Curso Básico de Cálculo

Santiago Angulo Díaz-Parreo (sangulo@ceu.es)
José Rojo Montijano (jrojo.eps@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU Universidad San Pablo

Facultad de Farmacia

Curso 2012-2013

Licencia creative commons

Contenidos

1. Geometría Analítica del Espacio
2. Funciones Elementales
3. Límites y Continuidad
4. Cálculo diferencial en una variable

Geometría Analítica del Plano y del Espacio Real

1. Geometría Analítica del Espacio
   - Vectores
   - Rectas
   - Planos

Escalares

Algunos fenómenos de la naturaleza pueden describirse mediante un número referido a una unidad de medida.

Definición (Escalar)

Un *escalar* es un número que sirve para expresar una magnitud sin dirección.

Ejemplos La estatura o el peso de una persona, la temperatura de un gas o el tiempo que tarda un móvil en recorrer una distancia.

Sin embargo, existen otros fenómenos que no pueden describirse adecuadamente mediante un escalar. Si, por ejemplo, un navegante quiere poner rumbo a puerto y sólo conoce de la intensidad del viento, no sabrá qué dirección tomar. La descripción del viento requiere dos elementos, su intensidad y su dirección.

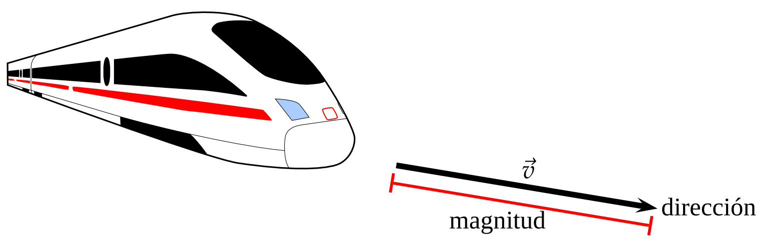
Vectores

Definición (Vector)

Un *vector* es un número que sirve para expresar una magnitud y tiene asociada una dirección.

Ejemplos La velocidad de un móvil o la fuerza que se aplica sobre un objeto.

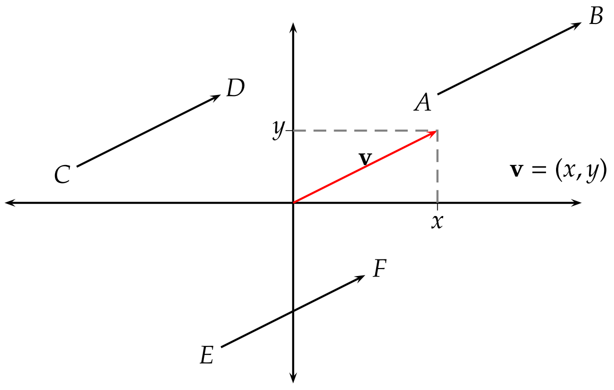
Geométricamente, un vector se representa mediante un segmento orientado, es decir, una flecha.



Representación de un vector

Un segmento orientado puede ubicarse en diferentes lugares dentro de un espacio cartesiano. Sin embargo, con independencia de donde esté situado, si la longitud y la dirección no varían, dicho segmento representará siempre el mismo vector.

Esto permite representar todos los vectores con un mismo origen, el origen en sistema de coordenadas cartesianas. Así, un vector queda determinado por las *coordenadas* de su extremo final en cualquier espacio cartesiano.



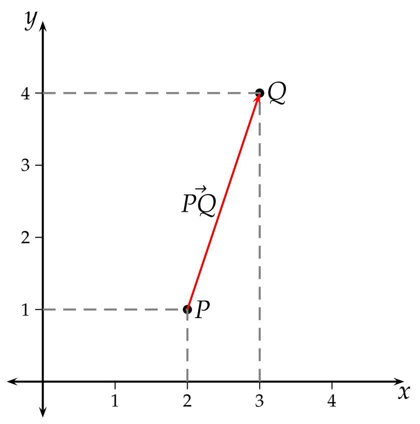
$$\mathbf{v} = (x, y) = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$$

Vector a partir de dos puntos

Dados dos puntos P y Q de un espacio cartesiano, el vector con origen en P y destino en Q tiene coordenadas $\vec{PQ} = Q - P$.

Ejemplo Sean los puntos $P = (2, 1)$ y $Q = (3, 4)$ del plano real $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\vec{PQ} = Q - P = (3, 4) - (2, 1) = (3 - 2, 4 - 1) = (1, 3).$$



Módulo de un vector

Definición (Módulo de un vector)

Dados un vector $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define el *módulo* de $\mathbf{v}$ como

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

El módulo de un vector coincide con la longitud del segmento que representa al vector.

Ejemplos Sea $\mathbf{u} = (3,4)$ un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Sea $\mathbf{v} = (4,7,4)$ un vector en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$$

Vectores unitarios

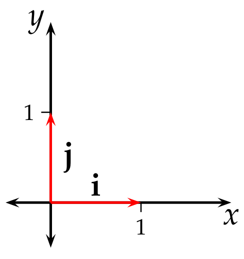
Definición (Vector unitario)

Se dice que un vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ es *unitario* si su módulo es 1, es decir $|\mathbf{v}| = 1$.

Especial atención merecen los vectores unitarios que siguen la dirección de los ejes de coordenadas, estos vectores se llaman *vectores coordenados*.

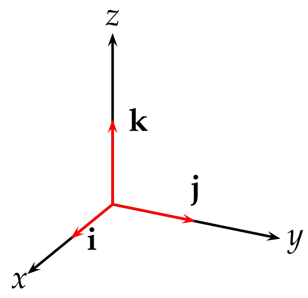
En $\mathbb{R}^2$ los vectores coordenados son

$$\mathbf{i} = (1,0) \text{ y } \mathbf{j} = (0,1)$$



En $\mathbb{R}^3$ los vectores coordenados son

$$\mathbf{i} = (1,0,0),\ \mathbf{j} = (0,1,0) \text{ y } \mathbf{k} = (0,0,1)$$



Suma de vectores

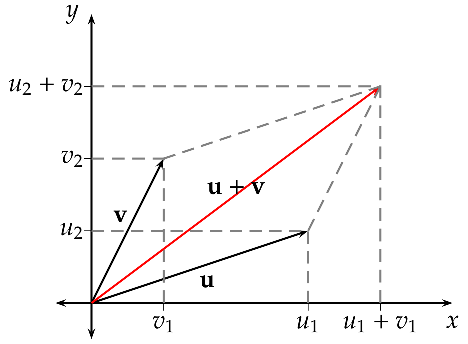
Definición (Suma de vectores)

Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define la *suma* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$

Ejemplo Sean $\mathbf{u} = (3, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, 3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + 2, 1 + 3) = (5, 4).$$



Producto de un vector por un escalar

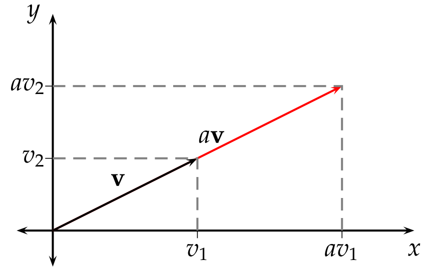
Definición (Producto de un vector por un escalar)

Dado un vector $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, y un escalar $a \in \mathbb{R}$, se define el *producto* de a por $\mathbf{v}$ como

$$a\mathbf{v} = (av_1, \ldots, av_n).$$

Ejemplo Sean el vector $\mathbf{v} = (2, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ y el escalar $a = 2$, entonces

$$a\mathbf{v} = 2(2, 1) = (4, 2).$$

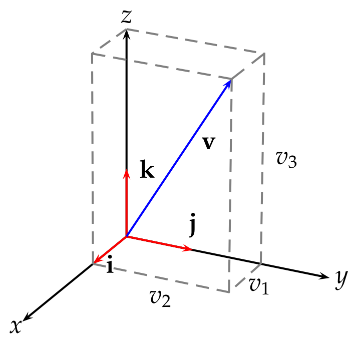


Expresión de un vector como combinación lineal de los vectores coordenados

La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar permite expresar cualquier vector como una combinación lineal de los vectores coordenados.

En el caso del espacio real $\mathbb{R}^3$, cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ puede expresarse como

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$



Producto escalar

Definición (Producto escalar)

Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define el *producto escalar* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$

Ejemplo Sean $\mathbf{u} = (3, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, 3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{uv} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9.$$

Se cumple que

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha$$

donde α es el ángulo que forman los vectores.

Vectores paralelos

Definición (Vectores paralelos)

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son *paralelos* si existe un valor $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v}.$$

Los vectores paralelos forman un ángulo de $0°$.

Ejemplos Los vectores $\mathbf{u} = (-4, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, -1)$ en $\mathbb{R}^2$ son paralelos, ya que

$$\mathbf{v} = (-4, 2) = -2(2, -1) = -2\mathbf{v}.$$

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores paralelos entonces, su producto escalar coincide con el producto de sus módulos

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos 0 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

Vectores ortogonales y ortonormales

Definición (Vectores ortogonales y ortonormales)

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son *ortogonales* si su producto escalar es nulo

$$\mathbf{uv} = 0.$$

Si además el módulo de ambos vectores es la unidad $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$, entonces se dice que son *ortonormales*.

Los vectores ortogonales son perpendiculares entre sí, es decir, forman un ángulo de $90°$.

Ejemplos Los vectores $\mathbf{u} = (2, 1)$ y $\mathbf{v} = (-2, 4)$ en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales, ya que

$$\mathbf{uv} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 4 = 0,$$

pero no son ortonormales ya que $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} \neq 1$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{-2^2 + 4^2} \neq 1$.

