Manual Básico de Estadística

Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

Feb 2017

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
CEU San Pablo

Índice general

1 Introducción a la Estadística

1.1 La estadística como herramienta científica

¿Qué es la estadística?

Definición 1 (Estadística)**.** La *estadística* es una rama de las matemáticas que se encarga de la recogida, análisis e interpretación de datos.

El papel de la Estadística es extraer información de los datos para adquirir el conocimiento necesario para tomar decisiones.

La estadística es imprescindible en cualquier disciplina científica o técnica donde se manejen datos, especialmente si son grandes volúmenes de datos, como por ejemplo en Física, Química, Medicina, Psicología, Economía o Ciencias Sociales.

Pero, *¿por qué es necesaria la Estadística?*

La variabilidad de nuestro mundo

El científico trata de estudiar el mundo que le rodea; un mundo que está lleno de variaciones que dificultan la determinación del comportamiento de las cosas.

¡La variabilidad del mundo real es el origen de la estadística!

La estadística actúa como disciplina puente entre la realidad del mundo y los modelos matemáticos que tratan de explicarla, proporcionando una metodología para evaluar las discrepancias entre la realidad y los modelos teóricos.

Esto la convierte en una herramienta indispensable en las ciencias aplicadas que requieran el análisis de datos y el diseño de experimentos.

1.2 Población y muestra

Población estadística

Definición 2 (Población)**.** Una *población* es un conjunto de elementos definido por una o más características que tienen todos los elementos, y sólo ellos. Cada elemento de la población se llama *individuo*.

Definición 3 (Tamaño poblacional)**.** El número de individuos de una población se conoce como *tamaño poblacional* y se representa como N.

A veces, no todos los elementos de la población están accesibles para su estudio. Entonces se distingue entre:

Población Teórica: Conjunto de elementos a los que se quiere extrapolar los resultados del estudio.

Población Estudiada: Conjunto de elementos realmente accesibles en el estudio.

Inconvenientes en el estudio de la población

El científico estudia un determinado fenómeno en una población para comprenderlo, obtener conocimiento sobre el mismo, y así poder controlarlo.

Pero, para tener un conocimiento completo de la población es necesario estudiar todos los individuos de la misma.

Sin embargo, esto no siempre es posible por distintos motivos:

- El tamaño de la población es infinito, o bien es finito pero demasiado grande.
- Las pruebas a que se someten los individuos son destructivas.
- El coste, tanto de dinero como de tiempo, que supondría estudiar a todos los individuos es excesivo.

Muestra estadística

Cuando no es posible o conveniente estudiar todos los individuos de la población, se estudia sólo una parte de la misma.

Definición 4 (Muestra)**.** Una *muestra* es un subconjunto de la población.

Definición 5 (Tamaño muestral)**.** Al número de individuos que componen la muestra se le llama *tamaño muestral* y se representa por n.

Habitualmente, el estudio de una población se realiza a partir de muestras extraídas de dicha población.

Generalmente, el estudio de la muestra sólo aporta conocimiento aproximado de la población. Pero en muchos casos es *suficiente*.

Determinación del tamaño muestral

Una de las preguntas más interesantes que surge inmediatamente es:

¿cuántos individuos es necesario tomar en la muestra para tener un conocimiento aproximado pero suficiente de la población?

La respuesta depende de varios factores, como la variabilidad de la población o la fiabilidad deseada para las extrapolaciones que se hagan hacia la población.

Por desgracia no se podrá responder hasta casi el final del curso, pero en general, cuantos más individuos haya en la muestra, más fiables serán las conclusiones sobre la población, pero también será más lento y costoso el estudio.

Determinación del tamaño muestral

Muestra pequeña de los píxeles de una imagen

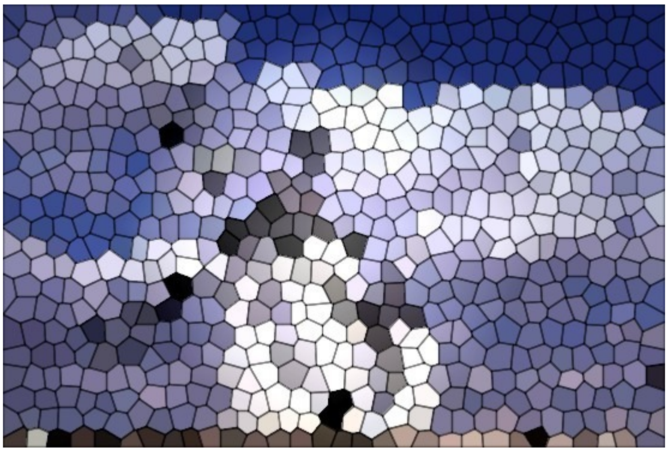
Example. Para entender a qué nos referimos cuando hablamos de un tamaño muestral suficiente para comprender lo que ocurre en la población, podemos utilizar el siguiente símil en que se trata de comprender el motivo que representa una fotografía.

Una fotografía digital está formada por multitud de pequeños puntitos llamados píxeles que se dispone en una enorme tabla de filas y columnas (cuantas más filas y columnas haya se habla de que la foto tiene más resolución). Aquí la población estaría formada por todos y cada uno de los píxeles que forman la foto. Por otro lado cada pixel tiene un color y es la variedad de colores a lo largo de los pixels la que permite formar la imagen de la fotografía.

¿Cuántos píxeles debemos tomar en una muestra para averiguar la imagen de la foto?

La respuesta depende de la variabilidad de colores en la foto. Si todos los píxeles de la foto son del mismo color, entonces un sólo pixel basta para desvelar la imagen. Pero, si la foto tiene mucha variabilidad de colores, necesitaremos muchos más píxeles en la muestra para descubrir el motivo de la foto.

¿Puedes averiguar el motivo de la foto?



¡Con una muestra pequeña es difícil averiguar el contenido de la imagen!

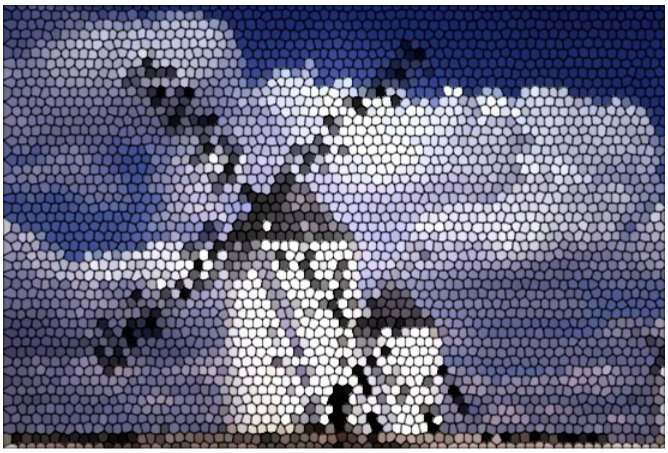
Determinación del tamaño muestral

Muestra mayor de los píxeles de una imagen

Seguramente no has podido averiguar el motivo de la fotografía, porque en este caso el número de píxeles que hemos tomado en la muestra es insuficiente para comprender toda la variabilidad de colores que hay en la foto.

La siguiente imagen contiene una muestra mayor de píxeles.

¿Eres capaz de adivinar el motivo de la foto ahora?



¡Con una muestra mayor es más fácil averiguar el contenido de la imagen!

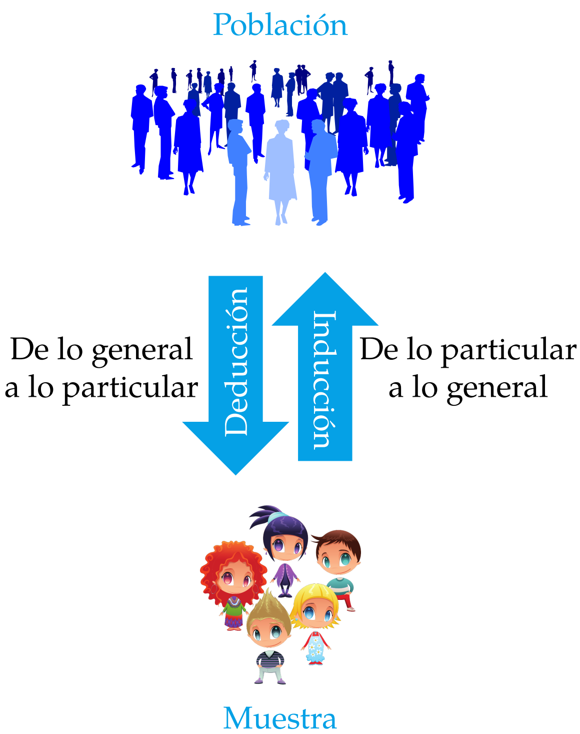
Determinación del tamaño muestral

Población completa de los píxeles de una imagen

Y aquí está la población completa

¡No es necesario conocer todos los píxeles para averiguar la imagen!

Tipos de razonamiento



Tipos de razonamiento

Características de la deducción: Si las premisas son ciertas, garantiza la certeza de las conclusiones (es decir, si algo se cumple en la población, también se cumple en la muestra). Sin embargo, *¡no aporta conocimiento nuevo!*

Características de la inducción: No garantiza la certeza de las conclusiones (si algo se cumple en la muestra, puede que no se cumpla en la población, así que ¡cuidado con las extrapolaciones!). Sin embargo, *¡es la única forma de generar conocimiento nuevo!*

La estadística se apoya fundamentalmente en el razonamiento inductivo ya que utiliza la información obtenida a partir de muestras para sacar conclusiones sobre las poblaciones.

1.3 Muestreo

Muestreo

Definición 6 (Muestreo)**.** El proceso de selección de los elementos que compondrán una muestra se conoce como *muestreo*.

Para que una muestra refleje información fidedigna sobre la población global debe ser representativa de la misma, lo que significa que debe reproducir a pequeña escala la variabilidad de la población.

El objetivo es obtener una muestra representativa de la población.

Modalidades de muestreo

Existen muchas técnicas de muestreo pero se pueden agrupar en dos categorías:

Muestreo Aleatorio Elección aleatoria de los individuos de la muestra. Todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos (*equiprobabilidad*).

Muestreo No Aleatorio: Los individuos se eligen de forma no aleatoria. Algunos individuos tienen más probabilidad de ser seleccionados que otros.

Sólo las técnicas aleatorias evitan el sesgo de selección, y por tanto, garantizan la representatividad de la muestra extraída, y en consecuencia la validez de las conclusiones.

Las técnicas no aleatorias no sirven para hacer generalizaciones, ya que no garantizan la representatividad de la muestra. Sin embargo, son menos costosas y pueden utilizarse en estudios exploratorios.

Muestreo aleatorio simple

Dentro de las modalidades de muestreo aleatorio, el tipo más conocido es el *muestreo aleatorio simple*, caracterizado por:

- Todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos para la muestra.
- La selección de individuos es con reemplazamiento, es decir, cada individuo seleccionado es devuelto a la población antes de seleccionar al siguiente (y por tanto no se altera la población de partida).
- Las sucesivas selecciones de un individuo son independientes.

La única forma de realizar un muestreo aleatorio es asignar un número a cada individuo de la población (*censo*) y realizar un sorteo aleatorio.

1.4 Variables estadísticas

Variables estadísticas y datos

Todo estudio estadístico comienza por la identificación de las características que interesa estudiar en la población y que se medirán en los individuos de la muestra.

Definition 7 (Variable estadística)**.** Una *variable estadística* es una propiedad o característica medida en los individuos de la población.

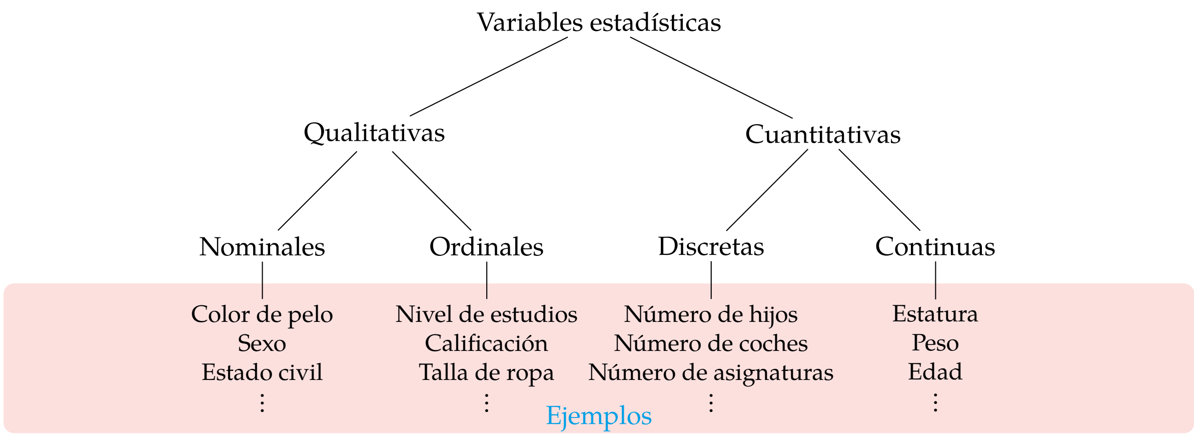
Los *datos* son los valores observados en las variables estadísticas.

Variables estadísticas y atributos

De acuerdo a la naturaleza de los valores y su escala, se tiene:

- **Variables cualitativas o atributos:** Miden cualidades no numéricas. Pueden ser:
  - **Nominales:** No existe un orden natural entre las categorías. Ejemplo: El color de pelo o el sexo.
  - **Ordinales:** Existe un orden natural entre las categorías. Ejemplo: El nivel de estudios o la gravedad de una enfermedad.
- **Variables cuantitativas:** Miden cantidades numéricas. Pueden ser:
  - **Discretas:** Toman valores numéricos aislados (habitualmente números enteros). Ejemplo: El número de hijos o de coches en una familia.
  - **Continuas:** Pueden tomar cualquier valor en un intervalo real. Ejemplo: La estatura, el peso, o la edad de una persona.

Tipos de variables estadísticas



Tipos de variables estadísticas

Eligiendo la variable adecuada

En ocasiones una característica puede medirse mediante variables de distinto tipo.

Ejemplo Si una persona fuma o no podría medirse de diferentes formas:

- Fuma: si/no. (Nominal)
- Nivel de fumador: No fuma / ocasional / moderado / bastante / empedernido. (Ordinal)
- Número de cigarros diarios: 0,1,2,…(Discreta)

En estos casos es preferible usar variables cuantitativas a cualitativas. Dentro de las cuantitativas es preferible usar las continuas a las discretas y dentro de las cualitativas es preferible usar ordinales a nominales pues aportan más información.

Tipos de variables estadísticas

De acuerdo al papel que juegan en el estudio:

- **Variables independientes:** Variables que supuestamente no dependen de otras variables en el estudio. Habitualmente son las variables manipuladas en el experimento para ver su efecto en las variables dependientes. Se conocen también como *variables predictivas*.
- **Variables dependientes:** Variables que supuestamente dependen de otras variables en el estudio. No son manipuladas en el experimento y también se conocen como *variables respuesta*.

Ejemplo En un estudio sobre el rendimiento de los alumnos de un curso, la inteligencia de los alumnos y el número de horas de estudio diarias serían variables independientes y la nota del curso sería una variable dependiente.

Tipos de estudios estadísticos

- **Experimentales:** Cuando las variables independientes son manipuladas para ver el efecto que producen en las variables dependientes.
  Ejemplo En un estudio sobre el rendimiento de los estudiantes en un test, el profesor manipula la metodología de estudio para crear dos o más grupos con metodologías de estudio distintas.
- **No experimentales:** Cuando las variables independientes no son manipuladas. Esto no significa que sea imposible hacerlo, sino que es difícil o poco ético hacerlo.
  Ejemplo En un estudio un investigador puede estar interesado en el efecto de fumar sobre el cáncer de pulmón. Aunque es posible, no sería ético pedirle a los pacientes que fumasen para ver el efecto que tiene sobre sus pulmones. En este caso, el investigador podría estudiar dos grupos de pacientes, uno con cáncer de pulmón y otro sin cáncer, y observar en cada grupo cuántos fuman o no.

Los estudios experimentales permiten identificar causas y efectos entre las variables del estudio, mientras que los no experimentales sólo permiten identificar relaciones de asociación entre las variables.

La tabla de datos

Las variables a estudiar se medirán en cada uno de los individuos de la muestra, obteniendo un conjunto de datos que suele organizarse en forma de matriz que se conoce como **tabla de datos**.

En esta tabla cada columna contiene la información de una variable y cada fila la información de un individuo.

Ejemplo

Nombre	Edad	Sexo	Peso (Kg)	Altura (cm)
José Luis Martínez	18	H	85	179
Rosa Díaz	32	M	65	173
Javier García	24	H	71	181
Carmen López	35	M	65	170
Marisa López	46	M	51	158
Antonio Ruiz	68	H	66	174

1.5 Fases del análisis estadístico

Fases del análisis estadístico

Normalmente un estudio estadístico pasa por las siguientes etapas:

1. El estudio comienza por el diseño previo del mismo en el que se establezcan los objetivos del mismo, la población, las variables que se medirán y el tamaño muestral requerido.

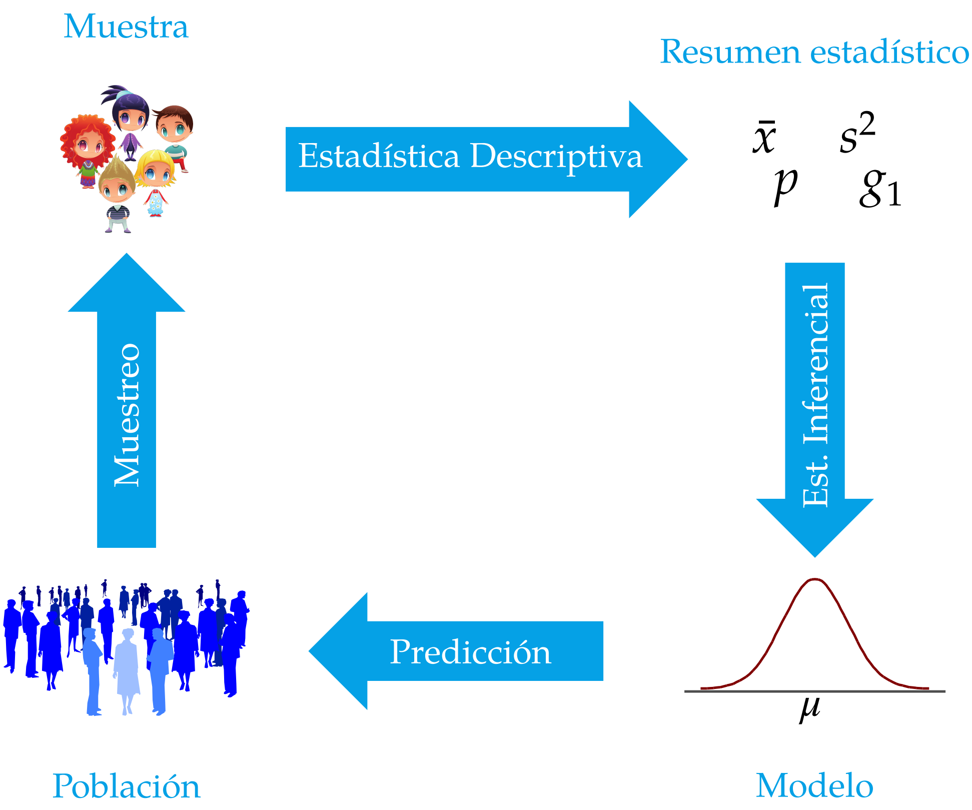
2. A continuación se seleccionará una muestra representativa del tamaño establecido y se medirán las variables en los individuos de la muestra obteniendo la tabla de datos. De esto se encarga el **Muestreo**.

3. El siguiente paso consiste en describir y resumir la información que contiene la muestra. De esto se encarga la **Estadística Descriptiva**.

4. La información obtenida es proyectada sobre un modelo matemático que intenta explicar el comportamiento de la población y el modelo se valida. De todo esto se encarga la **Estadística Inferencial**.

5. Finalmente, el modelo validado nos permite hacer predicciones y sacar conclusiones sobre la población de partida con cierta confianza.

El ciclo estadístico


Muestra
Resumen estadístico
Estadística Descriptiva
$\bar{x}$ s^2
p g_1
Muestreo
Est. Inferencial
Predicción
μ
Población
Modelo

2 Distribución de frecuencias: Tabulación y gráficos

Estadística descriptiva

La estadística descriptiva es la parte de la estadística encargada de representar, analizar y resumir la información contenida en la muestra.

Tras el proceso de muestreo, es la siguiente etapa de todo estudio estadístico y suele consistir en:

1. Clasificar, agrupar y ordenar los datos de la muestra.
2. Tabular y representar gráficamente los datos de acuerdo a sus frecuencias.
3. Calcular medidas que resuman la información que contiene la muestra (*estadísticos muestrales*).

No tiene poder inferencial ⇒ *No utilizar para sacar conclusiones sobre la población!*

Clasificación de la muestra

El estudio de una variable estadística comienza por medir la variable en los individuos de la muestra y clasificar los valores obtenidos.

Existen dos formas de clasificar estos valores:

Sin agrupar : Ordenar todos los valores obtenidos en la muestra de menor a mayor (si existe orden). Se utiliza con atributos y variables discretas con pocos valores diferentes.

Agrupados : Agrupar los valores en clases (intervalos) y ordenar dichas clases de menor a mayor. Se utiliza con variables continuas y con variables discretas con muchos valores diferentes.

2.1 Distribución de frecuencias

Clasificación de la muestra

X =Estatura

Recuento de frecuencias

X =Estatura

Frecuencias muestrales

Definición 8 (Frecuencias muestrales)**.** Dada una muestra de tamaño n de una variable X, para cada valor x_i de la variable observado en la muestra, se define

- **Frecuencia absoluta n_i**: Es el número de veces que el valor x_i aparece en la muestra.
- **Frecuencia relativa f_i**: Es la proporción de veces que el valor x_i aparece en la muestra.

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

- **Frecuencia absoluta acumulada N_i**: Es el número de valores en la muestra menores o iguales que x_i.

$$N_i = n_1 + \cdots + n_i$$

- **Frecuencia relativa acumulada F_i**: Es la proporción de valores en la muestra menores o iguales que x_i.

$$F_i = \frac{N_i}{n}$$

Tabla de frecuencias

Al conjunto de valores observados en la muestra junto a sus respectivas frecuencias se le denomina **distribución muestral de frecuencias** y suele representarse mediante una **tabla de frecuencias**.

