Curso Básico de Cálculo

Santiago Angulo Díaz-Parreo (sangulo@ceu.es)
José Rojo Montijano (jrojo.eps@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU Universidad San Pablo

Facultad de Farmacia

Curso 2011-2012

Licencia creative commons

Curso básico de cálculo
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@gmail.com).

Contenidos

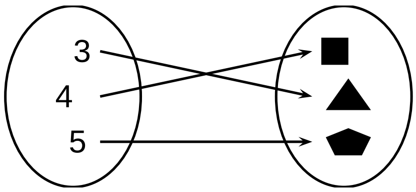
Funciones Elementales

¿Qué es una función?

Definición (Función de una variable)

Una *función* f de un conjunto A en otro B es una *relación* que asocia cada elemento $a \in A$, con un *único* elemento de B que se denota $f(a)$, y se llama *imagen* de a mediante f.

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$



Cuando el conjunto origen y destino es el de los números reales $\mathbb{R}$, entonces se dice que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función real de variable real*.

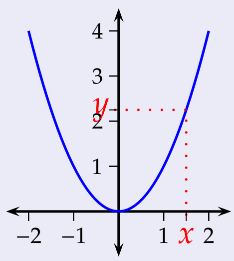
Formas de representar una función

Por extensión

Representación en forma de tabla

x	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	4	1	0	1	4	$\cdots$

Representación gráfica



Por Intensión

Representación algebraica explícita

$$y = x^2$$

Representación algebraica implícita

$$y - x^2 = 0$$

Representación algebraica paramétrica

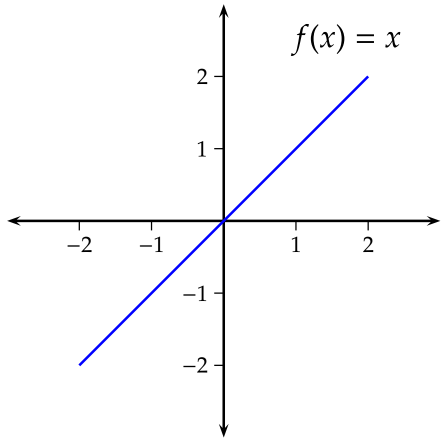
$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t \end{cases}$$

La función Identidad

Definición (Función Identidad)

Se llama *función identidad*, a toda función $Id : A \to A$ que asocia cada elemento de A con sigo mismo, es decir,

$$Id(x) = x.$$



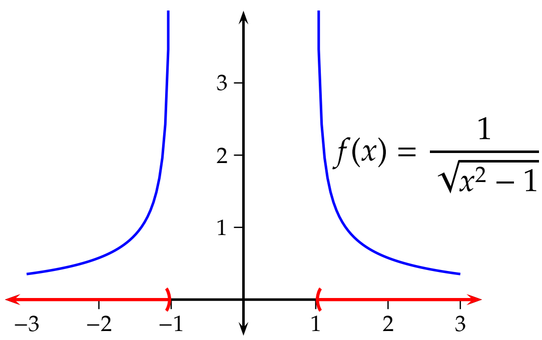
Dominio de una función

Definición (Dominio de una función)

El *dominio* de una función f es el conjunto de valores para los que la función está definida

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo



Dom$(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

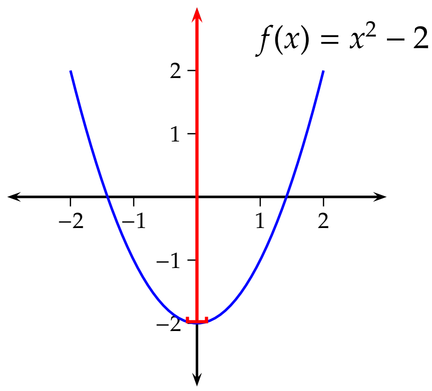
Imagen de una función

Definición (Imagen de una función)

La *imagen* de una función f es el conjunto de valores que la función puede tomar

$$Img(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo



$$\text{Img}(f) = (-2, \infty)$$

Composición de funciones

Definición (Composición de funciones)

Dadas dos funciones $g : A \to B$ y $f : B \to C$, se define la *función compuesta* $f \circ g$, (leído g compuesto con f) como la función

$$\begin{aligned} f \circ g : A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow f(g(x)) \end{aligned}$$

Para calcular la función compuesta $f \circ g(x)$, primero se aplica g sobre x y luego, se aplica f sobre $g(x)$:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Ejemplo Si $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \text{sen}\, x$, entonces

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \text{sen}\ \sqrt{x}.$$

¿Cuál es su dominio?

Inversa de una función

Definición (Función inversa)

Se llama *función inversa* de $f : A \to B$ a la función $f^{-1} : B \to A$ que cumple

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id(x)$$

La función inversa de f deshace o revierte el efecto de f. Es decir, si $f : A \to B$ asocia un elemento $x \in A$ con otro $y \in B$, entonces f^{-1} asocia el elemento y con el x:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

¡Ojo! $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$. Para que exista f^{-1} se requiere que f sea *inyectiva*.

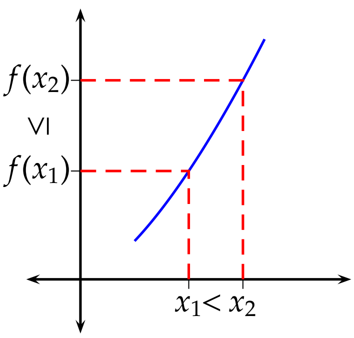
Ejemplo

- La inversa de $f(x) = x^3$ es la función $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
- La inversa de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la función $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

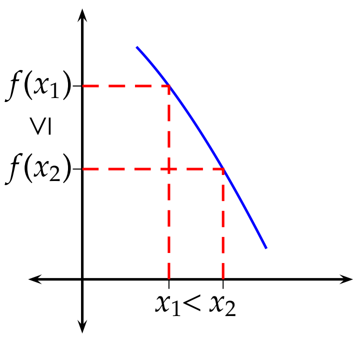
Crecimiento de una función

Definición (Función creciente y decreciente)

Se dice que una función f es *creciente* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Se dice que una función f es *decreciente* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Función creciente

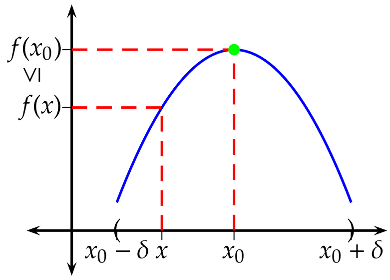


Función decreciente

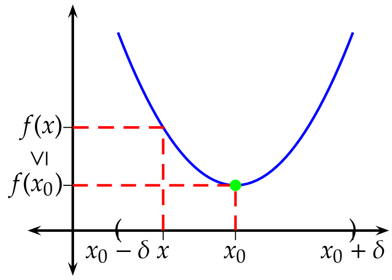
Extremos de una función

Definición (Máximo y mínimo relativo)

Se dice que una función f tiene un máximo relativo en x_0, si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$.
Se dice que una función f tiene un mínimo relativo en x_0, si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x_0) \leq f(x)$.



Máximo

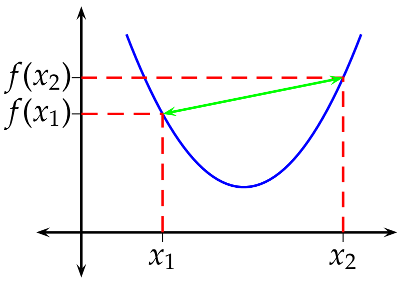


Mínimo

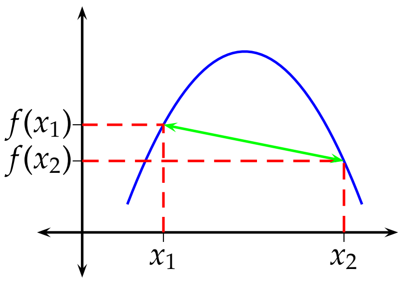
Concavidad de una función

Definición (Función cóncava y convexa)

Se dice que una función f es *cóncava* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica de f.
Se dice que una función f es *convexa* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de f.
Al punto donde cambia la concavidad de una función se le llama *punto de inflexión*.



Función cóncava



Función convexa

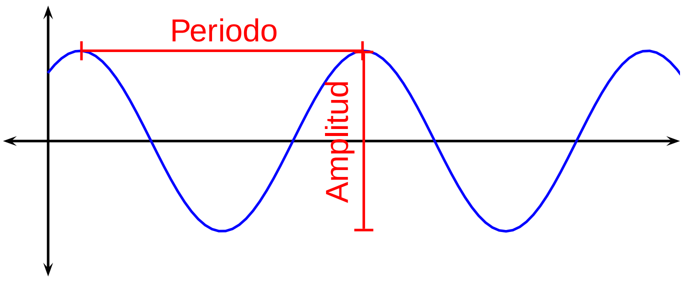
Funciones periódicas

Definición (Función periódica y periodo)

Se dice que una función f es *periódica* si existe un valor $h > 0$ tal que

$$f(x + h) = f(x)$$

para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.
Al menor valor de h que verifica la igualdad anterior se le llama *periodo* de f, y a la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función se le llama *amplitud* de f.



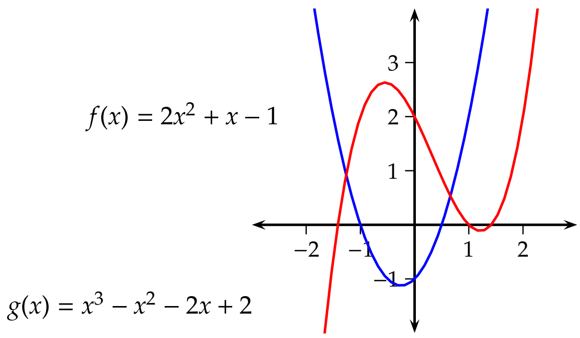
Funciones polinómicas

Definición (Función polinómica)

Una *función polinómica* es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde n es un entero no negativo que se llama *grado del polinomio*, y $a_0, \ldots, a_n$ son constantes reales ($a_n \neq 0$) que se llaman *coeficientes del polinomio*.



Propiedades de las funciones polinómicas

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Si el grado es impar, su imagen es $\mathbb{R}$.
- La función identidad $Id(x) = x$ es un polinomio de grado 1.
- Las funciones constantes $f(x) = c$ son polinomios de grado 0.
- Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces (puntos donde $f(x) = 0$).

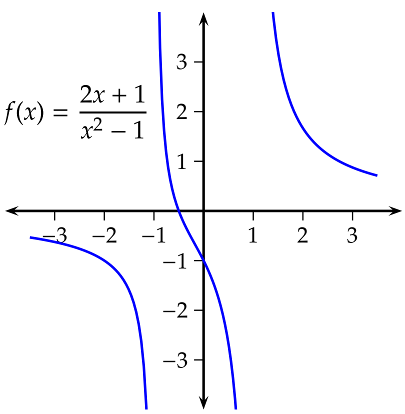
Funciones racionales

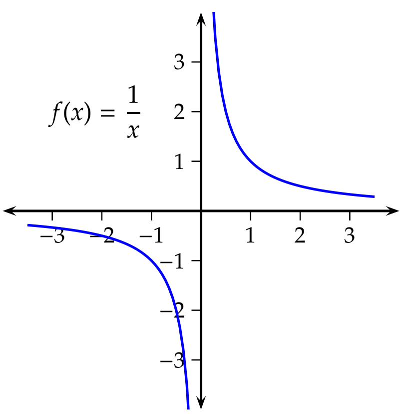
Definición (Función racional)

Una *función racional* es una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funcione polinómicas con $q(x) \neq 0$.





Propiedades de las funciones racionales

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del polinomio del denominador. En estos puntos suele haber asíntotas verticales.
- La tendencia en ∞ y $-\infty$ depende del grado del numerador y del denominador.
  Si $f(x) = \dfrac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}$, entonces
  - Si $n > m \to f(\pm\infty) = \pm\infty$.
  - Si $n < m \to f(\pm\infty) = 0$.
  - Si $n = m \to f(\pm\infty) = \dfrac{a_n}{b_m}$.
- Los polinomios son casos particulares de funciones racionales.
- Pueden descomponerse en producto de fracciones simples.

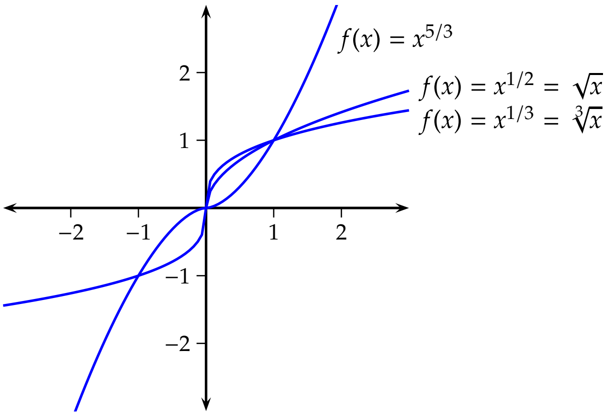
Funciones potenciales

Definición (Función potencial)

Una *función potencial* es una función de la forma

$$f(x) = x^r,$$

donde r es un número real.



Propiedades de las funciones potenciales

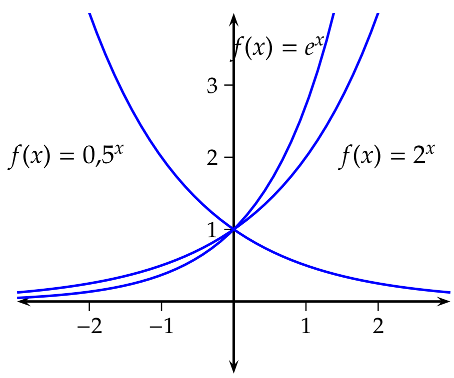
- Si el exponente es un número racional n/m, entonces
$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}.$$
Estas funciones se llaman *irracionales*. En este caso,
  - si m es impar el dominio es $\mathbb{R}$,
  - si m es par el dominio es $\mathbb{R}^+$.
- Todas las pasan por el punto $(1,1)$.
- El crecimiento depende del exponente. Si $x > 0$ entonces:
  - Exponente positivo $\Rightarrow$ función creciente.
  - Exponente negativo $\Rightarrow$ función decreciente.

  Además, si $f(x) = x^r$ y $g(x) = x^s$, entonces:
  - Si $r < s \Rightarrow f(x) > g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) < g(x)$ si $x > 1$.
  - Si $r > s \Rightarrow f(x) < g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) > g(x)$ si $x > 1$.
- Los polinomios de la forma $f(x) = x^n$ son un caso particular de funciones potenciales.

Funciones exponenciales

Definición (Función exponencial)

Una *función exponencial* de base a es una función de la forma
$$f(x) = a^x,$$
donde a es un valor real positivo distinto de 1.



Propiedades de las funciones exponenciales

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}^+$.
- Todas las pasan por el punto $(0, 1)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = a^x$ entonces
  - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.
  - Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente.

  Además, si $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ con $a < b$, entonces
  - Si $x < 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$.
  - Si $x > 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
- No tiene sentido para $a = 1$ por que sería una función constante.

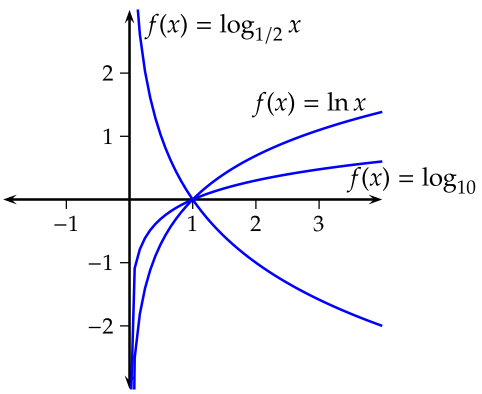
Funciones logarítmicas

Definición (Función logarítmica)

Dada una función exponencial $f(x) = a^x$, se define la *función logarítmica* de base a como la función inversa de f, y se denota

$$f^{-1}(x) = \log_a x,$$

donde a es un valor real positivo distinto de 1.



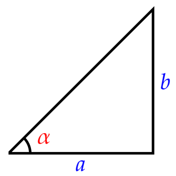
Propiedades de las funciones logarítmicas

- Por ser la inversa de la función exponencial, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}^+$.
  - Su imagen es el dominio de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}$.
- Todas pasan por el punto $(1, 0)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = \log_a x$ entonces
  - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.
  - Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente.

  Además, si $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_b x$ con $a < b$, entonces
  - Si $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
  - Si $x > 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$
- No tiene sentido para $a = 1$ por que sería una función constante.