Los vectores $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ son ortonormales, ya que

$$\mathbf{ij} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \quad |\mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad |\mathbf{j}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Ecuación vectorial de la recta

Definición (Ecuación vectorial de la recta)

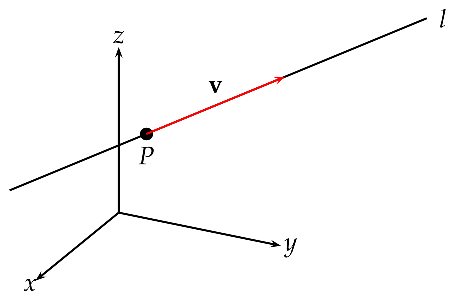
Sea l una recta del espacio $\mathbb{R}^n$ y sean $P = (p_1, \ldots, p_n)$ un punto cualquiera de la recta y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ un vector cualquiera con la misma dirección que la recta. La ecuación

$$l(t) = P + t\mathbf{v} = (p_1, \ldots, p_n) + t(v_1, \ldots, v_n) = (p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n).$$

parametriza a l en función de $t \in \mathbb{R}$, y se conoce como *ecuación vectorial de la recta*.

Ejemplo Considerese la recta del espacio real $\mathbb{R}^3$ que aparece en la gráfica. Un punto de la recta es $P = (1, 1, 2)$ y un vector director es $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$, luego su ecuación vectorial es

$$l(t) = P + t\mathbf{v} = (1, 1, 2) + t(-1, 2, 1) =$$
$$= (1 - t, 1 + 2t, 2 + t) \quad t \in \mathbb{R}.$$



Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta

De la ecuación vectorial de una recta $l(t) = P + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n)$ se obtienen facilmente las coordenadas de los puntos que forman parte de la recta mediante n ecuaciones paramétricas:

$$x_1(t) = p_1 + tv_1, \ldots, x_n(t) = p_n + tv_n$$

donde, si $\mathbf{v}$ es un vector cuyas coordenadas son no nulas ($v_i \neq 0 \ \forall i$), se puede despejar el parámetro t en cada una de ellas e igualarlas,

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{v_n}$$

Ejemplo Dada la ecuación vectorial de la recta $l(t) = (1, 1, 2) + t(-1, 2, 1) = (1 - t, 1 + 2t, 2 + t)$ en el espacio real $\mathbf{R}^3$, sus ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = 1 - t, \quad y(t) = 1 + 2t, \quad z(t) = 2 + t,$$

y sus ecuaciones cartesianas son

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{1}$$

Ecuación punto-pendiente de una recta en el plano

En el caso particular del plano cartesiano $\mathbf{R}^2$, si se tiene una recta con ecuación vectorial $l(t) = P + t\mathbf{v} = (x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0 + ta, y_0 + tb)$, sus ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = x_0 + ta, \quad y(t) = y_0 + tb$$

y sus ecuación cartesiana es

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

A partir de aquí, pasando b multiplicando al otro lado de la ecuación, se obtiene

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \text{ o bien } y - y_0 + m(x - x_0),$$

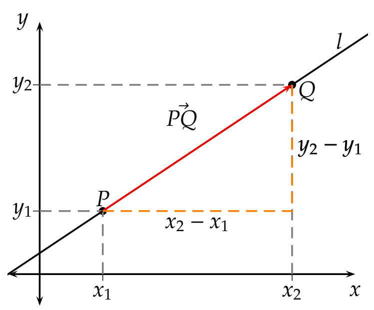
llamando $m = b/a$. Esta ecuación se conoce como ecuación en la forma *punto-pendiente*.

Pendiente de una recta en el plano

Definición

Pendiente de una recta Dada una recta $l(t) = P + t\mathbf{v}$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, con vector director $\mathbf{v} = (a, b)$, se define la pendiente de l como b/a.

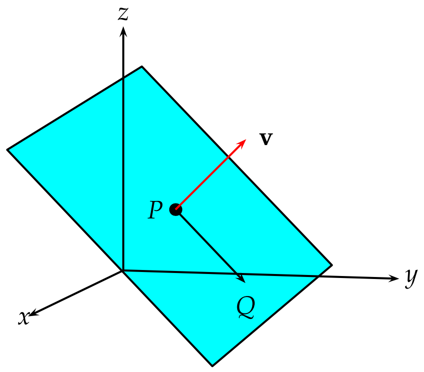
Recordar que dados dos puntos $Q = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ de la recta l, se puede tomar como vector director el vector que los une, que teniene coordenadas $\vec{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, de manera que la pendiente de l será $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, es decir, el cociente entre lo que cambia la coordenada y y lo que cambia la coordenada x.



Ecuación del plano en el espacio real

Para llegar a la ecuación de un plano en el espacio real $\mathbb{R}^3$ se puede partir de un punto del plano $P = (x_0, y_0, z_0)$ y de un vector perpendicular al plano $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Entonces, para cualquier punto del plano $Q = (x, y, z)$ se cumple que el vector $\vec{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, por lo que su producto escalar se anulará

$$\vec{PQ}\mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)(a, b, c) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



Funciones Elementales

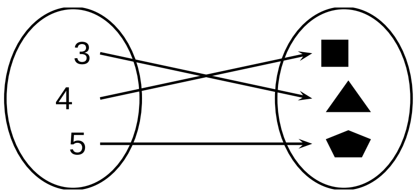
2 Funciones Elementales
- El concepto de función
- Dominio e imagen de una función
- Composición e inversa de una función
- Crecimiento de una función
- Extremos de una función
- Concavidad de una función
- Funciones periódicas
- Funciones polinómicas
- Funciones racionales
- Funciones potenciales
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas
- Funciones trigonométricas

¿Qué es una función?

Definición (Función de una variable)

Una *función* f de un conjunto A en otro B es una *relación* que asocia cada elemento $a \in A$, con un *único* elemento de B que se denota $f(a)$, y se llama *imagen* de a mediante f.

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$



Cuando el conjunto origen y destino es el de los números reales $\mathbb{R}$, entonces se dice que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función real de variable real*.

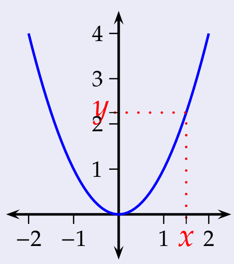
Formas de representar una función

Por extensión

Representación en forma de tabla

x	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	4	1	0	1	4	$\cdots$

Representación gráfica



Por Intensión

Representación algebraica explícita

$$y = x^2$$

Representación algebraica implícita

$$y - x^2 = 0$$

Representación algebraica paramétrica

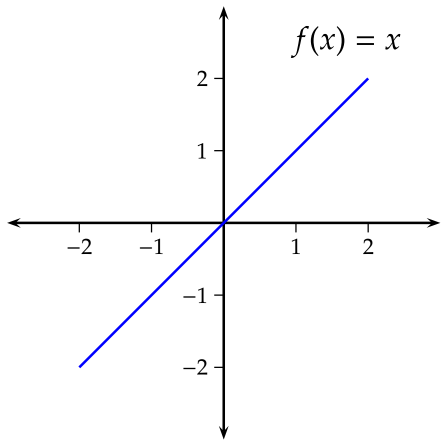
$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t \end{cases}$$

La función Identidad

Definición (Función Identidad)

Se llama *función identidad*, a toda función $Id : A \to A$ que asocia cada elemento de A con sigo mismo, es decir,

$$Id(x) = x.$$



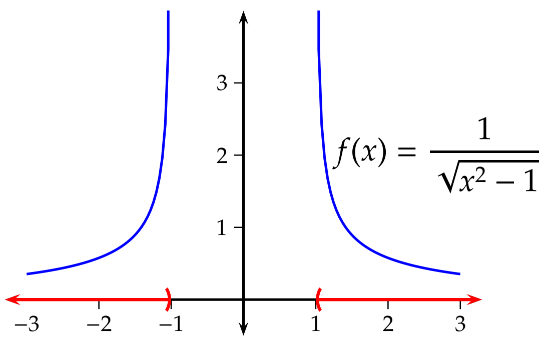
Dominio de una función

Definición (Dominio de una función)

El *dominio* de una función f es el conjunto de valores para los que la función está definida

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo



$\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

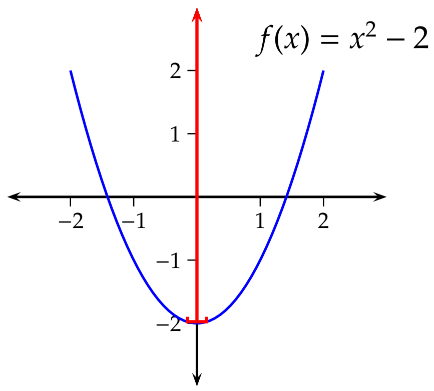
Imagen de una función

Definición (Imagen de una función)

La *imagen* de una función f es el conjunto de valores que la función puede tomar

$$Img(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo



$$\text{Img}(f) = (-2, \infty)$$

Composición de funciones

Definición (Composición de funciones)

Dadas dos funciones $g : A \to B$ y $f : B \to C$, se define la *función compuesta* $f \circ g$, (leído g compuesto con f) como la función

$$\begin{aligned} f \circ g : A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow f(g(x)) \end{aligned}$$

Para calcular la función compuesta $f \circ g(x)$, primero se aplica g sobre x y luego, se aplica f sobre $g(x)$:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Ejemplo Si $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \operatorname{sen} \sqrt{x}.$$

¿Cuál es su dominio?

Inversa de una función

Definición (Función inversa)

Se llama *función inversa* de $f : A \to B$ a la función $f^{-1} : B \to A$ que cumple

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id(x)$$

La función inversa de f deshace o revierte el efecto de f. Es decir, si $f : A \to B$ asocia un elemento $x \in A$ con otro $y \in B$, entonces f^{-1} asocia el elemento y con el x:

$$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$$

¡Ojo! $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$. Para que exista f^{-1} se requiere que f sea *inyectiva*.