Valores de X	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Absoluta Acumulada	Frecuencia Relativa Acumulada
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	f_k	N_k	F_k

Tabla de frecuencias

Ejemplo de datos sin agrupar

El número de hijos en 25 familias es

$$1, 2, 4, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 0, 2, 2, \ 0, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 2.$$

La tabla de frecuencias asociada a esta muestra es

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0.08	2	0.08
1	6	0.24	8	0.32
2	14	0.56	22	0.88
3	2	0.08	24	0.96
4	1	0.04	25	1
$\sum$	25	1		

Tabla de frecuencias

Ejemplo de datos agrupados

Las estaturas (en cm) de 30 estudiantes es

179, 173, 181, 170, 158, 174, 172, 166, 194, 185, 162, 187, 198, 177, 178, 165, 154, 188, 166, 171, 175, 182, 167, 169, 172, 186, 172, 176, 168, 187.

La tabla de frecuencias asociada a esta muestra es

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$(150, 160]$	2	0.07	2	0.07
$(160, 170]$	8	0.27	10	0.34
$(170, 180]$	11	0.36	21	0.70
$(180, 190]$	7	0.23	28	0.93
$(190, 200]$	2	0.07	30	1
$\sum$	30	1		

Construcción de clases

Cada intervalo de agrupación de datos se denomina **clase** y el centro del intervalo se llama **marca de clase**.

A la hora de agrupar los datos en clases hay que tener en cuenta lo siguiente:

- El número de intervalos no debe ser muy grande ni muy pequeño. Una regla orientativa es tomar un número de intervalos próximo $\sqrt{n}$ o $\log_2(n)$.
- Los intervalos no deben solaparse y deben cubrir todo el rango de valores. Es indiferente si se abren por la izquierda y se cierran por la derecha o al revés.
- El valor más pequeño debe caer dentro del primer intervalo y el más grande dentro del último.

Tabla de frecuencias

Ejemplo con un atributo

Los grupos sanguíneos de 30 personas son

A, B, B, A, AB, 0, 0, A, B, B, A, A, A, A, AB, A, A, A, B, 0, B, B, B, A, A, A, 0, A, AB, 0.

La tabla de frecuencias asociada a esta muestra es

x_i	n_i	f_i
0	5	0.16
A	14	0.47
B	8	0.27
AB	3	0.10
$\sum$	30	1

¿Por qué en este caso no se construyen las columnas de frecuencias acumuladas?

2.2 Representaciones gráficas

Representaciones gráficas

Es habitual representar la distribución muestral de frecuencias de forma gráfica.

Dependiendo del tipo de variable y de si se han agrupado o no los datos, se utilizan distintos tipos de gráficos:

- Diagrama de barras
- Histograma
- Diagrama de líneas
- Digrama de sectores

Diagrama de barras

Un **diagrama de barras** consiste en un conjunto de barras, una para cada valor o categoría de la variabe, dibujadas en unos ejes cartesianos.

Habitualmente os valores o categorías de la variable se representan en el eje X, y las frecuencias en el eje Y. Para cada valor o categoría de la variabe se dibuja una barra de altura la correspondiente frecuencia. La anchura de la barra es indiferente pero debe haber una separación clara entre las barras.

Dependiendo de la frecuencia representada en el eje Y se tienen distintos tipos de diagramas de barras.

A veces se dibuja un polígono, conocido como **polígono de frecuencias**, uniendo los puntos más altos de cada barra con segmentos.

Diagrama de barras de frecuencias absolutas

Datos sin agrupar

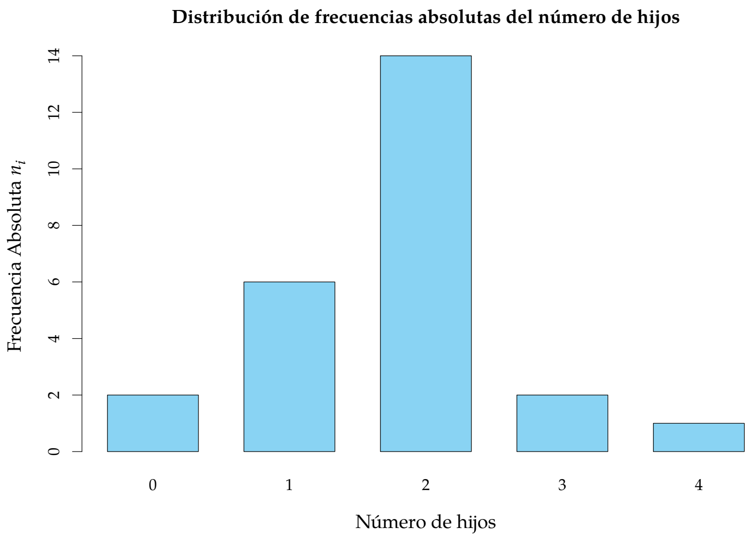


Diagrama de líneas o Polígono de frecuencias absolutas

Datos sin agrupar

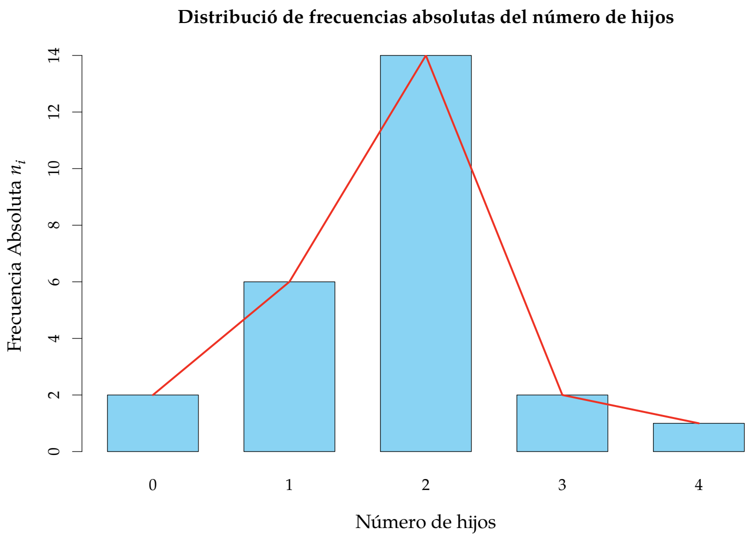


Diagrama de barras de frecuencias acumuladas

Datos sin agrupar

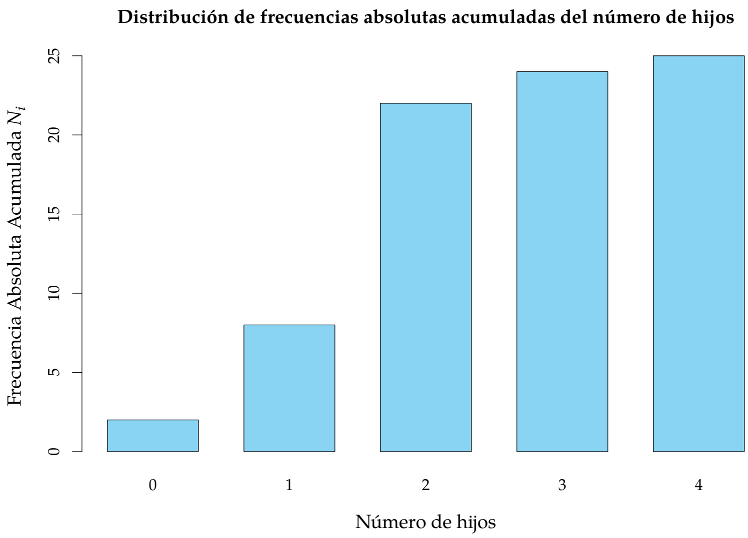
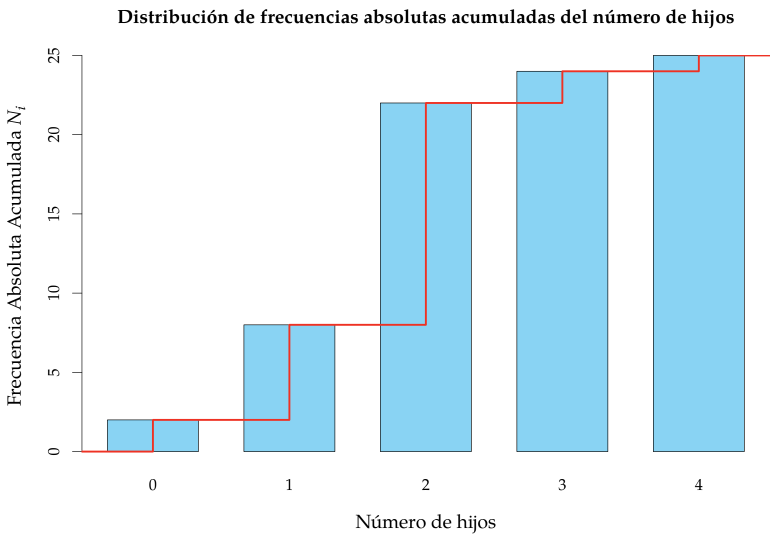


Diagrama de línea o polígono de frecuencias absolutas acumuladas

Datos sin agrupar



Histograma

Un **histograma** es similar a un diagrama de barras pero para datos agrupados.

Habitualmente las clases o intervalos de agrupación se representan en el eje X, y las frecuencias en el eje Y.

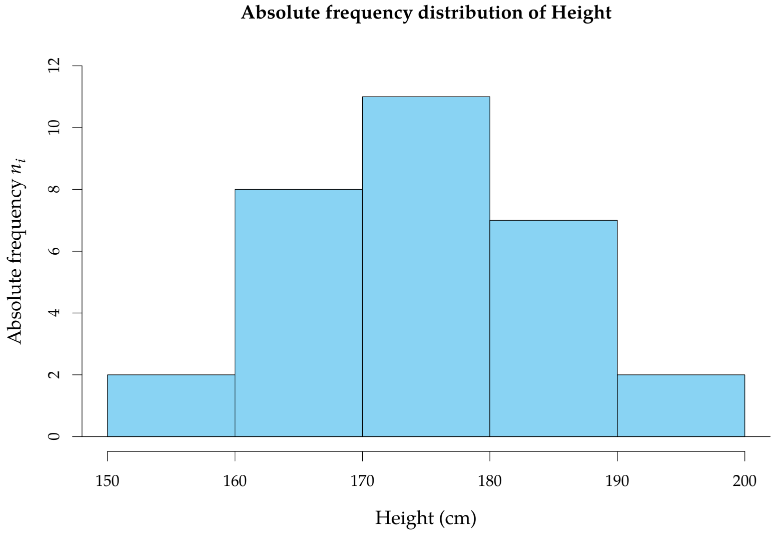
Para cada clase se dibuja una barra de altura la correspondiente frecuencia. A diferencia del diagrama de barras, la anchura del la barra coincide con la anchura de las clases y no hay separación entre dos barras consecutivas.

Dependiendo del tipo de frecuencia representada en el eje Y existen distintos tipos de histogramas.

A veces se dibuja un polígono, conocido como **polígono de frecuencias**, uniendo los puntos más altos de cada barra con segmentos.

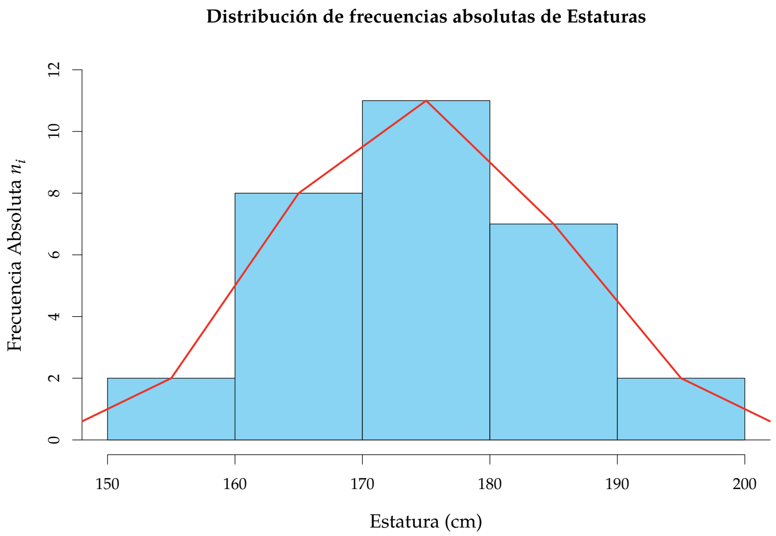
Histograma de frecuencias absolutas

Datos agrupados



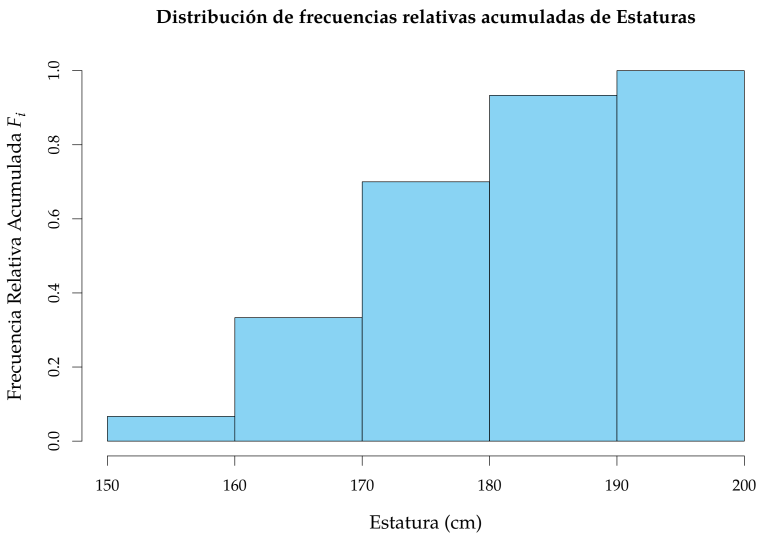
Polígono de frecuencias absolutas

Datos agrupados



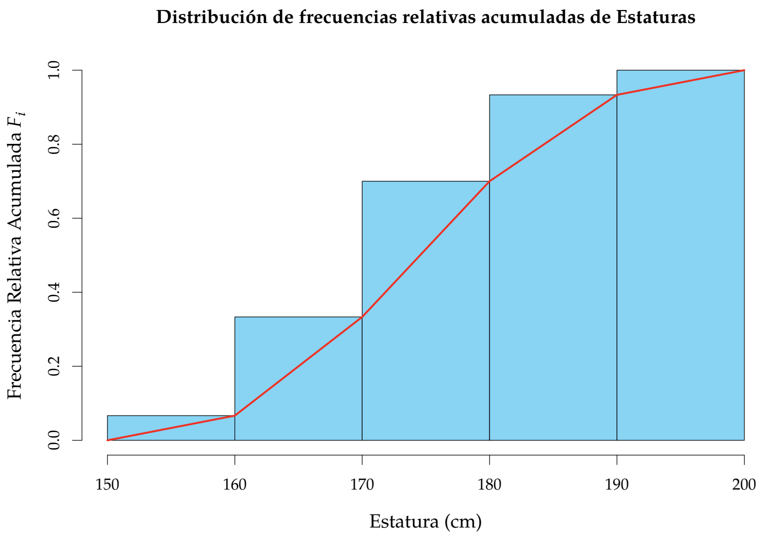
Histograma de frecuencias relativas acumuladas

Datos agrupados



Polígono de frecuencias relativas acumuladas

Datos agrupados



El polígono de frecuencias acumuladas (absolutas o relativas) se conoce como **ojiva**.

Observese que en la ojiva se unen con segmentos los vértices superiores derechos de cada barra, en lugar de los centros, ya que no se consigue acumalar la correspondiente frecuencia hasta el final del intervalo.

Diagrama de sectores

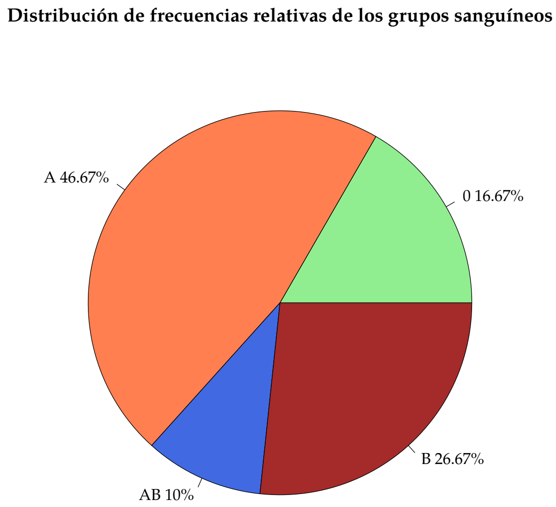
Un **diagrama de sectores** consiste en un círculo divido en porciones, uno por cada valor o categoría de la variable.

Cada porción se conoce como **sector** y su ángulo o área es proporcional a la correspondiente frecuencia del valor o categoría.

Los diagramas de sectores pueden representar frecuencias absolutas o relativas, pero no pueden representar frecuencias acumuladas, y se utilizan sobre todo con atributos nominales. Para atributos ordinales o variables cuantitativas es mejor utilizar diagramas de barras o histogramas, ya es más fácil percibir las diferencias en una dimensión (altura de las barras) que en dos dimensiones (áreas de los sectores).

Diagrama de sectores

Atributos



Datos atípicos

Uno de los principales problemas de las muestras son los **datos atípicos**, que son valores muy distintos de los demás valores en la muestra.

Es muy importante detectar los datos atípicos antes de realizar cualquier análisis de los datos, pues *suelen distorsionar los resultados*.

Aparecen siempre en los extremos de la distribución, y pueden detectarse fácilmente con un diagrama de caja y bigotes (como se verá después).

Tratamiento de los datos atípicos

Cuando trabajemos con muestras grandes, los datos atípicos tienen menor influencia y pueden dejarse en la muestra.

Cuando trabajemos con muestras pequeñas tenemos varias opciones:

- Eliminar el dato atípico si es un error.
- Sustituir el dato atípico por el mayor o menor valor de la distribución que no sea atípico, si no es un error pero que no concuerda con el modelo de distribución teórico de la población.
- Dejarl el dato atípico si no es un error y cambiar el modelo de distribución teórico para ajustarse a los datos atípicos.

2.3 Estadísticos muestrales

Estadísticos muestrales

La tabla de frecuencias sintetiza la información de la variable estudiada en la muestra, pero en muchas ocasiones es insuficiente para describir determinados aspectos de la distribución.

Para describir adecuadamente el comportamiento de la variable se calculan unas medidas llamadas **estadísticos muestrales** que son indicadores de distintos aspectos de la distribución muestral.

Los estadísticos se clasifican en tres grupos:

Estadísticos de Posición: Miden en torno a qué valores se agrupan los datos y cómo se reparten en la distribución.

Estadísticos de Dispersión: Miden la heterogeneidad de los datos.

Estadísticos de Forma: Miden aspectos de la forma que tiene la distribución de los datos, como la simetría o el apuntamiento.

2.4 Estadísticos de posición

Estadísticos de posición

Pueden ser de dos tipos:

Estadísticos de Tendencia Central: Determinan valores alrededor de los cuales se agrupa la distribución. Estas medidas suelen utilizarse como valores representativos de la muestra. Las más importantes son:

- Media aritmética
- Mediana
- Moda

Otros estadísticos de Posición: Dividen la distribución en partes con el mismo número de observaciones. Las más importantes son:

- Cuantiles: Cuartiles, Deciles, Percentiles.

Media aritmética

Definición 9 (Media aritmética muestral $\bar{x}$)**.** La *media aritmética muestral* de una variable X es la suma de los valores observados en la muestra dividida por el tamaño muestral

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

A partir de la tabla de frecuencias puede calcularse como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \sum x_i f_i$$

En la mayoría de los casos, la media aritmética es la medida que mejor representa a la muestra.

¡Ojo! No puede calcularse para atributos.

Cálculo de la media aritmética

Ejemplo con datos no agrupados

En el ejemplo anterior del número de hijos tenemos

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+2+2+2+3+2+1+1+0+2+2}{25}+$$
$$+\frac{0+2+2+1+2+2+3+1+2+2+1+2}{25} = \frac{44}{25} = 1.76 \text{ hijos.}$$

o bien, desde la tabla de frecuencias

x_i	n_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i f_i$
0	2	0.08	0	0
1	6	0.24	6	0.24
2	14	0.56	28	1.12
3	2	0.08	6	0.24
4	1	0.04	4	0.16
$\sum$	25	1	44	1.76

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{44}{25} = 1.76 \qquad \bar{x} = \sum x_i f_i = 1.76.$$

Es decir, el número de hijos que mejor representa a la muestra es 1.76 hijos.

Cálculo de la media aritmética

Ejemplo con datos agrupados

En el ejemplo anterior de las estaturas se tiene

$$\bar{x} = \frac{179+173+\cdots+187}{30} = 175.07 \text{ cm.}$$

o bien, desde la tabla de frecuencias utilizando las marcas de clase:

X	x_i	n_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i f_i$
(150, 160]	155	2	0.07	310	10.33
(160, 170]	165	8	0.27	1320	44.00
(170, 180]	175	11	0.36	1925	64.17
(180, 190]	185	7	0.23	1295	43.17
(190, 200]	195	2	0.07	390	13
$\sum$		30	1	5240	174.67

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{5240}{30} = 174.67 \qquad \bar{x} = \sum x_i f_i = 174.67.$$

Al agrupar datos el cálculo de estadísticos desde la tabla puede diferir ligeramente del valor real obtenido directamente desde la muestra, ya que no se trabaja con los datos reales sino con los representantes de las clases.

Media ponderada

En algunos casos, los valores de la muestra no tienen la misma importancia. En este caso la media aritmética no es una buena medida de representatividad ya que en ella todos los valores de la muestra tienen el mismo peso. En este caso es mucho mejor utilizar otra medida de tendencia central conocida como media ponderada.

Definición 10 (Media ponderada muestral $\bar{x}_p$)**.** Dada una muestra de n valores en la que cada valor x_i tiene asociado un peso p_i, la *media ponderada muestral* de la variable X es la suma de los productos de cada valor observado en la muestra por su peso, dividida por la suma de todos los pesos

$$\bar{x}_p = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$$

A partir de la tabla de frecuencias puede calcularse como:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum x_i p_i n_i}{\sum p_i}$$

Cálculo de la media ponderada

Supongase que un alumno quiere calcular la nota media de las asignaturas de un curso.

