Matemática Aplicada con Geogebra

Santiago Angulo Díaz-Parreño (sangulo@ceu.es)
Nuria Caballé Cervigón (nuria.caballecervigon@ceu.es)
Juan Carlos Garro Garro (garro.eps@ceu.es)
Eduardo López Ramírez (elopez@ceu.es)
José Rojo Montijano (jrojo.eps@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)
Susana Victoria Rodríguez (victoria.eps@ceu.es)

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
CEU San Pablo

Septiembre 2018

CEU
Universidad San Pablo

Índice general

Práctica 1

Introducción a Geogebra

1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas, ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Geogebra * es uno de los programas de cálculo numérico y simbólico más utilizados. Aparte de sus capacidades el cálculo numérico, vectorial y matricial, también permite realizar representaciones gráficas, lo cual permite resolver multitud de problemas de álgebra, análisis, cálculo, geometría e incluso estadística. La ventaja de Derive frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, Mapple o MATLAB, radica en su sencillez y simplicidad de uso, lo cual lo hace idóneo para la enseñanza de las matemáticas.

*Esta practica está basada en la versión 6.1 de Geogebra

Práctica 2

Funciones Elementales

1 Ejercicios resueltos

1. Se considera la función
$$f(t) = \frac{t^4 + 19 \cdot t^2 - 5}{t^4 + 9 \cdot t^2 - 10}.$$
Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:

   (a) Dominio.

   > i. Para representarla gráficamente, introducir la función en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
   > ii. Para determinar el dominio tan sólo hay que determinar los valores de x en los que existe la función.
   > iii. Recordar que, tanto para éste como para el resto de los apartados del ejercicio, pretendemos llegar a conclusiones aproximadas que tan sólo sacamos del análisis de la gráfica.

   (b) Imagen.

   > Fijarse en los valores de la variable y hasta los que llega la función.

   (c) Asíntotas.

   > Son las líneas rectas, ya sea horizontales, verticales u oblicuas, hacia las que tiende la función.

   (d) Raíces.

   > Son los valores de la variable x, si los hay, en los que la función vale 0.

   (e) Signo.

   > Hay que determinar, aproximadamente, por un lado los intervalos de variable x en los que la función es positiva, y por el otro aquellos en los que es negativa.

   (f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

> De nuevo, por un lado hay que determinar los intervalos de variable x en los que a medida que crece x también lo hace y, que serían los intervalos de crecimiento, y también aquellos otros en los que a medida que crece x decrece y, que serían los intervalos de decremimiento.

(g) Intervalos de concavidad y convexidad.

> Para los intervalos de concavidad y convexidad, nos fijamos en el segmento de línea recta que une dos puntos cualquiera del intervalo. Si dicho segmento queda por encima de la gráfica, entonces la función es cóncava en el intervalo, mientras que si queda por debajo, entonces es convexa en el mismo.

(h) Extremos relativos.

> Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que se encuentran los máximos y mínimos relativos de la función.

(i) Puntos de inflexión.

> Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que la función cambia de curvatura, de cóncava a convexa o a la inversa.

2. Representar en una misma gráfica las funciones $2^x, e^x, 0.7^x, 0.5^x$. A la vista de las gráficas obtenidas, ¿para qué valores de a será la función creciente? ¿Y para qué valores de a será decreciente?

> (a) Introducir la función `2^x` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
> (b) Introducir la función `e^x` en la barra de Entrada.
> (c) Introducir la función `0.7^x` en la barra de Entrada.
> (d) Introducir la función `0.5^x` en la barra de Entrada.
> (e) La función exponencial a^x será creciente cuando $a > 0$ y decreciente cuando $0 < a < 1$.

3. Representar en una misma gráfica las funciones siguientes, indicando su período y amplitud.

   (a) $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x + 2$, $\operatorname{sen}(x + 2)$.
   (b) $\operatorname{sen} 2x$, $2 \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

> i. Introducir la función `sen(x)` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
> ii. Introducir la función `sen(x)+2` en la barra de Entrada.
> iii. Introducir la función `sen(x+2)` en la barra de Entrada.
> iv. Introducir la función `sen(2x)` en la barra de Entrada.
> v. Introducir la función `2sen(x)` en la barra de Entrada.
> vi. Introducir la función `sen(x/2)` en la barra de Entrada.

4. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Introducir la función `Si[x<=0, -2x, x^2]` en la barra de Entrada.

2 Ejercicios propuestos

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones a partir de sus representaciones gráficas:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}$

   (b) $g(x) = \sqrt[2]{x^4-1}$.

   (c) $h(x) = \cos\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

   (d) $l(x) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{1+x}$.

2. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3+x+2}{5x^3-9x^2-4x+4}.$$

   Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:

   (a) Dominio.

   (b) Imagen.

   (c) Asíntotas.

   (d) Raíces.

   (e) Signo.

   (f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   (g) Intervalos de concavidad y convexidad.

   (h) Extremos relativos.

   (i) Puntos de inflexión.

3. Representar en una misma gráfica las funciones $\log_{10} x$, $\log_2 x$, $\log x$, $\log_{0.5} x$.

   (a) A la vista de las gráficas obtenidas, indicar cuáles de las funciones anteriores son crecientes y cuáles son decrecientes.

   (b) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será creciente la función $\log_a x$.

   (c) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será decreciente la función $\log_a x$.

4. Completar las siguientes frases con la palabra igual, o el número de veces que sea mayor o menor en cada caso:

   (a) La función $\cos 2x$ tiene un período........... que la función $\cos x$.

   (b) La función $\cos 2x$ tiene una amplitud........... que la función $\cos x$.

(c) La función $\cos \frac{x}{2}$ tiene un período............ que la función $\cos 3x$.

(d) La función $\cos \frac{x}{2}$ tiene una amplitud............ que la función $\cos 3x$.

(e) La función $3 \cos 2x$ tiene un período............ que la función $\cos \frac{x}{2}$.

(f) La función $3 \cos 2x$ tiene una amplitud............ que la función $\cos \frac{x}{2}$.

5. Hallar a partir de la representación gráfica, las soluciones de $e^{-1/x} = \frac{1}{x}$.

6. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Práctica 3

Límites y Continuidad

1 Ejercicios resueltos

1. Dada la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2},$$

se pide:

(a) Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites:

i. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$
ii. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$
iii. $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
iv. $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
v. $\lim_{x\to 2} f(x)$
vi. $\lim_{x\to 0} f(x)$

> i. Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=(1+2/x)^(x/2)` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
> ii. Para predecir cuáles pueden ser los valores de los límites pedidos, crear un deslizador introduciendo la expresión `a:=0` en la barra de Entrada.
> iii. Introducir el punto `(a,f(a))` para dibujar el punto sobre la gráfica de la función.
> iv. Desplazar el deslizador y observar el valor de la coordenada y en el punto A cuando x tiende a cada uno de los valores de los límites.

(b) Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?.

> i. Para calcular $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f(x), -2)` en la barra de Entrada.
> ii. Para calcular $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f(x), -2)` en la barra de Entrada.
> iii. Para calcular $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), -inf)` en la barra de Entrada.
> iv. Para calcular $\lim_{x\to \infty} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), inf)` en la barra de Entrada.
> v. Para calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), 2)` en la barra de Entrada.

vi. Para calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ introducir el comando `Límite(f(x), 0)` en la barra de Entrada.

2. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{2x-6} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

(a) Dibujar la gráfica de g y determinar gráficamente si existen asíntotas.

i. Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=Si(x<=0, x/(x-2), x^2/(2x-6))` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

ii. Para ver si existen asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, hay que ver si existen rectas verticales, horizontales su oblicuas a las que la gráfica de g se aproxima cada vez más (aunque nunca lleguen a tocarse).

(b) Calcular las asíntotas verticales de g y dibujarlas.

i. La función no está definida en los valores que anulen los denominadores en ambos trozos. Para ver las raíces del denominador del primer trozo introducir el comando `Raíz(x-2)` en la barra de Entrada. La única raíz es $x = 2$ pero queda fuera de la región correspondiente a este trozo.

ii. Para ver las raíces del denominador del segundo trozo introducir el comando `Raíz(2x-6)` en la barra de Entrada. La única raíz es $x = 3$, así que la función f no está definida en este punto y es un posible punto de asíntota vertical.

iii. Para ver si existe asíntota vertical en ese punto hay que calcular los límites laterales $\lim_{x\to 3^-} g(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x)$.

iv. Para calcular el límite por la izquierda introducir el comando `LímiteIzquierda(g, 3)` en la barra de Entrada.

v. Para calcular el límite por la derecha introducir el comando `LímiteDerecha(g, 3)` en la barra de Entrada.

vi. Como $\lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$, existe una asíntota vertical en $x = 3$. Para dibujarla introducir la expresión `x=3` en la barra de Entrada.