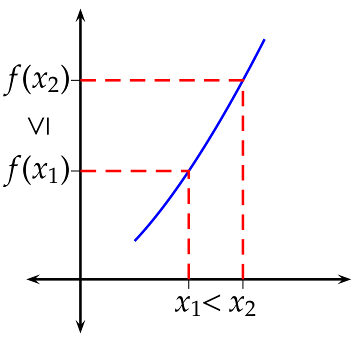
Ejemplo

– La inversa de $f(x) = x^3$ es la función $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
– La inversa de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la función $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

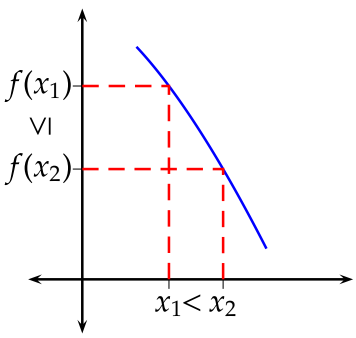
Crecimiento de una función

Definición (Función creciente y decreciente)

Se dice que una función f es *creciente* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Se dice que una función f es *decreciente* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Función creciente

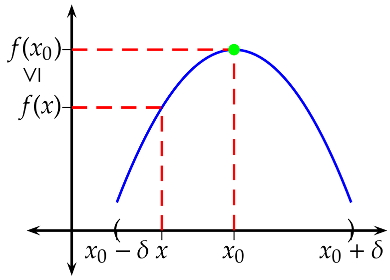


Función decreciente

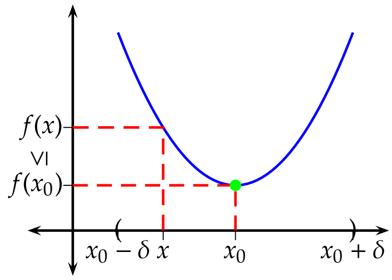
Extremos de una función

Definición (Máximo y mínimo relativo)

Se dice que una función f tiene un máximo relativo en x_0, si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$.
Se dice que una función f tiene un mínimo relativo en x_0, si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x_0) \leq f(x)$.



Máximo

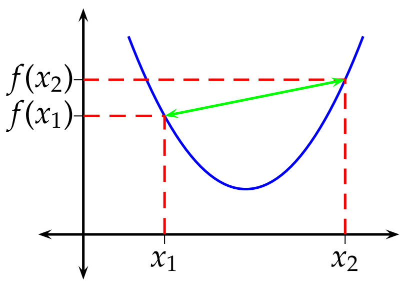


Mínimo

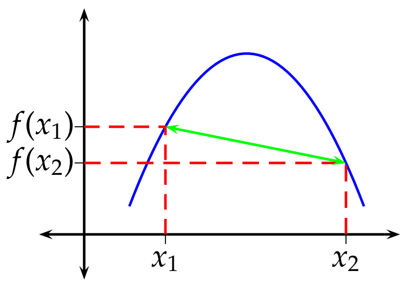
Concavidad de una función

Definición (Función cóncava y convexa)

Se dice que una función f es *cóncava* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica de f.
Se dice que una función f es *convexa* en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de f.
Al punto donde cambia la concavidad de una función se le llama *punto de inflexión*.



Función cóncava



Función convexa

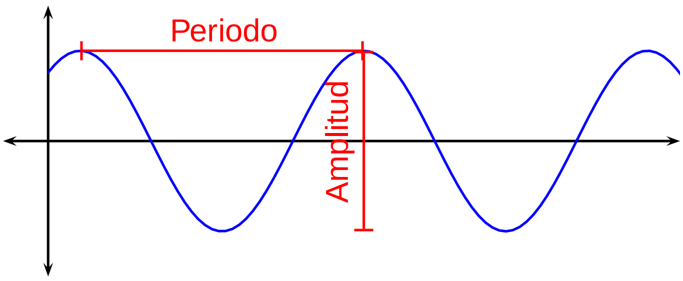
Funciones periódicas

Definición (Función periódica y periodo)

Se dice que una función f es *periódica* si existe un valor $h > 0$ tal que

$$f(x + h) = f(x)$$

para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.
Al menor valor de h que verifica la igualdad anterior se le llama *periodo* de f, y a la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función se le llama *amplitud* de f.



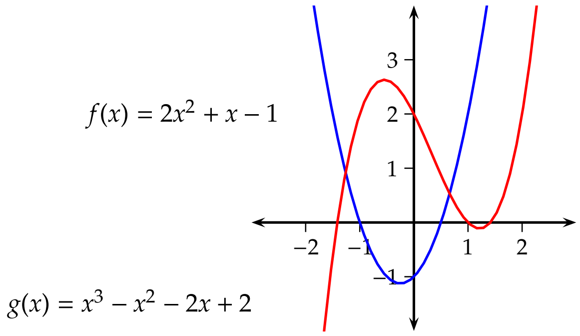
Funciones polinómicas

Definición (Función polinómica)

Una *función polinómica* es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde n es un entero no negativo que se llama *grado del polinomio*, y $a_0, \ldots, a_n$ son constantes reales ($a_n \neq 0$) que se llaman *coeficientes del polinomio*.



Propiedades de las funciones polinómicas

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Si el grado es impar, su imagen es $\mathbb{R}$.
- La función identidad $Id(x) = x$ es un polinomio de grado 1.
- Las funciones constantes $f(x) = c$ son polinomios de grado 0.
- Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces (puntos donde $f(x) = 0$).

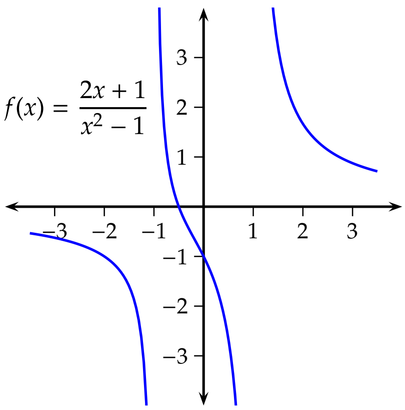
Funciones racionales

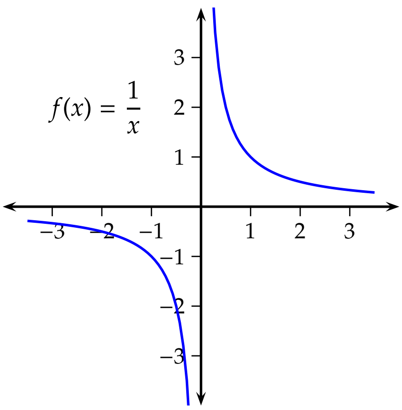
Definición (Función racional)

Una *función racional* es una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funcione polinómicas con $q(x) \neq 0$.





Propiedades de las funciones racionales

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del polinomio del denominador. En estos puntos suele haber asíntotas verticales.
- La tendencia en ∞ y $-\infty$ depende del grado del numerador y del denominador.
  Si $f(x) = \dfrac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}$, entonces
  - Si $n > m \to f(\pm\infty) = \pm\infty$.
  - Si $n < m \to f(\pm\infty) = 0$.
  - Si $n = m \to f(\pm\infty) = \dfrac{a_n}{b_m}$.
- Los polinomios son casos particulares de funciones racionales.
- Pueden descomponerse en producto de fracciones simples.

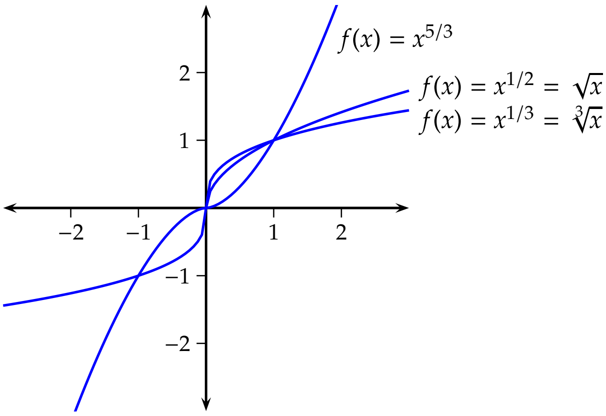
Funciones potenciales

Definición (Función potencial)

Una *función potencial* es una función de la forma

$$f(x) = x^r,$$

donde r es un número real.



Propiedades de las funciones potenciales

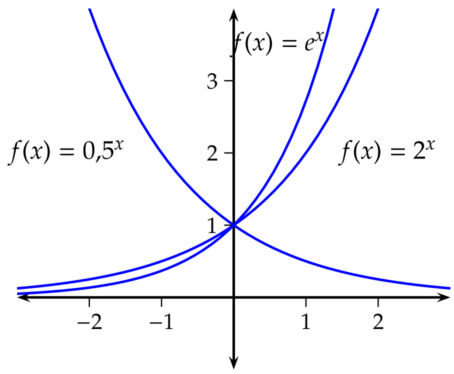
- Si el exponente es un número racional n/m, entonces
$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}.$$
Estas funciones se llaman *irracionales*. En este caso,
  - si m es impar el dominio es $\mathbb{R}$,
  - si m es par el dominio es $\mathbb{R}^+$.
- Todas las pasan por el punto $(1,1)$.
- El crecimiento depende del exponente. Si $x > 0$ entonces:
  - Exponente positivo $\Rightarrow$ función creciente.
  - Exponente negativo $\Rightarrow$ función decreciente.

  Además, si $f(x) = x^r$ y $g(x) = x^s$, entonces:
  - Si $r < s \Rightarrow f(x) > g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) < g(x)$ si $x > 1$.
  - Si $r > s \Rightarrow f(x) < g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) > g(x)$ si $x > 1$.
- Los polinomios de la forma $f(x) = x^n$ son un caso particular de funciones potenciales.

Funciones exponenciales

Definición (Función exponencial)

Una *función exponencial* de base a es una función de la forma
$$f(x) = a^x,$$
donde a es un valor real positivo distinto de 1.



Propiedades de las funciones exponenciales

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}^+$.
- Todas las pasan por el punto $(0, 1)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = a^x$ entonces
  - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.
  - Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente.

  Además, si $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ con $a < b$, entonces
  - Si $x < 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$.
  - Si $x > 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
- No tiene sentido para $a = 1$ por que sería una función constante.