Funciones trigonométricas

Surgen en geometría al medir las relaciones entre los catetos de un triángulo rectángulo, que dependen del ángulo del cateto contiguo y la hipotenusa de dicho triángulo.



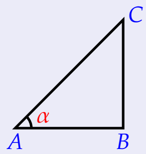
No obstante, esta no es la única definición posible, sino que también pueden definirse a partir de la función exponencial compleja.

- Seno
- Coseno
- Tangente
- Arcoseno
- Arcocoseno
- Arcotangente

Seno de un ángulo

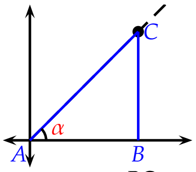
Definición (Seno de un ángulo)

Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *seno* de α, y se nota $\operatorname{sen}\alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la ordenada de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

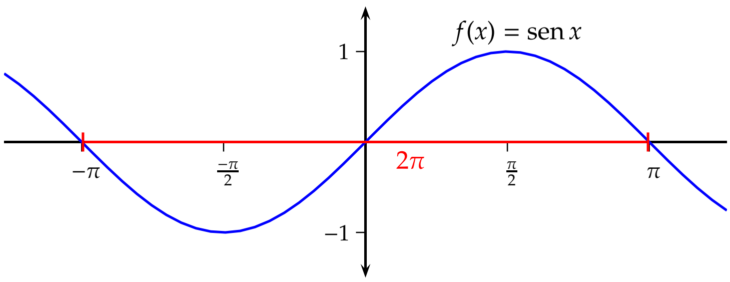
Función seno

Definición (Función seno)

Se define la función *seno*,

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su seno.



Propiedades de la función seno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar:

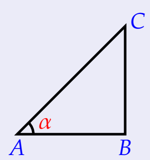
$$\begin{array}{llll}
\operatorname{sen} 0 = 0 & \operatorname{sen} \pi/6 = 1/2 & \operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2 & \operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2 \\
\operatorname{sen} \pi/2 = 1 & \operatorname{sen} \pi = 0 & \operatorname{sen} 3\pi/2 = -1 & \operatorname{sen} 2\pi = 0
\end{array}$$

- Es una función impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

Coseno de un ángulo

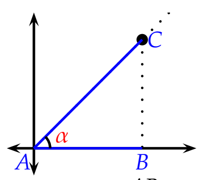
Definición (Coseno de un ángulo)

Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *coseno* de α, y se nota $\cos \alpha$, como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa.



$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC}$$

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la abscisa de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.



$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC}$$

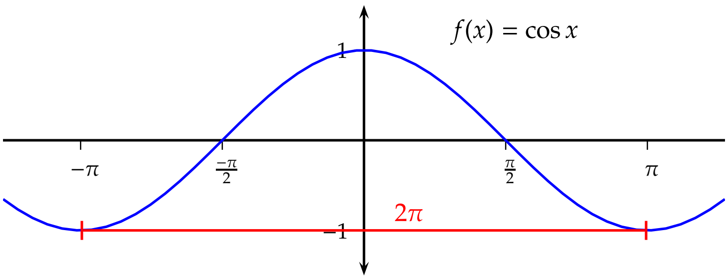
Función coseno

Definición (Función coseno)

Se define la función *coseno*,

$$f(x) = \cos x$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su coseno.



Propiedades de la función coseno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar:

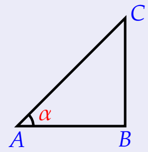
$$\begin{array}{llll} \cos 0 = 1 & \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2 & \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 & \cos \pi/3 = \sqrt{2}/2 \\ \cos \pi/2 = 0 & \cos \pi = -1 & \cos 3\pi/2 = 0 & \cos 2\pi = 1 \end{array}$$

- Es una función par: $\cos(-x) = \cos x$.

Tangente de un ángulo

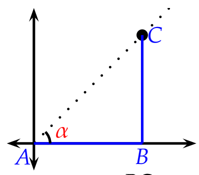
Definición (Tangente de un ángulo)

Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define la *tangente* de α, y se nota $\operatorname{tg}\alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}$$

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la ordenada y la abscisa de cualquier punto del otro lado.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}$$

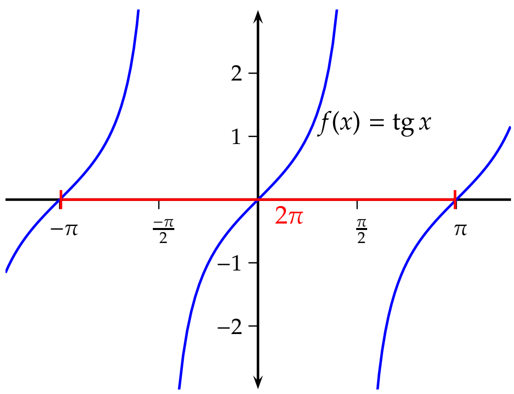
Función tangente

Definición (Función tangente)

Se define la función *tangente*,

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su tangente.



Propiedades de la función tangente

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del coseno, es decir $\mathbb{R} - \{2k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}$.
- Es periódica, con periodo 2π

$$\operatorname{tg}(x + 2k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar:

$$\begin{array}{llll} \operatorname{tg} 0 = 0 & \operatorname{tg} \pi/6 = 1/\sqrt{3} & \operatorname{tg} \pi/4 = 1 & \operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} \pi/2 = +\infty & \operatorname{tg} \pi = 0 & \operatorname{tg} 3\pi/2 = -\infty & \operatorname{tg} 2\pi = 0 \end{array}$$

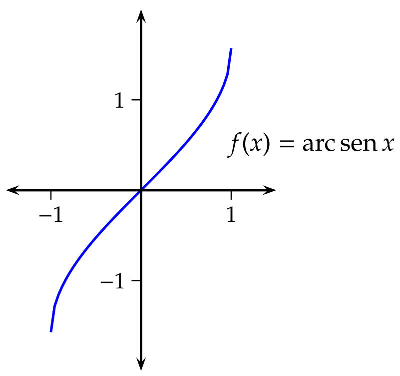
Función arcoseno

Definición (Función arcoseno)

Se define la función *arcoseno*,

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$$

como la función inversa de la función seno.



Propiedades de la función arcoseno

- Por ser la inversa de la función seno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función seno, es decir $[-1, 1]$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función seno, es decir $[-\pi/2, \pi/2]$.[1]
- Es creciente en todo el dominio.

[1] Para que exista la inversa de la función seno, es necesario restringir su dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$ para que sea inyectiva.

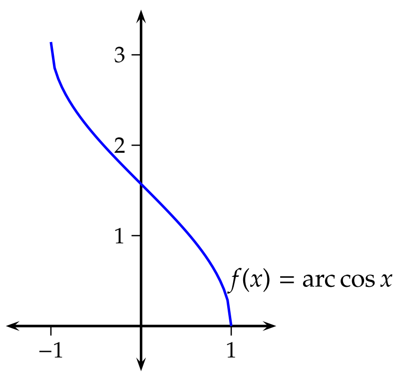
Función arcocoseno

Definición (Función arcocoseno)

Se define la función *arcocoseno*,

$$f(x) = \arccos x$$

como la función inversa de la función coseno.



Propiedades de la función arcoseno

- Por ser la inversa de la función coseno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función coseno, es decir $[-1, 1]$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función coseno, es decir $[0, \pi]$.[2]
- Es decreciente en todo el dominio.

[2] Para que exista la inversa de la función coseno, es necesario restringir su dominio a $[0, \pi]$ para que sea inyectiva.

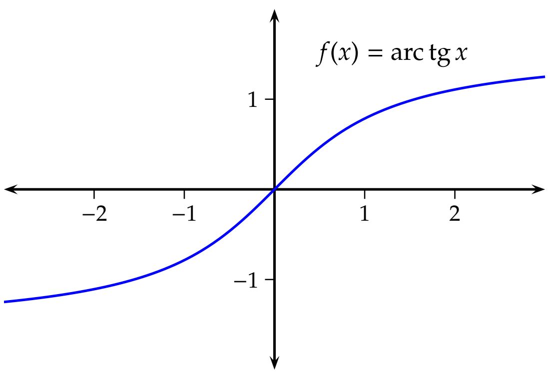
Función arcotangente

Definición (Función arcotangente)

Se define la función *arcotangente*,

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

como la función inversa de la función tangente.



Propiedades de la función arcotangente

- Por ser la inversa de la función tangente, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función tangente, es decir $\mathbb{R}$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función tangente, es decir $(-\pi/2, \pi/2)$.[3]
- Es creciente en todo el dominio.

[3] Para que exista la inversa de la función tangente, es necesario restringir su dominio a $(\pi/2, \pi/2)$ para que sea inyectiva.

Algunas relaciones trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
- $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
- $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$

Límites y continuidad

2. Límites y Continuidad
   - El concepto de límite
   - Álgebra de límites
   - Indeterminaciones y su resolución
   - Asíntotas de una función
   - Continuidad
   - Tipos de discontinuidades

Aproximación al concepto de límite

El concepto de límite está ligado al de tendencia.

Decimos que x *tiende* a un valor a, y lo escribimos $x \to a$, si se pueden tomar valores de x tan próximos a a como se quiera, pero sin llegar a valer a.

Si la aproximación es por defecto (con valores menores que a) se dice que x tiende a a por la izquierda, y se escribe $x \to a^-$, y si es por exceso (con valores mayores que a) se dice que x tiende a a por la derecha, y se escribe $x \to a^+$.

Cuando la variable x de una función f tiende a un valor a, cabe preguntarse si sus imágenes mediante f tienden a otro valor concreto:

¿A donde se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a?

Si $f(x)$ tiende a un valor l cuando x tiende a a, se dice que l es el *límite* de $f(x)$ cuando $x \to a$, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Límites laterales

Si $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a a por la izquierda, entonces se dice que l es el *límite por la izquierda* de $f(x)$ cuando $x \to a^-$, y se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x se aproxima a a por exceso, entonces se dice que l es el *límite por la derecha* de $f(x)$ cuando $x \to a^-$, y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

Para que exista el límite deben existir los límites laterales y ser iguales.

Aproximación por defecto

x	$f(x) = x^2$
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,99960001

$\Downarrow$

$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$

Aproximación por exceso

x	$f(x) = x^2$
2,1	4,41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
2,0001	4,00040001

$\Downarrow$

$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$

$\Downarrow$

Límites que no existen (I)

Si la función no está definida entorno a un punto, entonces no existe el límite en dicho punto

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
−0,1	No exite
−0,01	No existe
−0,001	No existe

$\Downarrow$

No existe $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Por la derecha

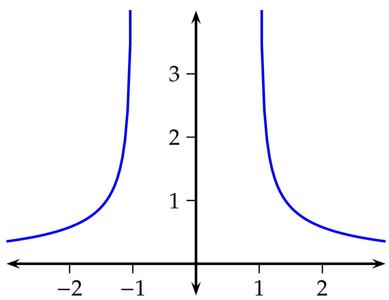
x	$f(x)$
0,1	No existe
0,01	No existe
0,001	No existe

$\Downarrow$

No existe $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$\Downarrow$

No existe $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$



Límites que no existen (II)

Cuando los límites laterales no coinciden entonces no existe el límite

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	-1
$-0{,}01$	-1
$-0{,}001$	-1

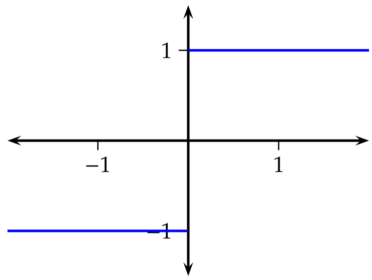
Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	1
$0{,}01$	1
$0{,}001$	1

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$



Límites que no existen (III)

A veces, cuando $x \to a$ los valores de $f(x)$ crecen o decrecen infinitamente y entonces no existe el límite. En este caso se dice que la función *diverge* y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo Veamos la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	100
$-0{,}01$	10000
$-0{,}001$	1000000

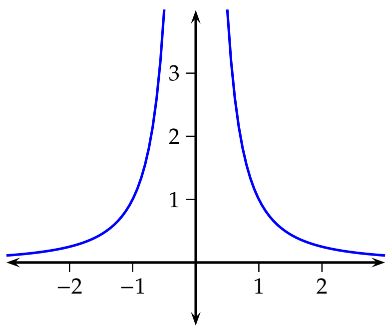
Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	100
$0{,}01$	10000
$0{,}001$	1000000

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Límites que no existen (IV)

A veces, el límite de un función en un punto puede no existir porque la función oscila rápidamente al acercarnos a dicho punto.

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	$-0{,}1736$
$-0{,}01$	$-0{,}9848$
$-0{,}005$	$0{,}3420$
$-0{,}001$	$0{,}9848$
$-0{,}0005$	$0{,}3420$
$-0{,}0001$	$0{,}9848$

$\Downarrow$

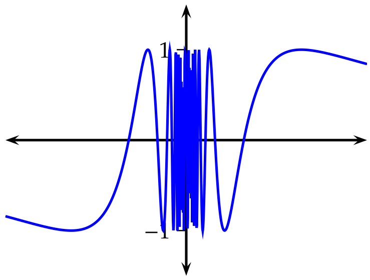
No existe $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	$0{,}1736$
$0{,}01$	$0{,}9848$
$0{,}005$	$-0{,}3420$
$0{,}001$	$-0{,}9848$
$0{,}0005$	$-0{,}3420$
$0{,}0001$	$-0{,}9848$

$\Downarrow$

No existe $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$



Límites en el infinito

Si $f(x)$ tiende a l cuando x crece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$, y se escribe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x decrece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$, y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

Ejemplo Estudiemos la tendencia de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando $x \to \pm\infty$:

$x \to +\infty$

x	$f(x) = 1/x$
1000	0,001
10000	0,0001
100000	0,00001

$\Downarrow$

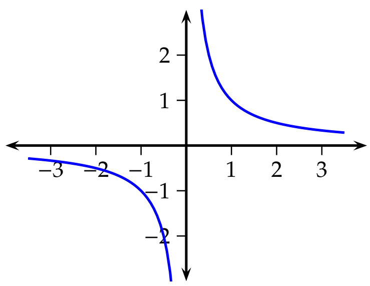
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$x \to -\infty$

x	$f(x) = 1/x$
−1000	−0,001
−10000	−0,0001
−100000	−0,00001

$\Downarrow$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$



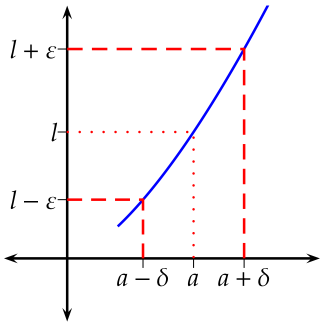
Definición de límite

Definición (Límite de una función en un punto)

Se dice que el límite de la función f cuando $x \to a$ es l, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.



Definición de límite en el infinito

Definición (Límite de una función en el infinito)

Se dice que el límite de la función f cuando $x \to +\infty$ es l, y se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x > \delta$.
Se dice que el límite de la función f cuando $x \to +\infty$ es l, y se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta < 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x < \delta$.

Álgebra de límites

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces se cumple que

1. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, siendo c constante.
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Límites de las funciones elementales

- **Funciones polinómicas**. Si f es un polinomio, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones racionales**. Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea una raíz de $q(x)$, y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Si a es una raíz de $q(x)$ entonces el límite puede existir o no.
- **Funciones potenciales**. Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto a tal que exista un intervalo $(a-\delta, a+\delta) \subset \mathrm{Dom}(f)$ para algún $\delta > 0$, y en ese caso, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones exponenciales**. Si $f(x) = c^x$ con $c \in \mathbb{R}$ entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones logarítmicas**. Si $f(x) = \log_c x$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}^+$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones trigonométricas**. Si $f(x)$ es una función trigonométrica, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Indeterminaciones

Al calcular límites pueden aparecer las siguientes indeterminaciones:

- **Tipo cociente**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ cuando $x \to a$.
  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$.
- **Tipo producto**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $f(x)\cdot g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0\cdot\pm\infty$ cuando $x \to a$.
- **Tipo potencia**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^{∞} cuando $x \to a$.
  Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 0^{0} cuando $x \to a$.
  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo ∞^{0} cuando $x \to a$.
- **Tipo diferencia**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x) - g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ cuando $x \to a$.

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Existen diferentes técnicas para resolver una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$:

- Factorización de polinomios en funciones racionales.
- División por el términos de mayor orden en funciones racionales.
- Infinitésimos equivalentes.
- Regla de L'Hôpital.

