' = y$, resulta sencillo comprobar que su solución general es $f(x) = ce^x$, ya que $f'(x) = ce^x$ y se cumple la ecuación. Si para esta misma ecuación tenemos la condición inicial $y(0) = 1$, entonces, al imponer dicha condición a la solución general, se tiene $f(0) = ce^0 = 1$, de donde se deduce que $c = 1$, y por tanto la solución particular sería $f(x) = e^x$.

Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas, denominadas *curvas integrales*, una para cada valor concreto asignado a la constante arbitraria. En la figura 7.1 se muestran las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = y$.

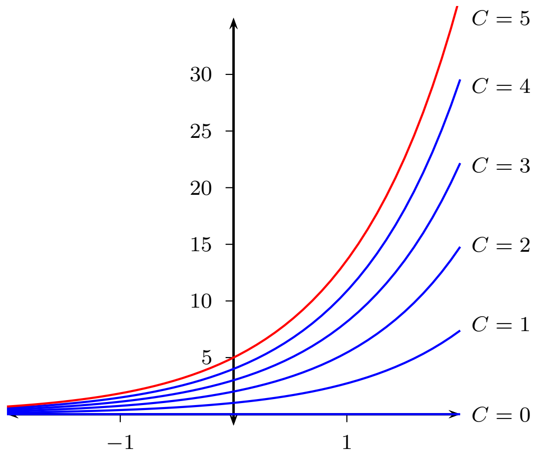


Figura 7.1 – Familia de curvas integrales que son solución de la ecuación $y' = y$.

Existencia y unicidad de soluciones

El siguiente teorema aporta una condición suficiente, aunque no necesaria, para la existencia y la unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Teorema *Si $F(x, y)$ y $\partial F/\partial y$ son funciones continuas en un entorno del punto (x_0, y_0), entonces la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ tiene una solución $y = f(x)$ que verifica $f(x_0) = y_0$, y además esa solución es única.*

Cuando no se cumplen las condiciones del teorema hay que tener cuidado porque la ecuación puede no tener solución, o bien tener soluciones múltiples como ocurre con la ecuación $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, que tiene dos soluciones $y = 0$ y $y = x^3$ que pasan por el punto $(0, 0)$, ya que $\frac{\partial}{\partial y}(3\sqrt[3]{y^2}) = 2/\sqrt[3]{y}$ que no existe en $(0, 0)$.

Desafortunadamente, el teorema anterior sólo nos habla de la existencia de una solución pero no nos proporciona la forma de obtenerla. En general, no existe una única técnica de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, sino que dependiendo de la forma que tengan $M(x, y)$ y $N(x, y)$, se utilizan distintas técnicas.

1.3 EDO de variables separables

Una E.D.O. de primer orden es de *variables separables* si se puede poner de la forma $y'g(y) = f(x)$ o bien $M(x)dx + N(y)dy = 0$, donde $M(x)$ es una función que sólo depende de x y $N(y)$ sólo depende de y.

La solución de una ecuación de este tipo se obtiene fácilmente integrando $M(x)$ y $N(y)$ por separado, es decir

$$\int M(x)\,dx = -\int N(y)\,dy.$$

1.4 EDO Homogéneas

Se dice que una función $F(x,y)$ es *homogénea* de grado n si se cumple $F(kx,ky) = k^n F(x,y)$.

Una E.D.O. de primer orden es *homogénea* si se puede poner de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ o bien $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Las ecuaciones homogéneas son fácilmente reducibles a ecuaciones de variables separables mediante el cambio $y = ux$, siendo u una función derivable de x.

1.5 EDO Lineales

Una E.D.O. de primer orden es *lineal* si se puede poner de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$, donde P y Q son funciones continuas de x.

Para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza la técnica de los factores integrantes. Un factor integrante es una función $u(x)$ cuya derivada sea $P(x)u(x)$, con lo que al multiplicar $u(x)$ por el lado izquierdo de la ecuación, el resultado es la derivada del producto $u(x)y$, es decir

$$u(x)y' + u(x)P(x)y = \frac{d}{dx}(u(x)y).$$

A partir de aquí, si también multiplicamos por $u(x)$ el lado derecho de la ecuación tenemos

$$\frac{d}{dx}(u(x)y) = Q(x)u(x),$$

por lo que integrando, resulta

$$u(x)y = \int Q(x)u(x)\,dx$$

de donde se puede despejar fácilmente y.