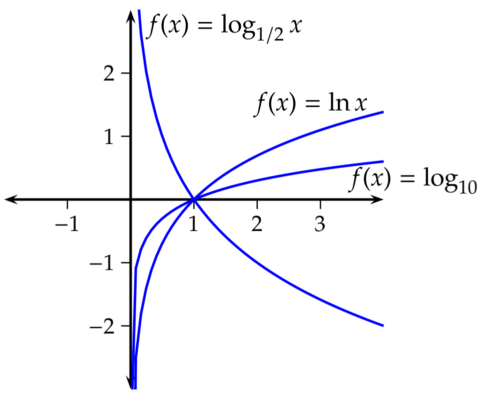
Funciones logarítmicas

Definición (Función logarítmica)

Dada una función exponencial $f(x) = a^x$, se define la *función logarítmica* de base a como la función inversa de f, y se denota

$$f^{-1}(x) = \log_a x,$$

donde a es un valor real positivo distinto de 1.



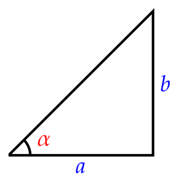
Propiedades de las funciones logarítmicas

- Por ser la inversa de la función exponencial, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}^+$.
  - Su imagen es el dominio de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}$.
- Todas pasan por el punto $(1, 0)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = \log_a x$ entonces
  - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.
  - Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente.

  Además, si $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_b x$ con $a < b$, entonces
  - Si $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
  - Si $x > 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$
- No tiene sentido para $a = 1$ por que sería una función constante.

Funciones trigonométricas

Surgen en geometría al medir las relaciones entre los catetos de un triángulo rectángulo, que dependen del ángulo del cateto contiguo y la hipotenusa de dicho triángulo.



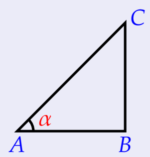
No obstante, esta no es la única definición posible, sino que también pueden definirse a partir de la función exponencial compleja.

- Seno
- Coseno
- Tangente
- Arcoseno
- Arcocoseno
- Arcotangente

Seno de un ángulo

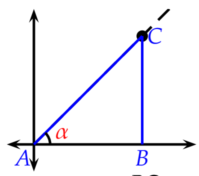
Definición (Seno de un ángulo)

Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *seno* de α, y se nota $\operatorname{sen}\alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la ordenada de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

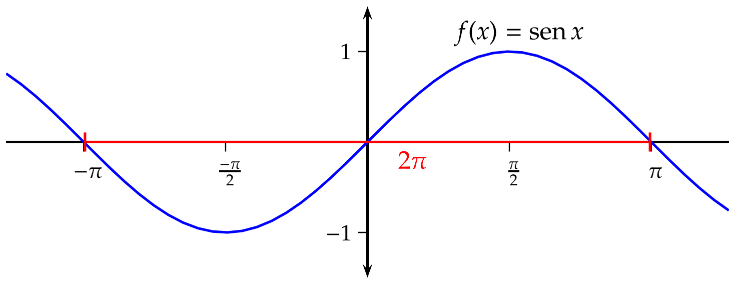
Función seno

Definición (Función seno)

Se define la función *seno*,

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su seno.



Propiedades de la función seno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar:

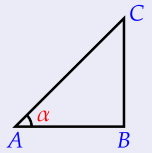
$$\begin{array}{llll} \operatorname{sen} 0 = 0 & \operatorname{sen} \pi/6 = 1/2 & \operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2 & \operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen} \pi/2 = 1 & \operatorname{sen} \pi = 0 & \operatorname{sen} 3\pi/2 = -1 & \operatorname{sen} 2\pi = 0 \end{array}$$

- Es una función impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

Coseno de un ángulo

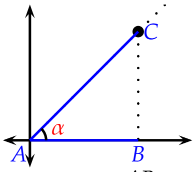
Definición (Coseno de un ángulo)

Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *coseno* de α, y se nota $\cos\alpha$, como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa.



$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$$

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la abscisa de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.



$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$$

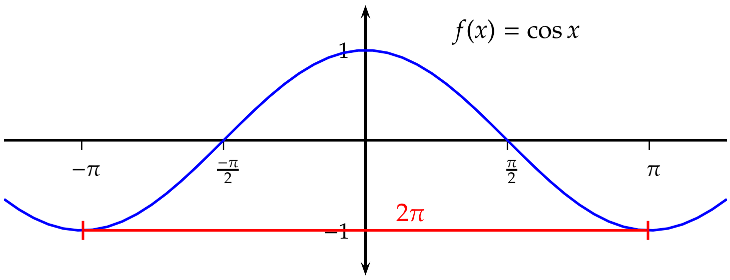
Función coseno

Definición (Función coseno)

Se define la función *coseno*,

$$f(x) = \cos x$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su coseno.



Propiedades de la función coseno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar:

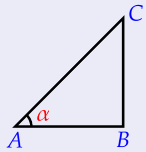
$$\begin{array}{llll} \cos 0 = 1 & \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2 & \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 & \cos \pi/3 = \sqrt{2}/2 \\ \cos \pi/2 = 0 & \cos \pi = -1 & \cos 3\pi/2 = 0 & \cos 2\pi = 1 \end{array}$$

- Es una función par: $\cos(-x) = \cos x$.

Tangente de un ángulo

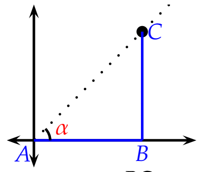
Definición (Tangente de un ángulo)

Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define la *tangente* de α, y se nota $\operatorname{tg}\alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}$$

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX, como el cociente entre la ordenada y la abscisa de cualquier punto del otro lado.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}$$

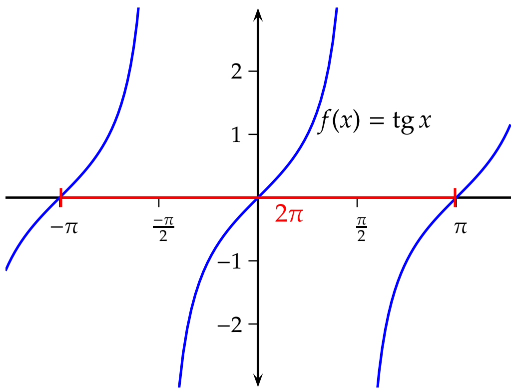
Función tangente

Definición (Función tangente)

Se define la función *tangente*,

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su tangente.



Propiedades de la función tangente

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del coseno, es decir $\mathbb{R} - \{2k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}$.
- Es periódica, con periodo 2π

$$\operatorname{tg}(x + 2k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar:

$$\begin{array}{llll} \operatorname{tg} 0 = 0 & \operatorname{tg} \pi/6 = 1/\sqrt{3} & \operatorname{tg} \pi/4 = 1 & \operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} \pi/2 = +\infty & \operatorname{tg} \pi = 0 & \operatorname{tg} 3\pi/2 = -\infty & \operatorname{tg} 2\pi = 0 \end{array}$$

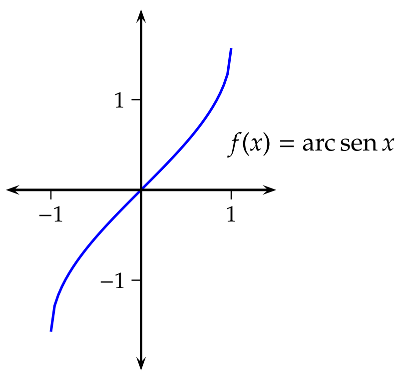
Función arcoseno

Definición (Función arcoseno)

Se define la función *arcoseno*,

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$$

como la función inversa de la función seno.



Propiedades de la función arcoseno

- Por ser la inversa de la función seno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función seno, es decir $[-1, 1]$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función seno, es decir $[-\pi/2, \pi/2]$.[1]
- Es creciente en todo el dominio.

[1] Para que exista la inversa de la función seno, es necesario restringir su dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$ para que sea inyectiva.

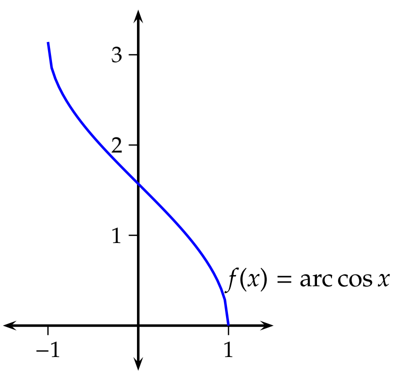
Función arcocoseno

Definición (Función arcocoseno)

Se define la función *arcocoseno*,

$$f(x) = \arccos x$$

como la función inversa de la función coseno.



Propiedades de la función arcoseno

- Por ser la inversa de la función coseno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función coseno, es decir $[-1, 1]$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función coseno, es decir $[0, \pi]$. [2]
- Es decreciente en todo el dominio.

[2] Para que exista la inversa de la función coseno, es necesario restringir su dominio a $[0, \pi]$ para que sea inyectiva.

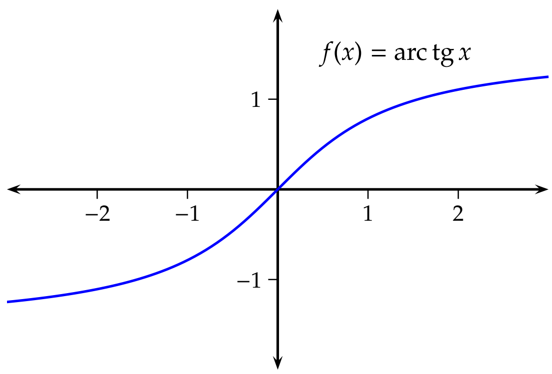
Función arcotangente

Definición (Función arcotangente)

Se define la función *arcotangente*,

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

como la función inversa de la función tangente.



