Índice general

Práctica 1

Introducción a Geogebra

1 Introducción

La gran potencia de cálculo alcanzada por los ordenadores en las últimas décadas, ha convertido a los mismos en poderosas herramientas al servicio de todas aquellas disciplinas que, como las matemáticas, requieren cálculos largos y complejos.

Geogebra * es uno de los programas de cálculo numérico y simbólico más utilizados. Aparte de sus capacidades el cálculo numérico, vectorial y matricial, también permite realizar representaciones gráficas, lo cual permite resolver multitud de problemas de álgebra, análisis, cálculo, geometría e incluso estadística. La ventaja de Derive frente a otros programas habituales de cálculo como Mathematica, Mapple o MATLAB, radica en su sencillez y simplicidad de uso, lo cual lo hace idóneo para la enseñanza de las matemáticas.

* Esta practica está basada en la versión 6.1 de Geogebra

Práctica 2

Funciones Elementales

1 Ejercicios resueltos

1. Se considera la función

$$f(t) = \frac{t^4 + 19 \cdot t^2 - 5}{t^4 + 9 \cdot t^2 - 10}.$$

Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:

(a) Dominio.

> i. Para representarla gráficamente, introducir la función en la barra de Entrada de la Vista Algebraica y activar la Vista Gráfica.
> ii. Para determinar el dominio tan sólo hay que determinar los valores de x en los que existe la función.
> iii. Recordar que, tanto para éste como para el resto de los apartados del ejercicio, pretendemos llegar a conclusiones aproximadas que tan sólo sacamos del análisis de la gráfica.

(b) Imagen.

> Fijarse en los valores de la variable y hasta los que llega la función.

(c) Asíntotas.

> Son las líneas rectas, ya sea horizontales, verticales u oblicuas, hacia las que tiende la función.

(d) Raíces.

> Son los valores de la variable x, si los hay, en los que la función vale 0.

(e) Signo.

> Hay que determinar, aproximadamente, por un lado los intervalos de variable x en los que la función es positiva, y por el otro aquellos en los que es negativa.

(f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

> De nuevo, por un lado hay que determinar los intervalos de variable x en los que a medida que crece x también lo hace y, que serían los intervalos de crecimiento, y también aquellos otros en los que a medida que crece x decrece y, que serían los intervalos de decremimiento.

(g) Intervalos de concavidad y convexidad.

> Para los intervalos de concavidad y convexidad, nos fijamos en el segmento de línea recta que une dos puntos cualquiera del intervalo. Si dicho segmento queda por encima de la gráfica, entonces la función es cóncava en el intervalo, mientras que si queda por debajo, entonces es convexa en el mismo.

(h) Extremos relativos.

> Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que se encuentran los máximos y mínimos relativos de la función.

(i) Puntos de inflexión.

> Determinamos, aproximadamente, los puntos en los que la función cambia de curvatura, de cóncava a convexa o a la inversa.

2. Representar en una misma gráfica las funciones $2^x, e^x, 0.7^x, 0.5^x$. A la vista de las gráficas obtenidas, indicar cuáles de las funciones anteriores son crecientes y cuáles son decrecientes.

> Introducir cada función en la barra de Entrada de la Vista Algebraica.

¿En general, para qué valores de a será la función creciente? ¿Y para qué valores de a será decreciente? Probar con distintos valores de a representando gráficamente nuevas funciones si fuera necesario.

3. Representar en una misma gráfica las funciones siguientes, indicando su período y amplitud.

(a) $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x + 2$, $\operatorname{sen}(x+2)$.

(b) $\operatorname{sen} 2x$, $2 \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

> Introducir cada función en la barra de Entrada de la Vista Algebraica.

4. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

> Para representar funciones a trozos, Geogebra utiliza el comando
>
> ```
> Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)
> ```

> y se pueden anidar varios comandos unos dentro de otros. Utilizando este comando para representar la función anterior, habría que introducir la expresión
>
> Si[x<=0, -2x, x2]

2 Ejercicios propuestos

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones a partir de sus representaciones gráficas:
   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - x}$
   (b) $g(x) = \sqrt[2]{x^4 - 1}$.
   (c) $h(x) = \cos \dfrac{x + 3}{x^2 + 1}$.
   (d) $l(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{1 + x}$.

2. Se considera la función
$$f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{5x^3 - 9x^2 - 4x + 4}.$$
   Representarla gráficamente y determinar a partir de dicha representación:
   (a) Dominio.
   (b) Imagen.
   (c) Asíntotas.
   (d) Raíces.
   (e) Signo.
   (f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   (g) Intervalos de concavidad y convexidad.
   (h) Extremos relativos.
   (i) Puntos de inflexión.