Por último, resulta fácil comprobar que un factor integrante de esta ecuación es $u(x) = e^{\int P(x)\,dx}$, de manera que la solución quedaría

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

2 Ejercicios resueltos

Indicación

Para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden pueden emplearse los comandos siguientes:

`DSOLVE1_GEN(p,q,x,y,c)` proporciona la solución general de $p(x,y)+q(x,y)y'=0$.

`DSOLVE1(p,q,x,y,`x_0,y_0`)` proporciona la solución particular de $p(x,y)+q(x,y)y'=0$, con la condición inicial $y_0=y(x_0)$.

`SEPARABLE_GEN(p,q,x,y,c)` proporciona la solución general de $y'=p(x)q(y)$.

`SEPARABLE(p,q,x,y,`x_0,y_0`)` proporciona la solución particular de $y'=p(x)q(y)$, con la condición inicial $y_0=y(x_0)$.

`HOMOGENEOUS_GEN(r,x,y,c)` proporciona la solución general de $y'=r(x,y)$, si r es homogénea.

`HOMOGENEOUS(r,x,y,`x_0,y_0`)` proporciona la solución particular de $y'=r(x,y)$, si r es homogénea, con la condición inicial $y_0=y(x_0)$.

`LINEAR1_GEN(p,q,x,y,c)` proporciona la solución general de $y'+p(x)y=q(x)$.

`LINEAR1(p,q,x,y,`x_0,y_0`)` proporciona la solución particular de $y'+p(x)y=q(x)$, con la condición inicial $y_0=y(x_0)$.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables y dibujar algunas de sus curvas integrales:

   a) $e^y(1+x^2)y'-2x(1+e^y)=0$.

   Indicación

   1) Si se desea utilizar `DSOLVE1_GEN(p,q,x,y,c)`, hay que observar la ecuación que se desea resolver y ver que los valores de `p` y `q` son $-2x(1+e^y)$ y $e^y(1+x^2)$ respectivamente. Por consiguiente hay que introducir `DSOLVE1_GEN(`$-2x(1+e^y)$`,`$e^y(1+x^2)$`,x,y,c)` en la línea de edición y pinchar en el símbolo = para obtener la solución de la ecuación.
   2) Para dibujar una de sus curvas integrales se introduce en la línea de edición un valor de `c`, por ejemplo `c:=-1`, se selecciona la solución obtenida de la ecuación, se pincha en el botón `Ventana 2D` para acceder al entorno de gráficos de dos dimensiones, y una vez en él se pincha en el botón `Representar Expresión`. Se pincha en el botón `Activar la ventana de Álgebra` para volver a dicha ventana, y una vez en ella se introduce otro valor de `c` y se repite el proceso. Los valores de `c` que se introduzcan deben dar lugar a gráficas reales. Una vez finalizado el dibujo de las curvas integrales deseadas se introduce en la línea de edición c:= para anular la asignación de valores a `c`.

   b) $y-xy'=a(1+x^2y')$.

   Indicación

   c) Seguir las indicaciones del apartado anterior con los valores de `p` y `q` correspondientes a la ecuación que se desea resolver. Dichos valores son $y-a$ y $-x(1+ax)$ respectivamente. Por consiguiente hay que introducir `DSOLVE1_GEN(`$y-a$`,`$-x(1+ax)$`,x,y,c)` en la línea de edición y proceder de la forma indicada.

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

   a) $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}y'=0$, con la condición inicial $y(0)=1$.

   Indicación

   b) Si se desea utilizar `SEPARABLE(p,q,x,y,`x_0`,`y_0`)`, los valores de `p` y `q` son $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ respectivamente. Por otra parte, como la condición inicial es $y(0)=1$, habrá que poner $x_0=0$ e $y_0=1$. Por consiguiente hay que introducir `SEPARABLE(`$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$`,`$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$`,x,y,0,1)` en la línea de edición y pinchar en el símbolo = para obtener la solución de la ecuación.

   c) $(1+e^x)yy'=e^y$, con la condición inicial $y(0)=0$.