(c) Calcular las asíntotas horizontales de g y dibujarlas.

i. Para ver si existen asíntotas horizontales hay que calcular los límites $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to \infty} g(x)$.

ii. Para calcular el límite en $-\infty$ introducir el comando `Límite(g, -inf)` en la barra de Entrada.

iii. Para calcular el límite en ∞ introducir el comando `Límite(g, inf)` en la barra de Entrada.

iv. Como $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 1$, existe una asíntota horizontal $y = 1$. Para dibujarla introducir la expresión `y=1` en la barra de Entrada.

v. Como $\lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$, no hay asíntota horizontal por la derecha.

(d) Calcular las asíntotas oblicuas de g.

i. Por la izquierda no hay asíntota oblicua puesto que hay una asíntota horizontal. Para ver si existen asíntota oblicua por la derecha hay que calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x}$. Para ello introducir el comando `Límite(g/x, inf)` en la barra de Entrada.

ii. Como $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0.5$, existe asíntota oblicua por la derecha y su pendiente es 0.5.

iii. Para determinar el término independiente hay que calcular el límite $\lim_{x\to\infty} g(x) - 0.5x$. Para ello introducir el comando `Límite(g(x)-0.5x, inf)` en la barra de Entrada.

iv. Como $\lim_{x\to\infty} g(x) - 0.5x = 1.5$ entonces la ecuación de la asíntota oblicua es $y = 0.5x + 1.5$. Para dibujarla introducir la expresión `y=0.5x+1.5` en la barra de Entrada.

3. Reprentar gráficamente las siguientes funciones y clasificar sus discontinuidades en los puntos que se indica.

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = 0$.

i. Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=sen(x)/x` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

ii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 0)` en la barra de Entrada.

iii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 0)` en la barra de Entrada.

iv. Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, f tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{2^{1/x}}$ en $x = 0$.

i. Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=1/2^(1/x)` en la barra de Entrada de la Vista CAS.

ii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(g, 0)` en la barra de Entrada.

iii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(g, 0)` en la barra de Entrada.

iv. Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \infty$, g tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

(c) $h(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$ en $x = 1$.

i. Para representarla gráficamente, introducir la función `h(x):=1/(1+e^(1/(1-x)))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.

ii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^-} h(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(h, 1)` en la barra de Entrada.

iii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^+} h(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(h, 1)` en la barra de Entrada.

iv. Como $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 0$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, h tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$.

4. Representar gráficamente y clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=Si(x<0, (x+1)/(x^2-1), 1/e^(1/(x^2-1)))` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

(b) En primer lugar hay que encontrar los puntos que quedan fuera del dominio de cada uno de los tramos. Para ello, hay que analizar dónde se anulan los denominadores presentes en las definiciones de cada trozo. Para ver donde se anula $x^2 - 1$ introducir el comando `Raíz(x^2-1)` en la barra de Entrada.

(c) Como la ecuación anterior tiene soluciones $x = -1$ y $x = 1$, en estos puntos la función no está definida y es, por tanto, discontinua. Además de estos dos puntos hay que estudiar la posible discontinuidad en $x = 0$ que es donde cambia la definición de la función.

(d) Para calcular el límite $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, -1)` en la barra de Entrada.

(e) Para calcular el límite $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, -1)` en la barra de Entrada.

(f) Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = -0.5$, f tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.

(g) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 0)` en la barra de Entrada.

(h) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 0)` en la barra de Entrada.

(i) Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e$, f tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

(j) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 1)` en la barra de Entrada.

(k) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 1)` en la barra de Entrada.

(l) Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, f tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$.

2 Ejercicios propuestos

1. Calcular los siguientes límites si existen:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

(b) $\lim_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$.

(c) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x+2}{e^{2x}}$.

(d) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\log(x^2-1)}{x+2}$.

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log(1/x)}{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})}$.

(f) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a} \quad n \in \mathbb{N}$.

(g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \quad n, m \in \mathbb{Z}$.

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

(i) $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

(j) $\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

(k) $\lim_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

(l) $\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x^2}$.