Asignatura	Créditos	Nota
Matemáticas	6	5
Lengua	4	3
Química	8	6

La media aritmética vale

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5+3+6}{3} = 4.67 \text{ puntos},$$

Sin embargo, esta nota no representa bien el rendimiento académico del alumno ya que en ella han tenido igual peso todas las asignaturas, cuando la química debería tener más peso que la lengua al tener más créditos.

Es más lógico calcular la media ponderada, tomando como pesos los créditos de cada asignatura:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} = \frac{5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 8}{6+4+8} = \frac{90}{18} = 5 \text{ puntos}.$$

Mediana

Definición 11 (Mediana muestral Me)**.** La *mediana muestral* de una variable X es el valor de la variable que, una vez ordenados los valores de la muestra de menor a mayor, deja el mismo número de valores por debajo y por encima de él.

La mediana cumple $N_{Me} = n/2$ y $F_{Me} = 0.5$.

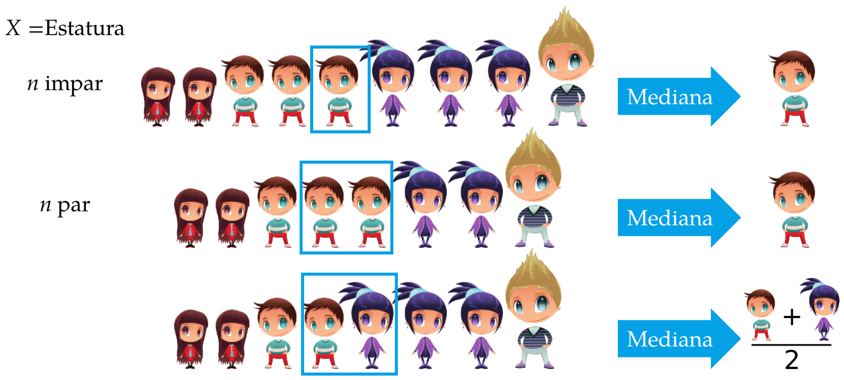
El cálculo de la mediana se realiza de forma distinta según se hayan agrupado los datos o no.

¡Ojo! No puede calcularse para atributos nominales.

Cálculo de la mediana con datos no agrupados

Con datos no agrupados pueden darse varios casos:

- Tamaño muestral impar: La mediana es el valor que ocupa la posición $\frac{n+1}{2}$.
- Tamaño muestral par: La mediana es la media de los valores que ocupan las posiciones $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$.



Cálculo de la mediana

Ejemplo con datos no agrupados

En el ejemplo anterior del número de hijos, el tamaño muestral es 25, de manera que al ser impar se deben ordenar los datos de menor a mayor y buscar el que ocupa la posición $\frac{25+1}{2} = 13$.

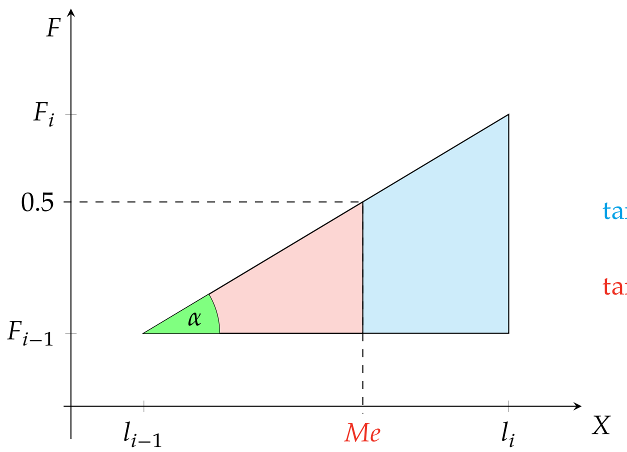
$$0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \boxed{2}, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4$$

y la mediana es 2 hijos.

Si se trabaja con la tabla de frecuencias, se debe buscar el primer valor cuya frecuencia absoluta acumulada iguala o supera a 13, que es la posición que le corresponde a la mediana, o bien el primer valor cuya frecuencia relativa acumulada iguala o supera a 0.5:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0.08	2	0.08
1	6	0.24	8	0.32
$\boxed{2}$	14	0.56	22	0.88
3	2	0.08	24	0.96
4	1	0.04	25	1
$\sum$	25	1		

Cálculo de la mediana con datos agrupados



$$\tan(\alpha) = \frac{F_i - F_{i-1}}{l_i - l_{i-1}}$$

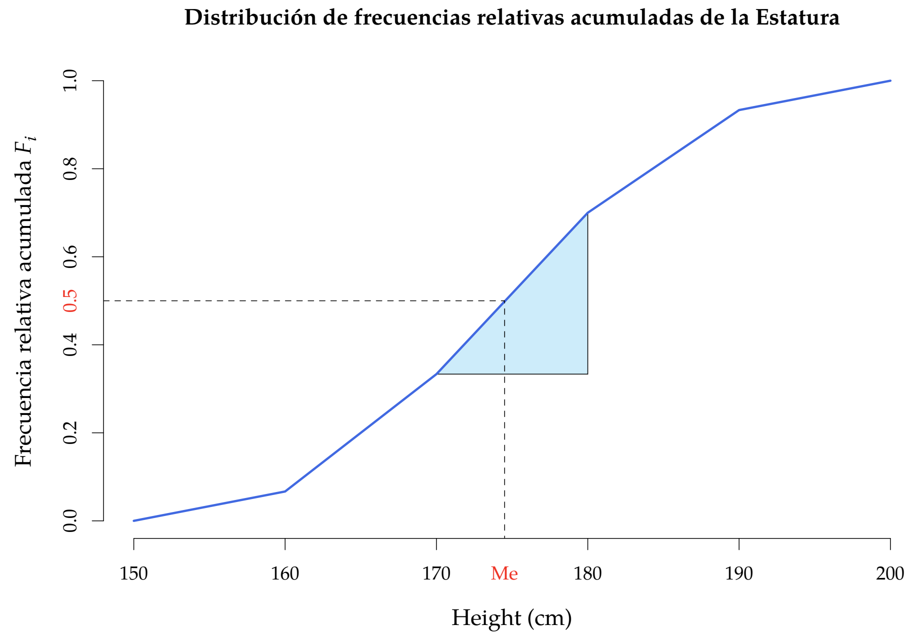
$$\tan(\alpha) = \frac{0.5 - F_{i-1}}{Me - l_{i-1}}$$

$$Me = l_i + \frac{0.5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}(l_i - l_{i-1}) = l_i + \frac{0.5 - F_{i-1}}{f_i}a_i$$

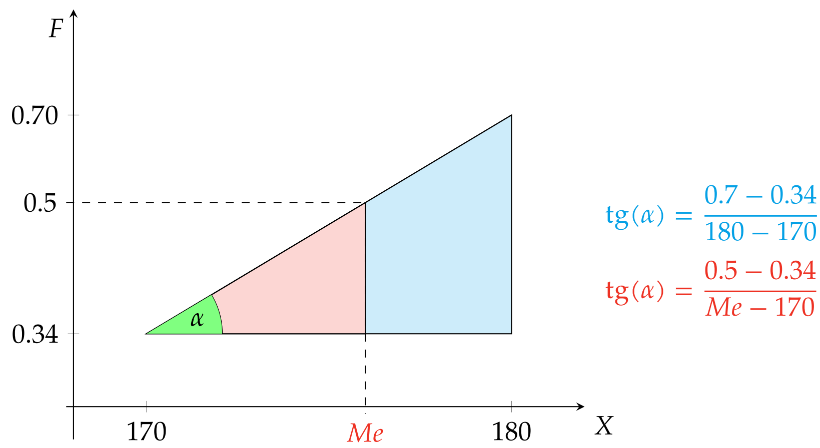
Cálculo de la mediana

Ejemplo con datos agrupados

En el ejemplo de las estaturas $n/2 = 30/2 = 15$. Si miramos en el polígono de frecuencias acumuladas comprobamos que la mediana caerá en el intervalo $(170, 180]$.



Interpolación en el polígono de frecuencias absolutas acumuladas



$$Me = 170 + \frac{0.5 - 0.34}{0.7 - 0.34}(180 - 170) = 170 + \frac{0.16}{0.36}10 = 174.54 \text{ cm}$$

Moda

Definición 12 (Moda muestral Mo)**.** La *moda muestral* de una variable X es el valor de la variable más frecuente en la muestra.

Con datos agrupados se toma como clase modal la clase con mayor frecuencia en la muestra.

En ocasiones puede haber más de una moda.

Cálculo de la moda

En el ejemplo del número de hijos puede verse fácilmente en la tabla de frecuencias que la moda es $Mo = 2$ hijos.

x_i	n_i
0	2
1	6
$\boxed{2}$	14
3	2
4	1

Y en el ejemplo de las estaturas también puede verse en la tabla de frecuencias que la clase modal es $Mo = (170, 180]$.

x_i	n_i
$(150, 160]$	2
$(160, 170]$	8
$\boxed{(170,180]}$	11
$(180, 190]$	7
$(190, 200]$	2

¿Qué estadístico de tendencia central usar?

En general, siempre que puedan calcularse conviene tomarlas en el siguiente orden:

1. Media. La media utiliza más información que el resto ya que para calcularla se tiene en cuenta la magnitud de los datos.
2. Mediana. La mediana utiliza menos información que la media, pero más que la moda, ya que para calcularla se tiene en cuenta el orden de los datos.
3. Moda. La moda es la que menos información utiliza ya que para calcularla sólo se tienen en cuenta las frecuencias absolutas.

Pero, ¡ojo! la media también es muy sensible a los datos atípicos, así que, tampoco debemos perder de vista la mediana.

Por ejemplo, consideremos la siguiente muestra del número de hijos de 7 matrimonios:

$$0, 0, 1, 1, 2, 2, 15$$

$$\bar{x} = 3 \text{ hijos} \quad \text{y} \quad Me = 1 \text{ hijos}$$

¿Qué representante de la muestra tomarías?

Cuantiles

Son valores de la variable que dividen la distribución, supuesta ordenada de menor a mayor, en partes que contienen el mismo número de datos.

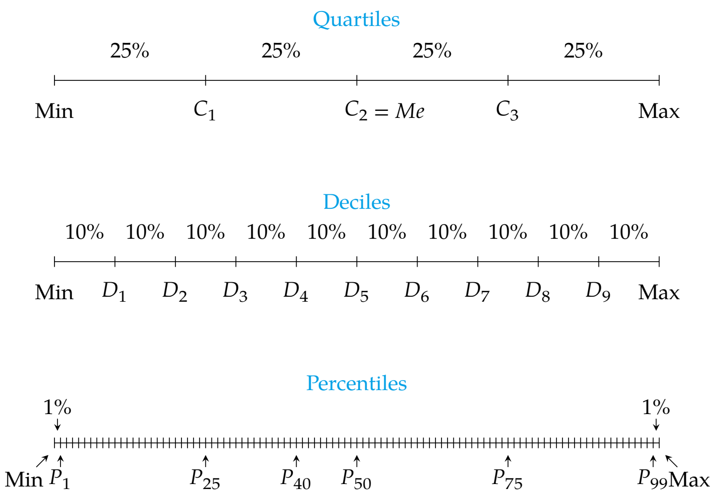
Los más utilizados son:

Cuartiles: Dividen la distribución en 4 partes iguales. Hay tres cuartiles: C_1 (25% acumulado) , C_2 (50% acumulado), C_3 (75% acumulado).

Deciles: Dividen la distribución en 10 partes iguales. Hay 9 deciles: D_1 (10% acumulado) ,..., D_9 (90% acumulado).

Percentiles: Dividen la distribución en 100 partes iguales. Hay 99 percentiles: P_1 (1% acumulado),..., P_{99} (99% acumulado).

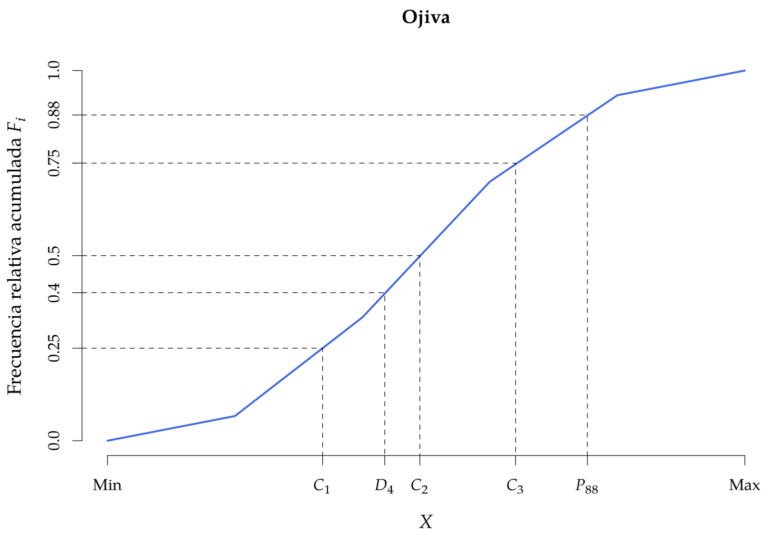
Cuantiles



Observese que hay una correspondencia entre los cuartiles, decilies y percentiles. Por ejemplo, el primer cuartil coincide con el percentil 25, y el cuarto decil coincide con el percentil 4o.

Cálculo de los cuantiles

Los cuantiles se calculan de forma similar a la mediana. La única diferencia es la frecuencia relativa acumulada que le corresponde a cada cuantil.



Cálculo de los cuantiles

Ejemplo con datos no agrupados

En el ejemplo anterior del número de hijos se tenían la siguientes frecuencias relativas acumuladas

x_i	F_i
0	0.08
1	0.32
2	0.88
3	0.96
4	1

$$\begin{aligned} F_{C_1} &= 0.25 \Rightarrow C_1 = 1 \text{ hijos,} \\ F_{C_2} &= 0.5 \Rightarrow C_2 = 2 \text{ hijos,} \\ F_{C_3} &= 0.75 \Rightarrow C_3 = 2 \text{ hijos,} \\ F_{D_3} &= 0.3 \Rightarrow D_3 = 1 \text{ hijos,} \\ F_{P_{92}} &= 0.92 \Rightarrow P_{92} = 3 \text{ hijos.} \end{aligned}$$

2.5 Estadísticos de dispersión

Estadísticos de dispersión

Recogen información respecto a la heterogeneidad de la variable y a la concentración de sus valores en torno a algún valor central.

Para las variables cuantitativas, las más empleadas son:

- Recorrido.
- Rango Intercuartílico.
- Varianza.

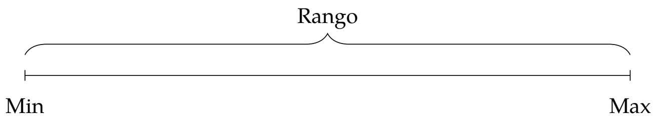
- Desviación Típica.
- Coeficiente de Variación.

Recorrido

Definición 13 (Recorrido muestral *Re*)**.** El *recorrido muestral* de una variable X se define como la diferencia entre el máximo y el mínimo de los valores en la muestra.

$$Re = \max_{x_i} - \min_{x_i}$$

El recorrido da una idea de la máxima variación que hay entre los datos muestrales. No obstante, es muy sensible a datos atípicos ya que suelen aparecer justo en los extremos de la distribución, por lo que no se suele utilizar mucho.

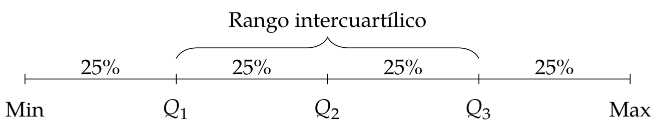


Rango intercuartílico

Para evitar el problema de los datos atípicos en el recorrido, se puede utilizar el primer y tercer cuartil en lugar del mínimo y el máximo.

Definición 14 (Rango intercuartílico muestral *RI*)**.** El *rango intercuartílico muestral* de una variable X se define como la diferencia entre el tercer y el primer cuartil de la muestra.

$$RI = C_3 - C_1$$



El rango intercuartílico mide la variación del 50% de los datos centrales.

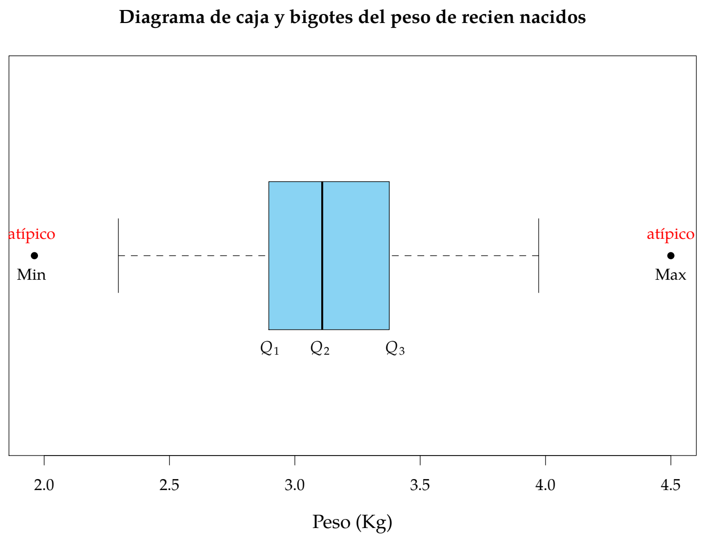
Diagrama de caja y bigotes

La dispersión de una variable suele representarse gráficamente mediante un **diagrama de caja y bigotes**, que consiste en una caja sobre un eje X donde el borde inferior de la caja es el primer cuartil, y el borde superior el tercer cuartil, y por tanto, la anchura de la caja es el rango intercuartílico. En ocasiones también se representa el segundo cuartil con una línea que divide la caja.

También se utiliza para detectar los valores atípicos mediante unos segmentos (bigotes) que salen de los extremos de la caja y que marcan el intervalo de normalidad de los datos.

Diagrama de caja y bigotes

Ejemplo con pesos de recién nacidos



Construcción del diagrama de caja y bigotes

1. Calcular los cuartiles.
2. Dibujar una caja de manera que el extremo inferior caiga sobre el primer cuartil y el extremo superior sobre el tercer cuartil.
3. Dividir la caja con una línea que caiga sobre el segundo cuartil.
4. Para los bigotes inicialmente se determina la posición de los puntos denominados *vallas* v_1 y v_2 restando y sumando respectivamente a primer y tercer cuartil 1.5 veces el rango intercuartílico RI:

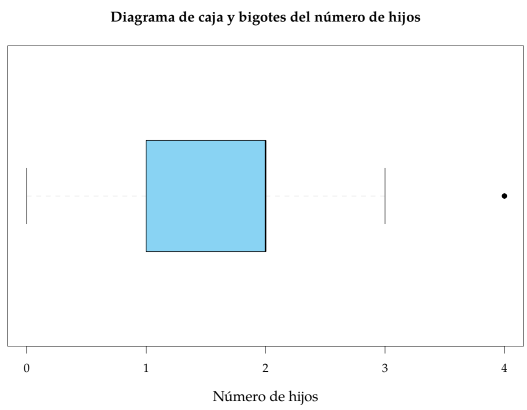
   $$v_1 = C_1 - 1.5RI$$
   $$v_2 = C_3 + 1.5RI$$

   A partir de las vallas se buscan los valores b_1, que es el mínimo valor de la muestra mayor o igual que v_1, y b_2, que es máximo valor de la muestra menor o igual que v_2. Para el bigote inferior se dibuja un segmento desde el borde inferior de la caja hasta b_1 y para el superior se dibuja un segmento desde el borde superior de la caja hasta b_2.
5. Finalmente, si en la muestra hay algún dato por debajo de v_1 o por encima de v_2 se dibuja un punto sobre dicho valor.

Construcción del diagrama de caja y bigotes

Ejemplo del número de hijos

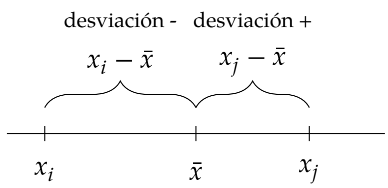
1. Calcular los cuartiles: $C_1 = 1$ hijos y $C_3 = 2$ hijos.
2. Dibujar la caja.
3. Calcular las vallas: $v_1 = 1 - 1.5 * 1 = -0.5$ y $v_2 = 2 + 1.5 * 1 = 3.5$.
4. Dibujar los bigotes: $b_1 = 0$ hijos y $b_1 = 3$ hijos.
5. Dibujar los datos atípicos: 4 hijos.



Desviaciones respecto de la media

Otra forma de medir la variabilidad de una variable es estudiar la concentración de los valores en torno a algún estadístico de tendencia central como por ejemplo la media.

Para ello se suele medir la distancia de cada valor a la media. A ese valor se le llama **desviación respecto de la media.**



Si las desviaciones son grandes la media no será tan representativa como cuando la desviaciones sean pequeñas.

Varianza y desviación típica

Definición 15 (Varianza s^2)**.** La *varianza muestral* de una variable X se define como el promedio del cuadrado de las desviaciones de los valores de la muestra respecto de la media muestral.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \sum (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

También puede calcularse de manera más sencilla mediante la fórmula

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \sum x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

La varianza tiene las unidades de la variable al cuadrado, por lo que para facilitar su interpretación se suele utilizar su raíz cuadrada:

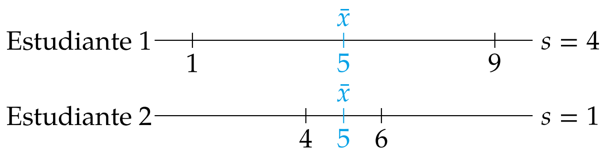
Definición 16 (Desviación típica s)**.** La *desviación típica muestral* de una variable X se define como la raíz cuadrada positiva de su varianza muestral.

$$s = +\sqrt{s^2}$$

Interpretación de la varianza y la desviación típica

Tanto la varianza como la desviación típica sirven para cuantificar la dispersión de los datos en torno a la media. Cuando la varianza o la desviación típica son pequeñas, los datos de la muestra están concentrados en torno a la media, y la media es una buena medida de representatividad. Por contra, cuando la varianza o la desviación típica son grandes, los datos de la muestra están alejados de la media, y la media ya no representa tan bien.