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Factorización de polinomios en funciones racionales

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \to a$, y a es una raíz de $p(x)$ y $q(x)$, se puede resolver la indeterminación factorizando los polinomios y simplificando.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \to \dfrac{0}{0}$ cuando $x \to 1$.

Para resolver la indeterminación factorizamos los polinomios

$$x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2,$$
$$x^4 - 4x + 3 = (x^2 + 2x + 3)(x-1)^2.$$

Como el factor $(x-1)^2$ es común, podemos simplificar la función en el cálculo del límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x^2+2x+3)(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

4

[4] Se pude simplificar porque aunque $x \to 1$, $x \neq 1$ y por tanto el denominador no se anula.

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

División por el término de mayor orden en funciones racionales

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \to \pm\infty$, entonces se puede resolver dividendo $p(x)$ y $q(x)$ por el término de mayor grado de ambos polinomios.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to \infty$.

Para resolver la indeterminación dividimos numerador y denominador por x^4 que es el término de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-3x+2}{x^4}}{\frac{x^4-4x+3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

En general, si $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots b_mx^m}$, entonces:

- Si $n > m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Si $n < m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
- Si $n = m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$.

Infinitésimos equivalentes

Definición (Infinitésimos equivalentes)

Si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, entonces se dice que f y g son *infinitésimos equivalentes* cuando $x \to a$ si se cumple

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

En tal caso se escribe $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to a$.

Si $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to a$ entonces $f(x)$ y $g(x)$ son magnitudes equivalentes cuando $x \to a$.

Infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$:

$$\begin{gathered}
\operatorname{sen} x \approx x \approx \operatorname{tg} x \\
1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{arc\,tg} x \approx x \\
e^x - 1 \approx x \\
\log(1 + x) \approx x
\end{gathered}$$

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Infinitésimos equivalentes

A veces se puede resolver una indeterminación cuando $x \to a$ sustituyendo cualquier subexpresión de la función por un infinitésimo equivalente cuando $x \to a$.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^3} \to \dfrac{0}{0}$ cuando $x \to 0$.

Como $\operatorname{sen} x \approx x$ y $1 - \cos x \approx \dfrac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$, para resolver la indeterminación sustituimos $\operatorname{sen} x$ por x y $1 - \cos x$ por $\dfrac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x\frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Teorema (Regla de L'Hôpital)

Si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$, entonces si existe el límite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ cuando $x \to a$ se cumple

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

¡Ojo! Para que exista $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ es necesario que que f y g sean derivables en un entorno de a.

Ejemplo Sea $f(x) = \dfrac{\log(x^2-1)}{x+2} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to \infty$.

Para resolver la indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\log(x^2-1)\right)'}{(x+2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0.$$

Resolución de una indeterminación de tipo producto

Si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to a$, entonces la indeterminación $f(x)\cdot g(x) \to 0\cdot\pm\infty$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \to \frac{0}{0}.$$

Ejemplo Sea $f(x) = x^2 e^{1/x^2} \to 0\cdot\infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} \to \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{1/x^2}\right)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty.$$

Resolución de una indeterminación de tipo potencia

Si $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación de tipo potencia cuando $x \to a$, entonces la indeterminación puede convertirse en una de tipo producto mediante la transformación:

$$\exp\left(\log f(x)^{g(x)}\right) = \exp\left(g(x) \cdot \log f(x)\right).$$

Ejemplo Sea $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to 1^\infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\exp\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) =$$
$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}\right)$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{(1/x)'}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+1/x}\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \exp(1) = e.$$

Resolución de una indeterminación de tipo diferencia

Si $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, entonces la indeterminación $f(x) - g(x)$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \to \frac{0}{0}.$$

Ejemplo Sea $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0}$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{sen} x)'}{(x\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{sen} x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Asíntota de una función

Una asíntota de una función es una recta a la que tiende la función en el infinito, es decir, que la distancia entre la recta y la función es cada vez menor.

Existen tres tipos de asíntotas:

- **Asíntota vertical**: $x = a$,
- **Asíntota horizontal**: $y = a$,
- **Asíntota oblicua**: $y = a + bx$.

Asíntotas verticales

Definición (Asíntota vertical)

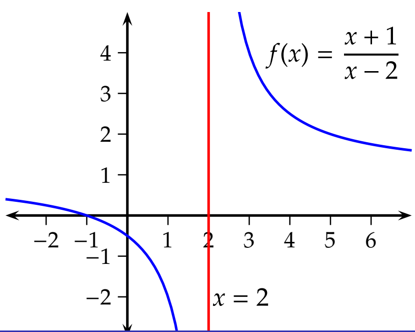
Se dice que una recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Las asíntotas verticales deben buscarse en los puntos donde no está definida la función, pero si lo está en las proximidades.

Ejemplo La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \infty$$



Asíntotas horizontales

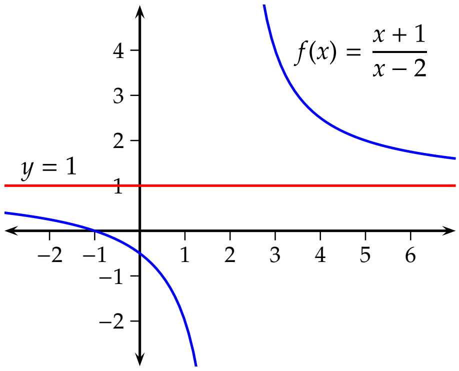
Definición (Asíntota horizontal)

Se dice que una recta $y = a$ es una *asíntota horizontal* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

Ejemplo La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1$$



Asíntotas oblicuas

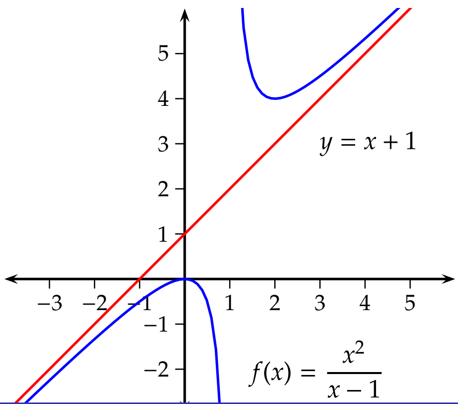
Definición (Asíntota oblicua)

Se dice que una recta $y = a + bx$ es una *asíntota oblicua* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - bx = a.$$

Ejemplo La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{x}{x-1} = 1$$



Continuidad

Definición (Función continua en un punto)

Se dice que una función f es *continua* en el punto a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

De esta definición se deducen tres condiciones necesarias para la continuidad:

$f(a) \in \mathrm{Dom}(f)$. Existe $\lim_{x\to a} f(x)$. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si se rompe alguna de estas condiciones, se dice que la función presenta una discontinuidad en a.

Definición (Función continua en un intervalo)

Se dice que una función f es *continua* en un intervalo si lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

La gráfica de una función continua en un intervalo puede dibujarse sin levantar el lápiz.

Tipos de discontinuidades

Dependiendo de la condición de continuidad que se rompa, existen distintos tipos de discontinuidades:

- Discontinuidad evitable.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
- Discontinuidad de 2ª especie.

Discontinuidad evitable

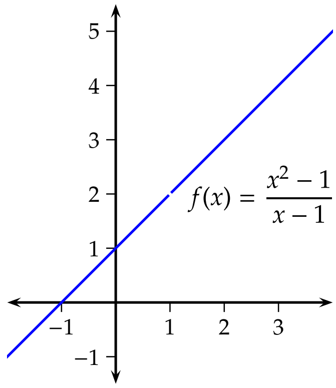
Definición (Discontinuidad evitable)

Se dice que una función f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ pero $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ ya que

La función no está definida en $x = 1$ pero

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 2} x+1 = 2.$$



Discontinuidad de 1ª especie de salto finito

Definición (Discontinuidad de 1ª especie de salto finito)

Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto finito* en el punto a si existen los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to a$ pero

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

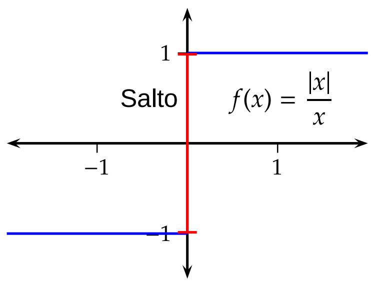
A la diferencia entre ambos límite se le lama *salto* de la discontinuidad.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Salto $= 1 - (-1) = 2$.



Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito

Definición (Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito)

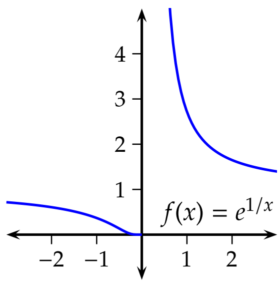
Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto infinito* en el punto a si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Si f tienen una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en un punto a, entonces f tienen una asíntota vertical $x = a$.

Ejemplo La función $f(x) = e^{1/x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$



Discontinuidad de 2ª especie

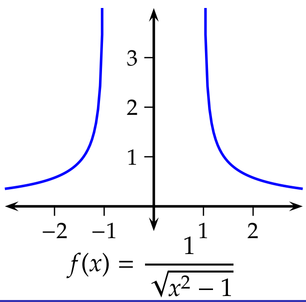
Definición (Discontinuidad de 2ª especie)

Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 2ª especie* en el punto a si no existe alguno de los límites laterales y tampoco se trata de una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

Normalmente la discontinuidades de 2ª especie se dan en puntos donde la función no definida en sus proximidades.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ tiene una discontinuidad de 2ª especie en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ no existe}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$$



Derivada y diferencial

Tasa de variación media

Definición (Incremento)

Dada una función f, se llama *incremento* de f en un intervalo $[a, b]$ a la diferencia entre el valor de f en cada uno de los extremos del intervalo, y se nota

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Cuando f es la función identidad $y = x$, se cumple que

$$\Delta x = \Delta y = f(b) - f(a) = b - a,$$

y por tanto, el incremento de x en un intervalo es la amplitud del intervalo. Esto nos permite escribir el intervalo $[a, b]$ como $[a, a + \Delta x]$.

Definición (Tasa de variación media)

Se llama *tasa de variación media* de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$, al cociente entre el incremento de y y el incremento de x en dicho intervalo, y se escribe

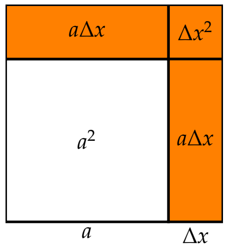
$$\text{TVM}\, f[a, a + \Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Tasa de variación media: Ejemplo

Consideremos la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x.

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a, y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado una cantidad Δx, ¿en cuánto se incrementará el área del cuadrado?

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(a+\Delta x) - f(a) = (a+\Delta x)^2 - a^2 = \\ &= a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2 = 2a\Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

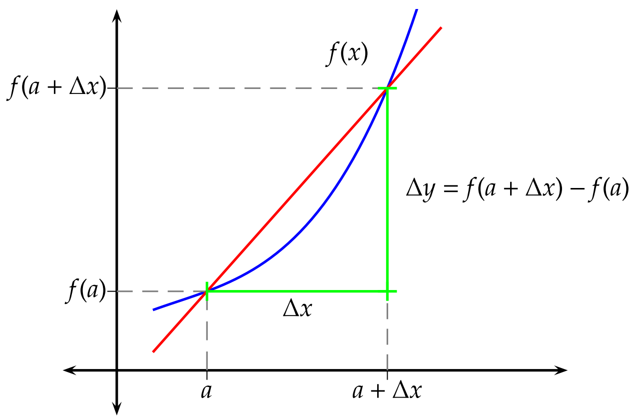


¿Cuál será la tasa de variación media del área en el intervalo $[a, a+\Delta x]$?

$$\text{TVM}\, f[a, a+\Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x.$$

Interpretación geométrica de la tasa de variación media

La tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a+\Delta x]$ es la pendiente de la recta *secante* a f en los puntos $(a, f(a))$ y $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$.



Tasa de variación instantánea

En muchas ocasiones, es interesante estudiar la tasa de variación que experimenta una función, no en intervalo, sino en un punto.

Conocer la tendencia de variación de una función en un instante puede ayudarnos a predecir valores en instantes próximos.

Definición (Tasa de variación instantánea y derivada)

Dada una función f, se llama *tasa de variación instantánea* de f en un punto a, al límite de la tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a+\Delta x]$, cuando Δx tiende a 0, y lo notaremos

$$\text{TVI}\, f(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \text{TVM}\, f[a, a+\Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Cuando este límite existe, se dice que la función f es derivable en el punto a, y al valor del mismo se le llama derivada de f en a, y se nota como $f'(a)$.

Tasa de variación instantánea: Ejemplo

Consideremos de nuevo la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x.

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a, y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado, ¿cuál es la tasa de variación instantánea del área del cuadrado en dicho instante?

$$\begin{aligned} \text{TVI}\, f(a)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2a + \Delta x = 2a. \end{aligned}$$

Así pues,

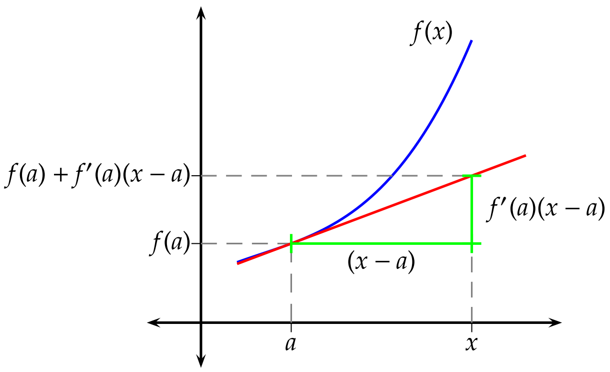
$$f'(a) = 2a.$$

El signo de $f'(a)$ indica la tendencia de crecimiento de f en el punto a:

- $f'(a) > 0$ indica que la tendencia es creciente.
- $f'(a) < 0$ indica que la tendencia es decreciente.

Interpretación geométrica de la tasa de variación instantánea

La tasa de variación instantánea de f en el punto a es la pendiente de la recta *tangente* a f en el punto $(a, f(a))$.



Tasa de variación instantánea

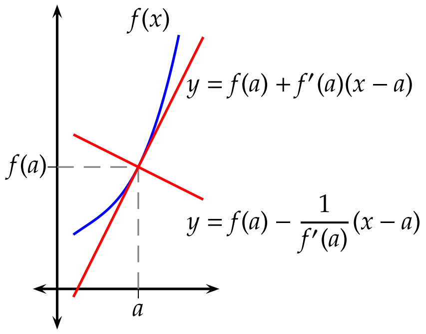
Definición (Recta tangente y normal a una función en un punto)

Dada una función f, se llama *recta tangente* a f en un punto $(a, f(a))$, a la recta de ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Se llama *recta normal* a f en un punto $(a, f(a))$, a la recta de ecuación

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a).$$



El concepto de diferencial

Definición (Diferencial de una función en un punto)

Dada una función f, se llama *diferencial* de f en un punto a, al la función

$$dy = df(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Delta x & \longrightarrow & f'(a)\Delta x \end{array}$$

Cuando f es la función identidad $y = x$, entonces $f'(a) = 1$, y se cumple que

$$dx = dy = f'(a)\Delta x = \Delta x,$$

de modo que también podemos definir el diferencial como

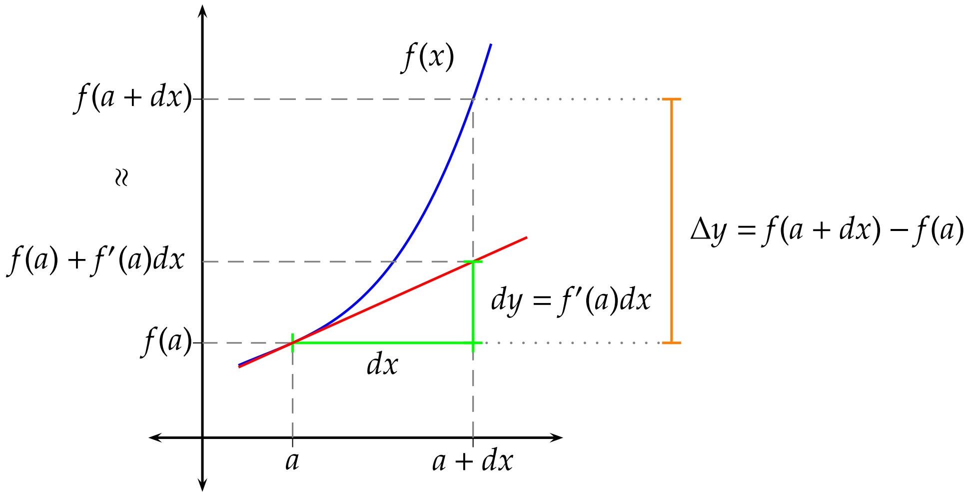
$$dy = df(a) = f'(a)dx.$$

De aquí se deduce otra forma de escribir la derivada de f en a

$$f'(a) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(a)}{dx}.$$

Aproximación de una función mediante su diferencial

El diferencial de una función f en un punto a, permite aproximar la variación de f cerca de a.