3. Representar en una misma gráfica las funciones $\log_{10} x$, $\log_2 x$, $\log x$, $\log_{0.5} x$.
   (a) A la vista de las gráficas obtenidas, indicar cuáles de las funciones anteriores son crecientes y cuáles son decrecientes.
   (b) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será creciente la función $\log_a x$.
   (c) Determinar, a partir de los resultados obtenidos, o representando nuevas funciones si fuera necesario, para qué valores de a será decreciente la función $\log_a x$.

4. Completar las siguientes frases con la palabra igual, o el número de veces que sea mayor o menor en cada caso:
   (a) La función $\cos 2x$ tiene un período........... que la función $\cos x$.

(b) La función $\cos 2x$ tiene una amplitud............ que la función $\cos x$.

(c) La función $\cos \frac{x}{2}$ tiene un período............ que la función $\cos 3x$.

(d) La función $\cos \frac{x}{2}$ tiene una amplitud............ que la función $\cos 3x$.

(e) La función $3\cos 2x$ tiene un período............ que la función $\cos \frac{x}{2}$.

(f) La función $3\cos 2x$ tiene una amplitud............ que la función $\cos \frac{x}{2}$.

5. Hallar a partir de la representación gráfica, las soluciones de $e^{-1/x} = \frac{1}{x}$.

6. Representar en una gráfica la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Práctica 3

Límites y Continuidad

1 Fundamentos teóricos

En esta práctica se introducen los conceptos de límite y continuidad de una función real, ambos muy relacionados.

1.1 Límite de una función en un punto

El concepto de límite está muy relacionado con el de proximidad y tendencia de una serie de valores. De manera informal, diremos que $l \in \mathbb{R}$ es el *límite* de una función $f(x)$ en un punto $a \in \mathbb{R}$, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a l, a medida que x se aproxima a a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Si lo que nos interesa es la tendencia de $f(x)$ cuando nos aproximamos al punto a sólo por un lado, hablamos de *límites laterales*. Diremos que l es el *límite por la izquierda* de una función $f(x)$ en un punto a, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a l, a medida que x se aproxima a a por la izquierda, es decir con valores $x < a$, y se denota por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Del mismo modo, diremos que l es el *límite por la derecha* de una función $f(x)$ en un punto a, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a l, a medida que x se aproxima a a por la derecha, es decir con valores $x > a$, y se denota por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

Por supuesto, para que exista el límite global de la función $f(x)$ en el punto a, debe existir tanto el límite por la izquierda, como el límite por la derecha, y ser iguales, es decir

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^-} f(x) = l \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = l \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l.$$

1.2 Álgebra de límites

Para el cálculo práctico de límites, se utiliza el siguiente teorema, conocido como Teorema de *Álgebra de Límites*.

2 Ejercicios resueltos

1. Dada la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2},$$

se pide:

(a) Dibujar su gráfica, y a la vista de misma conjeturar el resultado de los siguientes límites:

i. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

v. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

vi. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

> i. Para representarla gráficamente, introducir la función f(x)=(1+2/x)^(x/2) en la barra de Entrada de la Vista Algebraica y activar la Vista Gráfica.
>
> ii. Para predecir cuáles pueden ser los valores de los límites pedidos, crear un deslizador introduciendo la constante a en la barra de Entrada y después introducir el punto A=(a,f(a)) para dibujar el punto sobre la gráfica de la función. Desplazar el deslizador y observar el valor de la coordenada y en el punto A cuando x tiende a cada uno de los valores de los límites.

(b) Calcular los límites anteriores. ¿Coinciden los resultados con los conjeturados?.

> i. Para calcular el límite por la izquierda introducir el comando LímiteIzquierda(<funcion>,<valor>) en la barra de Entrada.
>
> ii. Para calcular el límite por la derecha introducir el comando LímiteDerecha(<funcion>,<valor>) en la barra de Entrada.
>
> iii. Para calcular el límite global introducir el comando Límite(<funcion>,<valor>)en la barra de Entrada.

2. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{2x-6} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

(a) Dibujar la gráfica de g y determinar gráficamente si existen asíntotas.

> i. Para representarla gráficamente, introducir la función g(x)=Si(x<=0, x/(x-2), x^2/(2x-6)) en la barra de Entrada de la Vista Algebraica y activar la Vista Gráfica.
>
> ii. Para ver si existen asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, hay que ver si existen rectas verticales, horizontales su oblicuas a las que la gráfica de g se aproxima cada vez más (aunque nunca lleguen a tocarse).

(b) Calcular las asíntotas verticales de g y dibujarlas.

i. El único punto donde la función no está definida es $x = 3$. Para ver si existe asíntota vertical en ese punto hay que calcular los límites laterales $\lim_{x\to 3^-} g(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x)$.
ii. Para calcular el límite por la izquierda introducir el comando `LímiteIzquierda(g, 3)` en la barra de Entrada.
iii. Para calcular el límite por la derecha introducir el comando `LímiteDerecha(g, 3)` en la barra de Entrada.
iv. Como $\lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$, existe una asíntota vertical en $x = 3$. Para dibujarla introducir la expresión `x=3` en la barra de Entrada.