Propiedades de la función arcotangente

- Por ser la inversa de la función tangente, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
  - Su dominio es la imagen de la función tangente, es decir $\mathbb{R}$.
  - Su imagen es el dominio restringido de la función tangente, es decir $(-\pi/2, \pi/2)$. [3]
- Es creciente en todo el dominio.

[3] Para que exista la inversa de la función tangente, es necesario restringir su dominio a $(\pi/2, \pi/2)$ para que sea inyectiva.

Algunas relaciones trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
- $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
- $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$

Límites y continuidad

3 Límites y Continuidad

- El concepto de límite
- Álgebra de límites
- Indeterminaciones y su resolución
- Asíntotas de una función
- Continuidad
- Tipos de discontinuidades

Aproximación al concepto de límite

El concepto de límite está ligado al de tendencia.

Decimos que x *tiende* a un valor a, y lo escribimos $x \to a$, si se pueden tomar valores de x tan próximos a a como se quiera, pero sin llegar a valer a.

Si la aproximación es por defecto (con valores menores que a) se dice que x tiende a a por la izquierda, y se escribe $x \to a^-$, y si es por exceso (con valores mayores que a) se dice que x tiende a a por la derecha, y se escribe $x \to a^+$.

Cuando la variable x de una función f tiende a un valor a, cabe preguntarse si sus imágenes mediante f tienden a otro valor concreto:

¿A donde se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a?

Si $f(x)$ tiende a un valor l cuando x tiende a a, se dice que l es el *límite* de $f(x)$ cuando $x \to a$, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Límites laterales

Si $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a a por la izquierda, entonces se dice que l es el *límite por la izquierda* de $f(x)$ cuando $x \to a^-$, y se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x se aproxima a a por exceso, entonces se dice que l es el *límite por la derecha* de $f(x)$ cuando $x \to a^-$, y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

Para que exista el límite deben existir los límites laterales y ser iguales.

Aproximación por defecto

x	$f(x) = x^2$
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,99960001

$\Downarrow$

$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$

Aproximación por exceso

x	$f(x) = x^2$
2,1	4,41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
2,0001	4,00040001

$\Downarrow$

$\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$

$\Downarrow$

Límites que no existen (I)

Si la función no está definida entorno a un punto, entonces no existe el límite en dicho punto

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	No exite
$-0{,}01$	No existe
$-0{,}001$	No existe

$\Downarrow$

No existe $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Por la derecha

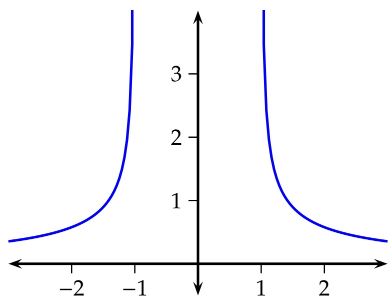
x	$f(x)$
0,1	No existe
0,01	No existe
0,001	No existe

$\Downarrow$

No existe $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\Downarrow$

No existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$



Límites que no existen (II)

Cuando los límites laterales no coinciden entonces no existe el límite

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	-1
$-0{,}01$	-1
$-0{,}001$	-1

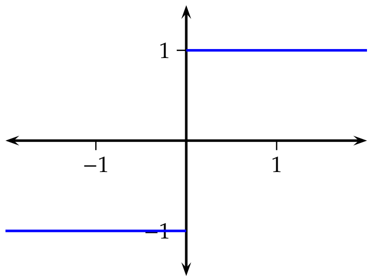
Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	1
$0{,}01$	1
$0{,}001$	1

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$



Límites que no existen (III)

A veces, cuando $x \to a$ los valores de $f(x)$ crecen o decrecen infinitamente y entonces no existe el límite. En este caso se dice que la función *diverge* y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo Veamos la tendencia de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	100
$-0{,}01$	10000
$-0{,}001$	1000000

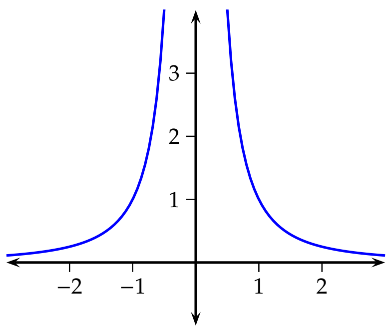
Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	100
$0{,}01$	10000
$0{,}001$	1000000

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Límites que no existen (IV)

A veces, el límite de un función en un punto puede no existir porque la función oscila rápidamente al acercarnos a dicho punto.

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	$-0{,}1736$
$-0{,}01$	$-0{,}9848$
$-0{,}005$	$0{,}3420$
$-0{,}001$	$0{,}9848$
$-0{,}0005$	$0{,}3420$
$-0{,}0001$	$0{,}9848$

$\Downarrow$

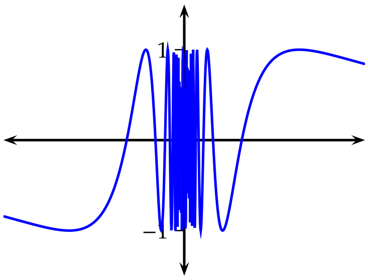
No existe $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	$0{,}1736$
$0{,}01$	$0{,}9848$
$0{,}005$	$-0{,}3420$
$0{,}001$	$-0{,}9848$
$0{,}0005$	$-0{,}3420$
$0{,}0001$	$-0{,}9848$

$\Downarrow$

No existe $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



Límites en el infinito

Si $f(x)$ tiende a l cuando x crece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$, y se escribe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x decrece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$, y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

Ejemplo Estudiemos la tendencia de $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to \pm\infty$:

$x \to +\infty$

x	$f(x) = 1/x$
1000	0,001
10000	0,0001
100000	0,00001

$\Downarrow$

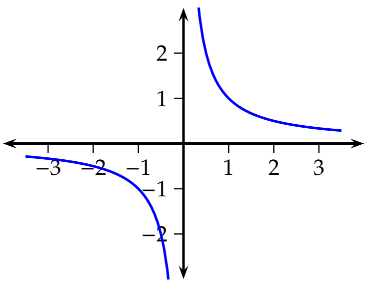
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$x \to -\infty$

x	$f(x) = 1/x$
-1000	$-0{,}001$
-10000	$-0{,}0001$
-100000	$-0{,}00001$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$



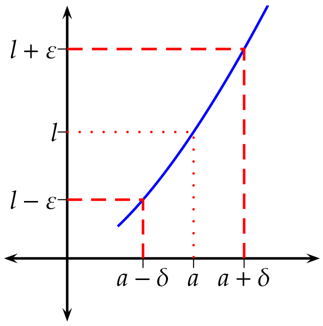
Definición de límite

Definición (Límite de una función en un punto)

Se dice que el límite de la función f cuando $x \to a$ es l, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.



Definición de límite en el infinito

Definición (Límite de una función en el infinito)

Se dice que el límite de la función f cuando $x \to +\infty$ es l, y se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x > \delta$.
Se dice que el límite de la función f cuando $x \to +\infty$ es l, y se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta < 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x < \delta$.

Álgebra de límites

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces se cumple que

1. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, siendo c constante.
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Límites de las funciones elementales

- **Funciones polinómicas**. Si f es un polinomio, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones racionales**. Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea una raíz de $q(x)$, y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Si a es una raíz de $q(x)$ entonces el límite puede existir o no.
- **Funciones potenciales**. Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto a tal que exista un intervalo $(a-\delta, a+\delta) \subset \mathrm{Dom}(f)$ para algún $\delta > 0$, y en ese caso, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones exponenciales**. Si $f(x) = c^x$ con $c \in \mathbb{R}$ entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones logarítmicas**. Si $f(x) = \log_c x$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}^+$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones trigonométricas**. Si $f(x)$ es una función trigonométrica, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Indeterminaciones

Al calcular límites pueden aparecer las siguientes indeterminaciones:

- **Tipo cociente**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ cuando $x \to a$.
  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$.
- **Tipo producto**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $f(x)\cdot g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0\cdot\pm\infty$ cuando $x \to a$.
- **Tipo potencia**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^∞ cuando $x \to a$.
  Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 0^0 cuando $x \to a$.
  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo ∞^0 cuando $x \to a$.
- **Tipo diferencia**. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x) - g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ cuando $x \to a$.

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Existen diferentes técnicas para resolver una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$:

- Factorización de polinomios en funciones racionales.
- División por el términos de mayor orden en funciones racionales.
- Infinitésimos equivalentes.
- Regla de L'Hôpital.

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Factorización de polinomios en funciones racionales

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \to a$, y a es una raíz de $p(x)$ y $q(x)$, se puede resolver la indeterminación factorizando los polinomios y simplificando.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \to \dfrac{0}{0}$ cuando $x \to 1$.

Para resolver la indeterminación factorizamos los polinomios

$$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2,$$
$$x^4 - 4x + 3 = (x^2 + 2x + 3)(x - 1)^2.$$

Como el factor $(x - 1)^2$ es común, podemos simplificar la función en el cálculo del límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)^2}{(x^2 + 2x + 3)(x - 1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

4

[4] Se pude simplificar porque aunque $x \to 1$, $x \neq 1$ y por tanto el denominador no se anula.

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

División por el término de mayor orden en funciones racionales

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \to \pm\infty$, entonces se puede resolver dividiendo $p(x)$ y $q(x)$ por el término de mayor grado de ambos polinomios.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to \infty$.

Para resolver la indeterminación dividimos numerador y denominador por x^4 que es el término de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-3x+2}{x^4}}{\frac{x^4-4x+3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

En general, si $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots b_m x^m}$, entonces:

- Si $n > m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Si $n < m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
- Si $n = m$ entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$.

Infinitésimos equivalentes

Definición (Infinitésimos equivalentes)

Si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, entonces se dice que f y g son *infinitésimos equivalentes* cuando $x \to a$ si se cumple

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

En tal caso se escribe $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to a$.

Si $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to a$ entonces $f(x)$ y $g(x)$ son magnitudes equivalentes cuando $x \to a$.

Infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$:

$$\begin{gathered} \operatorname{sen} x \approx x \approx \operatorname{tg} x \\ 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2} \\ \operatorname{arc\,tg} x \approx x \\ e^x - 1 \approx x \\ \log(1+x) \approx x \end{gathered}$$

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Infinitésimos equivalentes

A veces se puede resolver una indeterminación cuando $x \to a$ sustituyendo cualquier subexpresión de la función por un infinitésimo equivalente cuando $x \to a$.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3} \to \dfrac{0}{0}$ cuando $x \to 0$.

Como $\operatorname{sen} x \approx x$ y $1 - \cos x \approx \dfrac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$, para resolver la indeterminación sustituimos $\operatorname{sen} x$ por x y $1 - \cos x$ por $\dfrac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Teorema (Regla de L'Hôpital)

Si $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$, entonces si existe el límite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cuando $x \to a$ se cumple

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

¡Ojo! Para que exista $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ es necesario que que f y g sean derivables en un entorno de a.

Ejemplo Sea $f(x) = \frac{\log(x^2-1)}{x+2} \to \frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to \infty$.

Para resolver la indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\log(x^2-1)\right)'}{(x+2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0.$$

Resolución de una indeterminación de tipo producto

Si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to a$, entonces la indeterminación $f(x)\cdot g(x) \to 0\cdot\pm\infty$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \to \frac{0}{0}.$$

Ejemplo Sea $f(x) = x^2 e^{1/x^2} \to 0\cdot\infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} \to \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{1/x^2}\right)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty.$$

Resolución de una indeterminación de tipo potencia

Si $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación de tipo potencia cuando $x \to a$, entonces la indeterminación puede convertirse en una de tipo producto mediante la transformación:

$$\exp\left(\log f(x)^{g(x)}\right) = \exp\left(g(x) \cdot \log f(x)\right).$$

Ejemplo Sea $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to 1^\infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\exp\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}\right)$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{(1/x)'}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+1/x}\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \exp(1) = e.$$

Resolución de una indeterminación de tipo diferencia

Si $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, entonces la indeterminación $f(x) - g(x)$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \to \frac{0}{0}.$$

Ejemplo Sea $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0}$$

Aplicando ahora la regla de L´Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{sen} x)'}{(x\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{sen} x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Asíntota de una función

Una asíntota de una función es una recta a la que tiende la función en el infinito, es decir, que la distancia entre la recta y la función es cada vez menor.

Existen tres tipos de asíntotas:

- **Asíntota vertical**: $x = a$,
- **Asíntota horizontal**: $y = a$,
- **Asíntota oblicua**: $y = a + bx$.

Asíntotas verticales

Definición (Asíntota vertical)

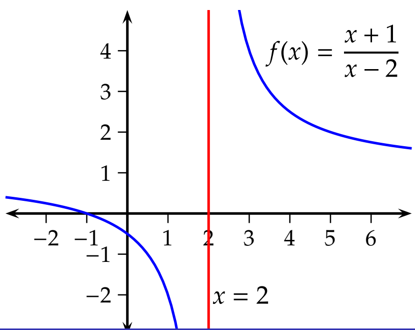
Se dice que una recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Las asíntotas verticales deben buscarse en los puntos donde no está definida la función, pero si lo está en las proximidades.

Ejemplo La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \infty$$



Asíntotas horizontales

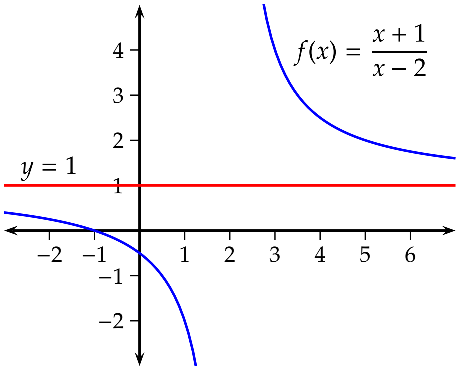
Definición (Asíntota horizontal)

Se dice que una recta $y = a$ es una *asíntota horizontal* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

Ejemplo La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1$$



Asíntotas oblicuas

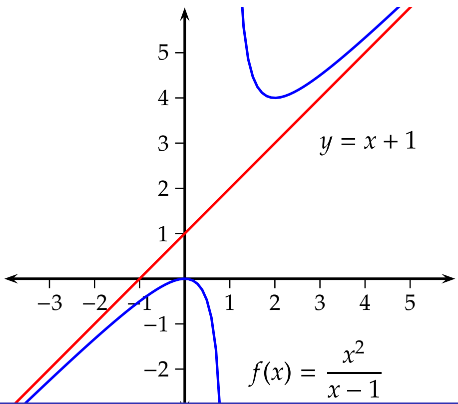
Definición (Asíntota oblicua)

Se dice que una recta $y = a + bx$ es una *asíntota oblicua* de una función f si se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - bx = a.$$

Ejemplo La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{x}{x-1} = 1$$



Continuidad

Definición (Función continua en un punto)

Se dice que una función f es *continua* en el punto a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De esta definición se deducen tres condiciones necesarias para la continuidad:

$f(a) \in \mathrm{Dom}(f)$. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si se rompe alguna de estas condiciones, se dice que la función presenta una discontinuidad en a.

Definición (Función continua en un intervalo)

Se dice que una función f es *continua* en un intervalo si lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

La gráfica de una función continua en un intervalo puede dibujarse sin levantar el lápiz.

Tipos de discontinuidades

Dependiendo de la condición de continuidad que se rompa, existen distintos tipos de discontinuidades:

- Discontinuidad evitable.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
- Discontinuidad de 2ª especie.

Discontinuidad evitable

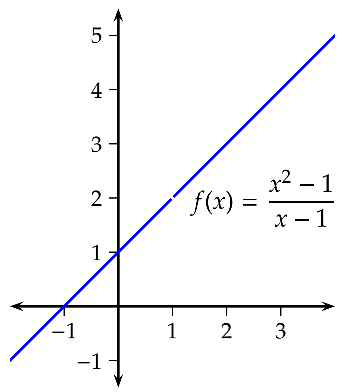
Definición (Discontinuidad evitable)

Se dice que una función f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ ya que

La función no está definida en $x = 1$ pero

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 2} x+1 = 2.$$



Discontinuidad de 1ª especie de salto finito

Definición (Discontinuidad de 1ª especie de salto finito)

Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto finito* en el punto a si existen los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to a$ pero

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

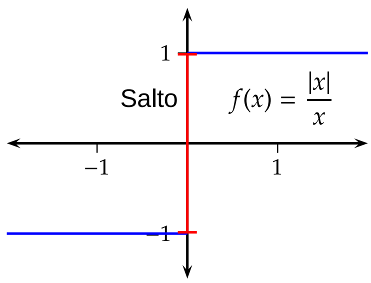
A la diferencia entre ambos límite se le lama *salto* de la discontinuidad.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Salto $= 1 - (-1) = 2.$



Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito

Definición (Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito)

Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto infinito* en el punto a si

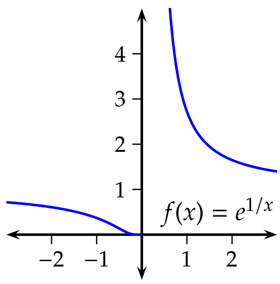
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Si f tienen una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en un punto a, entonces f tienen una asíntota vertical $x = a$.

Ejemplo La función $f(x) = e^{1/x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty$$



Discontinuidad de 2ª especie

Definición (Discontinuidad de 2ª especie)

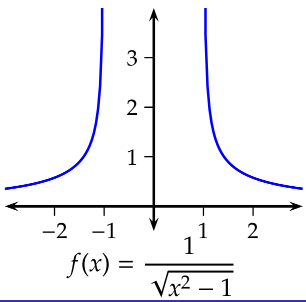
Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 2ª especie* en el punto a si no existe alguno de los límites laterales y tampoco se trata de una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

Normalmente la discontinuidades de 2ª especie se dan en puntos donde la función no definida en sus proximidades.

Ejemplo La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ tiene una discontinuidad de 2ª especie en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ no existe}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$



Cálculo diferencial en una variable

4 Cálculo diferencial en una variable

- El concepto de derivada
- Álgebra de derivadas
- Derivada de una función compuesta: La regla de la cadena
- Derivada de la inversa de una función
- Interpretación cinemática de la derivada
- Recta tangente a una trayectoria
- Estudio del crecimiento de una función
- Determinación de los extremos relativos de una función
- Estudio de la concavidad de una función

Tasa de variación media

Definición (Incremento)

Dada una función $y = f(x)$, se llama *incremento* de f en un intervalo $[a, b]$ a la diferencia entre el valor de f en cada uno de los extremos del intervalo, y se nota

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Cuando f es la función identidad $y = x$, se cumple que

$$\Delta x = \Delta y = f(b) - f(a) = b - a,$$

y por tanto, el incremento de x en un intervalo es la amplitud del intervalo. Esto nos permite escribir el intervalo $[a, b]$ como $[a, a + \Delta x]$.

Definición (Tasa de variación media)

Se llama *tasa de variación media* de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$, al cociente entre el incremento de y y el incremento de x en dicho intervalo, y se escribe

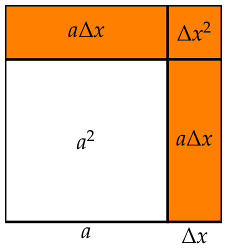
$$\mathrm{TVM}\, f[a, a + \Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Tasa de variación media: Ejemplo

Consideremos la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x.

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a, y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado una cantidad Δx, ¿en cuánto se incrementará el área del cuadrado?