   Indicación

   d) Seguir las indicaciones del apartado anterior con los valores de p, q, x_0 e y_0 correspondientes a la ecuación que se desea resolver y la condición inicial dada.Dichos valores son $\frac{1}{1+e^x}$ y $\frac{e^y}{y}$ para `p` y `q` respectivamente, y 0 para x_0 e y_0. Por consiguiente hay que introducir `SEPARABLE(`$\frac{1}{1+e^x},\frac{e^y}{y},x,y,0,0$`)` en la línea de edición y pinchar en el símbolo = para obtener la solución de la ecuación.

3. Comprobar que las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas y resolverlas:

   a) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$.

   Indicación

   1) Para comprobar que la ecuación diferencial dada es homogénea basta despejar y' en ella, obteniéndose $y' = \frac{-4x^2+xy-y^2}{x^2-xy+4y^2} = \frac{-4+\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-\frac{y}{x}+4(\frac{y}{x})^2}$ con lo que queda demostrado que es de la forma $y' = f(\frac{y}{x})$ y por tanto se trata de una ecuación homogénea.
   2) Si se desea utilizar `HOMOGENEOUS_GEN(r,x,y,c)` para resolver la ecuación, el valor de `r` es $\frac{-4x^2+xy-y^2}{x^2-xy+4y^2}$ por lo que hay que introducir `HOMOGENEOUS_GEN(`$\frac{-4x^2+xy-y^2}{x^2-xy+4y^2}, x, y, c$`)` en la línea de edición y pinchar en el símbolo = para obtener la solución de la ecuación.

   b) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$, con la condición inicial $y(1) = 1$.

   Indicación

   c) A la vista de la ecuación es claro que se trata de una E.D.O. homogénea, pues tanto $(x + y)$ como $(y - x)$ son funciones homogéneas de grado 1. Para resolverla basta introducir `HOMOGENEOUS(`$\frac{x+y}{x-y}, x, y, 1, 1$`)` en la línea de edición y pinchar en el símbolo = para obtener la solución de la ecuación.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

   a) $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

   Indicación

   b) A la vista de la ecuación, es claro que se trata de una E.D.O. lineal. Para resolverla basta introducir `LINEAR1(`$\cos x, \sin x \cos x, x, y, 0, 1$`)` en la línea de edición y pinchar en el símbolo = para obtener la solución de la ecuación.

   c) $-y + xy' \log x = -x^3(1 - 3\log x)$.

   Indicación

   d) Si se despeja y' en la ecuación dada se observa que se trata de una E.D.O. lineal. Para resolverla basta introducir `LINEAR1_GEN(`$\frac{-1}{x\log x}, \frac{-x^3(1-3\log x)}{x\log x}, x, y, c$`)` en la línea de edición y pinchar en el símbolo = para obtener la solución de la ecuación.

3 Ejercicios propuestos

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $(1 + y^2) + xyy' = 0$.
   b) $xy' - 4y + 2x^2 + 4 = 0$.
   c) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$.
   d) $(x^3 - y^3)dx + 2x^2ydy = 0$.
   e) $(x^2 + y^2 + x) + xydy = 0$.

2. El azúcar se disuelve en el agua con una velocidad proporcional a la cantidad que queda por disolver. Si inicialmente había 13.6 kg de azúcar y al cabo de 4 horas quedan sin disolver 4.5 kg, ¿cuánto tardará en disolverse el 95 por ciento del azúcar contando desde el instante inicial?

3. Hallar las curvas tales que en cada punto (x, y) la pendiente de la recta tangente sea igual al cubo de la abscisa en dicho punto. ¿Cuál de estas curvas pasa por el origen?

4. Al introducir glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio de concentración global de glucosa con respecto al tiempo $c(t)$ se explica mediante la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc,$$

donde G es la velocidad constante a la que se suministra la glucosa, V es el volumen total de la sangre en el cuerpo y k es una constante positiva que depende del paciente. Se pide calcular $c(t)$.

5. En una reacción química, un cierto compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional a la cantidad no transformada. Si había inicialmente 100 gr de sustancia original y 60 gr tras una hora, ¿cuanto tiempo pasará hasta que se haya transformado el 80 % del compuesto?