(c) Calcular las asíntotas horizontales de g y dibujarlas.

i. Para ver si existen asíntotas horizontales hay que calcular los límites $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to \infty} g(x)$.
ii. Para calcular el límite en $-\infty$ introducir el comando `Límite(g, -inf)` en la barra de Entrada.
iii. Para calcular el límite en ∞ introducir el comando `Límite(g, inf)` en la barra de Entrada.
iv. Como $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 1$, existe una asíntota horizontal $y = 1$. Para dibujarla introducir la expresión `x=3` en la barra de Entrada.
v. Como $\lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$, no hay asíntota horizontal por la derecha.

(d) Calcular las asíntotas oblicuas de g.

i. Por la izquierda no hay asíntota oblicua puesto que hay una asíntota horizontal. Para ver si existen asíntota oblicua por la derecha hay que calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x}$. Para ello introducir el comando `Límite(g/x, inf)` en la barra de Entrada.
ii. Como $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0.5$, existe asíntota oblicua por la derecha y su pendiente es 0.5.
iii. Para determinar el término independiente hay que calcular el límite $\lim_{x\to\infty} g(x) - 0.5x$. Para ello introducir el comando `Límite(g-0.5x, inf)` en la barra de Entrada.
iv. Como $\lim_{x\to\infty} g(x) - 0.5x = 1.5$ entonces la ecuación de la asíntota oblicua es $y = 0.5x + 1.5$. Para dibujarla introducir la expresión `y=0.5x+1.5` en la barra de Entrada.

3. Reprentar gráficamente las siguientes funciones y clasificar sus discontinuidades en los puntos que se indica.

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = 0$.

i. Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x)=sen(x)/x` en la barra de Entrada de la Vista Algebraica y activar la Vista Gráfica.
ii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 0)` en la barra de Entrada.

iii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 0)` en la barra de Entrada.
iv. Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, f tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{2^{1/x}}$ en $x = 0$.

i. Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x)=sen(x)/x` en la barra de Entrada de la Vista Algebraica.
ii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(g, 0)` en la barra de Entrada.
iii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(g, 0)` en la barra de Entrada.
iv. Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \infty$, g tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

(c) $h(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$ en $x = 1$.

i. Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x)=sen(x)/x` en la barra de Entrada de la Vista Algebraica.
ii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^-} h(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 0)` en la barra de Entrada.
iii. Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^+} h(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 0)` en la barra de Entrada.
iv. Como $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 0$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, h tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$.

4. Representar gráficamente y clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Para representarla gráficamente, introducir la función `f(x)=Si(x<0, (x+1)/(x^2-1), 1/e^1/(x^2-1))` en la barra de Entrada de la Vista Algebraica y activar la Vista Gráfica.
(b) En primer lugar hay que encontrar los puntos que quedan fuera del dominio de cada uno de los tramos. Para ello, hay que analizar dónde se anulan los denominadores presentes en las definiciones de cada trozo. Para ver donde se anula x^2-1 introducir la ecuación $x^1 - 1 = 0$ en la barra de Entrada y hacer clic sobre el botón Resolver.
(c) Como la ecuación anterior tiene soluciones $x = -1$ y $x = 1$, en estos puntos la función no está definida y es, por tanto, discontinua. Además de estos dos puntos hay que estudiar la posible discontinuidad en $x = 0$ que es donde cambia la definición de la función.
(d) Para calcular el límite $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, -1)` en la barra de Entrada.

(e) Para calcular el límite $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, -1)` en la barra de Entrada.

(f) Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = -0.5$, f tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.

(g) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 0)` en la barra de Entrada.

(h) Para calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 0)` en la barra de Entrada.

(i) Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e$, f tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

(j) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ introducir el comando `LímiteIzquierda(f, 1)` en la barra de Entrada.

(k) Para calcular el límite $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ introducir el comando `LímiteDerecha(f, 1)` en la barra de Entrada.

(l) Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, f tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$.

3 Ejercicios propuestos

1. Calcular los siguientes límites si existen:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^{2x}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\log(x^2 - 1)}{x + 2}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1/x)}{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ $\quad n \in \mathbb{N}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$ $\quad n, m \in \mathbb{Z}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

(k) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$.

(l) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x^2}$.

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen} x}$.

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6}{4 + e^{-1/x}}$.

(p) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1}\right)$.

(q) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \sec x - \operatorname{tg} x$.

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{e^{1/(x^2 - 1)}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Calcular todas sus asíntotas.

3. Las siguientes funciones no están definidas en $x = 0$. Determinar, cuando sea posible, su valor en dicho punto de modo que sean continuas.

   (a) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$.

   (b) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

   (c) $j(x) = \dfrac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$.

   (d) $k(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.