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(a+\Delta x) - f(a) = (a+\Delta x)^2 - a^2 = \\ &= a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2 = 2a\Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

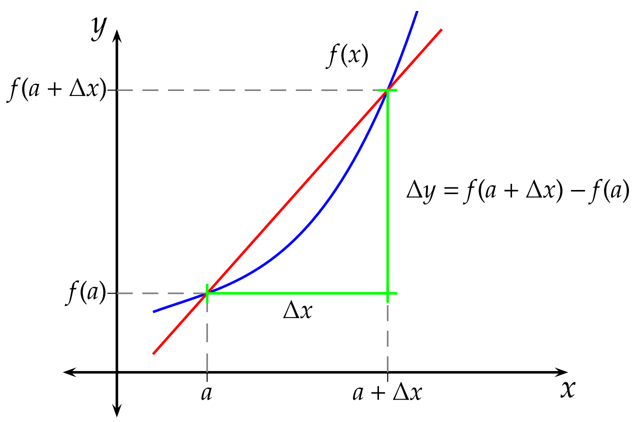


¿Cuál será la tasa de variación media del área en el intervalo $[a, a+\Delta x]$?

$$\text{TVM}\, f[a, a+\Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x.$$

Interpretación geométrica de la tasa de variación media

La tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a+\Delta x]$ es la pendiente de la recta *secante* a f en los puntos $(a, f(a))$ y $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$.



Tasa de variación instantánea

En muchas ocasiones, es interesante estudiar la tasa de variación que experimenta una función, no en intervalo, sino en un punto.

Conocer la tendencia de variación de una función en un instante puede ayudarnos a predecir valores en instantes próximos.

Definición (Tasa de variación instantánea y derivada)

Dada una función $y = f(x)$, se llama *tasa de variación instantánea* de f en un punto a, al límite de la tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a+\Delta x]$, cuando Δx tiende a 0, y lo notaremos

$$\text{TVI}\, f(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \text{TVM}\, f[a, a+\Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Cuando este límite existe, se dice que la función f es derivable en el punto a, y al valor del mismo se le llama derivada de f en a, y se nota como

$$f'(a) \text{ o bien } \frac{df}{dx}(a)$$

Tasa de variación instantánea: Ejemplo

Consideremos de nuevo la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x.

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a, y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado, ¿cuál es la tasa de variación instantánea del área del cuadrado en dicho instante?

$$\begin{aligned}\text{TVI}\, f(a)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2a + \Delta x = 2a.\end{aligned}$$

Así pues,

$$f'(a) = 2a,$$

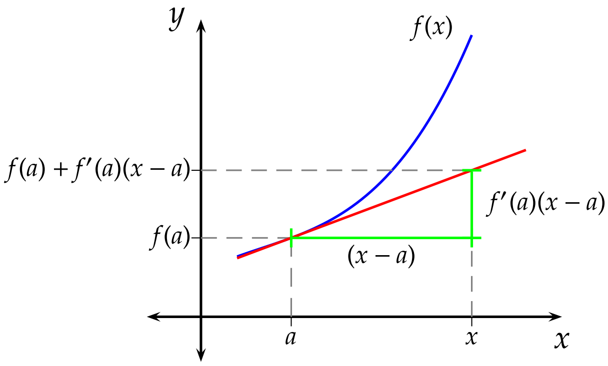
lo que indica que la tendencia de crecimiento el área es del doble del valor del lado.

El signo de $f'(a)$ indica la tendencia de crecimiento de f en el punto a:

- $f'(a) > 0$ indica que la tendencia es creciente.
- $f'(a) < 0$ indica que la tendencia es decreciente.

Interpretación geométrica de la tasa de variación instantánea

La tasa de variación instantánea de f en el punto a es la pendiente de la recta *tangente* a f en el punto $(a, f(a))$.



Propiedades de la derivada

Si $y = c$, es una función constante, entonces $y' = 0$. Si $y = x$, es la función identidad, entonces $y' = 1$.

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son dos funciones diferenciables, entonces

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u - v)' = u' - v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Diferencial de una función compuesta

La regla de la cadena

Si $y = f \circ g$ es la composición de dos funciones $y = f(z)$ y $z = g(x)$, entonces

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = f'(z)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Derivada de la función inversa

Si $y = f(x)$ es una función y $x = f^{-1}(y)$ es su inversa, entonces

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

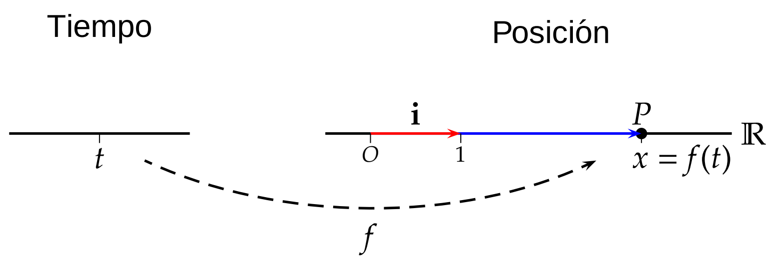
o bien

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Interpretación cinemática de la tasa de variación

Movimiento rectilineo

Supongase que la función $f(t)$ describe la posición de un objeto móvil sobre la recta real en el instante t. Tomando como referencia el origen de coordenadas O y el vector unitario $\mathbf{i} = (1)$, se puede representar la posición P del móvil en cada instante t mediante un vector $\vec{OP} = x\mathbf{i}$ donde $x = f(t)$.



Observación También tiene sentido pensar en f como una función que mide otras magnitudes como por ejemplo la temperatura de un cuerpo, la concentración de un gas o la cantidad de un compuesto en una reacción química en un instante t.

Interpretación cinemática de la tasa de variación media

En este contexto, si se toman los instantes $t = t_0$ y $t = t_0 + \Delta t$, ambos del dominio I de f, el vector

$$\mathbf{v}_m = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

que se conoce como *velocidad media* de la trayectoria f entre los instantes t_0 y $t_0 + \Delta t$.

Ejemplo Un vehículo realiza un viaje de Madrid a Barcelona. Sea f la función que da la posición el vehículo en cada instante. Si el vehículo parte de Madrid (km 0) a las 8 y llega a Barcelona (km 600) a las 14 horas, entonces la velocidad media del vehículo en el trayecto es

$$\mathbf{v}_m = \frac{f(14) - f(8)}{14 - 8} = \frac{600 - 0}{6} = 100 km/h.$$

Interpretación cinemática de la derivada

Siguiendo en este mismo contexto del movimiento rectilineo, la derivada de f en el instante $t = t_0$ es el vector

$$\mathbf{v} = f'(t_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

que se conoce, siempre que exista el límite, como *velocidad instantánea* o simplemente la *velocidad* de la trayectoria f en el instante t_0.

Es decir, la derivada de la posición respecto del tiempo, es un campo de vectores que recibe el nombre de *velocidad a lo largo de la trayectoria* f.

Ejemplo Siguiendo con el ejemplo anterior, la velocidad instantánea del vehículo en un determinado instante sería lo que marca el velocímetro en dicho instante.

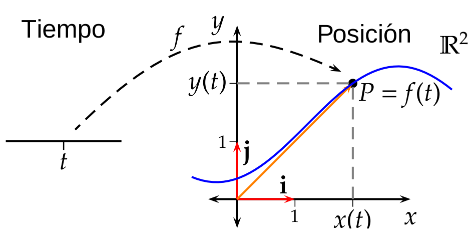
Generalización al movimiento curvilineo

La derivada como velocidad a lo largo de una trayectoria en la recta real puede generalizarse a trayectorias en cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Para el caso del plano real $\mathbb{R}^2$, si $f(t)$ describe la posición de un objeto móvil en el plano en el instante t, tomando como referencia el origen de coordenadas O y los vectores coordenados $\{\mathbf{i} = (1, 0), \mathbf{j} = (0, 1)\}$, se puede representar la posición P del móvil en cada instante t mediante un vector $\vec{OP} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ cuyas coordenadas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

se conocen como *funciones coordenadas* de f y se escribe $f(t) = (x(t), y(t))$.



Velocidad en una trayectoria curvilinea en el plano

En este contexto de una trayectoria $f(t) = (x(t), y(t))$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, para un instante $t = t_0$, si existe el vector

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

entonces f es derivable en el instante $t = t_0$ y el vector $\mathbf{v} = f'(t)$ se conoce como *velocidad* de f en ese instante.

Como $f(t) = (x(t), y(t))$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - (x(t_0), y(t_0))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) = \\ &= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) = (x'(t), y'(t)). \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{v} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}.$$

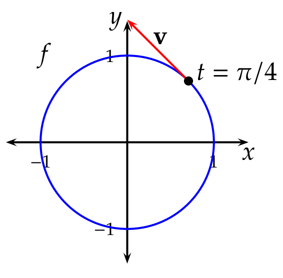
Velocidad en una trayectoria curvilinea en el plano

Ejemplo

Dada la trayectoria $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuya gráfica es la circunferencia de centro el origen de coordenas y radio 1, sus funciones coordenadas son $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$, $t \in \mathbb{R}$, y su velocidad es

$$\mathbf{v} = f'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

En el instante $t = \pi/4$, el móvil estará en la posición $f(\pi/4) = (\cos(\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/4)) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y se moverá con una velocidad $\mathbf{v} = f'(\pi/4) = (-\operatorname{sen}(\pi/4), \cos(\pi/4)) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.



Obsérvese que el módulo del vector velocidad siempre será 1 ya que $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2} = 1$.

Recta tangente a una trayectoria en el plano

Los vectores paralelos a la velocidad $\mathbf{v}$ se denominan *vectores tangentes* a la gráfica de la trayectoria f en el punto $P = f(t_0)$ y la recta que pasa por P dirigida por $\mathbf{v}$ es la recta tangente a f cuando $t = t_0$.