Aproximación de una función mediante su diferencial: Ejemplo

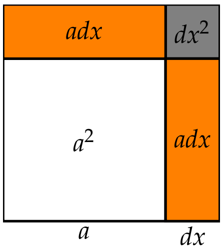
Consideremos otra vez la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x.

Si el lado del cuadrado es a, y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado, ¿cuál será aproximadamente la variación que habrá experimentado el área, cuando el lado aumente una cantidad dx?

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(a+dx) - f(a) = (a+dx)^2 - a^2 = \\ &= a^2 + 2adx + dx^2 - a^2 = 2adx + dx^2, \\ dy &= f'(a)dx = 2adx.\end{aligned}$$

Además,

$$\lim_{dx\to 0} \Delta y - dy = \lim_{dx\to 0} dx^2 = 0.$$



Propiedades del diferencial

Si $y = c$, es una función constante, entonces $dy = 0$. Si $y = x$, es la función identidad, entonces $dy = dx$.

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son dos funciones diferenciables, entonces

- $d(u+v) = d(u) + d(v)$
- $d(u-v) = d(u) - d(v)$
- $d(u\cdot v) = d(u)\cdot v + u\cdot d(v)$
- $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du\cdot v - u\cdot dv}{v^2}$

Diferencial de una función compuesta

La regla de la cadena

Si $y = f \circ g$ es la composición de dos funciones $y = f(z)$ y $z = g(x)$, entonces

$$dy = f'(z)dz = f'(g(x))g'(x)dx,$$

de donde se deduce

$$(f \circ g)'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(g(x))g'(x)dx}{dx} = f'(g(x))g'(x),$$

o bien

$$(f \circ g)'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = f'(z)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Derivada de la función inversa

Si $y = f(x)$ es una función y $x = f^{-1}(y)$ es su inversa, entonces

$$dy = f'(x)dx \quad \text{y} \quad dx = \left(f^{-1}\right)'(y)dy,$$

de donde se deduce

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{f'(x)dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

o bien

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Derivada de una función implícita

Si $F(x, y) = 0$ es una función implícita entonces

$$dF(x, y) = d0 = 0.$$

Si $F(x, y) = 0$ es una función implícita en la que y depende de x, entonces podemos calcular la derivada de y a partir del diferencial

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{d0}{dx} = 0.$$

Ejemplo. Consideremos la función implícita de la circunferencia de radio 1, $x^2 + y^2 = 1$. Entonces su diferencial es

$$d(x^2 + y^2) = d1 = 0 \Leftrightarrow d(x^2) + d(y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy = 0.$$

A partir de aquí podemos calcular fácilmente la derivada de y:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{2x\,dx + 2y\,dy}{dx} = 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

Derivada de una función parametrica

Dada una función paramétrica

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

podemos calcular su derivada a partir de las derivadas de f y g:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)\,dt}{f'(t)\,dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Ejemplo. Consideremos la elipse

$$\begin{cases} x = 2\operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} t\,dt}{2\cos t\,dt} = \frac{-1}{2}\operatorname{tg} t.$$

Aplicaciones de la Derivada

4 Aplicaciones de la Derivada

- Estudio del crecimiento de una función
- Determinación de los extremos relativos de una función
- Estudio de la concavidad de una función
- Polinomios de Taylor

Estudio del crecimiento de una función

La principal aplicación de la derivada es el estudio del crecimiento de una función mediante el signo de la derivada.

Teorema

Si f es una función cuya derivada existe en un intervalo I, entonces:

- Si $\forall x \in I \; f'(x) \geq 0$ entonces f es creciente en el intervalo I.
- Si $\forall x \in I \; f'(x) \leq 0$ entonces f es decreciente en el intervalo I.

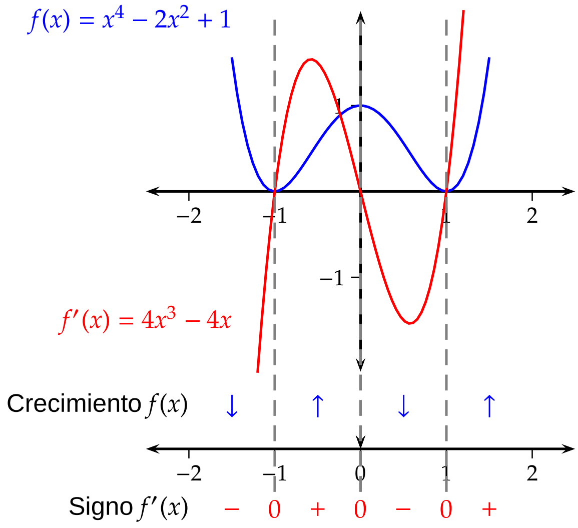
Ejemplo La función $f(x) = x^3$ es creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que $\forall x \in \mathbb{R} \; f'(x) \geq 0$.

Observación. *Una función puede ser creciente o decreciente en un intervalo y no tener derivada.*

Estudio del crecimiento de una función

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.



Determinación de extremos relativos de una función

Como consecuencia del resultado anterior, la derivada también sirve para determinar los extremos relativos de una función.

Teorema (Criterio de la primera derivada)

Sea f es una función cuya derivada existe en un intervalo I, y sea $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$, entonces:

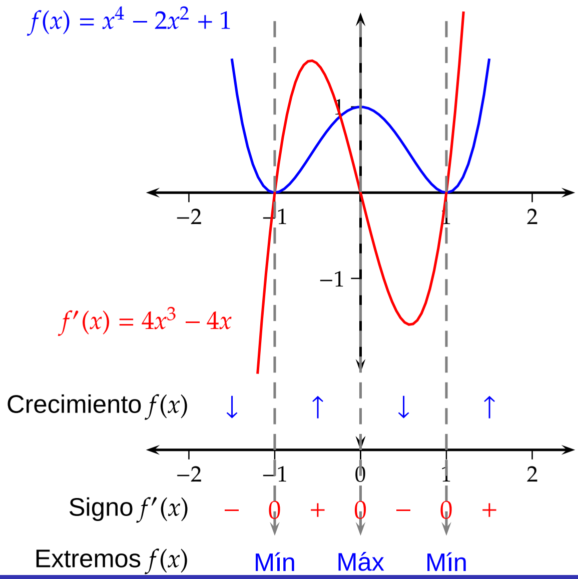
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$ entonces f tiene un *máximo relativo* en x_0.
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$ entonces f tiene un *mínimo relativo* en x_0.
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$ entonces f tiene un *punto de inflexión creciente* en x_0.
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$ entonces f tiene un *punto de inflexión decreciente* en x_0.

Los puntos donde se anula la derivada de una función se denominan *puntos críticos*.

Determinación de extremos relativos de una función

Ejemplo

Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.



Estudio de la concavidad de una función

La concavidad de una función puede estudiarse mediante el signo de la segunda derivada.

Teorema (Criterio de la segunda derivada)

Si f es una función cuya segunda derivada existe en un intervalo I, entonces:

- Si $\forall x \in I\ f''(x) \geq 0$ entonces f es cóncava en el intervalo I.
- Si $\forall x \in I\ f''(x) \leq 0$ entonces f es convexa en el intervalo I.

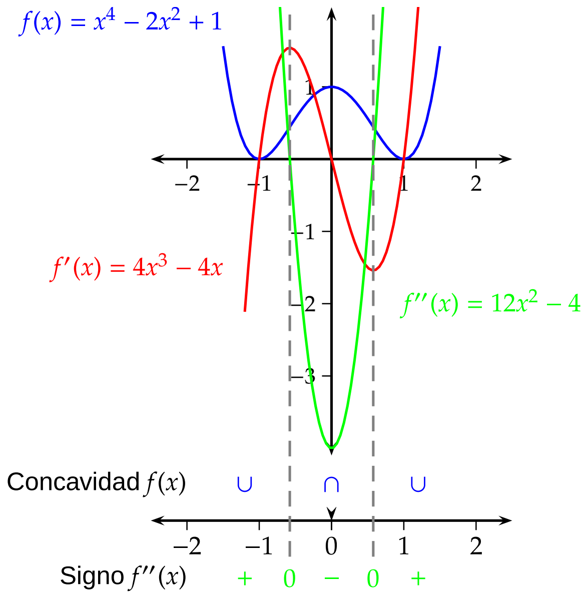
Ejemplo La función $f(x) = x^2$ tiene segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$ y por tanto es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

Observación. *Una función puede ser cóncava o convexa en un intervalo y no tener derivada.*

Estudio de la concavidad de una función

Ejemplo

Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 4$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.



Aproximación de funciones mediante polinomios

Las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y sus composiciones son difíciles de manejar y calcular.

Por contra, los polinomios son funciones más sencillas. Dado un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

el cálculo de $p(x)$ se reduce a realizar un número finito de productos y sumas. Esto convierte a los polinomios en funciones fáciles de calcular sobre todo para un ordenador.

Además, los polinomios son funciones con muy buenas propiedades ya que

- Son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Son derivables (a cualquier orden) en $\mathbb{R}$.

Aproximación de una función mediante un polinomio

Objetivo

Aproximar una función $f(x)$ mediante un polinomio $p(x)$ cerca de un punto a.

Lo importante es que cerca del punto a la función y el polinomio se parezcan, aunque lejos del punto haya grandes diferencias.

Como mínimo exigiremos que la función coincida con el polinomio en el punto a, es decir,

$$p(a) = f(a).$$

Aproximación mediante un polinomio de grado 0

Un polinomio de grado 0 tiene ecuación

$$p(x) = a_0,$$

donde a_0 es una constante.

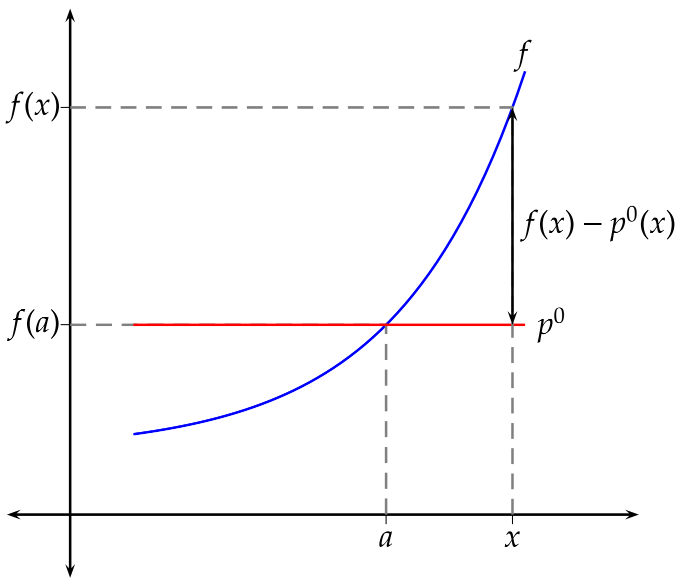
Como el polinomio debe valer lo que la función en el punto a, debe cumplir

$$p(a) = a_0 = f(a).$$

En consecuencia, el polinomio de grado 0 que mejor aproxima a f en un entorno del punto a es

$$p(x) = f(a).$$

Aproximación mediante un polinomio de grado 0



Aproximación mediante un polinomio de grado 1

Un polinomio de grado 1 es una recta y tiene ecuación

$$p(x) = a_0 + a_1 x,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a).$$

De entre todos los polinomio de grado 1, el que mejor aproxima a f en entorno del punto a será el que cumpla las dos condiciones siguientes:

1- p y f valen lo mismo en a: $p(a) = f(a)$,

2- p y f tienen la misma pendiente en a: $p'(a) = f'(a)$.

Esta última condición nos asegura que en un entorno de a, p y f tienen aproximadamente la misma tendencia de crecimiento, pero requiere que la función f sea derivable en a.

La recta tangente: Mejor aproximación de grado 1

Imponiendo las condiciones anteriores tenemos

1- $p(x) = a_0 + a_1(x-a) \Rightarrow p(a) = a_0 + a_1(a-a) = a_0 = f(a)$,

2- $p'(x) = a_1 \Rightarrow p'(a) = a_1 = f'(a)$.

Así pues, el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a f en un entorno del punto a es

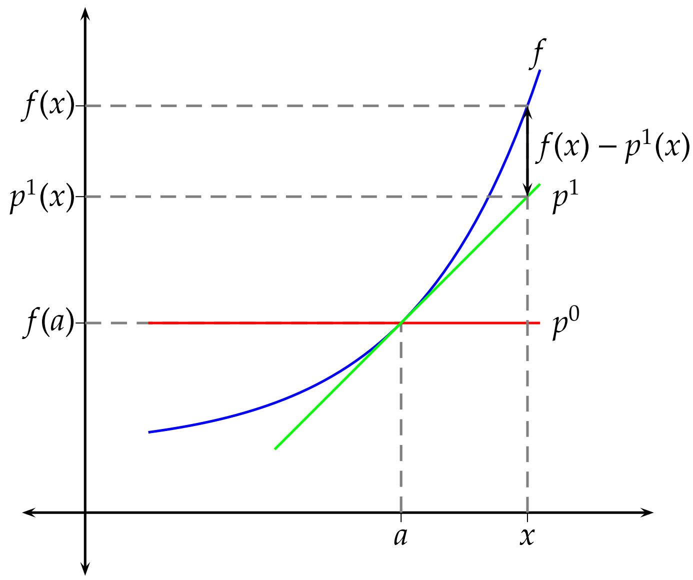
$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

que resulta ser la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$.

Recordemos, además, que si f es derivable en a, entonces podemos aproximar la variación de f en el intervalo $[a, x]$ mediante el diferencial de f en a, es decir,

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Aproximación mediante un polinomio de grado 1



Aproximación mediante un polinomio de grado 2

Un polinomio de grado 2 es una parábola y tiene ecuación

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2.$$

De entre todos los polinomio de grado 2, el que mejor aproxima a f en entorno del punto a será el que cumpla las tres condiciones siguientes:

1- p y f valen lo mismo en a: $p(a) = f(a)$,

2- p y f tienen la misma pendiente en a: $p'(a) = f'(a)$.

3- p y f tienen la misma concavidad en a: $p''(a) = f''(a)$.

Esta última condición requiere que la función f sea dos veces derivable en a.

Mejor polinomio de grado 2

Imponiendo las condiciones anteriores tenemos

1- $p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 \Rightarrow p(a) = a_0 = f(a)$,

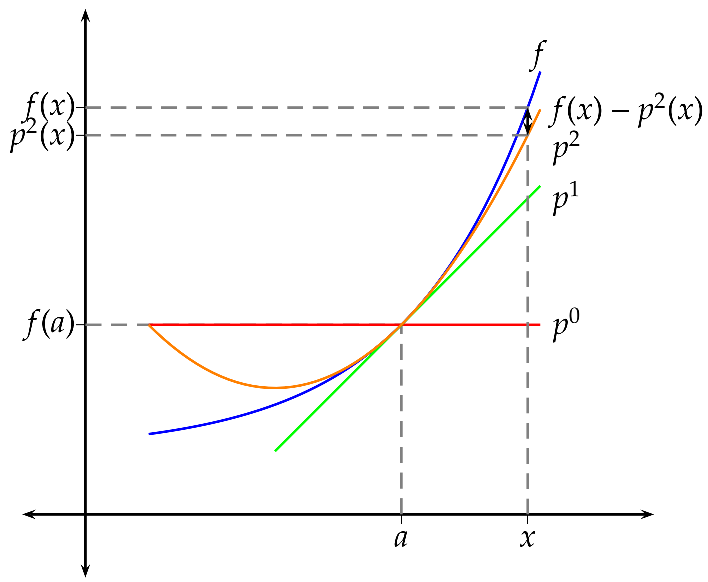
2- $p'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) \Rightarrow p'(a) = a_1 + 2a_2(a-a) = a_1 = f'(a)$,

3- $p''(x) = 2a_2 \Rightarrow p''(a) = 2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

Así pues, el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a f en un entorno del punto a es

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Aproximación mediante un polinomio de grado 2



Aproximación mediante un polinomio de grado n

Un polinomio de grado n es una parábola y tiene ecuación

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^2,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

De entre todos los polinomio de grado n, el que mejor aproxima a f en entorno del punto a será el que cumpla las $n+1$ condiciones siguientes:

1- $p(a) = f(a)$,
2- $p'(a) = f'(a)$,
3- $p''(a) = f''(a)$,
$\cdots$
n+1- $p^{(n}(a) = f^{(n}(a)$.