Desviación típica pequeña $\Rightarrow$ *Media representativa*
Desviación típica grande $\Rightarrow$ *Media no representativa*



¿En qué caso es más representativa la media?

Cálculo de la varianza y la desviación típica

Ejemplo con datos no agrupados

Para el número de hijos se puede calcular la varianza a partir de la tabla de frecuencias añadiendo una columna con los cuadrados de los valores:

x_i	n_i	$x_i^2 n_i$
0	2	0
1	6	6
2	14	56
3	2	18
4	1	16
$\sum$	25	96

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{96}{25} - 1.76^2 = 0.7424 \text{ hijos}^2.$$

Y la desviación típica es $s = \sqrt{0.7424} = 0.8616$ hijos.

Comparado este valor con el recorrido, que va de 0 a 4 hijos se observa que no es demasiado grande por lo que se puede concluir que no hay mucha dispersión y en consecuencia la media de 1.76 hijos representa bien a los matrimonios de la muestra.

Cálculo de la varianza y la desviación típica

Ejemplo con datos agrupados

En el ejemplo de las estaturas, al ser datos agrupados, el cálculo se realiza igual que antes pero tomando como valores de la variable las marcas de clase.

X	x_i	n_i	$x_i^2 n_i$
$(150, 160]$	155	2	48050
$(160, 170]$	165	8	217800
$(170, 180]$	175	11	336875
$(180, 190]$	185	7	239575
$(190, 200]$	195	2	76050
$\sum$		30	918350

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{918350}{30} - 174.67^2 = 102.06 \text{ cm}^2.$$

Y la desviación típica es $s = \sqrt{102.06} = 10.1$ cm.

Este valor es bastante pequeño, comparado con el recorrido de la variable, que va de 150 a 200 cm, por lo que la variable tiene poca dispersión y en consecuencia su media es muy representativa.

Coeficiente de variación

Tanto la varianza como la desviación típica tienen unidades y eso dificulta a veces su interpretación, especialmente cuando se compara la dispersión de variables con diferentes unidades.

Por este motivo, es también común utilizar la siguiente medida de dispersión que no tiene unidades.

Definición 17 (Coeficiente de variación muestral cv)**.** El *coeficiente de variación muestral* de una variable X se define como el cociente entre su desviación típica muestral y el valor absoluto de su media muestral.

$$cv = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

El coeficiente de variación muestral mide la dispersión relativa de los valores de la muestra en torno a la media muestral.

Como no tiene unidades, es muy sencillo de interpretar: Cuanto mayor sea, mayor será la dispersión y menos representativa será la media.

El coeficiente de variación es muy útil para comparar la dispersión de distribuciones de variables diferentes, incluso si las variables tienen unidades diferentes.

¡Ojo! No tiene sentido cuando la media muestral vale 0 o valores próximos.

Coeficiente de variación

Ejemplo

En el caso del número de hijos, como $\bar{x} = 1.76$ hijos y $s = 0.8616$ hijos, se tiene que el coefiente de variación vale

$$cv = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{0.8616}{|1.76|} = 0.49.$$

En el caso de las estaturas, como $\bar{x} = 174.67$ cm y $s = 10.1$ cm, se tiene que el coeficiente de variación vale

$$cv = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{10.1}{|174.67|} = 0.06.$$

Esto significa que la dispersión relativa en la muestra de estaturas es mucho menor que en la del número de hijos, por lo que la media de las estaturas será más representativa que la media del número de hijos.

2.6 Estadísticos de forma

sólo estaré un ratito en mi despacho de 10 a 11 porque después tengo cita médica.

Estadísticos de forma

Son medidas que describen la forma de la distribución.

Los aspectos más relevantes son:

Simetría: Mide la simetría de la distribución de frecuencias en torno a la media. El estadístico más utilizado es el *Coeficiente de Asimetría de Fisher*.

Apuntamiento: Mide el apuntamiento o el grado de concentración de valores en torno a la media de la distribución de frecuencias. El estadístico más utilizado es el *Coeficiente de Apuntamiento o Curtosis*.

Coeficiente de asimetría

Definición 18 (Coeficiente de asimetría muestral g_1)**.** El *coeficiente de asimetría muestral* de una variable X es el promedio de las desviaciones de los valores de la muestra respecto de la media muestral, elevadas al cubo, dividido por la desviación típica al cubo.

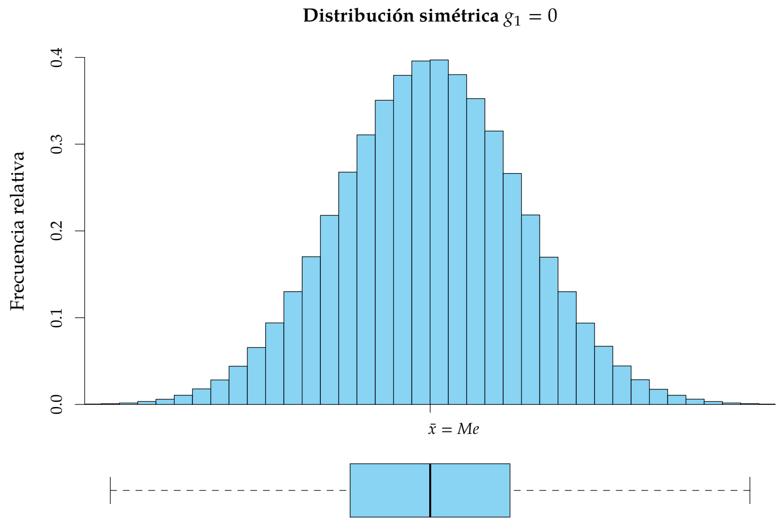
$$g_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3 n_i/n}{s^3} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3 f_i}{s^3}$$

Mide el grado de simetría de los valores de la muestra con respecto a la media muestra, es decir, cuantos valores de la muestra están por encima o por debajo de la media y cómo de alejados de esta.

- $g_1 = 0$ indica que hay el mismo número de valores por encima y por debajo de la media e igualmente alejados de ella (simétrica).
- $g_1 < 0$ indica que la mayoría de los valores son mayores que la media, pero los valores menores están más alejados de ella (asimétrica a la izquierda).
- $g_1 > 0$ indica que la mayoría de los valores son menores que la media, pero los valores mayores están más alejados de ella (asimétrica a la derecha).

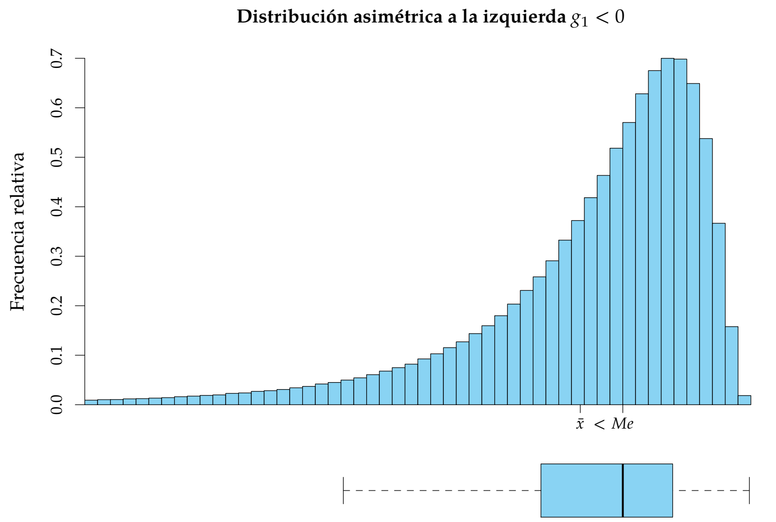
Coeficiente de asimetría

Ejemplo de distribución simétrica



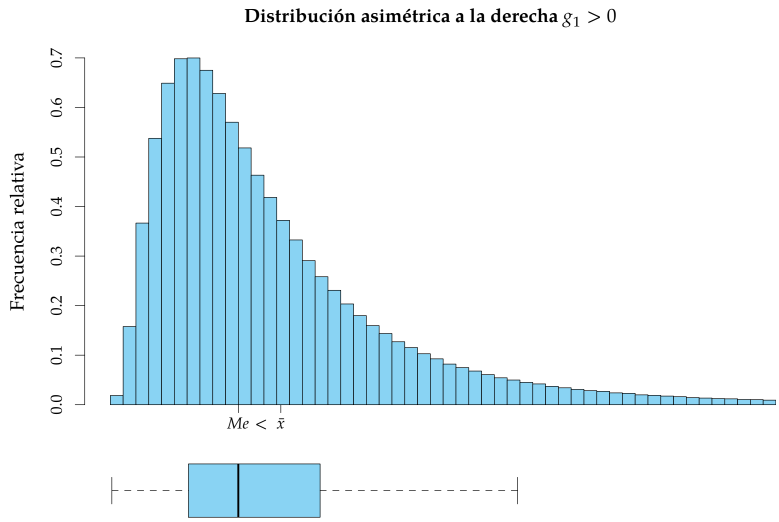
Coeficiente de asimetría

Ejemplo de distribución asimétrica hacia la izquierda



Coeficiente de asimetría

Ejemplo de distribución asimétrica hacia la derecha



Cálculo del coeficiente de asimetría

Ejemplo con datos agrupados

Siguiendo con el ejemplo de las estaturas, podemos calcular el coeficiente de asimetría a partir de la tabla de frecuencias añadiendo una nueva columna con los cubos de las desviaciones a la media $\bar{x} = 174.67$ cm:

X	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^3 n_i$
$(150, 160]$	155	2	-19.67	-15221.00
$(160, 170]$	165	8	-9.67	-7233.85
$(170, 180]$	175	11	0.33	0.40
$(180, 190]$	185	7	10.33	7716.12
$(190, 200]$	195	2	20.33	16805.14
$\sum$		30		2066.81

$$g_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3 n_i/n}{s^3} = \frac{2066.81/30}{10.1^3} = 0.07.$$

Al estar tan próximo a 0, este valor indica que la distribución es prácticamente simétrica con respecto a la media.

Coeficiente de apuntamiento o curtosis

Definición 19 (Coeficiente de apuntamiento muestral g_2)**.** El *coeficiente de apuntamiento muestral* de una variable X es el promedio de las desviaciones de los valores de la muestra respecto de la media muestral, elevadas a la cuarta, dividido por la desviación típica a la cuarta y al resultado se le resta 3.

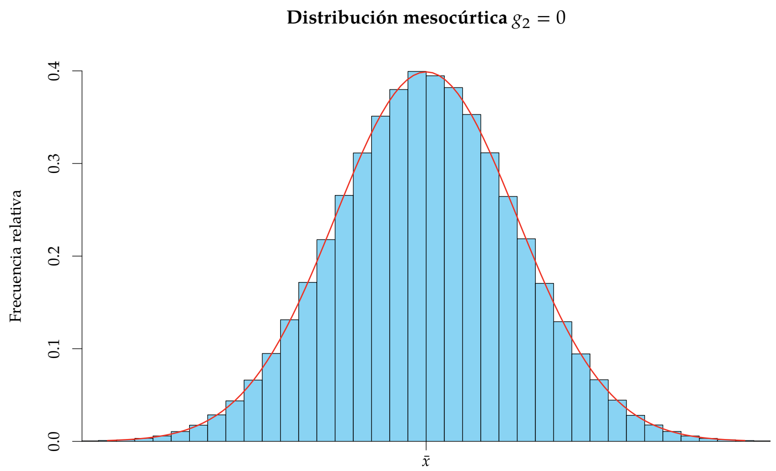
$$g_2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^4 n_i/n}{s^4} - 3 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^4 f_i}{s^4} - 3$$

El coeficiente de apuntamiento mide la concentración de valores en torno a la media y la longitud de las colas de la distribución. Se toma como referencia la distribución normal

- $g_2 = 0$ indica que la distribución tienen un apuntamiento normal (*mesocúrtica*).
- $g_2 < 0$ indica que la distribución tiene menos apuntamiento de lo normal (*platicúrtica*).
- $g_2 > 0$ indica que la distribución tiene más apuntamiento de lo normal (*leptocúrtica*).

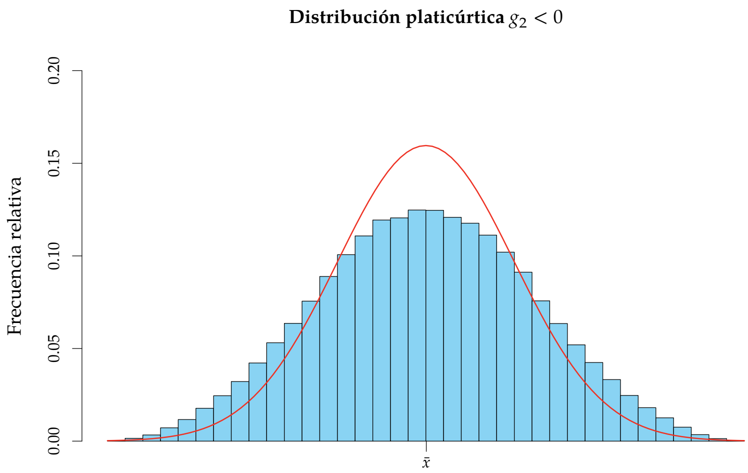
Coeficiente de apuntamiento o curtosis

Ejemplo de distribución mesocúrtica



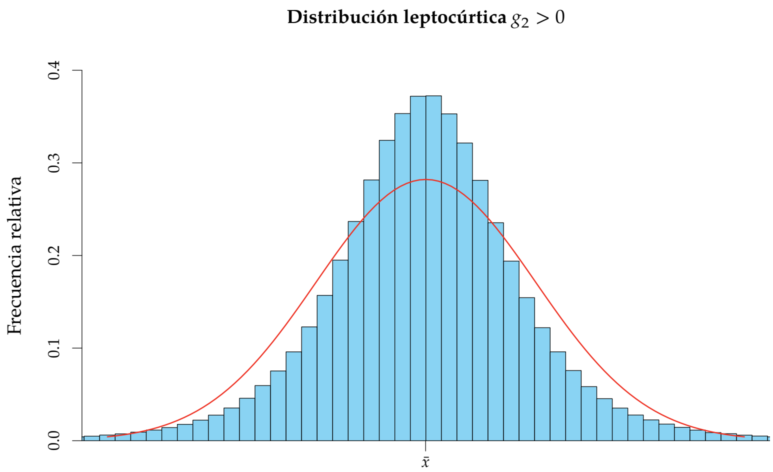
Coeficiente de apuntamiento o curtosis

Ejemplo de distribución platicúrtica



Coeficiente de apuntamiento o curtosis

Ejemplo de distribución leptocúrtica



Cálculo del coeficiente de apuntamiento

Ejemplo con datos agrupados

De nuevo para el ejemplo de las estaturas podemos calcular el coeficiente de asimetría a partir de la tabla de frecuencias añadiendo una nueva columna con las desviaciones a la media $\bar{x} = 174.67$ cm elevadas a la cuarta:

X	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^4 n_i$
$(150, 160]$	155	2	-19.67	299396.99
$(160, 170]$	165	8	-9.67	69951.31
$(170, 180]$	175	11	0.33	0.13
$(180, 190]$	185	7	10.33	79707.53
$(190, 200]$	195	2	20.33	341648.49
$\sum$		30		790704.45

$$g_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 n_i / n}{s^4} - 3 = \frac{790704.45/30}{10.1^4} - 3 = -0.47.$$

Como se trata de un valor negativo, aunque pequeño, podemos decir que la distribución es ligeramente platicúrtica.

Interpretación de los coeficientes de asimetría y apuntamiento

Como se verá más adelante en la parte de inferencia, muchas de las pruebas estadísticas solo pueden aplicarse a poblaciones normales.

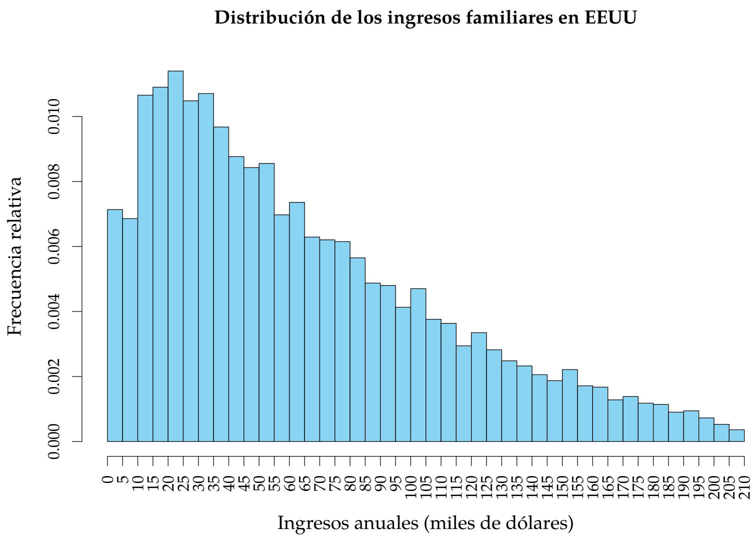
Las poblaciones normales se caracterizan por ser simétricas y mesocúrticas, de manera que, tanto el coeficiente de asimetría como el de apuntamiento pueden utilizarse para contrastar si los datos de la muestra provienen de una población normal.

En general, se suele rechazar la hipótesis de normalidad de la población cuando g_1 o g_2 estén fuera del intervalo $[-2, 2]$.

En tal caso, lo habitual es aplicar alguna transformación a la variable para corregir la anormalidad.

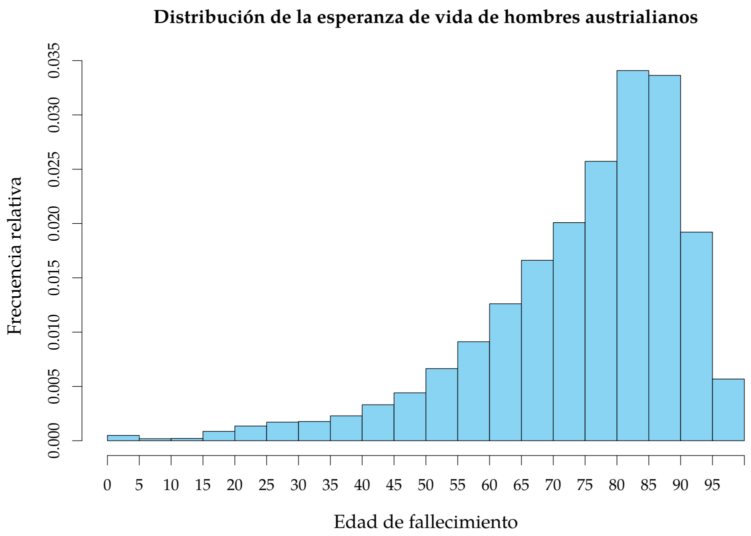
Distribución asimétrica a la derecha no normal

Ingresos por familia



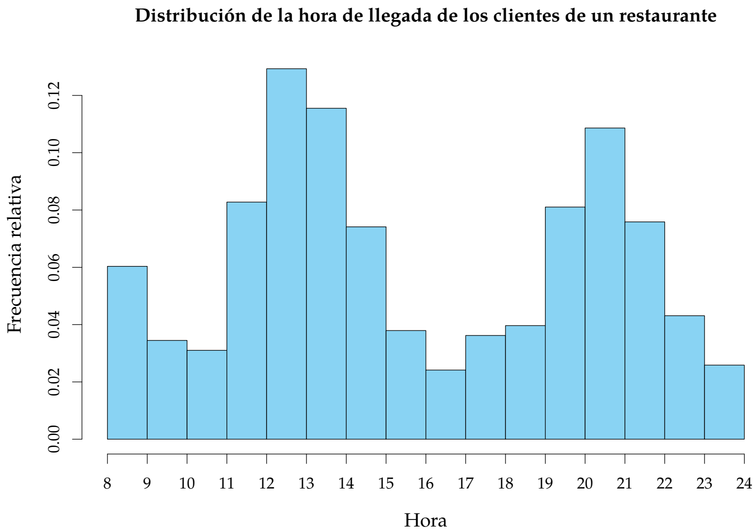
Distribución asimétrica a la izquierda no normal

Edad de fallecimiento



Distribución bimodal no normal

Hora de llegada de los clientes de un restaurante



2.7 Transformaciones de variables

Transformaciones de variables

En muchas ocasiones se suelen transformar los datos brutos para trabajar con unas unidades más cómodas, o bien para corregir alguna anormalidad de la distribución.

Por ejemplo, si estamos trabajando con estaturas medidas en metros y tenemos los siguientes valores:

$$1.75\text{m}, 1.65\text{m}, 1.80\text{m},$$

podemos evitar los decimales multiplicando por 100, es decir, pasando de metros a centímetros:

$$175\text{cm}, 165\text{cm}, 180\text{cm},$$

Y si queremos reducir la magnitud de los datos podemos restarles a todos el menor de ellos, en este caso, 165cm:

$$10\text{cm}, 0\text{cm}, 15\text{cm},$$

Está claro que este conjunto de datos es mucho más sencillo que el original. En el fondo lo que se ha hecho es aplicar a los datos la transformación:

$$Y = 100X - 165$$

Transformaciones lineales

Una de las transformaciones más habituales es la *transformación lineal*:

$$Y = a + bX.$$

Se puede comprobar fácilmente que la media y la desviación típica de la variable resultante cumplen:

$$\bar{y} = a + b\bar{x},$$
$$s_y = |b| s_x$$

Además, el coeficiente de curtosis no se altera y el de asimetría sólo cambia de signo si b es negativo.

Transformación de tipificación y puntuaciones típicas

Una de las transformaciones lineales más habituales es la *tipificación*:

Definición 20 (Variable tipificada)**.** La *variable tipificada* de una variable estadística X es la variable que resulta de restarle su media y dividir por su desviación típica.

$$Z = \frac{X - \bar{x}}{s_x}$$

Para cada valor x_i de la muestra, la *puntuación típica* es el valor que resulta de aplicarle la transformación de tipicación

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}.$$

La puntuación típica es el número de desviaciones típicas que un valor está por encima o por debajo de la media, y es útil para evitar la dependencia de una variable respecto de las unidades de medida empleadas.

Los valores tipificados se conocen como **puntuaciones típicas** y miden el número de desviaciones típicas que dista de la media cada observación, lo cual es útil para comparar variables con distintas unidades.