(m) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

(n) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen} x}$.

(o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{6}{4+e^{-1/x}}$.

(p) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-2x-1}\right)$.

(q) $\lim_{x\to \pi/2} \sec x - \operatorname{tg} x$.

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+3} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Calcular todas sus asíntotas.

3. Las siguientes funciones no están definidas en $x = 0$. Determinar, cuando sea posible, su valor en dicho punto de modo que sean continuas.

(a) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$.

(b) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

(c) $j(x) = \dfrac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$.

(d) $k(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Práctica 4

Derivadas de funciones de una variable

1 Ejercicios resueltos

1. Representar gráficamente y estudiar mediante la definición de derivada la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

   (a) $f(x) = |x-1|$ en $x = 1$.

   i. Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x):=|x-1|` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
   ii. Para calcular la derivada de f por la izquierda en $x = 1$ introducir el comando `LímiteIzquierda((f(1+h)-f(1))/h, 0)` en la barra de Entrada.
   iii. Para calcular la derivada de f por la derecha en $x = 1$ introducir el comando `LímiteDerecha((f(1+h)-f(1))/h, 0)` en la barra de Entrada.
   iv. Como $lim_{x\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -1$ es distinto de $lim_{x\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$, la función no es derivable en $x = 1$.

   (b) $g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ en $x = 0$.

   i. Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=Si(x!=0, sen(1/x), 0)` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
   ii. Para calcular la derivada de g por la izquierda en $x = 0$ introducir el comando `LímiteIzquierda((g(h)-g(0))/h, 0)` en la barra de Entrada.
   iii. Para calcular la derivada de g por la derecha en $x = 0$ introducir el comando `LímiteDerecha((g(h)-g(0))/h, 0)` en la barra de Entrada.
   iv. Como ninguno de los dos límites anteriores existe g no es derivable en $x = 0$.

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones hasta el orden 4 y conjeturar cuál sería el valor de la derivada de orden n.

   (a) $f(x) = a^x \log(a)$.

   i. Introducir la función `f(x):=a^xlog(a)` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
   ii. Para la primera derivada introducir la expresión `f'(x)` en la barra de Entrada.

iii. Para la segunda derivada introducir la expresión `f''(x)` en la barra de Entrada.
iv. Para la tercera derivada introducir la expresión `f'''(x)` en la barra de Entrada.
v. Para la cuarta derivada introducir la expresión `f''''(x)` en la barra de Entrada.
vi. La derivada de orden n será por tanto $f^n(x) = a^x \log(a)^{n+1}$.

(b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$.

i. Introducir la función `g(x):=(sen(x)+cos(x))/2` en la barra de Entrada de la Vista CAS.de la Vista CAS.
ii. Para la primera dede la Vista CAS.g′(x) en la barra de Entrada.
iii. Para la segunda dede la Vista CAS.g″(x) en la barra de Entrada.
iv. Para la tercera dede la Vista CAS.g‴(x) en la barra de Entrada.
v. Para la cuarta derivada introducir la expresión `g''''(x)` en la barra de Entrada.
vi. A partir de aquí las derivadas se repiten, por lo que la derivada de orden n será

$$f^n(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2} & \text{si } x = 4k \\ \frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{2} & \text{si } x = 4k+1 \\ \frac{-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{2} & \text{si } x = 4k+2 \\ \frac{-\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{2} & \text{si } x = 4k+3 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

3. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \log(\sqrt{x+1})$ en $x = 1$. Dibujar la gráfica de la función y de la recta tangente.

(a) Introducir la función `f(x):=log(sqrt(x+1))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
(b) Para obtener la ecuación de la recta tangente a f en $x = 1$ introducir la ecuación $y = f(1) + f'(1)(x-1)$ en la barra de Entrada.
(c) Para dibujar la recta tangente hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
(d) Para obtener la ecuación de la recta normal a f en $x = 1$ introducir la ecuación $y = f(1) - 1/f'(1)(x-1)$ en la barra de Entrada.
(e) Para dibujar la recta normal hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

4. Dada la función

$$g(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2+1}$$

(a) Representar la gráfica de g.