Obsérvese que para que se cumplan estas condiciones es necesario que f sea n veces derivable en el punto a.

Cálculo de los coeficientes del polinomio de grado n

Si calculamos las sucesivas derivadas de p tenemos:

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n,\\
p'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1},\\
p''(x) &= 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2},\\
&\vdots\\
p^{(n}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 1a_n = n!a_n.
\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones anteriores tenemos

1- $p(a) = a_0 + a_1(a-a) + a_2(a-a)^2 + \cdots + a_n(a-a)^n = a_0 = f(a)$,

2- $p'(a) = a_1 + 2a_2(a-a) + \cdots + na_n(a-a)^{n-1} = a_1 = f'(a)$,

3- $p''(a) = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(a-a)^{n-2} = 2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = f''(a)/2$,

$\ldots$

n+1- $p^{(n}(a) = n!a_n = f^{(n}(a) = a_n = \frac{f^{(n}(a)}{n!}$.

Polinomio de Taylor de orden n

Definición (Polinomio de Taylor de orden n para f en el punto a)

Dada una función f, n veces derivable en un punto a, se define el *polinomio de Taylor* de orden n para f en el punto a como

$$p^n_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

El polinomio de Taylor de orden n para f en el punto a es el polinomio de orden n que mejor aproxima a f en un entorno del punto a, ya que es el único que cumple las $n+1$ condiciones anteriores.

Se pude demostrar, además, que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p^n_{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

y la diferencia entre f y $p^n_{f,a}$ es un infinitésimo de orden superior a n.

Cálculo del polinomio de Taylor

Ejemplo

Vamos a aproximar la función $f(x) = \log x$ en un entorno del punto 1 mediante un polinomio de grado 3.

La ecuación del polinomio de Taylor de orden 3 para f en el punto 1 es

$$p^3_{f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

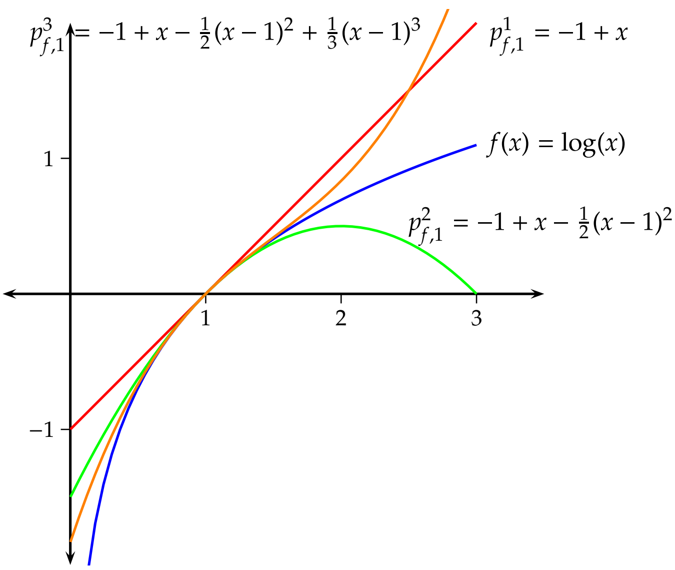
Calculamos las tres primeras derivadas de f en 1:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log x & f(1) = \log 1 = 0, \\ f'(x) = 1/x & f'(1) = 1/1 = 1, \\ f''(x) = -1/x^2 & f''(1) = -1/1^2 = -1, \\ f'''(x) = 2/x^3 & f'''(1) = 2/1^3 = 2. \end{array}$$

Sustituyendo en la ecuación del polinomio obtenemos

$$p^3_{f,1}(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}.$$

Polinomios de Taylor para la función logaritmo



Polinomio de Mc Laurin de orden n

La ecuación del polinomio de Taylor se simplifica cuando el punto en torno al cual queremos aproximar es el 0.

Definición (Polinomio de Mc Laurin de orden n para f)

Dada una función f, n veces derivable en 0, se define el *polinomio de Mc Laurin* de orden n para f como

$$p^n_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}x^i.$$

Cálculo del polinomio de Mc Laurin

Ejemplo

Vamos a aproximar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en un entorno del punto 0 mediante un polinomio de grado 3.

La ecuación del polinomio de Mc Laurin de orden 3 para f es

$$p^3_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

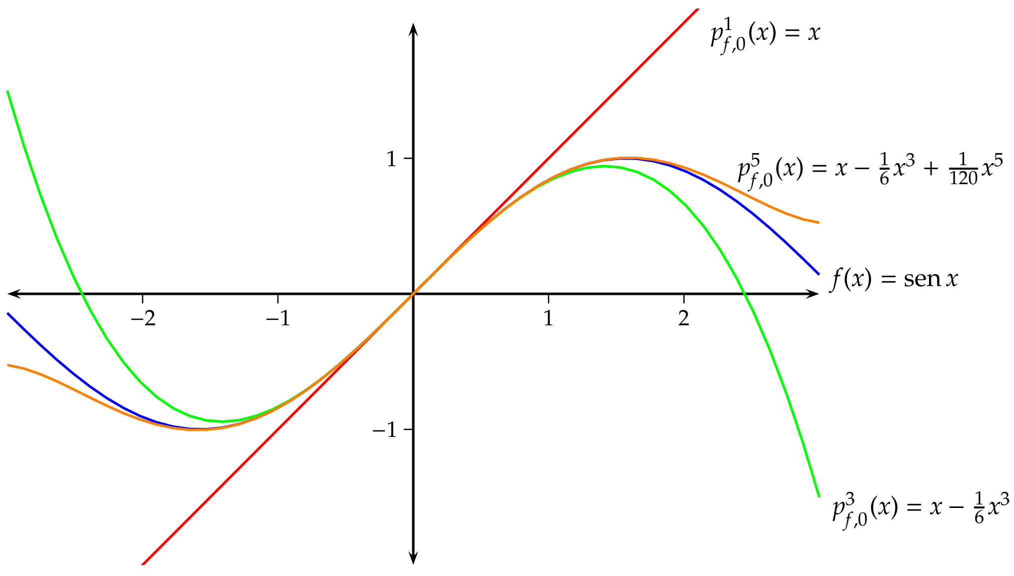
Calculamos las tres primeras derivadas de f en 0:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0,\\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= \cos 0 = 1,\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0,\\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -\cos 0 = -1.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación del polinomio obtenemos

$$p^3_{f,0}(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

Polinomios de Mc Laurin para la función seno



Polinomios de Mc Laurin de funciones elementales

$f(x)$	$p^n_{f,0}(x)$
$\operatorname{sen} x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$ si $n = 2k$ o $n = 2k-1$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ si $n = 2k$ o $n = 2k+1$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}$ si $n = 2k$ o $n = 2k-1$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

Resto de Taylor

Los polinomios de Taylor permiten calcular el valor aproximado de una función cerca de un punto, pero siempre se comete un error en dicha aproximación.

Definición (Resto de Taylor)

Si f es una función para la que existe el su polinomio de Taylor de orden n en un punto a, $p^n_{f,a}$, entonces se define el *resto de Taylor* de orden n para f en a como

$$r^n_{f,a}(x) = f(x) - p^n_{f,a}(x).$$

El resto mide el error cometido al aproximar $f(x)$ mediante $p^n_{f,a}(x)$ y nos permite expresar la función f como la suma de un polinomio de Taylor más su resto correspondiente:

$$f(x) = p^n_{f,a}(x) + r^n_{f,a}(x).$$

Esta última expresión se conoce como *fórmula de Taylor* de orden n para f en el punto a.

Forma de Lagrange del resto

Teorema (Lagrange)

Sea f una función para la que las $n+1$ primeras derivadas están definidas en el intervalo $[a, x]$. Entonces existe un valor $t \in (a, x)$ tal que el resto de Taylor de orden n para f en el punto a puede expresarse como

$$r^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Esta expresión se conoce como *forma de Lagrange del resto*, y realmente no nos permite calcular el resto, ya que para ello deberíamos conocer el valor de t.

Sin embargo, al saber que $t \in (a, x)$, podremos acotar el valor del resto y así el error cometido en cualquier aproximación.

Acotación del resto

Una vez fijado el valor de x donde queremos aproximar el valor de la función, el resto en la forma de Lagrange es una función que sólo depende de t. Por tanto, el problema de acotar el valor absoluto resto se reduce a encontrar el máximo de la expresión

$$\left|\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$$

en el intervalo (a, x).

Dicho máximo será una cota del error, en valor absoluto, cometido al aproximar $f(x)$ mediante $p^n_{f,a}(x)$.

Se puede demostrar que al aumentar el grado de un polinomio de Taylor, el resto se hace cada vez menor. En consecuencia, tomando un n suficientemente grande, podemos conseguir una aproximación tan precisa como queramos.

Acotación del resto

Ejemplo

Supongamos, por ejemplo, que queremos averiguar cuanto vale aproximadamente $\log 1{,}1$, y para ello utilizamos el polinomio de Mc Laurin de orden 3 para la función $f(x) = log(1 + x)$

$$p^3_{f,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Como $\log 1{,}1$ es el valor de $f(x)$ para $x = 0{,}1$, un valor aproximado nos lo dará el polinomio anterior en dicho punto, es decir,

$$p^3_{f,0}(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} = 0{,}0953333.$$

Así pues, $\log 1{,}1 \approx 0{,}0953333$.

Para darnos una idea de la magnitud del error cometido en esta aproximación vamos a acotar el valor absoluto del resto.

Acotación del resto

Ejemplo

El resto en la forma de Lagrange correspondiente al polinomio anterior es

$$r^3_{f,0}(x) = \frac{f^{iv}(t)}{4!}x^4 = -\frac{1}{4(1+t)^4}x^4, \quad t \in (0,x).$$

Sustituyendo en $x = 0{,}1$ tenemos

$$r^3_{f,0}(0{,}1) = -\frac{0{,}1^4}{4(1+t)^4} \quad t \in (0\,,\,0{,}1),$$

que sólo depende de t.

Así pues, para acotar el resto, en valor absoluto, basta con calcular el máximo de la expresión

$$\left| -\frac{0{,}1^4}{4(1+t)^4} \right|$$

en el intervalo $[0\,,\,0{,}1]$.

Dicho máximo se encuentra en $t = 0$, de modo que la cota obtenida es

$$\left| r^3_{f,0}(0{,}1) \right| \leq \left| -\frac{0{,}1^4}{4(1+0)^4} \right| = 2{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Reducción del error

Acabamos de ver que el polinomio de Mc Laurin de orden 3 nos permite aproximar $\log 1{,}1$ con un error menor de $2{,}5 \cdot 10^{-5}$, pero ¿hasta qué grado deberíamos llegar para cometer un error menor que 10^{-8}?

El resto en la forma de Lagrange correspondiente al polinomio de Mc Laurin de grado n es

$$r^n_{f,0}(x) = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+t)^{n+1}}x^{n+1}, \quad t \in (0,x).$$

Sustituyendo en $x = 0{,}1$ tenemos

$$r^n_{f,0}(0{,}1) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+t)^{n+1}}0{,}1^{n+1}, \quad t \in (0\,,\,0{,}1).$$

Reducción del error

Como antes, para acotar el resto, en valor absoluto, debemos buscar el máximo de la expresión

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+t)^{n+1}} 0{,}1^{n+1}\right|$$

en el intervalo $[0\,,\,0{,}1]$.

Dicho máximo se alcanza, al igual que antes, en $t = 0$, de modo que obtenemos la cota

$$\left|r^n_{f,0}(0{,}1)\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+0)^{n+1}} 0{,}1^{n+1}\right| = (n+1)^{-1}10^{-(n+1)}.$$

Así pues, para que el error sea menor que 10^{-8} debemos tomar el menor n que satisfaga

$$(n+1)^{-1}10^{-(n+1)} \leq 10^{-8},$$

y dicho valor es $n = 7$.

Por tanto, $p^7_{f,0}(0{,}1) = 0{,}095310181$ es una aproximación de $\log 1{,}1$ con un error menor que 10^{-8}.

Derivadas Parciales

5 Derivadas Parciales

- Funciones de varias variables
- Noción de derivada parcial
- Vector gradiente
- Derivadas parciales de segundo orden
- Matriz hessiana

Necesidad de las funciones de varias variables

En numerosos problemas de geometría, física y ciencias naturales nos encontramos a menudo con variables o factores que dependen o están relacionados con otros dos, tres o más factores:

- El área de un triángulo depende de dos factores que son su base y su altura.
- El volumen que ocupa un gas perfecto depende de dos factores que son su presión y su temperatura.
- El camino recorrido por un cuerpo en un movimiento de caída libre depende de multitud de factores entre los que cabe destacar: el tiempo que dure la caída, el área de la sección transversal del cuerpo, la latitud del lugar, la altura sobre el nivel del mar, la presión del aire, la temperatura del aire, etc.

Estas dependencias se expresan con funciones de varias variables.

Funciones de varias variables

Definición (Función de varias variables)

Una *función de n variables* de un conjunto $A_1 \times \cdots \times A_n$ en un conjunto B, es una relación que asocia a cada tupla $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ un único elemento de B que se denota $f(a_1, \ldots, a_n)$, y se llama imagen de $(a_1, \ldots, a_n)$ mediante f.

$$\begin{array}{rccc} f: & A_1 \times \cdots \times A_n & \longrightarrow & B \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \longrightarrow & f(a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

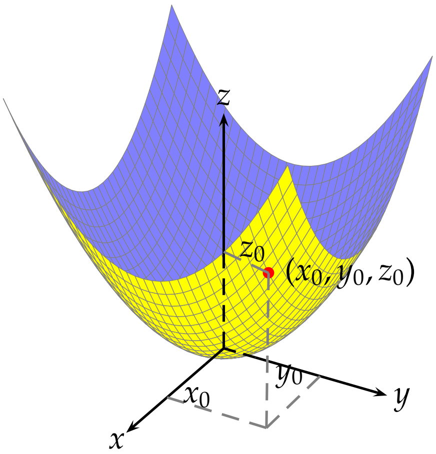
Cuando tanto $A_1, \ldots, A_n$ como B son el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, entonces se dice que f es una función de real de n variables reales.

Ejemplo

- El área de un triángulo es la función real de dos variables reales
$$f(x, y) = \frac{xy}{2}.$$
- El el volumen de un gas perfecto es otra función real de dos variables
$$v = f(t, p) = \frac{nRt}{p}, \quad \text{con } n \text{ y } R \text{ constantes.}$$

Gráfica de una función de dos variables

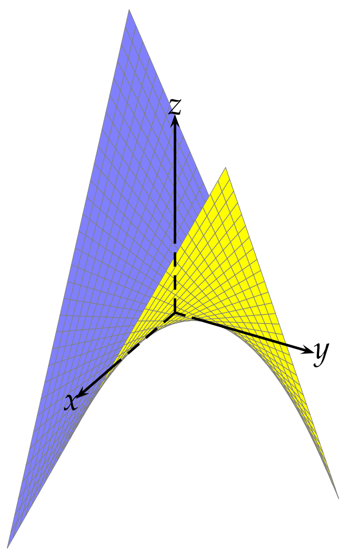
La representación gráfica cartesiana de una función de dos variables $f(x, y)$ es una superficie del espacio real $\mathbb{R}^3$ donde cada punto de la superficie tiene coordenadas (x, y, z), siendo $z = f(x, y)$.



Gráfica de una función de dos variables

Gráfica del área de un triángulo

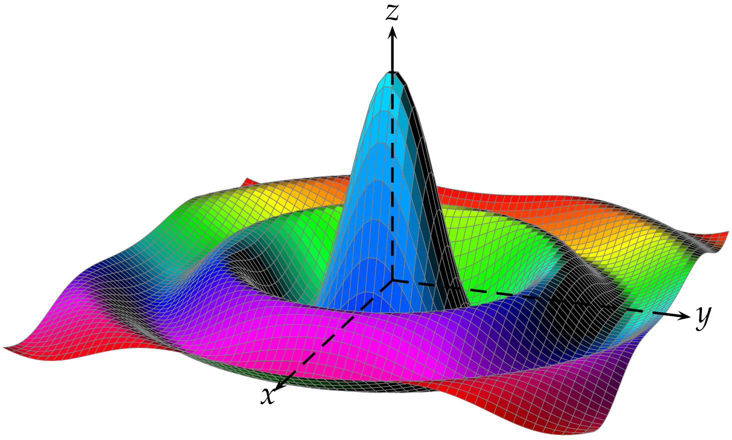
La función $f(x, y) = xy$ que mide el área de un triángulo de base x y altura y tiene la siguiente representación gráfica:



Gráfica de una función de dos variables

Gráfica de una "gota de agua"

La función $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tiene la siguiente representación gráfica tan peculiar:



Reducción del número de variables

Muchos de los resultados del cálculo diferencial vistos para funciones de una variable pueden generalizarse para funciones de varias variables.