Otra propiedad de la variable tipificada es que tiene media 0 y desviación típica 1:

$$\bar{z} = 0 \qquad s_z = 1$$

Transformación de tipificación y puntuaciones típicas

Ejemplo

Las notas de 5 alumnos en dos asignaturas X e Y son:

Alumno:	1	2	3	4	5		
X:	2	5	4	8	6	$\bar{x} = 5$	$s_x = 2$
Y:	1	9	8	5	2	$\bar{y} = 5$	$s_y = 3.16$

¿Ha tenido el mismo rendimiento el cuarto alumno en la asignatura X que el tercero en la asignatura Y?

Podría parecer que ambos alumnos han tenido el mismo rendimiento puesto que tienen la misma nota, pero si queremos ver el rendimiento relativo al resto del grupo, tendríamos que tener en cuenta la dispersión de cada muestra y medir sus puntuaciones típicas:

X :	−1.5	0	−0.5	1.5	0.5
Y :	−1.26	1.26	0.95	0	−0.95

Es decir, el alumno que tiene un 8 en X está 1.5 veces la desviación típica por encima de la media de su grupo, mientras que el alumno que tiene un 8 en Y sólo está 0.95 desviaciones típicas por encima de su media. Así pues, el primer alumno tuvo un rendimiento superior al segundo.

Transformación de tipificación y puntuaciones típicas

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo anterior

¿Cuál es el mejor alumno?

Si simplemente se suman las puntuaciones de cada asignatura se tiene:

Alumno:	1	2	3	4	5
X :	2	5	4	8	6
Y :	1	9	8	5	2
$\sum$	3	14	12	13	8

El mejor alumno sería el segundo.

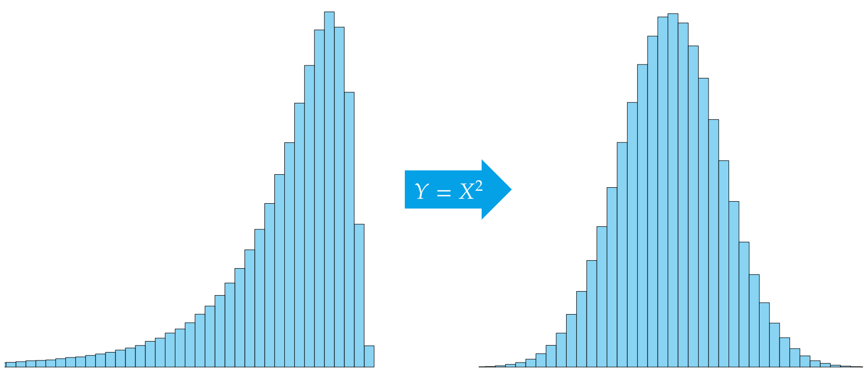
Pero si se considera el rendimiento relativo tomando las puntuaciones típicas se tiene:

Alumno:	1	2	3	4	5
X :	−1.5	0	−0.5	1.5	0.5
Y :	−1.26	1.26	0.95	0	−0.95
$\sum$	−2.76	1.26	0.45	1.5	−0.45

Y el mejor alumno sería el cuarto.

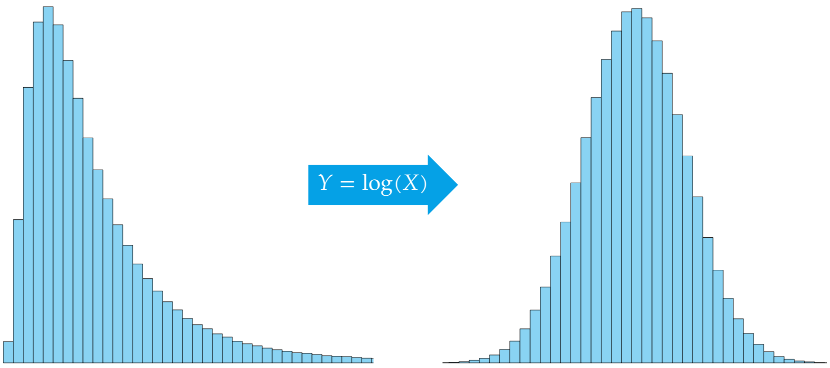
Transformaciones no lineales

La transformación $Y = X^2$ comprime la escala para valores pequeños y la expande para valores altos, de manera que es muy útil para corregir asimetrías hacia la izquierda.



Transformaciones no lineales

Las transformaciones $Y = \sqrt{x}$, $Y = \log X$ y $Y = 1/X$ comprimen la escala para valores altos y la expanden para valores pequeños, de manera que son útiles para corregir asimetrías hacia la derecha.



Variables clasificadoras o factores

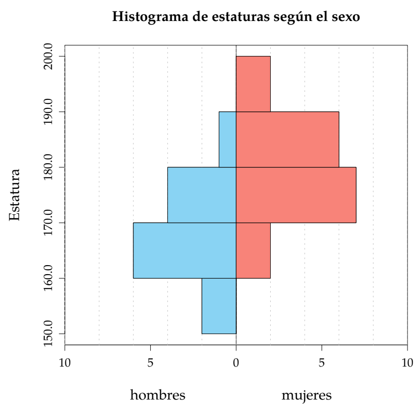
En ocasiones interesa describir el comportamiento de una variable, no para toda la muestra, sino para distintos grupos de individuos correspondientes a las categorías de otra variable conocida como **variable clasificadora** o **factor**.

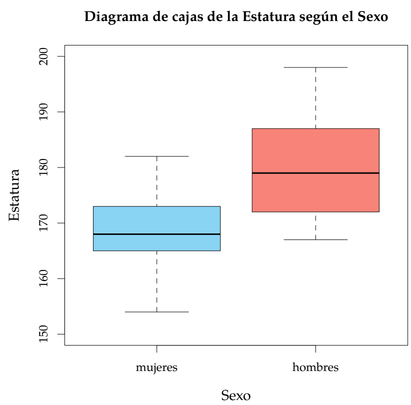
Variables clasificadoras

Dividiendo la muestra de estaturas según el sexo se obtienen dos submuestras:

Mujeres	173, 158, 174, 166, 162, 177, 165, 154, 166, 182, 169, 172, 170, 168.
Hombres	179, 181, 172, 194, 185, 187, 198, 178, 188, 171, 175, 167, 186, 172, 176, 187.

Comparación de distribuciones según los niveles de un factor





3 Regresión y Correlación

Relaciones entre variables

Hasta ahora se ha visto como describir el comportamiento de una variable, pero en los fenómenos naturales normalmente aparecen más de una variable que suelen estar relacionadas. Por ejemplo, en un estudio sobre el peso de las personas, deberíamos incluir todas las variables con las que podría tener relación: altura, edad, sexo, dieta, tabaco, ejercicio físico, etc.

Para comprender el fenómeno no basta con estudiar cada variable por separado y es preciso un estudio conjunto de todas las variables para ver cómo interactúan y qué relaciones se dan entre ellas. El objetivo de la estadística en este caso es dar medidas del grado y del tipo de relación entre dichas variables.

Generalmente, en un *estudio de dependencia* se considera una **variable dependiente** Y que se supone relacionada con otras variables $X_1, \ldots, X_n$ llamadas **variables independientes**.

El caso más simple es el de una sola variable independiente, y en tal caso se habla de *estudio de dependencia simple*. Para más de una variable independiente se habla de *estudio de dependencia múltiple*.

En este capítulo se verán los estudios de dependencia simple que son más sencillos.

3.1 Distribución de frecuencias conjunta

Frecuencias conjuntas

Al estudiar la dependencia simple entre dos variables X e Y, no se pueden estudiar sus distribuciones por separado, sino que hay que estudiar la distribución conjunta de la **variable bidimensional** (X, Y), cuyos valores son los pares (x_i, y_j) donde el primer elemento es un valor X y el segundo uno de Y.

Definición 21 (Frecuencias muestrales conjuntas)**.** Dada una muestra de tamaño n de una variable bidimensional (X, Y), para cada valor de la variable (x_i, y_j) observado en la muestra se define:

- Frecuencia absoluta n_{ij}: Es el número de veces que el par (x_i, y_j) aparece en la muestra.
- Frecuencia relativa f_{ij}: Es la proporcion de veces que el par (x_i, y_j) aparece en la muestra.

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$

¡Atención! Para las variables bidimensionales no tienen sentido las frecuencias acumuladas.

Distribución de frecuencias bidimensional

Al conjunto de valores de la variable bidimensional y sus respectivas frecuencias muestrales se le denomina **distribución conjunta**, y se representa mediante una **tabla de frecuencias bidimensional**.

$X\backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_q
x_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{iq}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	$\cdots$	n_{pj}	$\cdots$	n_{pq}

Distribución de frecuencias bidimensional

Ejemplo con estaturas y pesos

La estatura (en cm) y el peso (en Kg) de una muestra de 30 estudiantes es:

(179,85), (173,65), (181,71), (170,65), (158,51), (174,66), (172,62), (166,60), (194,90), (185,75),(162,55), (187,78), (198,109), (177,61), (178,70), (165,58), (154,50), (183,93),(166,51), (171,65), (175,70), (182,60), (167,59), (169,62), (172,70), (186,71), (172,54), (176,68), (168,67), (187,80).

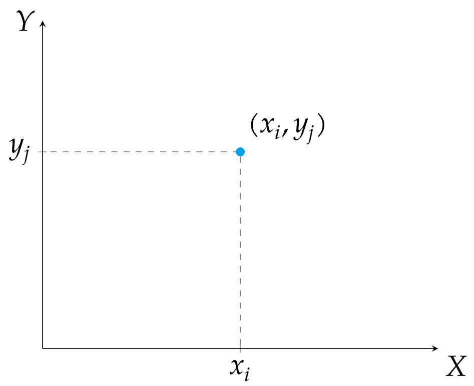
La tabla de frecuencias bidimensional es

X/Y	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$	$[100,110)$
$(150,160]$	2	0	0	0	0	0
$(160,170]$	4	4	0	0	0	0
$(170,180]$	1	6	3	1	0	0
$(180,190]$	0	1	4	1	1	0
$(190,200]$	0	0	0	0	1	1

Diagrama de dispersión

La distribución de frecuencias conjunta de una variable bidimensional puede representarse gráficamente mediante un **diagrama de dispersión**, donde los datos se representan como una colección de puntos en un plano cartesiano.

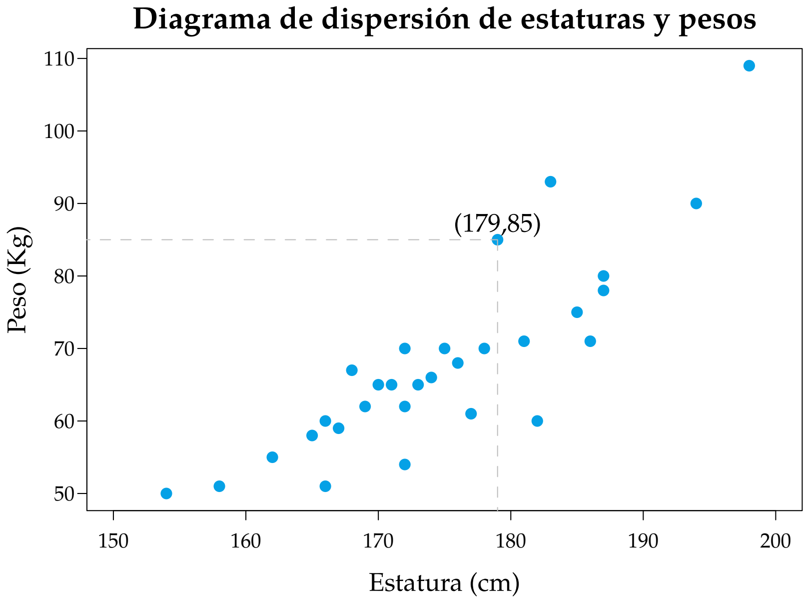
Habitualmente la variable independiente se representa en el eje X y la variable dependiente en el eje Y. Por cada par de valores (x_i, y_j) en la muestra se dibuja un punto en el plano con esas coordenadas.



El resultado es un conjunto de puntos que se conoce como *nube de puntos*.

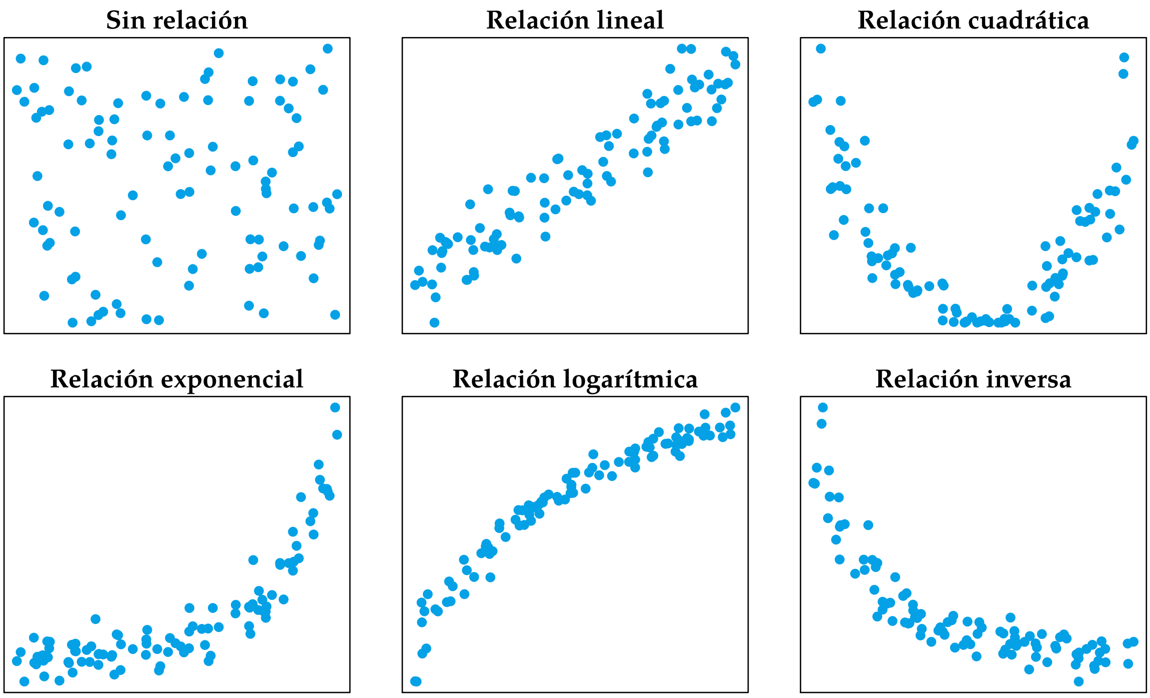
¡Ojo! No tiene sentido cuando alguna de las variables es un atributo.

Diagrama de dispersión



Interpretación del diagrama de dispersión

El diagrama de dispersión da información visual sobre el tipo de relación entre las variables.



Distribuciones marginales

A cada una de las distribuciones de las variables que conforman la variable bidimensional se les llama **distribuciones marginales**.

Las distribuciones marginales se pueden obtener a partir de la tabla de frecuencias bidimensional, sumando las frecuencias por filas y columnas.

$X\backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_q	n_x
x_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1q}	n_{x_1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	+	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	+	n_{ij}	+	n_{iq}	n_{x_i}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	+	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	$\cdots$	n_{pj}	$\cdots$	n_{pq}	n_{x_p}
n_y	n_{y_1}	$\cdots$	n_{y_j}	$\cdots$	n_{y_q}	n

Distribuciones marginales

Ejemplo con estaturas y pesos

En el ejemplo anterior de las estaturas y los pesos, las distribuciones marginales son

X/Y	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$	$[100,110)$	n_x
$(150,160]$	2	0	0	0	0	0	2
$(160,170]$	4	4	0	0	0	0	8
$(170,180]$	1	6	3	1	0	0	11
$(180,190]$	0	1	4	1	1	0	7
$(190,200]$	0	0	0	0	1	1	2
n_y	7	11	7	2	2	1	30

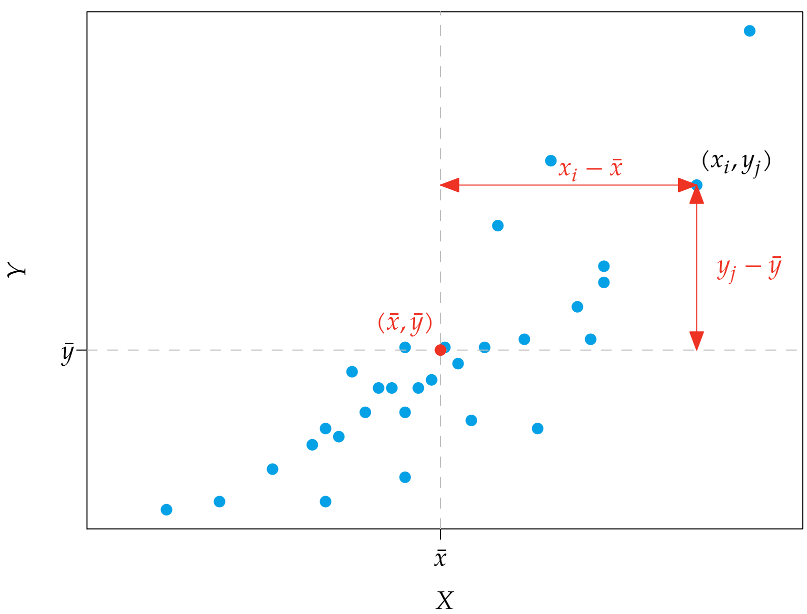
y los estadísticos correspondientes son

$$
\begin{array}{lll}
\bar{x} = 174.67 \text{ cm} & s_x^2 = 102.06 \text{ cm}^2 & s_x = 10.1 \text{ cm} \\
\bar{y} = 69.67 \text{ Kg} & s_y^2 = 164.42 \text{ Kg}^2 & s_y = 12.82 \text{ Kg}
\end{array}
$$

3.2 Covarianza

Desviaciones respecto de las medias

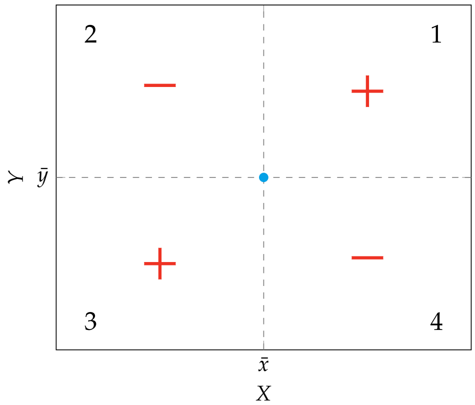
Para analizar la relación entre dos variables cuantitativas es importante hacer un estudio conjunto de las desviaciones respecto de la media de cada variable.



Signo de las desviaciones respecto de las medias

Si dividimos la nube de puntos del diagrama de dispersión en 4 cuadrantes centrados en el punto de medias $(\bar{x}, \bar{y})$, el signo de las desviaciones será:

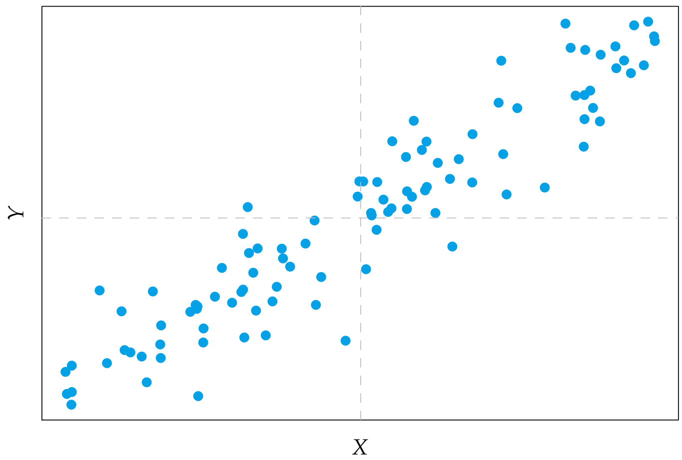
Cuadrante	$(x_i - \bar{x})$	$(y_j - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$
1	+	+	+
2	−	+	−
3	−	−	+
4	+	−	−



Estudio de las desviaciones respecto de las medias

Si la relación entre las variables es *lineal y creciente*, entonces la mayor parte de los puntos estarán en los cuadrantes 1 y 3 y la suma de los productos de desviaciones será positiva.

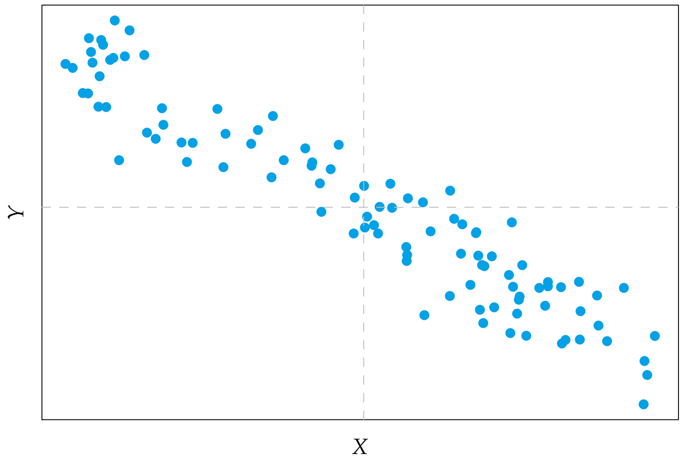
Relación lineal creciente



$$\sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = +$$

Si la relación entre las variables es *lineal y decreciente*, entonces la mayor parte de los puntos estarán en los cuadrantes 2 y 4 y la suma de los productos de desviaciones será negativa.

Relación lineal decreciente



$$\sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = -$$

Covarianza

Usando el producto de las desviaciones respecto de las medias surge el siguiente estadístico.

Definición 22 (Covarianza muestral)**.** La *covarianza muestral* de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) se define como el promedio de los productos de las respectivas desviaciones respecto de las medias de X e Y.

$$s_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})n_{ij}}{n}$$

También puede calcularse de manera más sencilla mediante la fórmula

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x}\bar{y}.$$

La covarianza sirve para estudiar la relación lineal entre dos variables:

- Si $s_{xy} > 0$ existe una relación lineal creciente entre las variables.
- Si $s_{xy} < 0$ existe una relación lineal decreciente entre las variables.
- Si $s_{xy} = 0$ no existe relación lineal entre las variables.