Para representarla gráficamente, introducir la función `g(x):=(2x^3-3x)/(x^2+1)` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

(b) Calcular la función derivada $g'(x)$ y representar su gráfica.

i. Para obtener la derivada de g introducir la expresión `g'(x):=Derivada(g)` en la barra de Entrada.
ii. Para dibujar la gráfica de g' hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(c) Calcular las raíces de $g'(x)$.

i. Para calcular las raíces de g' introducir la expresión `Raíz(g'(x))` en la barra de Entrada y hacer clic sobre el botón de evaluación aproximada.
ii. g' tiene dos raíces en $x = -0.55$ y $x = 0.55$ aproximadamente.

(d) A la vista de las raíces y de la gráfica de la función derivada, determinar los extremos relativos de la función y los intervalos de crecimiento.

i. $g'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -0.55)$, luego g es creciente en ese intervalo.
ii. $g'(x) < 0$ para $x \in (-0.55, 0.55)$, luego g es decreciente en ese intervalo.
iii. $g'(x) > 0$ para $x \in (-0.55, \infty)$, luego g es creciente en ese intervalo.
iv. g tiene un máximo en $x = -0.55$ ya que g' se anula en este punto y a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente.
v. g tiene un mínimo en $x = 0.55$ ya que g' se anula en este punto y a la izquierda la función es decreciente y a la derecha creciente.

(e) Calcular la segunda derivada $g''(x)$ y representar su gráfica.

i. Para obtener la segunda derivada de g introducir la expresión `g''(x):=Derivada(g, 2)` en la barra de Entrada.
ii. Para dibujar la gráfica de g'' hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(f) Calcular las raíces de $g''(x)$.

i. Para calcular las raíces de g'' introducir la expresión `Raíz(g''(x))` en la barra de Entrada y hacer clic sobre el botón de evaluación aproximada.
ii. g'' tiene tres raíces en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

(g) A la vista de las raíces y de la gráfica de la segunda derivada, determinar los intervalos de concavidad de la función y los puntos de inflexión.

i. $g''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, luego g es cóncava en ese intervalo.
ii. $g''(x) < 0$ para $x \in (-\sqrt{3}, 0)$, luego g es convexa en ese intervalo.
iii. $g''(x) > 0$ para $x \in (0, \sqrt{3})$, luego g es cóncava en ese intervalo.
iv. $g''(x) < 0$ para $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, luego g es convexa en ese intervalo.
v. g tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ pues g'' se anula en estos puntos y la concavidad a la izquierda y derecha de ellos cambia.

2 Ejercicios propuestos

1. Probar que no es derivable en $x = 0$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto x_0 indicado.

   (a) $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad x_0 = \pi/2.$

   (b) $y = (3 - x^2)^4 \sqrt[3]{5x - 4}, \quad x_0 = 1.$

   (c) $y = \log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 0.$

3. Estudiar el crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$.

4. Se ha diseñado un envoltorio cilíndrico para cápsulas. Si el contenido de las cápsulas debe ser de 0.15 ml, hallar las dimensiones del cilindro para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

5. La cantidad de trigo en una cosecha C depende de la cantidad de nitrógeno en el suelo n según la ecuación

$$C(n) = \frac{n}{1 + n^2}, \quad n \geq 0$$

   ¿Para qué cantidad de nitrógeno se obtendrá la mayor cosecha de trigo?

Práctica 5

Integrales

1 Ejercicios resueltos

1. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\int x^2 \log x \, dx$

   > Introducir el comando `Integral(x^2log(x))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.

   (b) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x} \, dx$

   > Introducir el comando `Integral(log(log(x)))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.

   (c) $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 4x + 1}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x} \, dx$

   > Introducir el comando `Integral((5x^2+4x+1)/(x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.

   (d) $\displaystyle\int \frac{6x + 5}{(x^2 + x + 1)^2} \, dx$

   > Introducir el comando `Integral((6x+5)/((x^2+x+1)^2))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.