Cuando en una función de n variables se fijan k de sus variables, es decir, se les da valores constantes, entonces dicha función se convierte en una función de $n-k$ variables.

Ejemplo Si consideramos la función del área de un triángulo

$$f(x,y) = \frac{xy}{2},$$

y fijamos el valor de la base $x = c$, entonces el área del triángulo ya sólo depende de la altura y f se convierte e una función de una sola variable:

$$g(y) = f(c,y) = \frac{cy}{2}, \quad \text{con } c \text{ constante.}$$

Variación de una función con respecto a una variable

Al igual que medíamos la variación de una función de una variable, tiene sentido medir la variación de una función de varias variables con respecto a cada una de sus variables.

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Si estamos en el punto (x_0, y_0) y nos movemos una cantidad Δx en la dirección del eje X, entonces pasaremos desde el punto (x_0, y_0) al punto $(x_0 + h, y_0)$, al mantenerse la coordenada y constante, y la variación que experimenta la función será

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

La variación relativa que experimenta la función con respecto a la variable x vendrá dada por el cociente

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Tasa de variación instantánea de una función con respecto a una variable

Si en lugar de medir la variación de una función con respecto a una variable en un intervalo, medimos la variación en un punto, es decir, cuando Δx tiende a 0, entonces obtenemos una tasa de variación instantánea:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

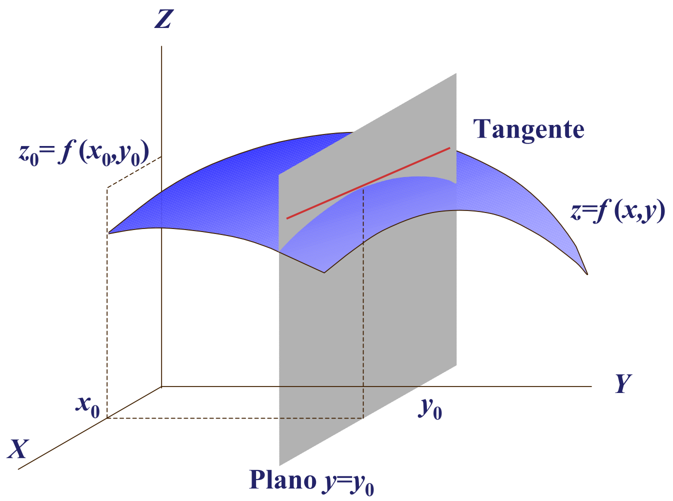
Al valor del límite, cuando existe, también se le conoce como *derivada parcial* de f con respecto a la variable x en el punto (x_0, y_0) y se nota

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

La derivada parcial mide la tasa de variación instantánea de f cuando nos movemos en la dirección del eje X.

Interpretación geométrica de la derivada parcial

Geométricamente, $z = f(x, y)$ define una superficie. Si se corta esta superficie con el plano de ecuación $y = y_0$ (es decir, si y se fija como una constante), la intersección de este plano con la superficie es una curva plana cuya pendiente en el punto (x_0, y_0) es la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0).



Derivada parcial

El concepto de derivada parcial visto para funciones de dos variables puede extenderse fácilmente para funciones de n variables.

Definición (Derivada parcial)

Dada una función de n variables $f(x_1, \ldots, x_n)$, se dice que f es *derivable parcialmente* con respecto a la variable x_i en el punto $a = (a_1, \ldots, a_n)$ si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{h}.$$

En tal caso, al valor del límite se le llama *derivada parcial* de f con respecto a la variable x_i, y se denota

$$f'_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

La definición de derivada para funciones de una variable es un caso particular de esta definición para $n = 1$.

Cálculo de la derivada parcial

Al medir la variación de f con respecto a la variación de una sola de sus variables x_i en un punto $a = (a_1, \dots, a_n)$, el resto de las variables se pueden considerar como constantes y, en tal caso, podemos ver a f como una función de una sola variable

$$g(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

La derivada parcial de f con respecto a x_i puede calcularse derivando esta función:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{dg}{dx_i}(a_i) = g'(a_i).$$

Regla

Para derivar parcialmente $f(x_1, \dots, x_n)$ con respecto a una variable x_i, se deriva f como si la única variable fuese x_i, tratando el resto de las variables como constantes.

Cálculo de la derivada parcial

Ejemplo con el volumen de un gas perfecto

En la ecuación de los gases perfectos, el volumen es una función que depende de dos variables

$$v(t, p) = \frac{nRt}{p},$$

donde t mide la temperatura, p la presión y n y R son constantes.

La tasa de variación instantánea que experimenta el volumen con respecto a la presión viene dada por la derivada parcial de v con respecto a p.

Para calcular esta derivada parcial se fija t como constante y se deriva v como si la única variable fuese p:

$$\frac{\partial v}{\partial p}(t, p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{nRt}{p}\right)_{t\ =\text{cte}} = \frac{-nRt}{p^2}.$$

Del mismo modo, la tasa de variación instantánea del volumen con respecto a la temperatura es:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, p) = \frac{d}{dt}\left(\frac{nRt}{p}\right)_{p\ =\text{cte}} = \frac{-nR}{p}.$$

Vector gradiente

Definición (Vector gradiente)

Dada una función de varias variables $f(x_1, \dots, x_n)$, para la que existen todas sus derivadas parciales en un punto $a = (a_1, \dots, a_n)$, se define el *vector gradiente* de f en a, y se nota $\nabla f(a)$, como el vector cuyas componentes son las n derivadas parciales de f en a, es decir,

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

El vector gradiente en un punto dado tiene la misma magnitud y dirección que la velocidad máxima de variación de la función en ese punto.

De este modo, $\nabla f(a)$ *indica la dirección de máximo crecimiento de f en el punto a*, mientras que $-\nabla f(a)$ indica la dirección de máximo decrecimiento.

Cálculo del vector gradiente

Ejemplo con una función de temperatura

Al calentar una superficie la temperatura t (en ºC) en cada punto (x, y, z) (en mt) de dicha superficie viene dada por la función:

$$t(x, y, z) = \frac{x}{y} + z^2.$$

¿En qué dirección y con qué magnitud aumentará más rápidamente la temperatura en el punto $(2, 1, 1)$ de dicha superficie?

La dirección en la que más rápidamente aumenta la temperatura nos la da el vector gradiente

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right) = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}, 2z\right).$$

En el punto $(2, 1, 1)$ dicha dirección será

$$\nabla f(2, 1, 1) = \left(\frac{1}{1}, \frac{-2}{1^2}, 2 \cdot 1\right) = (1, -2, 2),$$

y su magnitud

$$|\nabla f(2, 1, 1)| = |\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}| = |\sqrt{9}| = 3 \text{ ºC/mt}.$$

Derivadas parciales de segundo orden

Las derivadas parciales de una función son, a su vez, funciones de varias variables que muchas veces pueden volverse a derivar parcialmente con respecto a alguna de sus variables.

Si una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivada parcial $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ con respecto a la variable x_i en un conjunto A, entonces podemos derivar de nuevo parcialmente f'_{x_i} con respecto a la variable x_j. Esta segunda derivada, cuando existe, se llama *derivada parcial de segundo orden* de f con respecto a las variables x_i y x_j, y se nota

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

De forma análoga se definen las derivadas de orden superior.

Cálculo de las derivadas parciales de segundo orden

La función de dos variables

$$f(x, y) = x^y$$

tiene cuatro derivadas parciales de segundo orden, que son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(yx^{y-1}\right) = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx^{y-1}\right) = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y \log x\right) = yx^{y-1}\log x + x^y \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y \log x\right) = x^y(\log x)^2.$$

Matriz hessiana y f hessiano

Definición (Matriz hessiana)

Dada una función de varias variables $f(x_1,\dots,x_n)$, para la que existen todas sus derivadas parciales de segundo orden en un punto $a=(a_1,\dots,a_n)$, se define la *matriz hessiana* de f en a, y se nota $Hf(a)$, como la matriz cuadrada cuyos elementos son

$$Hf(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Al determinante de esta matriz se le llama *hessiano* de f en a.

Cálculo de la matriz hessiana y el hessiano

Consideremos de nuevo la función de dos variables

$$f(x,y)=x^y.$$

Su matriz hessiana es:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}(y\log x+1) \\ x^{y-1}(y\log x+1) & x^y(\log x)^2 \end{pmatrix}.$$

En el punto $(1,2)$ la matriz vale

$$Hf(1,2)=\begin{pmatrix} 2(2-1)1^{2-2} & 1^{2-1}(2\log 1+1) \\ 1^{2-1}(2\log 1+1) & 1^2(\log 1)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y el hessiano en dicho punto vale

$$|Hf(1,2)|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2\cdot 1-1\cdot 1=-1.$$

Igualdad de las derivadas cruzadas

En el ejemplo anterior se aprecia que las *derivadas cruzadas* de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ coinciden. Ello es debido al siguiente teorema:

Teorema (Igualdad derivadas cruzadas)

Si $f(x, y)$ es una función tal que sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $dfrac\partial f\partial y$, $dfrac\partial^2 f\partial y\partial x$ y $dfrac\partial^2 f\partial x\partial y$ existen y son continuas en un conjunto abierto A, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Una consecuencia del teorema es que, al calcular una derivada parcial de segundo orden que cumpla lo anterior, *¡el orden en que se realicen las derivadas parciales no importa!*

Si el teorema se cumple para todas las derivadas parciales de segundo orden, entonces la matriz hessiana es simétrica.

Integrales

Primitiva de una función

Definición (Primitiva de una función)

Se dice que la función $F(X)$ es una *función primitiva* de $f(x)$ si se verifica que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Ejemplo La función $F(x) = x^2$ es una primitiva de la función $f(x) = 2x$ ya que $F'(x) = 2x$ para todo $\mathbb{R}$.

El cálculo de primitivas puede verse con un proceso inverso al cálculo de derivadas, y es por eso también se suele llamar *antiderivada* a la primitiva de una función.

Como dos funciones que difieran en una constante tienen la misma derivada, si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ también lo será toda función de la forma $F(x) + k\ \forall k \in \mathbb{R}$.

Integral indefinida de una función

Como dos funciones que difieran en una constante tienen la misma derivada, si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ también lo será toda función de la forma $F(x) + k\ \forall k \in \mathbb{R}$.

Definición (Integral indefinida)

Se llama *función integral indefinida* de la función f al conjunto de todas sus funciones primitivas y se representa como

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

siendo $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ y C una constante arbitraria.

Ejemplo La integral indefinida de $f(x) = 2x$ es

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Interpretación de la integral

En temas anteriores se vio que la derivada de una función es la tasa de variación instantánea, de manera que si conocemos la tasa de variación instantánea de una función en cada instante, podemos averiguar la variación real de la función.

Ejemplo ¿Cuál sera el espacio recorrido por un objeto en caída libre?

Cuando soltamos cualquier objeto desde una altura, la única fuerza que actúa sobre el es la gravedad, con una aceleración aproximada de $9{,}8$ m/s^2, esto quiere decir que la velocidad varía de forma constante y por tanto la velocidad del objeto en cada instante t sera:

$$v(t) = 9{,}8t \text{ m/s}$$

Puesto que la velocidad en cada instante es la tasa de variación instantánea del espacio recorrido por el objeto, su primitiva nos dará el espacio recorrio por el objeto en cada instante:

$$e(t) = \int 9{,}8t\,dt = 9,8\frac{t^2}{2}.$$

Así, por ejemplo, a los 2 segundos, el espacio recorrido será $e(2) = 9{,}8\frac{2^2}{2} = 19{,}6$ m.

Linealidad de la integral

Dadas dos funciones f y g que admiten primitiva, y una constante $k \in \mathbb{R}$ se verifica que

1. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

Integrales inmediatas

- $\int a\,dx = ax + C$, con a constante.
- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$.
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.
- $\int e^x\,dx = e^x + C$.
- $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.
- $\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C$.
- $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$.
- $\int \operatorname{cosec} x\,dx =$ $\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$.
- $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$.
- $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$.
- $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$.
- $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$.
- $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$.
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a} + C$.
- $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} + C$.
- $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \sec^{-1} \dfrac{x}{a} + C$.
- $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$.

Técnicas de integración

Desgraciadamente, y a diferencia del cálculo de derivadas, no existe un procedimiento infalible que permita calcular la primitiva de una función siempre que exista. Existen no obstante, diferentes técnicas para integrar algunos tipos de funciones. Las técnicas más habituales son:

- Integración por partes
- Integración por reducción
- Integración por cambio de variable
- Integración de funciones racionales
- Integración de funciones trigonométricas

Integración por partes

Dadas f y g, dos funciones derivables de x. De la regla de la derivada del producto se deduce

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)\,dx,$$

o con notación diferencial, si u y v son funciones derivables de x

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Al emplear el método de integración por partes se debe realizar la elección de u y dv de tal forma que las integrales que haya que realizar sean lo más sencillas posibles.

Ejemplo Para integrar $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ se deberá elegir $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$, con lo que $du = dx$ y $v = -\cos x$, resultando

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x.$$

Si hubiésemos elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\,dx$, la cosa se complica.

Integración por reducción

Las fórmulas de reducción permiten simplificar el cálculo cuando hay que aplicar la integración por partes varias veces consecutivas.

Si se tiene que calcular una integral indefinida I_n que depende de un número natural n, las fórmulas de reducción nos permitirán expresar I_n en función de I_{n-1}, es decir se obtendrá una relación recurrente del tipo

$$I_n = f(I_{n-1}, x, n)$$

con lo que calculando una integral se pueden obtener fácilmente las demás.

Ejemplo Si se desea calcular $I_n = \int x^n e^x\,dx$, aplicando la integración por partes se debe elegir $u = x^n$ y $dv = e^x\,dx$, con lo que $du = nx^{n-1}\,dx$ y $v = e^x$, obteniéndose

$$I_n = \int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx = x^n e^x - nI_{n-1}.$$

Así, por ejemplo, para $n = 3$ se tiene

$$\int x^3 e^x\,dx = I_3 = x^3e^x - 3I_2 = x^3e^x - 3(x^2e^x - 2I_1) = x^3e^x - 3(x^2e^x - (xe^x - I_0) =$$
$$= x^3e^x - 3(x^2e^x - (xe^x - e^x) = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

Integración por cambio de variable

La regla de la cadena establece que la derivada de una función compuesta $f(g(x))$ es

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x),$$

de manera que es posible integrar esta última expresión haciendo un cambio de variable $u = g(x)$ de manera que $du = g'(x)dx$:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u) + C = f(g(x)) + C.$$

Ejemplo Para calcular la integral $\int \frac{1}{x\log x}\,dx$ puede hacerse el cambio de variable $u = \log x$ con lo que $du = \frac{1}{x}dx$ y sustituyendo queda

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{1}{\log x}\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \log|u| + C,$$

y deshaciendo el cambio tenemos

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log|\log x| + C.$$

Integración de funciones racionales

Toda función racional se puede escribir como suma de un polinomio (que tiene primitiva inmediata) más una función racional propia, es decir, una función racional en la que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. A su vez, toda función racional propia puede expresarse como suma de fracciones simples de los tipos siguientes:

$$\frac{A}{(x-a)} \quad \text{: con raíces reales simples del denominador.}$$

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{: con raíces reales múltiples del denominador.}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+cx+d} \quad \text{: con raíces complejas simples del denominador.}$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^n} \quad \text{: con raíces complejas múltiples del denominador.}$$

con $n > 1$.

Integración de funciones racionales

Primitivas de las fracciones simples

Usando la linealidad de la integral, basta calcular la primitiva de cada una de estas fracciones simples para calcular la primitiva de la función racional:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1.$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+cx+d} = \frac{A}{2}\log|x^2+cx+d| + \frac{2B-Ac}{\sqrt{4d-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+c}{\sqrt{4d-c^2}} + C.$$

Integración de funciones racionales I

Ejemplo con raíces reales

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2}$. Su denominador se puede factorizar como $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$ por lo que tiene una raíz simple -2 y una raíz múltiple 1.