Cálculo de la covarianza

Ejemplo con estaturas y pesos

En el ejemplo de las estaturas y pesos, teniendo en cuenta que

X/Y	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$	$[100,110)$	n_x
$(150,160]$	2	0	0	0	0	0	2
$(160,170]$	4	4	0	0	0	0	8
$(170,180]$	1	6	3	1	0	0	11
$(180,190]$	0	1	4	1	1	0	7
$(190,200]$	0	0	0	0	1	1	2
n_y	7	11	7	2	2	1	30

$$\bar{x} = 174.67 \text{ cm} \qquad \bar{y} = 69.67 \text{ Kg}$$

la covarianza vale

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{\sum x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{155 \cdot 55 \cdot 2 + 165 \cdot 55 \cdot 4 + \cdots + 195 \cdot 105 \cdot 1}{30} - 174.67 \cdot 69.67 = \\ &= \frac{368200}{30} - 12169.26 = 104.07 \text{ cm} \cdot \text{Kg}, \end{aligned}$$

lo que indica que existe una relación lineal creciente entre la estatura y el peso.

3.3 Regresión

Regresión

En muchos casos el objetivo de un estudio no es solo detectar una relación entre dos variables, sino explicarla mediante alguna función matemática

$$y = f(x)$$

que permita predecir la variable dependiente para cada valor de la independiente.

La **regresion** es la parte de la Estadística encargada de construir esta función, que se conoce como **función de regresión** o **odelo de regresión**.

Modelos de regresión simple

Dependiendo de la forma de función de regresión, existen muchos tipos de regresión simple. Los más habituales son los que aparecen en la siguiente tabla:

Familia de curvas	Ecuación genérica
Lineal	$y = a + bx$
Parabólica	$y = a + bx + cx^2$
Polinómica de grado n	$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
Potencial	$y = a \cdot x^b$
Exponencial	$y = a \cdot e^{bx}$
Logarítmica	$y = a + b \log x$
Inverso	$y = a + \frac{b}{x}$
Curva S	$y = e^{a + \frac{b}{x}}$

La elección de un tipo u otro depende de la forma que tenga la nube de puntos del diagrama de dispersión.

Residuos o errores predictivos

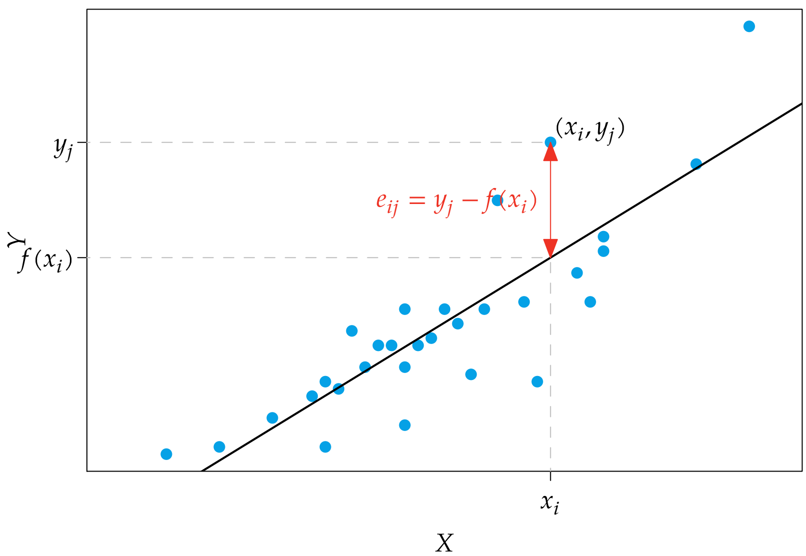
Una vez elegida la familia de curvas que mejor se adapta a la nube de puntos, se determina, dentro de dicha familia, la curva que mejor se ajusta a la distribución, es decir, la función que mejor predice la variable dependiente.

El objetivo es encontrar la función de regresión que haga mínimas las distancias entre los valores de la variable dependiente observados en la muestra, y los predichos por la función de regresión. Estas distancias se conocen como *residuos* o *errores predictivos*.

Definición 23 (Residuos o Errores predictivos)**.** Dado el modelo de regresión $y = f(x)$ para una variable bidimensional (X, Y), el *residuo* o *error predictivo* de un valor (x_i, y_j) observado en la muestra, es la diferencia entre el valor observado de la variable dependiente y_j y el predicho por la función de regresión para x_i:

$$e_{ij} = y_j - f(x_i).$$

Residuos o errores predictivos en Y



Ajuste de mínimos cuadrados

Una forma posible de obtener la función de regresión es mediante el método de *mínimos cuadrados* que consiste en calcular la función que haga mínima la suma de los cuadrados de los residuos

$$\sum e_{ij}^2.$$

En el caso de un modelo de regresión lineal $f(x) = a + bx$, como la recta depende de dos parámetros (el término independiente a y la pendiente b), la suma también dependerá de estos parámetros

$$\theta(a,b) = \sum e_{ij}^2 = \sum (y_j - f(x_i))^2 = \sum (y_j - a - bx_i)^2.$$

Así pues, todo se reduce a buscar los valores a y b que hacen mínima esta suma.

3.4 Recta de regresión

Cálculo de la recta de regresión

Método de mínimos cuadrados

Considerando la suma de los cuadrados de los residuos como una función de dos variables $\theta(a,b)$, se pueden calcular los valores de los parámetros del modelo que hacen mínima esta suma derivando e igualando a 0 las derivadas:

$$\frac{\partial \theta(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial \sum (y_j - a - bx_i)^2}{\partial a} = 0$$
$$\frac{\partial \theta(a,b)}{\partial b} = \frac{\partial \sum (y_j - a - bx_i)^2}{\partial b} = 0$$

Tras resolver el sistema se obtienen los valores

$$a = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2}\bar{x} \qquad b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

Estos valores hacen mínimos los residuos en Y y por tanto dan la recta de regresión óptima.

Recta de regresión

Definición 24 (Recta de regresión)**.** Dada una variable bidimensional (X, Y), la *recta de regresión* de Y sobre X es

$$y = \bar{y} + \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}).$$

La recta de regresión de Y sobre X es la recta que hace mínimos los errores predictivos en Y, y por tanto es la recta que hará mejores predicciones de Y para cualquier valor de X.

Cálculo de la recta de regresión

Ejemplo con estaturas y pesos

Siguiendo con el ejemplo de las estaturas (X) y los pesos (Y) con los siguientes estadísticos:

$$\begin{array}{lll}
\bar{x} = 174.67 \text{ cm} & s_x^2 = 102.06 \text{ cm}^2 & s_x = 10.1 \text{ cm} \\
\bar{y} = 69.67 \text{ Kg} & s_y^2 = 164.42 \text{ Kg}^2 & s_y = 12.82 \text{ Kg} \\
 & s_{xy} = 104.07 \text{ cm} \cdot \text{Kg} &
\end{array}$$

Entonces, la recta de regresión del peso sobre la estatura es

$$y = \bar{y} + \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) = 69.67 + \frac{104.07}{102.06}(x - 174.67) = -108.49 + 1.02x.$$

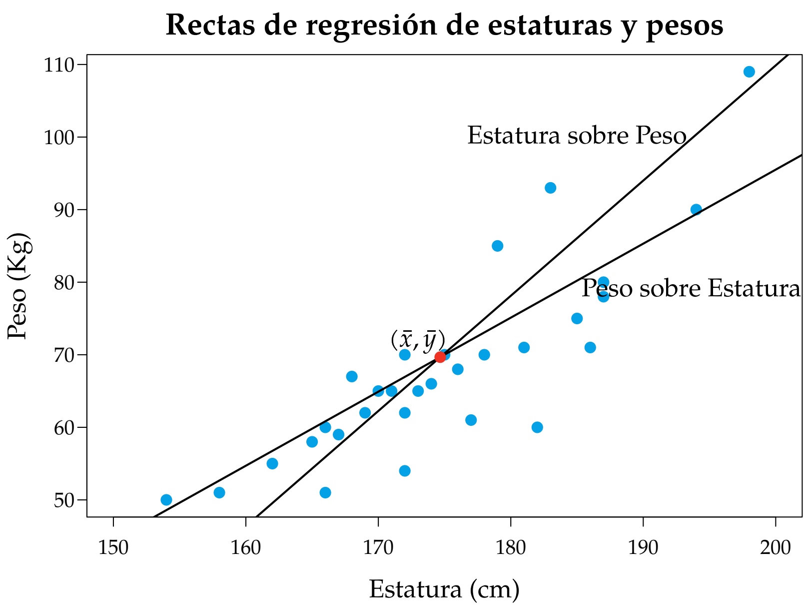
De igual modo, si tomamos la estatura como variable dependiente, la recta de regresión de la estatura sobre el peso es

$$x = \bar{x} + \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \bar{y}) = 174.67 + \frac{104.07}{164.42}(y - 69.67) = 130.78 + 0.63y.$$

¡Obsérvese que ambas rectas de regresión son diferentes!

Rectas de regresión

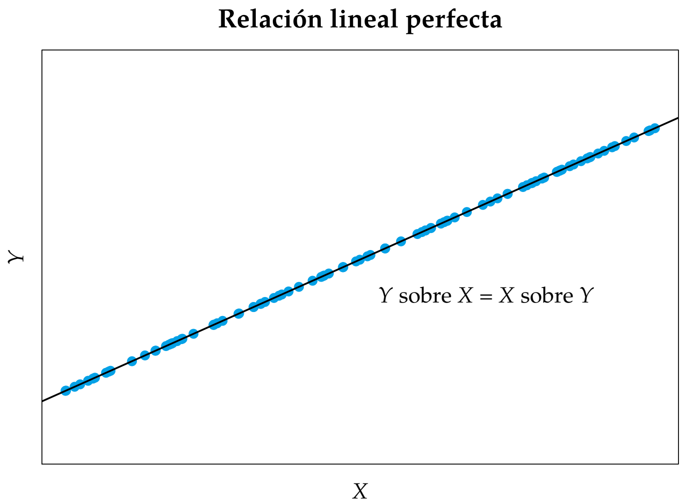
Ejemplo de estaturas y pesos



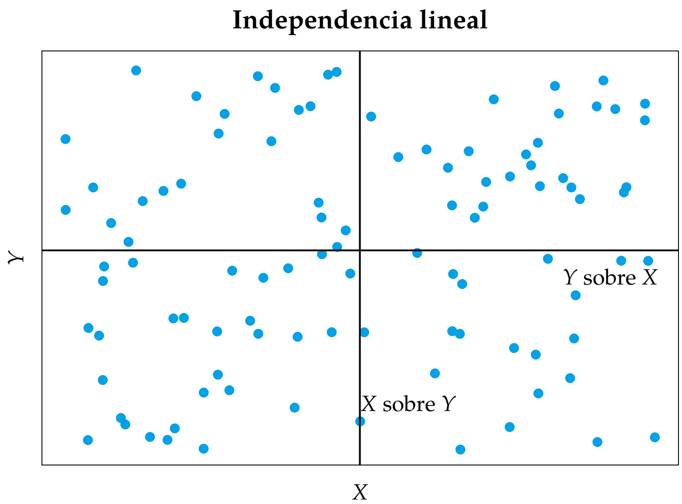
Posición relativa de las rectas de regresión

Habitualmente, las rectas de regresión Y sobre X y de X sobre Y no coinciden, pero siempre se cortan en el punto de medias $(\bar{x}, \bar{y})$.

Si entre las variables la relación lineal es perfecta, entonces ambas rectas coinciden ya que sus residuos son nulos.



Si no hay relación lineal, entonces las ecuaciones de las rectas son $y = \bar{y}$, $x = \bar{x}$, y se cortan perpendicularmente



Coeficiente de regresión

El parámetro más importante de una recta de regresión es su pendiente.

Definición 25 (Coeficiente de regresión b_{yx})**.** Dada una variable bidimensional (X, Y), el *coeficiente de regresión* de la recta de regresión de Y sobre X es su pendiente,

$$b_{yx} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

El coeficiente de regresión siempre tiene el mismo signo que la covarianza.

Refleja el crecimiento de la variable dependiente en relación a la independiente según la recta de regresión. En concreto da el número de unidades que aumenta o disminuye la variable dependiente por cada unidad que aumenta la variable independiente.

Regression coefficient

Example of heights and weights

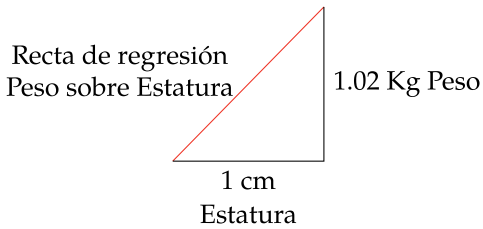
En el ejemplo de las estaturas y los pesos, la recta de regresión del peso sobre la estatura era

$$y = -108.49 + 1.02x,$$

de manera que el coeficiente de regresión del peso sobre la estatura es

$$b_{yx} = 1.02\text{Kg/cm}.$$

Esto significa que, según la recta de regresión del peso sobre la estatura, por cada cm más de estatura, la persona pesará 1.02 Kg más.



Predicciones con las rectas de regresión

Ejemplo con estaturas y pesos

Las rectas de regresión, y en general cualquier modelo de regresión, suele utilizarse con fines predictivos.

¡Ojo! Para predecir una variable, esta siempre debe considerarse como dependiente en el modelo de regresión que se utilice.

Así, en el ejemplo de las estaturas y los pesos, si se quiere predecir el peso de una persona que mide 180 cm, se debe utilizar la recta de regresión del peso sobre la estatura:

$$y = 1.02 \cdot 180 - 108.49 = 75.11 \text{ Kg}.$$

Y si se quiere predecir la estatura de una persona que pesa 79 Kg, se debe utilizar la recta de regresión de la estatura sobre el peso:

$$x = 0.63 \cdot 79 + 130.78 = 180.55 \text{ cm}.$$

Ahora bien, ¿qué fiabilidad tienen estas predicciones?

3.5 Correlación

Correlación

Una vez construido un modelo de regresión, para saber si se trata de un buen modelo predictivo, se tiene que analizar el grado de dependencia entre las variables según el tipo de dependencia planteada en el modelo. De ello se encarga la parte de la estadística conocida como **correlación**.

La correlación se basa en el estudio de los residuos: cuanto menores sean éstos, más se ajustará la curva de regresión a los puntos, y más intensa será la correlación.

Varianza residual muestral

Una medida de la bondad del ajuste del modelo de regresión es la *varianza residual*.

Definición 26 (Varianza residual s^2_{ry})**.** Dado un modelo de regresión simple $y = f(x)$ de una variable bidimensional (X, Y), su *varianza residual muestral* es el promedio de los cuadrados de los residuos para los valores de la muestra,

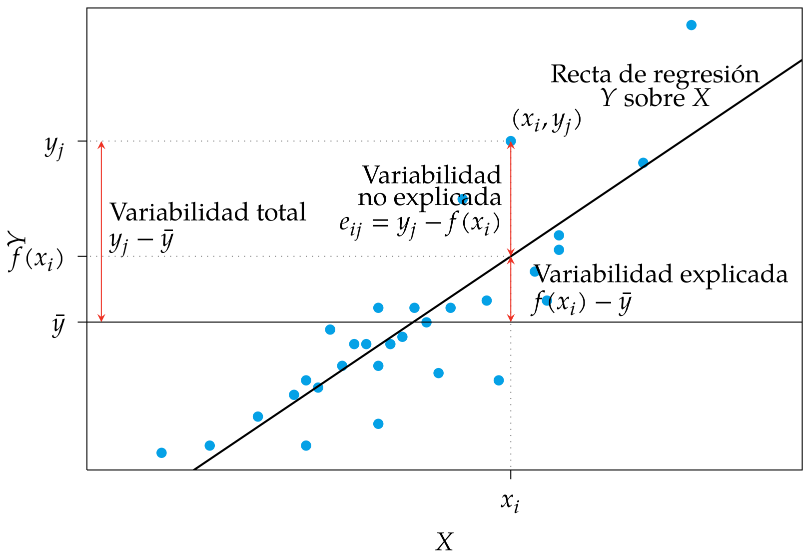
$$s^2_{ry} = \frac{\sum e^2_{ij} n_{ij}}{n} = \frac{\sum (y_j - f(x_i))^2 n_{ij}}{n}.$$

Cuanto más alejados estén los puntos de la curva de regresión, mayor será la varianza residual y menor la dependencia.

Cuando la relación lineal es perfecta los residuos se anulan y la varianza residual vale cero. Por contra, cuando no existe relación, los residuos coinciden con las desviaciones de la media, y la varianza residual es igual a la varianza de la variable dependiente.

$$0 \leq s^2_{ry} \leq s^2_y$$

Descomposición de la variabilidad total: Variabilidad explicada y no explicada



3.6 Coeficientes de determinación y correlación

Coeficiente de determinación

A partir de la varianza residual se puede definir otro estadístico más sencillo de interpretar.

Definición 27 (Coeficiente de determinación muestral)**.** Dado un modelo de regresión simple $y = f(x)$ de una variable bidimensional (X, Y), su *coeficiente de determinación muestral* es

$$r^2 = 1 - \frac{s^2_{ry}}{s^2_y}$$

Como la varianza residual puede tomar valores entre 0 y s^2_y, se tiene que

$$0 \leq r^2 \leq 1$$

Cuanto mayor sea r^2, mejor explicará el modelo de regresión la relación entre las variables, en particular:

- Si $r^2 = 0$ entonces no existe relación del tipo planteado por el modelo.
- Si $r^2 = 1$ entonces la relación que plantea el modelo es perfecta.

Coeficiente de determinación lineal

En el caso de las rectas de regresión, la varianza residual vale

$$\begin{aligned}
s_{ry}^2 &= \sum e_{ij}^2 f_{ij} = \sum (y_j - f(x_i))^2 f_{ij} = \sum \left(y_j - \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x_i - \bar{x}) \right)^2 f_{ij} = \\
&= \sum \left((y_j - \bar{y})^2 + \frac{s_{xy}^2}{s_x^4}(x_i - \bar{x})^2 - 2\frac{s_{xy}}{s_x^2}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \right) f_{ij} = \\
&= \sum (y_j - \bar{y})^2 f_{ij} + \frac{s_{xy}^2}{s_x^4} \sum (x_i - \bar{x})^2 f_{ij} - 2\frac{s_{xy}}{s_x^2} \sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) f_{ij} = \\
&= s_y^2 + \frac{s_{xy}^2}{s_x^4} s_x^2 - 2\frac{s_{xy}}{s_x^2} s_{xy} = s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}.
\end{aligned}$$

y, por tanto, el coeficiente de determinación lineal vale

$$r^2 = 1 - \frac{s_{ry}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}}{s_y^2} = 1 - 1 + \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}.$$

Cálculo del coeficiente de determinación lineal

Ejemplo de estaturas y pesos

En el ejemplo de las estaturas y pesos se tenía

$$\begin{array}{ll}
\bar{x} = 174.67 \text{ cm} & s_x^2 = 102.06 \text{ cm}^2 \\
\bar{y} = 69.67 \text{ Kg} & s_y^2 = 164.42 \text{ Kg}^2 \\
s_{xy} = 104.07 \text{ cm}\cdot\text{Kg} &
\end{array}$$

De modo que el coeficiente de determinación lineal vale

$$r^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} = \frac{(104.07 \text{ cm}\cdot\text{Kg})^2}{102.06 \text{ cm}^2 \cdot 164.42 \text{ Kg}^2} = 0.65.$$

Esto indica que la recta de regresión del peso sobre la estatura explica el 65% de la variabilidad del peso, y de igual modo, la recta de regresión de la estatura sobre el peso explica el 65% de la variabilidad de la estatura.

Coeficiente de correlación lineal

Definición 28 (Coeficiente de correlación lineal)**.** Dada una variable bidimensional (X, Y), el *coeficiente de correlación lineal muestral* es la raíz cuadrada de su coeficiente de determinación lineal, con signo el de la covarianza

$$r = \sqrt{r^2} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

Como r^2 toma valores entre 0 y 1, r tomará valores entre -1 y 1:

$$-1 \leq r \leq 1$$

El coeficiente de correlación lineal no sólo mide mide el grado de dependencia lineal sino también su dirección (creciente o decreciente):

- Si $r = 0$ entonces no existe relación lineal.
- Si $r = 1$ entonces existe una relación lineal creciente perfecta.
- Si $r = -1$ entonces existe una relación lineal decreciente perfecta.

Coeficiente de correlación lineal

Ejemplo

En el ejemplo de las estaturas y los pesos se tenía

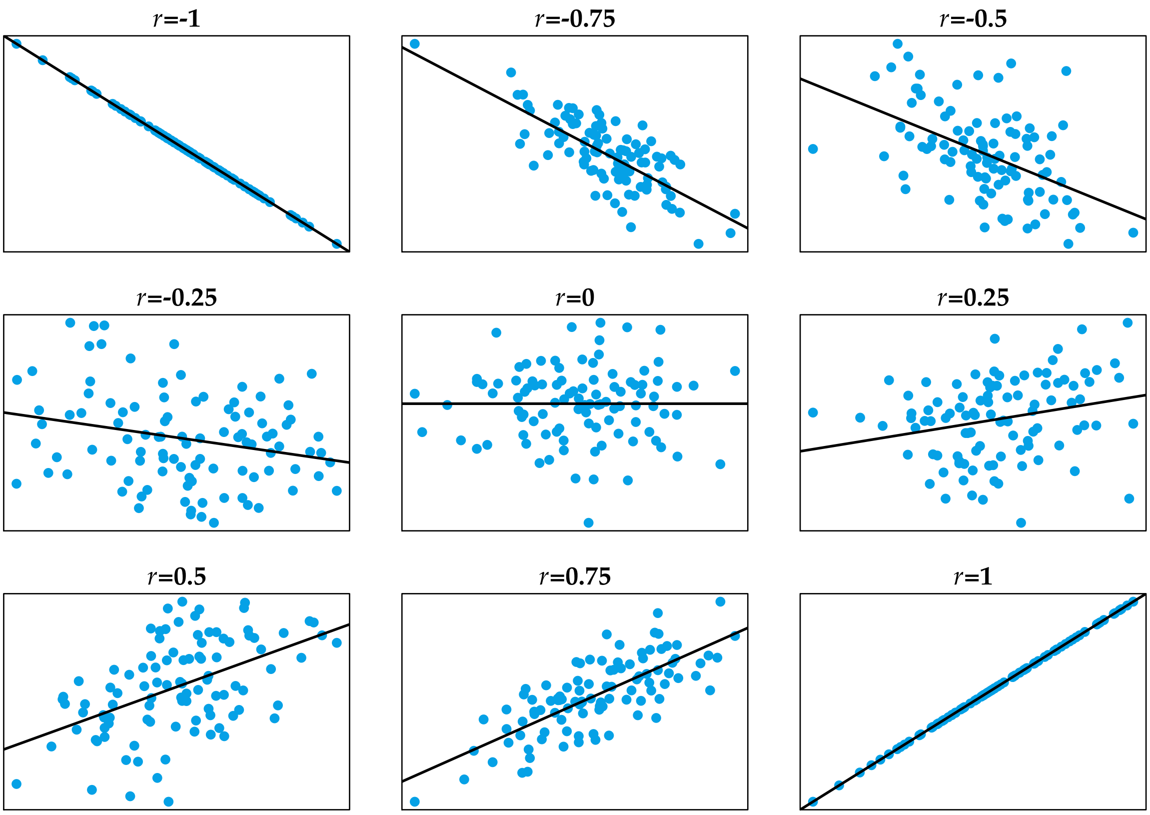
$$\begin{array}{ll} \bar{x} = 174.67 \text{ cm} & s_x^2 = 102.06 \text{ cm}^2 \\ \bar{y} = 69.67 \text{ Kg} & s_y^2 = 164.42 \text{ Kg}^2 \\ s_{xy} = 104.07 \text{ cm}\cdot\text{Kg} & \end{array}$$

De modo que el coeficiente de correlación lineal vale

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{104.07 \text{ cm}\cdot\text{Kg}}{10.1 \text{ cm} \cdot 12.82 \text{ Kg}} = +0.8.$$

Esto indica que la relación lineal entre el peso y la estatura es fuerte, y además creciente.