Definición (Recta tangente a una trayectoria)

Dada una trayectoria f sobre el plano real $\mathbb{R}^2$, se llama *recta tangente* a f para $t = t_0$ a la recta de ecuación

$$l = f(t_0) + tf'(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) + t(x'(t_0), y'(t_0)) = (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0)).$$

Ejemplo Se ha visto que para la trayectoria $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuya gráfica es la circunferencia de centro el origen de coordenas y radio 1, en el instante $t = \pi/4$ la posición del móvil era $f(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y su velocidad $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, de modo que la recta tangente a f en ese instante es

$$l = f(\pi/2) + t\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Recta tangente a una trayectoria en el plano

De la ecuación vectorial de la recta tangente a f para $t = t_0$, se obtiene que sus funciones cartesianas son

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \end{cases} \qquad t \in R,$$

y despejando t en ambas ecuaciones e igualando se llega a la ecuación cartesiana de la recta tangente

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)},$$

si $x'(t_0) \neq 0$ e $y'(t_0) \neq 0$, y de ahí a la ecuación en la forma punto-pendiente

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Ejemplo Partiendo de la ecuación vectorial de la tangente del ejemplo anterior $l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow y - \sqrt{2}/2 = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x - \sqrt{2}/2) \Rightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$

Recta normal a una trayectoria en el plano

Se ha visto que la recta tangente a una trayectoria f cuando $t = t_0$ es la recta que pasa por el punto el punto $P = f(t_0)$ dirigida por el vector velocidad $\mathbf{v} = f'(0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. Si en lugar de tomar ese vector se toma como vector director el vector $\mathbf{w} = (y'(t_0), -x'(t_0))$, que es ortogonal a $\mathbf{v}$, se obtiene otra recta que se conoce como *recta normal* a la trayectoria f cuanto $t = t_0$.

Definición (Recta normal a una trayectoria)

Dada una trayectoria f sobre el plano real $\mathbb{R}^2$, se llama *recta normal* a f para $t = t_0$ a la recta de ecuación

$$l = (x(t_0), y(t_0)) + t(y'(t_0), -x'(t_0)) = (x(t_0) + ty'(t_0), y(t_0) - tx'(t_0)).$$

Su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - x(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{-x'(t_0)},$$

y su ecuación en la forma punto pendiente

$$y - y(t_0) = \frac{-x'(t_0)}{y'(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Recta normal a una trayectoria en el plano

Ejemplo

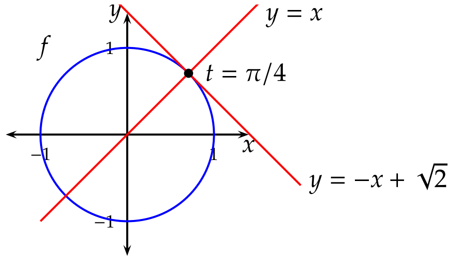
Siguiendo con el ejemplo de la trayectoria $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, la recta normal en el instante $t = \pi/4$ es

$$l = (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)) + t(\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

y su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow y - \sqrt{2}/2 = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x - \sqrt{2}/2) \Rightarrow y = x.$$



Rectas tangente y normal a una función

Un caso particular de las recta tangente y normal a una trayectoria es son la recta tangente y normal a una función de una variable real. Si se tiene la función $y = f(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, una trayectoria que traza la gráfica de f es

$$g(t) = (t, f(t)) \quad t \in I,$$

y su velocidad es

$$g'(t) = (1, f'(t)),$$

de modo que la recta tangente para $t = x_0$ es

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

y la recta normal es

$$\frac{x - x_0}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{-1} \Rightarrow y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

Rectas tangente y normal a una función

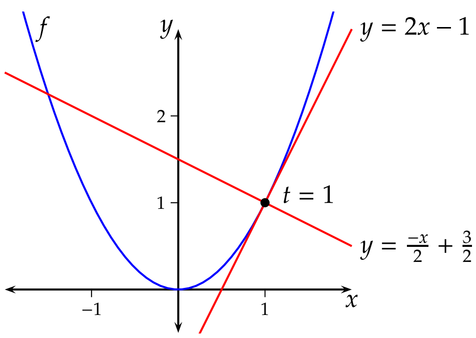
Ejemplo

Dada la función $y = f(x) = x^2$, la trayectoria que dibuja la gráfica de esta función es $g(t) = (t, t^2)$ y su velocidad es $g'(t) = (1, 2t)$, de modo que en el punto $(1, 1)$, que se alcanza en el instante $t = 1$, la recta tangente es

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1,$$

y la recta normal es

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2}).$$



Recta tangente a una trayectoria en el espacio

El concepto de recta tangente a una trayectoria en el plano real puede extenderse fácilmente a trayectorias en el espacio real $\mathbb{R}^3$.

Si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, es una trayectoria en el espacio real $\mathbb{R}^3$, entonces el móvil que recorre esta trayectoria en el instante $t = t_0$, ocupará la posición $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ y tendrá una velocidad $\mathbf{v} = f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, de manera que la recta tangente a f en ese instante será

$$\begin{aligned} l &= (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) + t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \\ &= (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0), z(t_0) + tz'(t_0)), \end{aligned}$$

cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)},$$

siempre que $x'(t_0) \neq 0$, $y'(t_0) \neq 0$ y $z'(t_0) \neq 0$.

Recta tangente a una trayectoria en el espacio

Ejemplo

Dada la trayectoria del espacio $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el instante $t = \pi/2$, la trayectoria pasará por el punto

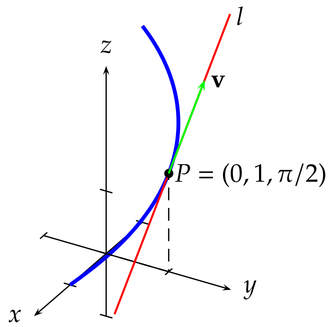
$$f(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2), \pi/2) = (0, 1, \pi/2),$$

con una velocidad

$$\mathbf{v} = f'(\pi/2) = (-\operatorname{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2), 1) = (-1, 0, 1),$$

y la tangente en ese punto es

$$l = (0, 1, \pi/2) + t(-1, 0, 1) = (-t, 1, t + \pi/2)$$



Estudio del crecimiento de una función

La principal aplicación de la derivada es el estudio del crecimiento de una función mediante el signo de la derivada.

Teorema

Si f es una función cuya derivada existe en un intervalo I, entonces:

- Si $\forall x \in I\ f'(x) \geq 0$ entonces f es creciente en el intervalo I.
- Si $\forall x \in I\ f'(x) \leq 0$ entonces f es decreciente en el intervalo I.

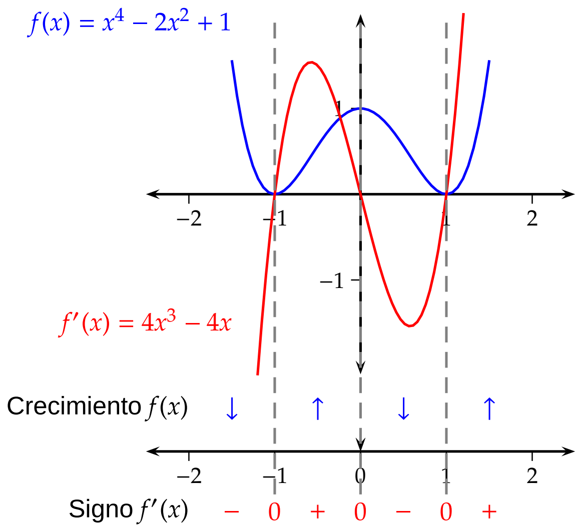
Ejemplo La función $f(x) = x^3$ es creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) \geq 0$.

Observación. *Una función puede ser creciente o decreciente en un intervalo y no tener derivada.*

Estudio del crecimiento de una función

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.



Determinación de extremos relativos de una función

Como consecuencia del resultado anterior, la derivada también sirve para determinar los extremos relativos de una función.

Teorema (Criterio de la primera derivada)

Sea f es una función cuya derivada existe en un intervalo I, y sea $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$, entonces:

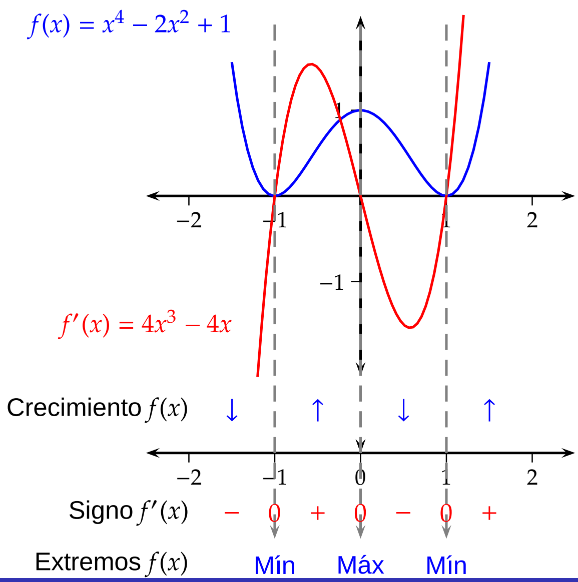
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f'(x) > 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f'(x) < 0$ entonces f tiene un *máximo relativo* en x_0.
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f'(x) < 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f'(x) > 0$ entonces f tiene un *mínimo relativo* en x_0.
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f'(x) > 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f'(x) > 0$ entonces f tiene un *punto de inflexión creciente* en x_0.
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f'(x) < 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f'(x) < 0$ entonces f tiene un *punto de inflexión decreciente* en x_0.

Los puntos donde se anula la derivada de una función se denominan *puntos críticos*

Determinación de extremos relativos de una función

Ejemplo

Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.



Estudio de la concavidad de una función

La concavidad de una función puede estudiarse mediante el signo de la segunda derivada.

Teorema (Criterio de la segunda derivada)

Si f es una función cuya segunda derivada existe en un intervalo I, entonces:

- Si $\forall x \in I\ f''(x) \geq 0$ entonces f es cóncava en el intervalo I.
- Si $\forall x \in I\ f''(x) \leq 0$ entonces f es convexa en el intervalo I.

Ejemplo La función $f(x) = x^2$ tiene segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$ y por tanto es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

Observación. *Una función puede ser cóncava o convexa en un intervalo y no tener derivada.*

Estudio de la concavidad de una función

Ejemplo

Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 4$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.