La descomposición en fracciones simples es:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} = \\ &= \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \\ &= \frac{(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)}{(x-1)^2(x+2)}\end{aligned}$$

e igualando los numeradores tenemos $A = 16/9$, $B = -1/3$ y $C = -7/9$, de modo que

$$\frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2} = \frac{16/9}{x-1} + \frac{-1/3}{(x-1)^2} + \frac{-7/9}{x+2}$$

Integración de funciones racionales II

Ejemplo con raíces reales

Finalmente, integrando tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2}\,dx &= \int \frac{16/9}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/3}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-7/9}{x+2}\,dx = \\ &= \frac{16}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int (x-1)^{-2}\,dx - \frac{7}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \\ &= \frac{16}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{7}{9}\ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

Integración de funciones racionales

Ejemplo con raíces imaginarias

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x+8}$.

En este caso el denominador no tiene raíces reales, pero puede escribirse de la forma

$$x^2-4x+8 = (x-2)^2+4$$

Integrando, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx &= \int \frac{x-2+3}{(x-2)^2+4}\,dx = \\ &= \int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)^2+4}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln|(x-2)^2+4| + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Integración de funciones trigonométricas

Función $\sin^n x \cos^m x$ con n o m impares

Si $f(x) = \sin^n x \cos^m x$ con n o m impares, entonces para integrar esta función se hace el cambio $\operatorname{sen} x = t$ o $\cos x = t$.

Ejemplo

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx,$$

y haciendo el cambio $t = \operatorname{sen} x$, de modo que $dt = \cos x dx$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx = \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int t^2 - t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C,$$

y deshaciendo el cambio anterior se obtiene

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Integración de funciones trigonométricas

Función $\sin^n x \cos^m x$ con n y m pares

Si $f(x) = \sin^n x \cos^m x$ con n y m pares, entonces se suelen utilizar las siguientes igualdades para facilitar el cálculo de la integral:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Ejemplo

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx,$$

siendo la primera integral es de este mismo tipo y la segunda del anterior

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{32} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{24} \operatorname{sen}^3 2x$$

Integración de funciones trigonométricas

Productos de senos y cosenos

Las igualdades

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y))$$
$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

transformas los productos en sumas, simplificando su integración.

Ejemplo

$$\int \operatorname{sen} x \cos 2x \, dx = \int \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x-2x) + \operatorname{sen}(x+2x)) \, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(-x) \, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 3x \, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cos(-x) - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Integración de funciones trigonométricas

Funciones racionales de senos y cosenos

Si $f(x, y)$ es una función racional entonces la función $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ puede convertirse en una función racional en t mediante los cambios

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Ejemplo

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

Aplicaciones de la Integral

7 Aplicaciones de la Integral
- Integral definida
- Cálculo de áreas

Integral definida

Definición (Integral definida)

Sea $f(x)$ una función cuya primitiva es $F(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Se define la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo. Dada la función $f(x) = x^2$, se tiene

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Propiedades de la integral definida

Dadas dos funciones f y g integrables en $[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (linealidad)
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (linealidad)
- $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ (monotonía)
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ para cualquier $c \in (a,b)$ (aditividad)
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

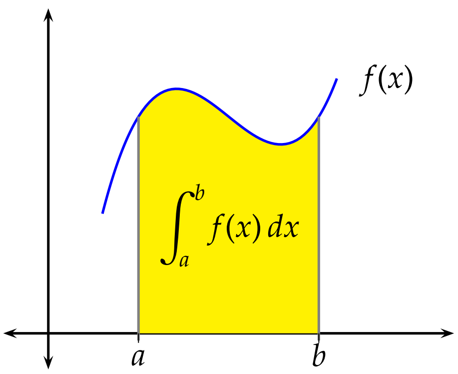
Cálculo de áreas

Área delimitada por una función positiva y el eje de abscisas

Si f es una función integrable en un intervalo $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, entonces la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

mide le área que queda entre la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[a,b]$.

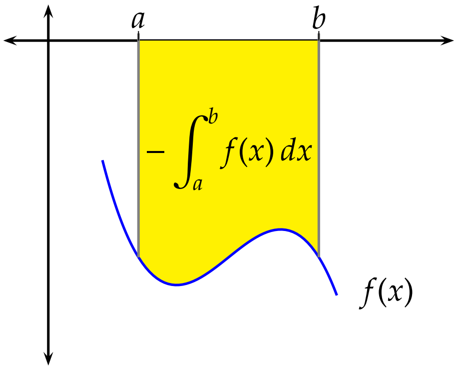


Cálculo de áreas

Área delimitada por una función negativa y el eje de abscisas

Si f es una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y $f(x) \leq 0\ \forall x \in [a, b]$, entonces el área que queda entre la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[a, b]$ es

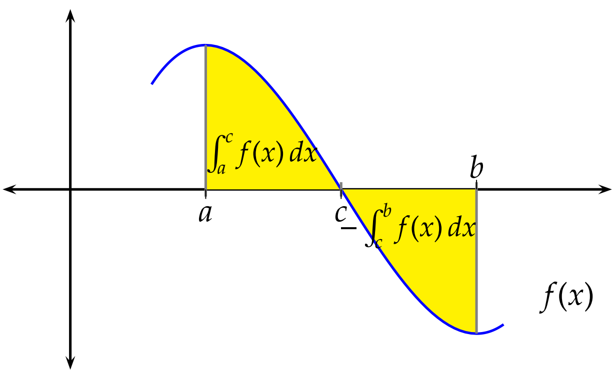
$$-\int_a^b f(x)\,dx.$$



Cálculo de áreas

Área delimitada por una función y el eje de abscisas

Si f cambia de signo a lo largo del intervalo $[a, b]$ entonces se divide el intervalo de integración en intervalos donde f tenga el mismo signo, se calcula cada área por separado y se suman.



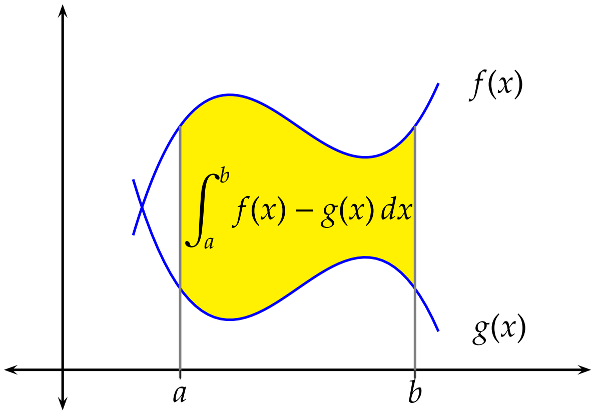
$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

Cálculo de áreas

Área delimitada por dos funciones

Si f y g son dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$ y se verifica que $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ecuación Diferencial Ordinaria

En muchos problemas de geometría, física, química, etc, se presentan a menudo ecuaciones que relacionan una función con su derivada o derivadas sucesivas.

Definición (Ecuación diferencial ordinaria)

Se llama *ecuación diferencial ordinaria* (E.D.O.) a una ecuación que relaciona una variable independiente x, una función desconocida $y(x)$, y las derivadas de y de diversos órdenes $y', y'', \ldots, y^{(n}$; es decir una expresión de la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Se llama *orden* de la ecuación diferencial al mayor de los órdenes de las derivadas que contienen la ecuación.

Así, por ejemplo, la ecuación $y''' + sen(x)y' = 2x$ es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.

Deducción de una ecuación diferencial

Para deducir la ecuación diferencial que explica un fenómeno es fundamental saber interpretar las derivadas de una función.

Ejemplo Una de las leyes de la termodinámica de Newton dice

> *"La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia de temperatura T del cuerpo y la temperatura T_a del aire."*

La velocidad de enfriamiento es la variación instantánea de la temperatura con respecto al tiempo, es decir, la derivada de la temperatura con respecto al tiempo dT/dt. Por tanto, el fenómeno anterior puede describirse mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a),$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Definición (Solución de una ecuación diferencial ordinaria)

Se llama *solución de una ecuación diferencial ordinaria* $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ a cualquier función $y = f(x)$ tal que al sustituirla en la ecuación la convierte en una igualdad; es decir

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n}(x)) = 0.$$

La gráfica de la solución de una ecuación diferencial ordinaria se llama *curva integral*.

Resolver o integrar una ecuación diferencial ordinaria consiste en hallar todas sus soluciones en un dominio dado. Para ello, habrá que recurrir al cálculo integral.

De igual modo que al integrar una función aparece una constante que nos da la familia de primitivas de la función, al integrar una ecuación diferencial ordianaria surgen varias constantes arbitrarias. Dando valores a dichas constantes se obtienen todas las soluciones de la ecuación.

Solución general de una ecuación diferencial ordinaria

Definición (Solución general de una E.D.O.)

Se llama *solución general de una ecuación diferencial ordinaria* de orden n, a una función de la forma

$$y = f(x, C_1, \dots, C_n)$$

que es solución de la ecuación diferencial para cualquier valor que tomen las constantes $C_1, \dots, C_n$.

Para cada valor que tomen las constantes se obtiene una *solución particular* de la ecuación diferencial. Por ello, una E.D.O. tiene infinitas soluciones.

Geométricamente, la solución general representa una familia de curvas integrales de la ecuación diferencial.

A menudo, se suelen imponer condiciones para reducir el número de soluciones de la ecuación diferencial. En muchos casos estas condiciones permiten fijar los valores de las constantes y así obtener una solución particular a partir de la solución general.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Vamos a estudiar la resolución de E.D.O. de primer orden,

$$F(x, y, y') = 0.$$

La solución general de una E.D.O. de primer orden es

$$y = f(x, C),$$

de manera que para obtener una solución particular de la ecuación basta con darle valor a la constante C, y para ello es suficiente con fijar una condición inicial.

Definición (Problema del valor inicial)

Al conjunto formado por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y una condición inicial se le llama *problema del valor inicial*:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, & \text{E.D.O. de primer orden;} \\ y(x_0) = y_0, & \text{Condición inicial.} \end{cases}$$

Resolver un problema del valor inicial consiste en encontrar una solución de la ecuación diferencial que cumpla la condición inicial.

Resolución de un problema del valor inicial

Ejemplo

Recordemos la ecuación diferencial de primer orden que explicaba el enfriamiento de un cuerpo en el aire:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a),$$

donde T es la temperatura del cuerpo y T_a la del aire.

Es fácil comprobar que la solución general de esta ecuación diferencial es

$$T(t) = Ce^{kt} + T_a.$$

Si imponemos la condición inicial de que en el instante inicial el cuerpo estaba a 5 ºC, es decir, $T(0) = 5$, tenemos

$$T(0) = Ce^{k\cdot 0} + T_a = C + T_a = 5,$$

de donde se deduce que $C = 5 - T_a$, y esto nos lleva a la solución particular

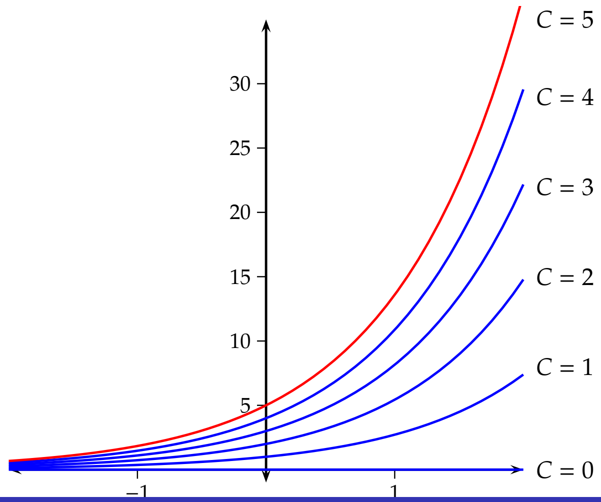
$$T(t) = (5 - T_a)e^{kt} + T_a.$$

Familia de curvas integrales
Ejemplo

Para el ejemplo anterior, en el caso de que la temperatura del aire fuese $T_a = 0$ ºC y $k = 1$, la solución general de la ecuación sería

$$T(t) = Ce^t,$$

lo que nos daría la siguiente familia de curvas integrales:



Existencia y unicidad de soluciones

Teorema (Existencia y unicidad de la solución de una E.D.O.)

Si $g(x, y(x))$ es una función diferenciable en el intervalo (a, b), entonces el problema del valor inicial

$$\begin{cases} y' = g(x, y), & x \in (a, b); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

tiene solución única, es decir, existe una única $y = f(x)$, definida en (a, b), solución de la ecuación diferencial y tal que $f(x_0) = y_0$.

Aunque este teorema nos garantiza la existencia y la unicidad de las soluciones no nos proporciona un método para llegar a ellas.

En realidad, no existe un método general para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden pero veremos cómo resolver algunos tipos especiales de ellas:

- De variables separables,
- Homogéneas,
- Lineales.

E.D.O. de variables separables

Definición (E.D.O. de variables separables)

Una *ecuación diferencial ordinaria de variables separables* es una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse de la forma

$$y'g(y) = f(x),$$

o lo que es lo mismo,

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

de manera que a un lado de la igualdad sólo aparece la variable y y al otro la variable x (las variables están separadas).

La solución general de esta ecuación diferencial se obtiene integrando ambos lados de la igualdad:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C.$$

Resolución de una E.D.O. de variables separables

Ejemplo

La ecuación diferencial que explica el enfriamiento de un cuerpo en el aire

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a),$$

es una ecuación diferencial de variables separables ya que puede escribirse

$$\frac{1}{T - T_a}dT = k\,dt.$$

Integrando ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$\int \frac{1}{T - T_a}\,dT = \int k\,dt \Leftrightarrow \log(T - T_a) = kt + C,$$

y despejando T llegamos a la solución general de la ecuación

$$T(t) = e^{kt+C} + T_a = e^C e^{kt} + T_a = Ce^{kt} + T_a,$$

reescribiendo $C = e^C$ como una constante arbitraria.

Funciones homogéneas

Definición (Función homogénea)

Una función $f(x,y)$ es *homogénea* de grado n, si para cualquier valor k se cumple

$$f(kx,ky) = k^n f(x,y).$$

En particular, para una función homogénea de grado 0 siempre se cumple

$$f(kx,ky) = f(x,y).$$

En concreto, si tomamos $k = 1/x$ tenemos

$$f(x,y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

de manera que una función homogénea de grado 0 siempre puede escribirse como una función de $u = y/x$:

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(u).$$

E.D.O. homogéneas

Definición (E.D.O. homogénea)

Una ecuación diferencial ordinaria homogénea es una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse de la forma

$$y' = f(x,y),$$

donde $f(x,y)$ es una función homogénea de grado 0.

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene realizando el cambio de variable

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux,$$

con lo que la ecuación diferencial anterior se convierte en

$$u'x + u = f(u),$$

que es de variables separables.

Una vez resuelta la ecuación diferencial anterior, sólo queda deshacer el cambio de variable.

Resolución de una E.D.O. homogénea

Ejemplo

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0.$$

Escribiéndola de la forma

$$y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}$$

podemos ver fácilmente que es homogénea.

Para resolverla hacemos el cambio de variable $y = ux$ y obtenemos

$$u'x + u = \frac{3ux - 4x}{2ux - 3x} = \frac{3u - 4}{2u - 3}$$

que es de variables separables.

Separando las variables llegamos a

$$u'x = \frac{3u - 4}{2u - 3} - u = \frac{-2u^2 + 6u - 4}{2u - 3} \Leftrightarrow \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4}\,du = \frac{1}{x}\,dx.$$

Resolución de una E.D.O. homogénea

Ejemplo

Integrando ahora ambos miembros obtenemos

$$\int \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\log|u^2 - 3u + 2| = \log|x| + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log|u^2 - 3u + 2| = -2\log|x| - 2C,$$

y aplicando la función exponencial a ambos miembros y simplificando llegamos a la solución

$$u^2 - 3u + 2 = e^{-2\log|x| - 2C} = \frac{e^{-2C}}{e^{\log|x|^2}} = \frac{C}{x^2},$$

reescribiendo $C = e^{-2C}$, como una constante arbitraria.