Distintos grados de correlación



Fiabilidad de las predicciones de un modelo de regresión

Aunque el coeficiente de determinación o el de correlación determinan la bondad de ajuste de un modelo de regresión, existen otros factores que influyen en la fiabilidad de las predicciones de un modelo de regresión:

- El coeficiente de determinación: Cuanto mayor sea, menores serán los errores predictivos y mayor la fiabilidad de las predicciones.
- La variabilidad de la población: Cuanto más variable es una población, más difícil es predecir y por tanto menos fiables serán las predicciones.
- El tamaño muestral: Cuanto mayor sea, más información tendremos y, en consecuencia, más fiables serán las predicciones.

Además, hay que tener en cuenta que un modelo de regresión es válido únicamente para el rango de valores observados en la muestra. Fuera de ese rango no hay información del tipo de relación entre las variables, por lo que no deben hacerse predicciones para valores lejos de los observados en la muestra.

3.7 Regresión no lineal

Regresión no lineal

El ajuste de un modelo de regresión no lineal es similar al del modelo lineal y también puede realizarse mediante la técnica de mínimos cuadrados.

No obstante, en determinados casos un ajuste no lineal puede convertirse en un ajuste lineal mediante una sencilla transformación de alguna de las variables del modelo.

Transformación de modelos de regresión no lineales

- **Modelo logarítmico**: Un modelo logarítmico $y = a + b \log x$ se convierte en un modelo lineal haciendo el cambio $t = \log x$:
$$y = a + b \log x = a + bt.$$
- **Modelo exponencial**: Un modelo exponencial $y = ae^{bx}$ se convierte en un modelo lineal haciendo el cambio $z = \log y$:
$$z = \log y = \log(ae^{bx}) = \log a + \log e^{bx} = a' + bx.$$
- **Modelo potencial**: Un modelo potencial $y = ax^b$ se convierte en un modelo lineal haciendo los cambios $t = \log x$ y $z = \log y$:
$$z = \log y = \log(ax^b) = \log a + b \log x = a' + bt.$$
- **Modelo inverso**: Un modelo inverso $y = a + b/x$ se convierte en un modelo lineal haciendo el cambio $t = 1/x$:
$$y = a + b(1/x) = a + bt.$$
- **Modelo curva S**: Un modelo curva S $y = e^{a+b/x}$ se convierte en un modelo lineal haciendo los cambios $t = 1/x$ y $z = \log y$:
$$z = \log y = \log(e^{a+b/x}) = a + b(1/x) = a + bt.$$

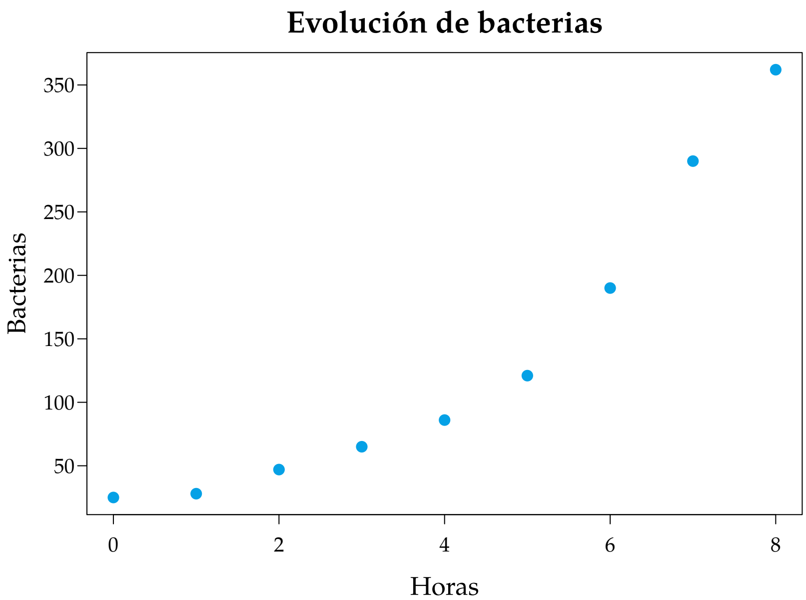
Relación exponencial

Evolución del número de bacterias de un cultivo

El número de bacterias de un cultivo evoluciona con el tiempo según la siguiente tabla:

Horas	Bacterias
0	25
1	28
2	47
3	65
4	86
5	121
6	190
7	290
8	362

El diagrama de dispersión asociado es



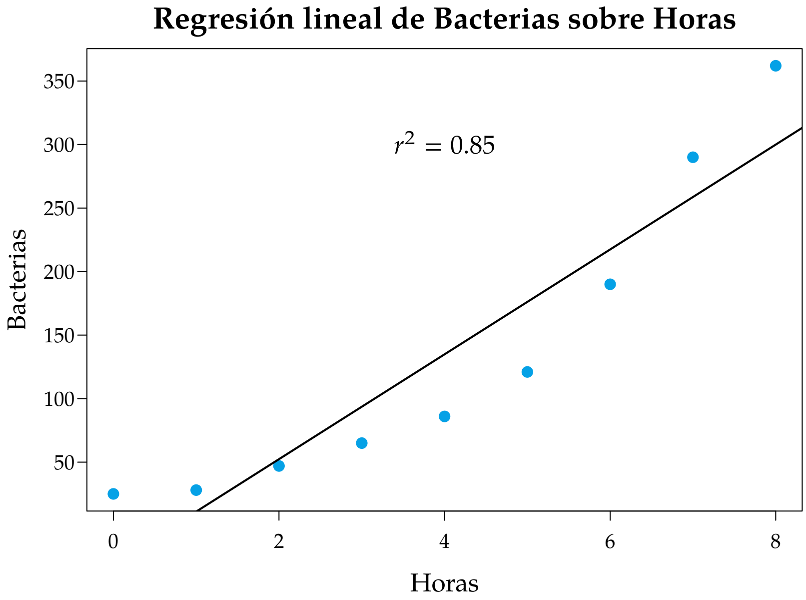
Relación exponencial

Evolución del número de bacterias de un cultivo

Si realizamos un ajuste lineal, obtenemos la siguiente recta de regresión

Horas	Bacterias
0	25
1	28
2	47
3	65
4	86
5	121
6	190
7	290
8	362

$$\text{Bacterias} = -30.18 + 41,27\,\text{Horas}$$



¿Es un buen modelo?

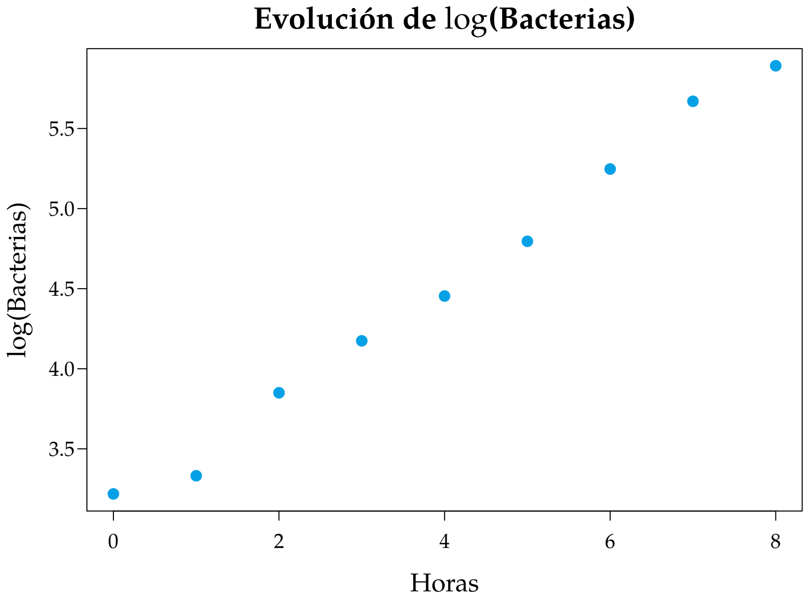
Ajuste de un modelo de regresión exponencial

Evolución del número de bacterias de un cultivo

Aunque el modelo lineal no es malo, de acuerdo al diagrama de dispersión es más lógico construir un modelo exponencial o cuadrático.

Para construir el modelo exponencial $y = ae^{bx}$ hay que realizar la transformación $z = \log y$, es decir, aplicar el logaritmo a la variable dependiente.

Horas	Bacterias	Log Bacterias
0	25	3.22
1	28	3.33
2	47	3.85
3	65	4.17
4	86	4.45
5	121	4.80
6	190	5.25
7	290	5.67
8	362	5.89



Ajuste de un modelo de regresión exponencial

Evolución del número de bacterias de un cultivo

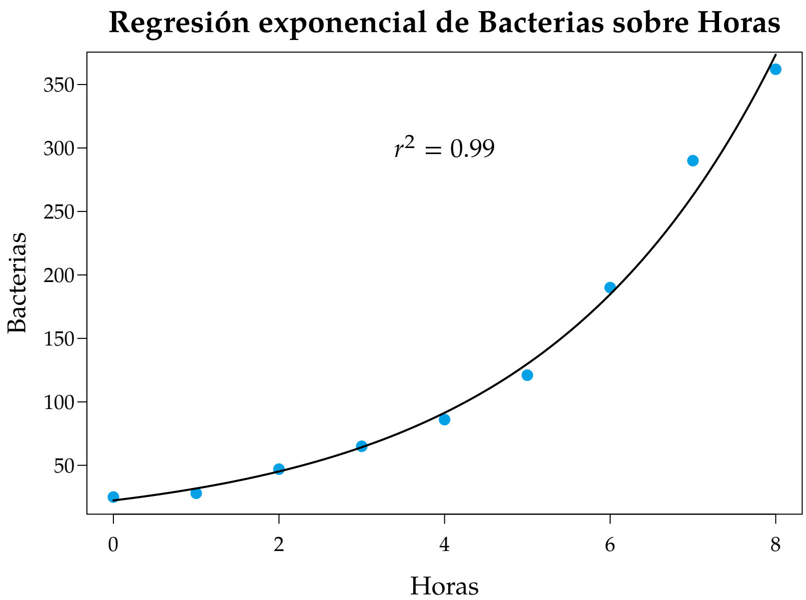
Ahora sólo queda calcular la recta de regresión del logaritmo de Bacterias sobre Horas

$$\text{Log Bacterias} = 3.107 + 0.352\,\text{Horas}.$$

Y deshaciendo el cambio de variable, se obtiene el modelo exponencial

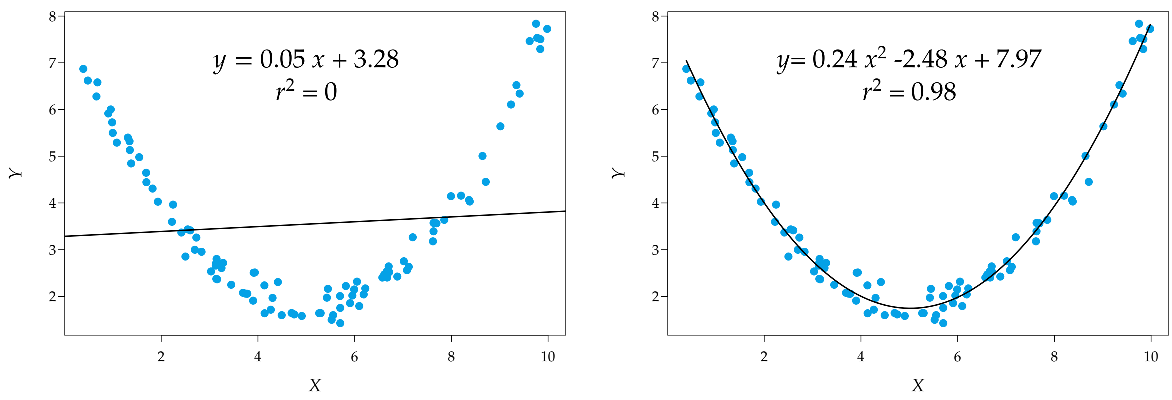
$$\text{Bacterias} = e^{3.107+0.352\ \text{Horas}},\ \text{con } r^2 = 0.99.$$

Como se puede apreciar, el modelo exponencial se ajusta mucho mejor que el modelo lineal.



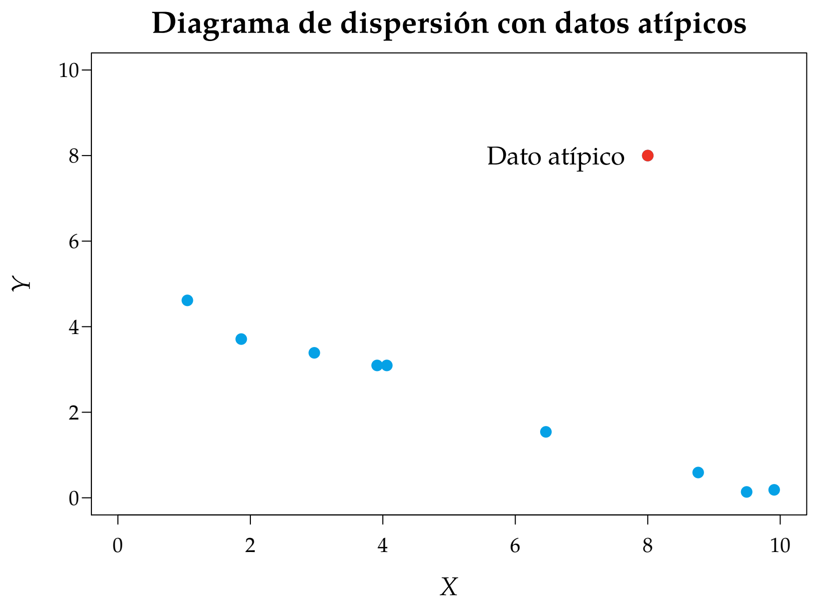
Interpretación de un coeficiente de determinación pequeño

Es importante señalar que cada modelo de regresión tiene su propio coeficiente de determinación. Así, un coeficiente de determinación cercano a cero significa que no existe relación entre las variables del tipo planteado por el modelo, pero *eso no quiere decir que las variables sean independientes*, ya que puede existir relación de otro tipo.



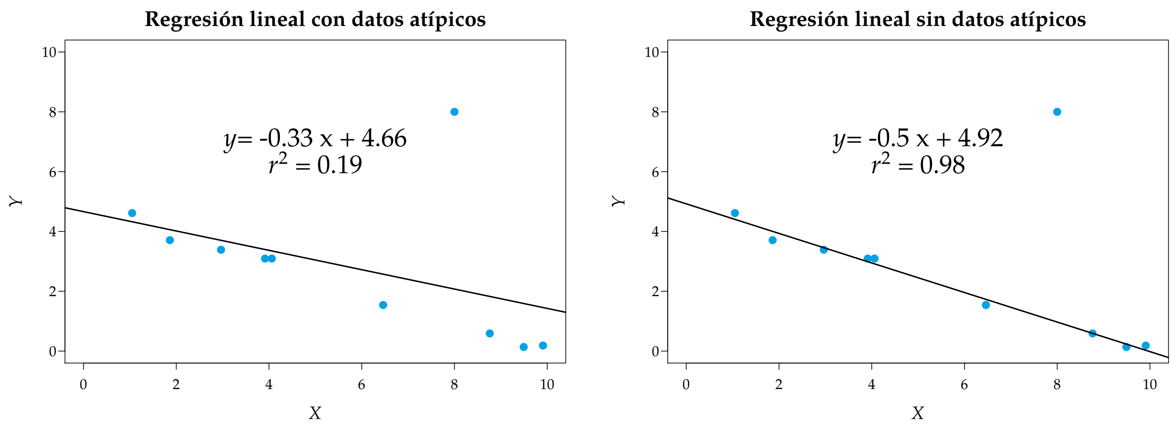
Datos atípicos en regresión

Los *datos atípicos* en un estudio de regresión son los puntos que claramente no siguen la tendencia del resto de los puntos en el diagrama de dispersión, incluso si los valores del par no se pueden considerar atípicos para cada variable por separado.



Influencia de los datos atípicos en los modelos de regresión

Los datos atípicos en regresión suelen provocar cambios drásticos en el ajuste de los modelos de regresión, y por tanto, habrá que tener mucho cuidado con ellos.



3.8 Medidas de relación entre atributos

Relaciones entre atributos

Los modelos de regresión vistos sólo pueden aplicarse cuando las variables estudiadas son cuantitativas.

Cuando se desea estudiar la relación entre atributos, tanto ordinales como nominales, es necesario recurrir a otro tipo de medidas de relación o de asociación. En este tema veremos tres de ellas:

- Coeficiente de correlación de Spearman.
- Coeficiente chi-cuadrado.
- Coeficiente de contingencia.

Coeficiente de correlación de Spearman

Cuando se tengan atributos ordinales es posible ordenar sus categorías y asignarles valores ordinales, de manera que se puede calcular el coeficiente de correlación lineal entre estos valores ordinales.

Esta medida de relación entre el orden que ocupan las categorías de dos atributos ordinales se conoce como coeficiente ce correlación de Spearman, y puede demostrarse fácilmente que puede calcularse a partir de la siguiente fórmula

Definición 29 (Coeficiente de correlación de Spearman)**.** Dada una muestra de n individuos en los que se han medido dos atributos ordinales X e Y, el coeficiente de correlación de Spearman se define como:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

donde d_i es la diferencia entre el valor ordinal de X y el valor ordinal de Y del individuo i.

Interpretación del coeficiente de correlación de Spearman

Como el coeficiente de correlación de Spearman es en el fondo el coeficiente de correlación lineal aplicado a los órdenes, se tiene:

$$-1 \leq r_s \leq 1,$$

de manera que:

- Si $r_s = 0$ entonces no existe relación entre los atributos ordinales.

- Si $r_s = 1$ entonces los órdenes de los atributos coinciden y existe una relación directa perfercta.
- Si $r_s = -1$ entonces los órdenes de los atributos están invertidos y existe una relación inversa perfecta.

En general, cuanto más cerca de 1 o -1 esté r_s, mayor será la relación entre los atributos, y cuanto más cerca de 0, menor será la relación.

Cálculo del coeficiente de correlación de Spearman

Ejemplo

Una muestra de 5 alumnos realizaron dos tareas diferentes X e Y, y se ordenaron de acuerdo a la destreza que manifestaron en cada tarea:

Alumnos	X	Y	d_i	d_i^2
Alumno 1	2	3	-1	1
Alumno 2	5	4	1	1
Alumno 3	1	2	-1	1
Alumno 4	3	1	2	4
Alumno 5	4	5	-1	1
$\sum$			0	8

El coeficiente de correlación de Spearman para esta muestra es

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 8}{5(5^2-1)} = 0.6,$$

lo que indica que existe bastante relación directa entre las destrezas manifestadas en ambas tareas.

Cálculo del coeficiente de correlación de Spearman

Ejemplo con empates

Cuando hay empates en el orden de las categorías se atribuye a cada valor empatado la media aritmética de los valores ordinales que hubieran ocupado esos individuos en caso de no haber estado empatados.

Si en el ejemplo anterior los alumnos 4 y 5 se hubiesen comportado igual en la primera tarea y los alumnos 3 y 4 se hubiesen comportado igual en la segunda tarea, entonces se tendría

Alumnos	X	Y	d_i	d_i^2
Alumno 1	2	3	-1	1
Alumno 2	5	4	1	1
Alumno 3	1	1.5	-0.5	0.25
Alumno 4	3.5	1.5	2	4
Alumno 5	3.5	5	-1.5	2.25
$\sum$			0	8.5

El coeficiente de correlación de Spearman para esta muestra es

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 8.5}{5(5^2-1)} = 0.58.$$

Relación entre atributos nominales

Cuando se quiere estudiar la relación entre atributos nominales no tiene sentido calcular el coeficiente de correlación de Spearman ya que las categorías no pueden ordenarse.

Para estudiar la relación entre atributos nominales se utilizan medidas basadas en las frecuencias de la tabla de frecuencias bidimensional, que para atributos se suele llamar *tabla de contingencia*.

Ejemplo En un estudio para ver si existe relación entre el sexo y el hábito de fumar se ha tomado una muestra de 100 personas. La tabla de contingencia resultante es

Sexo\Fuma	Si	No	n_i
Mujer	12	28	40
Hombre	26	34	60
n_j	38	62	100

Si el hábito de fumar fuese independiente del sexo, la proporción de fumadores en mujeres y hombres sería la misma.