2. Calcular las siguientes integrales definidas y representarlas gráficamente:

   (a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^3}{x^2 + x + 1} \, dx$

   > i. Introducir la función `f(x):=x^3/(x^2+x+1)` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
   > ii. Introducir el comando `Integral(f(x), -1/2, 0)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
   > iii. Para representar gráficamente la región que abarca la integral definida, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(b) $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$

i. Introducir la función `g(x):=sqrt(16-x^2)/x` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
ii. Introducir el comando `Integral(g(x), 2, 4)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
iii. Para representar gráficamente la región que abarca la integral definida, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos(2x)}$

i. Introducir la función `h(x):=1/(3+cos(2x))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
ii. Introducir el comando `Integral(h(x), 0, pi/2)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
iii. Para representar gráficamente la región que abarca la integral definida, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

3. Calcular la siguiente integral impropia $\int_2^\infty x^2 e^{-x}\,dx$ y representarla gráficamente.

(a) Introducir la función `f(x):=x^2 exp(-x)` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
(b) Introducir el comando `Integral(f(x), 2, inf)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
(c) Para representar gráficamente la región que abarca la integral impropia, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

4. Representar la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, y calcular el área limitada por dicha parábola, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.

(a) Introducir la función `f(x):=x^2-7x+6` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
(b) Como f toma valores positivos y negativos en el intervalo $(2,7)$, para obtener el área comprendida entre la f y el eje de abscisas en este intervalo hay que calcular la integral del valor absoluto de f. Para ello introducir el comando `Integral(abs(f(x)), 2, 7)` y hacer clic en el botón de Valor numérico.
(c) Para representar gráficamente la región que abarca la integral impropia, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

5. Calcular y dibujar el área comprendida entres las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(a) Introducir la función `f(x):=sen(x)` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.

(b) Introducir la función `g(x):=cos(x)` en la barra de Entrada.
(c) Introducir el comando `Integral(abs(f(x)-g(x)), 0, 2pi)` en la barra de Entrada y hacer clic en el botón de Valor numérico.
(d) Para representar gráficamente el área, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
(e) Otra alternativa es utilizar el comando `Integral(Máximo(f(x),g(x)), Mínimo(f(x),g(x)), 0, 2pi)`.

6. Representar gráficamente la región del primer cuadrante limitada por la función $f(x) = (x + \operatorname{sen} x)^2$, la recta $x = 2\pi$ y el eje OX, y hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OX de la región anterior.

(a) Introducir la función `f(x):=(x+sen(x))^2` en la barra de Entrada de la Vista CAS y activar la Vista Gráfica.
(b) Para calcular el área plana introducir el comando `Integral(f(x), 0, 2pi)` en la barra de Entrada y hacer clic en el botón de Valor numérico.
(c) Para representar gráficamente el área, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
(d) Para calcular el volumen de revolución introducir el comando `Integral(pif(x)^2, x, 0, 2pi)`.

2 Ejercicios propuestos

1. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\int \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 16}{x(x^2+4)^2}\, dx$

   (b) $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\, dx$

2. Hallar el área encerrada la parábola $y = 9 - x^2$ y la recta $y = -x$.

3. Hallar el área encerrada por la curva $y = e^{-|x|}$ y su asíntota.

4. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OX de la región plana limitada por la parábola $y = 2x^2$, las rectas $x = 0$, $x = 5$ y el eje OX, representando previamente dicha región plana.

5. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje OY del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$.

Práctica 6

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1 Ejercicios resueltos

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables y dibujar sus curvas integrales para distintos valores de la constante de integración:

   (a) $xdy = ydx$.

   i. Introducir el comando `ResuelveEDO(y'=y/x)` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
   ii. Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
   iii. Para hacer variar la constante de integración y obtener diferentes soluciones particulares abrir la Vista de Álgebra y mover el deslizador correspondiente a la constante.

   (b) $-2x(1+e^y) + e^y(1+x^2)y' = 0$.

   i. Introducir el comando `ResuelveEDO(-2x(1+e^y)+e^y(1+x^2)y'=0)` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
   ii. Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
   iii. Para hacer variar la constante de integración y obtener diferentes soluciones particulares abrir la Vista de Álgebra y mover el deslizador correspondiente a la constante.

   (c) $y - xy' = 1 + x^2y'$.

   i. Introducir el comando `ResuelveEDO(y-xy'=1+x^2y')` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
   ii. Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.
   iii. Para hacer variar la constante de integración y obtener diferentes soluciones particulares abrir la Vista de Álgebra y mover el deslizador correspondiente a la constante.