Finalmente, deshaciendo el cambio inicial de variable $u = y/x$, llegamos a la solución general de la ecuación:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\frac{y}{x} + 2 = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow y^2 - 3xy + 2x^2 = C.$$

E.D.O. lineales

Definición (E.D.O. lineal)

Una ecuación diferencial ordinaria lineal es una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse de la forma

$$y' + g(x)y = h(x).$$

Para resolver esta ecuación diferencial, intentamos poner el primer miembro como derivada de un producto. Para ello multiplicamos los dos miembros de la igualdad por una función $f(x)$ tal que

$$f'(x) = g(x)f(x).$$

De esta manera tenemos

$$\begin{gathered} y'f(x) + g(x)f(x)y = h(x)f(x) \\ \Updownarrow \\ y'f(x) + f'(x)y = h(x)f(x) \\ \Updownarrow \\ \frac{d}{dx}(yf(x)) = h(x)f(x) \end{gathered}$$

Resolución de una E.D.O. lineal

Integrando ambos miembros de la ecuación anterior llegamos a la solución

$$yf(x) = \int h(x)f(x)\,dx + C.$$

Por otro lado, la única función que cumple $f'(x) = g(x)f(x)$ es

$$f(x) = e^{\int g(x)\,dx},$$

de modo que, al sustituir en la solución anterior, llegamos a la solución general de una ecuación diferencial lineal

$$ye^{\int g(x)\,dx} = \int h(x)e^{\int g(x)\,dx}\,dx + C,$$

o lo que es lo mismo

$$y = e^{-\int g(x)\,dx}\left(\int h(x)e^{\int g(x)\,dx}\,dx + C\right).$$

Resolución de una E.D.O. lineal

Ejemplo

Si en la ecuación diferencial que explica el enfriamiento de un cuerpo, la temperatura del medio en el que se encuentra no es constante sino que cambia con el tiempo, es decir, es una función $T_a(t)$, entonces la ecuación diferencial resultante

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a(t)),$$

es una ecuación diferencial lineal que puede escribirse como

$$T' - kT = -kT_a(t),$$

donde el término independiente es $-kT_a(t)$ y el coeficiente de T es $-k$.

Sustituyendo en la solución general de una ecuación diferencial lineal tenemos

$$y = e^{-\int -k\,dt}\left(\int -kT_a(t)e^{\int -k\,dt}\,dt + C\right) = e^{kt}\left(-\int kT_a(t)e^{-kt}\,dt + C\right)$$

Resolución de una E.D.O. lineal

Ejemplo

Si en un caso concreto la temperatura del aire estuviese dada por la función $T_a(t) = t$, y la constante de proporcionalidad fuese $k = 1$, entonces la solución general de la ecuación diferencial sería

$$y = e^{t}\left(-\int te^{-kt}\,dt + C\right) = e^{t}(e^{-t}(t+1) + C) = Ce^{t} + t + 1.$$

Si además nos dicen que en el instante 0 la temperatura del cuerpo es de 5 ºC, es decir, nos dan la condición inicial $T(0) = 5$, entonces podemos calcular la constante C:

$$y(0) = Ce^{0} + 0 + 1 = 5 \Leftrightarrow C + 1 = 5 \Leftrightarrow C = 4,$$

y entonces la solución particular que obtenemos es

$$y(t) = 4e^{t} + t + 1.$$

Medida y Error

9 Medida y Error

- Medida de una magnitud y error asociado
- Tipos de errores de una medida
- Error de las medidas indirectas

Medidas

Cualquier ciencia experimental trata de conocer y comprender el mundo que estudia observándolo y realizando medidas experimentales.

A partir de estas medidas se construirán y validarán los modelos matemáticos que expliquen los fenómenos naturales. En consecuencia, la bondad y calidad de estas medidas es fundamental a la hora de obtener modelos correctos.

A la hora de realizar medidas experimentales de cualquier magnitud física, debe tenerse en cuenta que *no existe ningún modo de medir una magnitud con infinita precisión* y por tanto, toda medida estará afectada de cierta *imprecisión* o *error*.

Medida de una magnitud

La medida de cualquier magnitud física X debe expresarse indicando el mejor valor de la misma x acompañado del error ε de dicho valor:

$$X = x \pm \varepsilon,$$

donde ε es una cota superior del error del valor x, es decir, $|X - x| \leq \varepsilon$.

Expresión de una medida y su error

A la hora de expresar una medida $X = x \pm \varepsilon$, deben tenerse en cuenta los siguientes criterios:

- El error ε debe expresarse sólo con una o dos cifras significativas, donde la primera cifra significativa de un número es la primera cifra distinta de cero comenzando por la izquierda, la segunda es la siguiente, y así sucesivamente.
  Por tanto, *el error debe redondearse por exceso en la primera o segunda cifra significativa*.
- El valor de la magnitud x debe expresarse con tantas cifras significativas como indique su error y debe redondearse, por exceso o por defecto, en la cifra significativa correspondiente a la última cifra considerada en el error.

Ejemplo Si se mide la temperatura de un líquido y se obtiene un valor $186{,}27641$ K con un error $0{,}01638$ K, el resultado debe expresarse como

$$T = 186{,}276 \pm 0{,}017 \text{ K}.$$

Mejor valor de una magnitud

Siempre que sea posible las medidas de una magnitud deben repetirse para mejorar la precisión del resultado.

Si se realizan n mediciones de un mismo ente físico, todas ellas reali

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

En principio, no hay ningún motivo para escoger uno u otro valor particular como mejor valor y por ello debe tomarse como mejor valor estimativo de la magnitud la *media aritmética muestral* de los n valores:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Tipos de errores asociados al mejor valor de una magnitud

Al medir una magnitud pueden aparecer distintos tipos de errores:

- Errores sistemáticos.
- Errores en el aparato de medida.
- Errores aleatorios o estadísticos.

El error total asociado al mejor valor de una magnitud será la suma de cada uno de estos tipos de errores.

Error sistemático

El *error sistemático* $\varepsilon_{\text{sist}}$ es el debidos al método de medida utilizado. Suele deberse a la falta de calidad o calibrado del aparato de medida o a algún error o sesgo en la fórmula o diseño del experimento o a que la medición depende de la pericia del observador que mide.

Afectan por igual a todas las medidas, haciendo que todas de ellas se desvíen en el mismo sentido, siendo por lo general difíles de dectectar y eliminar. Son, por lo tanto, los errores más indeseables y no existe ninguna expresión matemática que determine su valor, sino que deben ser estimados en cada caso según el método de medida utilizado.

En el caso de errores debidos al calibrado del aparato, pueden eliminarse fácilmente haciendo una calibración del mismo antes de realizar las medidas. La calibración puede hacerse fácilmente midiendo una magnitud real de 0 y ajustando el aparato, si fuera necesario, para que efectivamente marque 0.

Error del aparato de medida

El *error del aparato* Δx es el debido al límite de precisión en la capacidad de medida del instrumento utilizado.

Este error, llamado también *incertidumbre*, está siempre presente y es independiente del observador que realiza la medida.

Cuando la escala del aparato no es continua, como ocurre en instrumentos digitales, la incertidumbre se toma igual a la mínima lectura que puede hacerse en dicha escala, y cuando es continua se toma igual a la mitad de la mínima lectura.

Ejemplo Si se mide el tiempo con un cronómetro digital con mínima unidad la décima de segundo, entonces la incertidumbre en las medidas será $\Delta t = 0{,}1$ s, mientras que si se mide con un cronómetro analógico con movimiento continuo de la aguja, la incertidumbre será $\Delta t = 0{,}05$ s.

Error aleatorio

El *error aleatorio* es el debido a las pequeñas variaciones incontrolables en las condiciones externas que se producen de unas medidas a otras, es decir, es el error debido al *azar*.

Estos errores perturban de manera diferente a cada medida, explicando que se obtengan diferentes valores pese a que todas las observaciones se hagan siguiendo el mismo procedimiento o protocolo.

En consecuencia, este error sólo tiene sentido cuando se realizan distintas medidas de una misma magnitud.

Cálculo del error aleatorio

Si se realizan n mediciones, obteniendo los valores $x_1, \ldots, x_n$, entonces cada una de estas medidas puede expresarse como

$$x_i = \mu + \varepsilon_i,$$

donde μ es la media poblacional de todas la medidas y ε_i el error aleatorio asociado a cada medida.

Como en el error aleatorio influyen multitud de factores debidos a azar, según el teorema central del límite puede afirmarse que $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$, con σ la desviación típica poblacional de todas las medidas, y que puede estimarse por medio de la *cuasidesviación típica muestral*

$$\hat{s}_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}},$$

Si, como hemos visto antes, se toma como mejor valor de la magnitud la media muestral $\bar{x}$, el error asociado será su desviación típica, que vale

$$s_{\bar{x}} = \frac{\hat{s}_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

Cálculo del error aleatorio

Ejemplo

Supongamos que al medir el periodo de oscilación de un péndulo con un cronómetro obtenemos las siguientes medidas:

$$1{,}21\text{s} - 1{,}19\text{s} - 1{,}22\text{s} - 1{,}18\text{s} - 1{,}19\text{s} - 1{,}20\text{s}$$

Entonces el mejor valor del periodo del péndulo es

$$\bar{x} = \frac{1{,}21 + 1{,}19 + 1{,}22 + 1{,}18 + 1{,}19 + 1{,}20}{6} = 1{,}198333\text{s},$$

y el error debido al azar es

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(1{,}21 - 1{,}198)^2 + \cdots + (1{,}20 - 1{,}198)^2}{6 \cdot 5}} = 0{,}006009\text{s}.$$

Así pues, suponiendo que no haya error sistemático, la medida del periodo es,

$$1{,}198 \pm 0{,}007\text{s}.$$

Consideraciones sobre el error aleatorio

Puesto que el error aleatorio, si realmente depende del azar, debería seguir una distribución normal, entonces la media muestral $\bar{x}$ también seguirá una distribución normal

$$\bar{x} \sim N(\mu, s_{\bar{x}}),$$

de manera que, de acuerdo a la distribución normal se cumple

- $P(\bar{x} - s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + s_{\bar{x}}) = 0{,}683.$
- $P(\bar{x} - 2s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2s_{\bar{x}}) = 0{,}954.$
- $P(\bar{x} - 3s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + 3s_{\bar{x}}) = 0{,}997.$

Por consiguiente, cuando se escribe $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ no se está diciendo que el valor real está en el intervalo $(\bar{x} - s_{\bar{x}}, \bar{x} + s_{\bar{x}}$, sino que existe aproximadamente un $68\,\%$ de probabilidad de que el valor real esté dentro del intervalo.

Otra consecuencia de esto mismo es que cuando una medida dista más de 3 veces la desviación típica de la media muestral, dicha medida debe descartarse ya que es muy probable que algo ha fallado en la medida.

Cálculo del error total

Según lo visto, el error total de una medida dependerá de si realizamos varias mediciones o sólo una.

- **Una medición** Si sólo se realiza una medición, entonces el error aleatorio no tiene sentido y el error total será la suma del error sistemático y el error del aparato, es decir,

  $$\varepsilon = \varepsilon_{\text{sist}} + \Delta x.$$

- **Varias mediciones** Si se realizan varias mediciones, entonces el error total será la suma del error sistemático, de la incertidumbre del aparato y del error aleatorio, es decir,

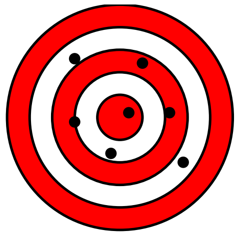
  $$\varepsilon = \varepsilon_{\text{sist}} + \Delta x + s_{\bar{x}},$$

  aunque cuando se utilizan aparatos suficientemente precisos, la incertidumbre del aparto suele ser bastante menor que el error aleatorio y puede despreciarse.

Error sistemático vs error aleatorio

Utilizando el símil del tiro al blanco, tendríamos estas situaciones

Medidas sin error sistemático
y error aleatorio pequeño



Medidas sin error sistemático
y error aleatorio grande

Medidas con error sistemático
y error aleatorio pequeño

Medidas con error sistemático
y error aleatorio grande

Error de la medidas indirectas

Hay magnitudes para las que existe un aparato que permite medirlas directamente, como pueden ser la longitud, el tiempo, el volumen o la temperatura, mientras que otras deben ser medidas indirectamente a partir de una fórmula en la que intervienen medidas directas u otras indirectas calculadas previamente. Esto puede expresarse funcionalmente de la forma

$$Y(X_1, \ldots, X_n),$$

donde Y es la magnitud medida indirectamente y $X_1, \ldots, X_n$ son las medias de las magnitudes de las que depende.

Puesto que las medidas directas tienen asociado un error, dicho error se propagará a las medidas indirectas según la fórmula que permita su cálculo.

De acuerdo a la medición de las magnitudes de las que depende Y, puden darse cuatro casos:

- Todas las magnitudes se han medido una sola vez.
- Todas las magnitudes se han medido varias veces.
- Algunas magnitudes se han medido una sola vez y el resto varias veces.
- La magnitud Y se ha medido indirectamente varias veces.

Cálculo del error de las medidas derivadas

Todas las magnitudes se han medido una sola vez

Supongamos que las magnitudes $X_1, \dots, X_n$ se han medido una sóla vez obteniendo las medidas

$$x_1 \pm \varepsilon_1, \dots, x_n \pm \varepsilon_n,$$

siendo $\varepsilon_i = \varepsilon_{\text{sist}_i} + \Delta x_i$.

Entonces la expresión general del error total del valor obtenido para Y es

$$\varepsilon = \left|\frac{\partial Y(x_1, \dots, x_n)}{\partial X_1}\right| \varepsilon_1 + \cdots + \left|\frac{\partial Y(x_1, \dots, x_n)}{\partial X_n}\right| \varepsilon_n.$$

Cálculo del error de las medidas derivadas

Todas las magnitudes se han medido varias veces

Supongamos que las magnitudes $X_1, \dots, X_n$ se han medido varias veces obteniendo las medidas

$$\bar{x}_1 \pm \varepsilon_1, \dots, \bar{x}_n \pm \varepsilon_n,$$

siendo $\varepsilon_i = \varepsilon_{\text{sist}_i} + s_{\bar{x}_i}$.

Entonces la expresión general del error total del valor obtenido para Y es

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial Y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial X_1}\varepsilon_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial Y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial X_n}\varepsilon_n\right)^2}.$$

Cálculo del error de las medidas derivadas

Algunas magnitudes se han medido una vez y otras varias veces

Supongamos que las magnitudes $X_1, \dots, X_n$ se han medido algunas una sóla vez y otras varias veces obteniendo las medidas

$$\bar{x}_1 \pm \varepsilon_1, \dots, \bar{x}_n \pm \varepsilon_n,$$

siendo $\varepsilon_i = \varepsilon_{\text{sist}_i} + \Delta x_i$ para las magnitudes que se han medido una sóla vez y $\varepsilon_i = \varepsilon_{\text{sist}_i} + s_{\bar{x}_i}$ para las que se han medido varias veces.

Como ambos errores son conceptualmente diferences no deben utilizarse en un mismo cálculo. Lo que se hace es convertir las incertidumbres en desviaciones típicas, multiplicando por $2/3$. Esto es debido a que en el caso de las medidas aisladas se tiene la certeza absoluta de que la verdadera medida está en el intervalo $(x_i - \Delta_i, x_i + \Delta_i)$, mientras que para las medidas reiteradas se sabe que la verdadera medida estará en el intervalo $(\bar{x}_i - s_{\bar{x}_i}, \bar{x}_i + s_{\bar{x}_i})$ con probabilidad $0{,}68$, que es más o menos $2/3$ del $100\,\%$.

Una vez transformadas, el error total de Y se calcula como antes

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial Y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial X_1}\varepsilon_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial Y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial X_n}\varepsilon_n\right)^2}.$$

Cálculo del error de las medidas derivadas

Varias medidas indirectas de la magnitud

Supongamos que se ha medido varias veces de manera indirecta la magnitud Y obteniendo las medidas

$$\bar{y}_1 \pm \varepsilon_1, \dots, \bar{y}_n \pm \varepsilon_n,$$

donde ε_i se ha calculado según el caso que corresponda de los anteriores.

En este caso, si efectivamente todas son medidas de un mismo ente físico, deberían coincidir dentro del error según el criterio visto antes, es decir, considerando en intervalo $(y_i - 3\varepsilon_i, y_i + 3\varepsilon_i)$. En tal caso, se tomará como mejor valor posible la media aritmética de las medidas, ponderadas por el inverso del cuadrado del error de cada valor, es decir,

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1^2}y_1 + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_n^2}y_n}{\frac{1}{\varepsilon_1^2} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_n^2}} == \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon_i^2}y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon_i^2}},$$

y el error asociado a esta medida es

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1^2} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_n^2}}}$$