2. Resolver y representar gráficamente las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

   (a) $xdy = ydx$, con la condición inicial $y(1) = 2$.

      i. Introducir el comando `ResuelveEDO(y'=y/x, (1,2))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
      ii. Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

   (b) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$, con la condición inicial $y(0) = 1$.

      i. Introducir el comando `ResuelveEDO(xsqrt(1-y^2)+ysqrt(1-x^2)y'=0, (0,1))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
      ii. Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

   (c) $s' + s\cos t = \operatorname{sen} t \cos t$ con la condición inicial $s(0) = 1$.

      i. Introducir el comando `ResuelveEDO(s'+s*cos(t)=sen(t)cos(t), s, t, (0,1))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
      ii. Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

   (d) $(1 + e^x)yy' = e^y$, con la condición inicial $y(0) = 0$.

      i. Introducir el comando `ResuelveEDO((1+e^x)yy'=e^y, (0,0))` en la barra de Entrada de la Vista CAS.
      ii. En este caso, Geogegra no es capaz de encontrar la solución particular de esta ecuación, pero podemos intentar resolverla separando las variables e integrando.
      iii. Tras separar las variables se tiene la igualdad $\frac{y}{e^y}dy = \frac{1}{1+e^x}dx$, de manera que sólo hay que integrar a cada lado. Para ello introducir el comando `Integral(y/e^y) - Integral(1/(1+e^x))` en la barra de Entrada.
      iv. En la solución aparecen dos constantes c_1 y c_2, pero realmente se puede eliminar una pasándola al otro lado. Para ello introducir el comando `Sustituye($, c_2=0)` en la barra de Entrada.
      v. Para imponer la condición inicial introducir el comando `Sustituye($, x=0, y=0)` en la barra de Entrada.
      vi. Para dibujar la solución de la ecuación diferencial, hacer clic en el círculo que aparece a la izquierda de la expresión anterior.

3. El azúcar se disuelve en el agua con una velocidad proporcional a la cantidad que queda por disolver. Si inicialmente había 13.6 kg de azúcar y al cabo de 4 horas quedan sin disolver 4.5 kg, ¿cuánto tardará en disolverse el 95% del azúcar contando desde el instante inicial?

(a) La ecuación diferencial que explica la disolución del azúcar es $a' = ka$, donde a es la cantidad de azúcar que queda por disolver, t es el tiempo y k es la constante de disolución del azúcar.

(b) Para resolver la ecuación diferencial introducir el comando `ResuelveEDO(a'=k*a, a, t, (0, 13.6)` en la barra de Entrada de la Vista CAS.

(c) Para imponer la segunda condición inicial introducir el comando `Sustituye($, t=4, a=4.5)` en la barra de Entrada.

(d) Para obtener el valor de la constante de disolución introducir el comando `Resuelve($)` en la barra de Entrada.

(e) Para sustituir el valor de la constante de disolución en la solución particular introducir el comando `Sustituye($n,$)` en la barra de Entrada, donde n es el identificador de la expresión que contienen la solución de la ecuación diferencial.

(f) El azúcar que quedará sin disolver tras disolverse el 95% de la cantidad inicial es el 5% de esta cantidad. Para sustituir esta cantidad de azúcar en la solución de la ecuación diferencial introducir el comando `Sustituye($,13.6*0.05)` en la barra de Entrada.

(g) Finalmente, para obtener la predicción del tiempo introducir el comando `Resuelve($)` en la barra de Entrada.

2 Ejercicios propuestos

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $(1+y^2)+xyy' = 0$.

   (b) $xy' - 4y + 2x^2 + 4 = 0$.

   (c) $(y^2+xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$.

   (d) $(x^3-y^3)dx + 2x^2ydy = 0$.

   (e) $(x^2+y^2+x) + xydy = 0$.

2. Hallar las curvas tales que en cada punto (x, y) la pendiente de la recta tangente sea igual al cubo de la abscisa en dicho punto. ¿Cuál de estas curvas pasa por el origen?

3. Al introducir glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio de concentración global de glucosa con respecto al tiempo $c(t)$ se explica mediante la siguiente ecuación diferencial
$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc,$$
donde G es la velocidad constante a la que se suministra la glucosa, V es el volumen total de la sangre en el cuerpo y k es una constante positiva que depende del paciente. Se pide calcular $c(t)$.

4. En una reacción química, un cierto compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional a la cantidad no transformada. Si había inicialmente 100 gr de sustancia original y 60 gr tras una hora, ¿cuanto tiempo pasará hasta que se haya transformado el 80% del compuesto?