Frecuencias teóricas o esperadas

En general, dada una tabla de contingencia para dos atributos X e Y,

$X\backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_q	n_x
x_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1q}	n_{x_1}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{iq}	n_{x_i}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	$\cdots$	n_{pj}	$\cdots$	n_{pq}	n_{x_p}
n_y	n_{y_1}	$\cdots$	n_{y_j}	$\cdots$	n_{y_q}	n

si X e Y fuesen independientes, para cualquier valor y_j se tendría

$$\frac{n_{1j}}{n_{x_1}} = \frac{n_{2j}}{n_{x_2}} = \cdots = \frac{n_{pj}}{n_{x_p}} = \frac{n_{1j} + \cdots + n_{pj}}{n_{x_1} + \cdots + n_{x_p}} = \frac{n_{y_j}}{n},$$

de donde se deduce que

$$n_{ij} = \frac{n_{x_i} n_{y_j}}{n}.$$

A esta última expresión se le llama *frecuencia teórica* o *frecuencia esperada* del par (x_i, y_j).

Coeficiente chi-cuadrado χ^2

Es posible estudiar la relación entre dos atributos X e Y comparando las frecuencias reales con las esperadas:

Definición 30 (Coeficiente chi-cuadrado χ^2)**.** Dada una muestra de tamaño n en la que se han medido dos atributos X e Y, se define el coeficiente χ^2 como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{x_i} n_{y_j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{x_i} n_{y_j}}{n}},$$

donde p es el número de categorías de X y q el número de categorías de Y.

Por ser suma de cuadrados, se cumple que

$$\chi^2 \geq 0,$$

de manera que $\chi^2 = 0$ cuando los atributos son independientes, y crece a medida que aumenta la dependencia entre las variables.

Cálculo del coeficiente chi-cuadrado χ^2

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo anterior, a partir de la tabla de contingencia

Sexo\Fuma	Si	No	n_i
Mujer	12	28	40
Hombre	26	34	60
n_j	38	62	100

se obtienen las siguientes frecuencias esperadas:

Sexo\Fuma	Si	No	n_i
Mujer	$\frac{40\cdot 38}{100} = 15.2$	$\frac{40\cdot 62}{100} = 24.8$	40
Hombre	$\frac{60\cdot 38}{100} = 22.8$	$\frac{60\cdot 62}{100} = 37.2$	60
n_j	38	62	100

y el coeficiente χ^2 vale

$$\chi^2 = \frac{(12-15.2)^2}{15.2} + \frac{(28-24.8)^2}{24.8} + \frac{(26-22.8)^2}{22.8} + \frac{(34-37.2)^2}{37.2} = 1.81,$$

lo que indica que no existe gran relación entre el sexo y el hábito de fumar.

Coeficiente de contingencia

El coeficiente χ^2 depende del tamaño muestral, ya que al multiplicar por una constante las frecuencias de todas las casillas, su valor queda multiplicado por dicha constante, lo que podría llevarnos al equívoco de pensar que ha aumentado la relación, incluso cuando las proporciones se mantienen. En consecuencia el valor de χ^2 no está acotado superiormente y resulta difícil de interpretar.

Para evitar estos problemas se suele utilizar el siguiente estadístico:

Definición 31 (Coeficiente de contingencia)**.** Dada una muestra de tamaño n en la que se han medido dos atributos X e Y, se define el *coeficiente de contingencia* como

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Interpretación del coeficiente de contingencia

De la definición anterior se deduce que

$$0 \leq C \leq 1,$$

de manera que cuando $C = 0$ las variables son independientes, y crece a medida que aumenta la relación.

Aunque C nunca puede llegar a valer 1, se puede demostrar que para tablas de contingencia con k filas y k columnas, el valor máximo que puede alcanzar C es $\sqrt{(k-1)/k}$.

Ejemplo En el ejemplo anterior el coeficiente de contingencia vale

$$C = \sqrt{\frac{1.81}{1.81 + 100}} = 0.13.$$

Como se trata de una tabla de contingencia de 2×2, el valor máximo que podría tomar el coeficiente de contingencia es $\sqrt{(2-1)/2} = \sqrt{1/2} = 0.707$, y como 0.13 está bastante lejos de este valor, se puede concluir que no existe demasiada relación entre el hábito de fumar y el sexo.

4 Teoría de la Probabilidad

Introducción

La estadística descriptiva permite describir el comportamiento y las relaciones entre las variables en la muestra, pero no permite sacar conclusiones sobre el resto de la población.

Ha llegado el momento de dar el salto de la muestra a la población y pasar de la estadística descriptiva a la inferencia estadística, y el puente que lo permite es la **teoría de la probabilidad**.

Hay que tener en cuenta que el conocimiento que se puede obtener de la población a partir de la muestra es limitado, y que para obtener conclusiones válidas para la población la muestra debe ser representativa de esta. Por esta razón, para garantizar la representatividad de la muestra, esta debe extraerse *aleatoriamente*, es decir, al *azar*.

La teoría de la probabilidad precisamente se encarga de controlar ese azar para saber hasta qué punto son fiables las conclusiones obtenidas a partir de una muestra.

4.1 Experimentos y sucesos aleatorios

Experimentos y sucesos aleatorios

El estudio de una característica en una población se realiza a través de experimentos aleatorios.

Definición 32 (Experimento aleatorio)**.** Un *experimento aleatorio* es un experimento que cumple dos condiciones:

1. El conjunto de posibles resultados es conocido.
2. No se puede predecir con absoluta certeza el resultado del experimento.

Ejemplo. Un ejemplo típico de experimentos aleatorios son los juegos de azar. El lanzamiento de un dado, por ejemplo, es un experimento aleatorio ya que:

- Se conoce el conjunto posibles de resultados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Antes de lanzar el dado, es imposible predecir con absoluta certeza el valor que saldrá.

Otro ejemplo de experimento aleatorio sería la selección de un individuo de una población al azar y la determinación de su grupo sanguíneo.

En general, la obtención de cualquier muestra mediante procedimientos aleatorios será un experimento aleatorio.

Espacio muestral

Definición 33 (Espacio muestral)**.** Al conjunto Ω de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama *espacio muestral*.

Algunos ejemplos de espacios muestrales son:

- Lanzamiento de una moneda: $\Omega = \{c, x\}$.
- Lanzamiento de un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Grupo sanguíneo de un individuo seleccionado al azar: $\Omega = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{AB}, 0\}$.
- Estatura de un individuo seleccionado al azar: $\Omega = \mathbb{R}^+$.

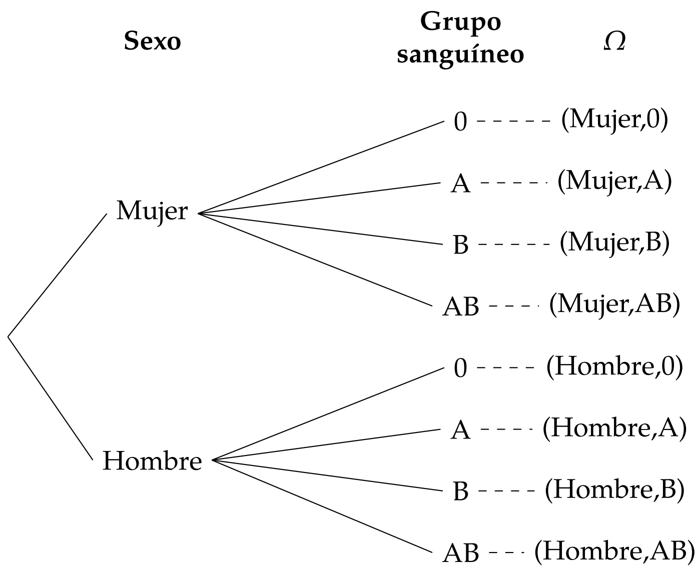
Diagrama de árbol

En experimentos donde se mide más de una variable, la determinación del espacio muestral puede resultar compleja. En tales casos es recomendable utilizar un **diagrama de árbol** para construir el espacio muestral.

En un diagrama de árbol cada variable se representa en un nivel del árbol y cada posible valor de la variable como una rama.

Diagrama de árbol

Ejemplo de sexo y grupo sanguíneo



Sucesos aleatorios

Definición 34 (Suceso aleatorio)**.** Un *suceso aleatorio* es cualquier subconjunto del espacio muestral Ω de un experimento aleatorio.

Existen distintos tipos de sucesos:

Suceso imposible: Es el suceso vacío $\emptyset$. Este suceso nunca ocurre.

Sucesos elementales: Son los sucesos formados por un solo elemento.

Sucesos compuestos: Son los sucesos formados por dos o más elementos.

Suceso seguro: Es el suceso que contiene el propio espacio muestral Ω. Este suceso siempre ocurre.

4.2 Teoría de conjuntos

Espacio de sucesos

Definición 35 (Espacio de sucesos)**.** Dado un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, el conjunto formado por todos los posibles sucesos de Ω se llama *espacio de sucesos de* Ω y se denota $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ejemplo. Dado el espacio muestral $\Omega = \{a, b, c\}$, su espacio de sucesos es

$$\mathcal{P}(\Omega) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$$

Operaciones entre sucesos

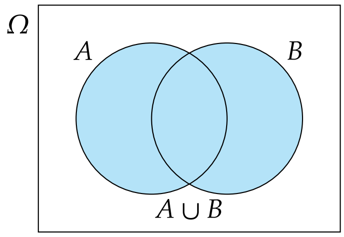
Puesto que los sucesos son conjuntos, por medio de la teoría de conjuntos se pueden definir las siguientes operaciones entre sucesos:

- Unión.
- Intersección.
- Complementario.
- Diferencia.

Unión de sucesos

Definición 36 (Suceso unión)**.** Dados dos sucesos $A, B \subseteq \Omega$, se llama *suceso unión* de A y B, y se denota $A \cup B$, al suceso formado por los elementos de A junto a los elementos de B, es decir,

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

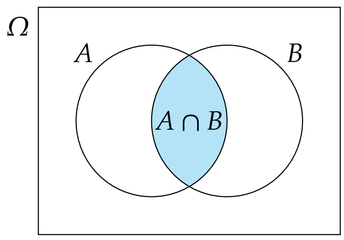


El suceso unión $A \cup B$ ocurre siempre que ocurre A *o* B.

Intersección de sucesos

Definición 37 (Suceso intersección)**.** Dados dos sucesos $A, B \subseteq \Omega$, se llama *suceso intersección* de A y B, y se denota $A \cap B$, al suceso formado por los elementos comunes de A y B, es decir,

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



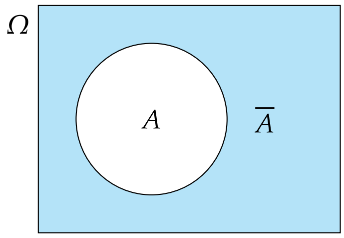
El suceso intersección $A \cap B$ ocurre siempre que ocurren A *y* B.

Diremos que dos sucesos son **incompatibles** si su intersección es vacía.

Contrario de un suceso

Definición 38 (Suceso contrario)**.** Dado suceso $A \subseteq \Omega$, se llama *suceso contrario o complementario* de A, y se denota $\overline{A}$, al suceso formado por los elementos de Ω que no pertenecen a A, es decir,

$$\overline{A} = \{x \,|\, x \notin A\}.$$

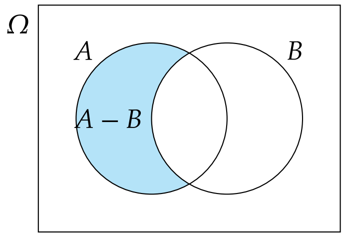


El suceso contrario $\overline{A}$ ocurre siempre que *no* ocurre A.

Diferencia de sucesos

Definición 39 (Suceso diferencia)**.** Dados dos sucesos $A, B \subseteq \Omega$, se llama *suceso diferencia* de A y B, y se denota $A - B$, al suceso formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir,

$$A - B = \{x \,|\, x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$



El suceso diferencia $A - B$ ocurre siempre que ocurre A pero no ocurre B, y también puede expresarse como $A \cap \bar{B}$.

Operaciones entre sucesos

Ejemplo

Dado el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

- La unión de A y B es $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- La intersección de A y B es $A \cap B = \{2, 4\}$.
- El contrario de A es $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.
- Los eventos A y $\overline{A}$ son incompatibles.
- La diferencia de A y B es $A - B = \{6\}$, y la diferencia de B y A es $B - A = \{1, 3\}$.

Álgebra de sucesos

Dados los sucesos $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (idempotencia).
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (conmutativa).
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativa).
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributiva).

5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap E = A$ (elemento neutro).
6. $A \cup E = E$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ (elemento absorbente).
7. $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (elemento simétrico complementario).
8. $\overline{\overline{A}} = A$ (doble contrario).
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (leyes de Morgan).
10. $A \cap B \subseteq A \cup B$.

4.3 Definición de probabilidad

Definición clásica de probabilidad

Definición 40 (Probabilidad — Laplace)**.** Dado un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio donde todos los elementos de Ω son equiprobables, la *probabilidad* de un suceso $A \subseteq \Omega$ es el cociente entre el número de elementos de A y el número de elementos de Ω

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nº casos favorables a A}}{\text{nº casos posibles}}$$

Esta definición es ampliamente utilizada, aunque tiene importantes restricciones:

- Es necesario que todos los elementos del espacio muestral tengan la misma probabilidad de ocurrir (*equiprobabilidad*).
- No puede utilizarse con espacios muestrales infinitos, o de los que no se conoce el número de casos posibles.

¡Ojo! Esto no se cumple en muchos experimentos aleatorios reales.

Definición frecuentista de probabilidad

Teorema 41 (Ley de los grandes números)**.** Cuando un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, las frecuencias relativas de los sucesos del experimento tienden a estabilizarse en torno a cierto número, que es precisamente su probabilidad.

De acuerdo al teorema anterior, podemos dar la siguiente definición

Definición 42 (Probabilidad frecuentista)**.** Dado un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio reproducible, la *probabilidad* de un suceso $A \subseteq \Omega$ es la frecuencia relativa del suceso A en infinitas repeticiones del experimento

$$P(A) = lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$$

Aunque esta definición es muy útil en experimentos científicos reproducibles, también tiene serios inconvenientes, ya que

- Sólo se calcula una aproximación de la probabilidad real.
- La repetición del experimento debe ser en las mismas condiciones.

Definición axiomática de probabilidad

Definición 43 (Kolmogórov)**.** Dado un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, una función de *probabilidad* es una aplicación que asocia a cada suceso $A \subseteq \Omega$ un número real $P(A)$, conocido como probabilidad de A, que cumple los siguientes axiomas:

1. La probabilidad de un suceso cualquiera es positiva o nula,
$$P(A) \geq 0.$$
2. La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad,
$$P(\Omega) = 1.$$
3. La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

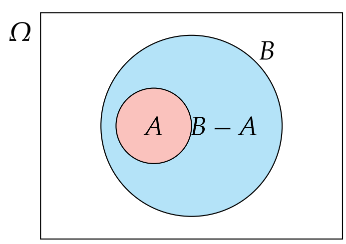
Consecuencias de los axiomas de probabilidad

A partir de los axiomas de la definición de probabilidad se pueden deducir los siguientes resultados:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A) \leq 1$.
5. Si A y B son sucesos compatibles, es decir, su intersección no es vacía, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
6. Si el suceso A está compuesto por los sucesos elementales $e_1, e_2, ..., e_n$, entonces
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i).$$

Proof.

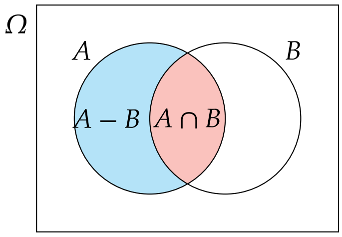
1. $\overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $\emptyset = \overline{\Omega} \Rightarrow P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.
3. $B = A \cup (B - A)$. Como A y $B - A$ son incompatibles, $P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$. Si pensamos en probabilidades como áreas, es fácil de ver gráficamente,



4. $A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

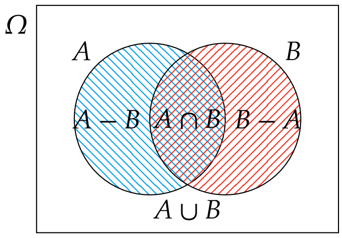
5. $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. Como $A - B$ y $A \cap B$ son incompatibles, $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

   Si pensamos en probabilidades como áreas, es fácil de ver gráficamente,



6. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$. As $A - B$, $B - A$ and $A \cap B$ are incompatible, $P(A \cup B) = P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B) = P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$.

   Si pensamos en probabilidades como áreas, es fácil de ver gráficamente,



7. $A = \{e_1, \cdots, e_n\} = \{e_1\} \cup \cdots \cup \{e_n\} \Rightarrow P(A) = P(\{e_1\} \cup \cdots \cup \{e_n\}) = P(\{e_1\}) + \cdots P(\{e_n\})$.

Interpretación de la probabilidad

Como ha quedado claro en los axiomas anteriores, la probabilidad de un evento A es un número real $P(A)$ que está siempre entre 0 y 1.

En cierto modo, este número expresa la verosimilitud del evento, es decir, la confianza que hay en que ocurra A en el experimento. Por tanto, también nos da una medida de la incertidumbre sobre el suceso.

- La mayor incertidumbre corresponde a $P(A) = 0.5$ (Es tan probable que ocurra A como que no ocurra).
- La menor incertidumbre corresponde a $P(A) = 1$ (A sucederá con absoluta certeza) y $P(A) = 0$ (A no sucederá con absoluta certeza).

Cuando $P(A)$ está más próximo a 0 que a 1, la confianza en que no ocurra A es mayor que la de que ocurra A. Por el contrario, cuando $P(A)$ está más próximo a 1 que a 0, la confianza en que ocurra A es mayor que la de que no ocurra A.

4.4 Probabilidad condicionada

Experimentos condicionados

En algunas ocasiones, es posible que tengamos alguna información sobre el experimento antes de su realización. Habitualmente esa información se da en forma de un suceso B del mismo espacio muestral que sabemos que es cierto antes de realizar el experimento.

En tal caso se dice que el suceso B es un suceso *condicionante*, y la probabilidad de otro suceso A se conoce como **probabilidad condicionada** y se expresa

$$P(A|B).$$

Esto debe leerse como *probabilidad de A dado B* o *probabilidad de A bajo la condición de B*.

Experimentos condicionados

Los condicionantes suelen cambiar el espacio muestral del experimento y por tanto las probabilidades de sus sucesos.

Supongamos que tenemos una muestra de 100 hombres y 100 mujeres con las siguientes frecuencias

	No fumadores	Fumadores
Mujeres	80	20
Hombres	60	40

Entonces, usando la definición frecuentista de probabilidad, la probabilidad de que una persona elegida al azar sea fumadora es

$$P(\text{Fumadora}) = \frac{60}{200} = 0.3.$$

Sin embargo, si se sabe que la persona elegida es mujer, entonces la muestra se reduce a la primera fila, y la probabilidad de ser fumadora es

$$P(\text{Fumadora}|\text{Mujer}) = \frac{20}{100} = 0.2.$$

Probabilidad condicionada

Definición 44 (Probabilidad condicionada)**.** Dado un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, y dos dos sucesos $A, B \subseteq \Omega$, la probabilidad de A *condicionada* por B es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

siempre y cuando, $P(B) \neq 0$.

Esta definición permite calcular probabilidades sin tener que alterar el espacio muestral original del experimento.

Ejemplo. En el ejemplo anterior

$$P(\text{Fumadora}|\text{Mujer}) = \frac{P(\text{Fumadora} \cap \text{Mujer})}{P(\text{Mujer})} = \frac{20/200}{100/200} = \frac{20}{100} = 0.2.$$

Probabilidad del suceso intersección

A partir de la definición de probabilidad condicionada es posible obtener la fórmula para calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Ejemplo. En una población hay un 30% de fumadores y se sabe que el 40% de los fumadores tiene cáncer de pulmón. La probabilidad de que una persona elegida al azar sea fumadora y tenga cáncer de pulmón es

$$P(\text{Fumadora} \cap \text{Cáncer}) = P(\text{Fumadora})P(\text{Cáncer}|\text{Fumadora}) = 0.3 \times 0.4 = 0.12.$$

Independencia de sucesos

En ocasiones, la ocurrencia del suceso condicionante no cambia la probabilidad original del suceso principal.

Definición 45 (Sucesos independientes)**.** Dado un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, dos sucesos $A, B \subseteq \Omega$ son *independientes* si la probabilidad de A no se ve alterada al condicionar por B, y viceversa, es decir,

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{and} \quad P(B|A) = P(B),$$

si $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$.

Esto significa que la ocurrencia de uno evento no aporta información relevante para cambiar la incertidumbre sobre el otro.

Cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

4.5 Espacio probabilístico

Espacio probabilístico

Definición 46 (Espacio probabilístico)**.** Un *espacio probabilístico* de un experimento aleatorio es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde

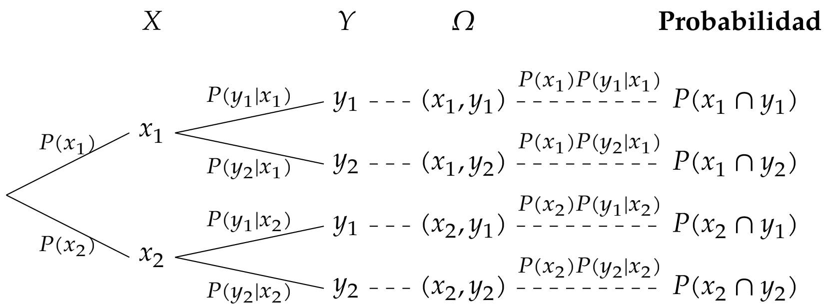
- Ω es el espacio muestral del experimento.
- $\mathcal{F}$ es un un conjunto de sucesos del experimento.
- P es una función de probabilidad.

Si conocemos la probabilidad de todos los elementos de Ω, entonces podemos calcular la proabilidad de cualquier suceso en $\mathcal{F}$ y se puede construir fácilmente el espacio probabilístico.

Construcción del espacio probabilístico

Para determinar la probabilidad de cada suceso elemental se puede utilizar un diagrama de árbol, mediante las siguientes reglas:

1. Para cada nodo del árbol, etiquetar la rama que conduce hasta él con la probabilidad de que la variable en ese nivel tome el valor del nodo, condicionada por los sucesos correspondientes a sus nodos antecesores en el árbol.
2. La probabilidad de cada suceso elemental en las hojas del árbol es el producto de las probabilidades de las ramas que van desde la raíz a la hoja del árbol.

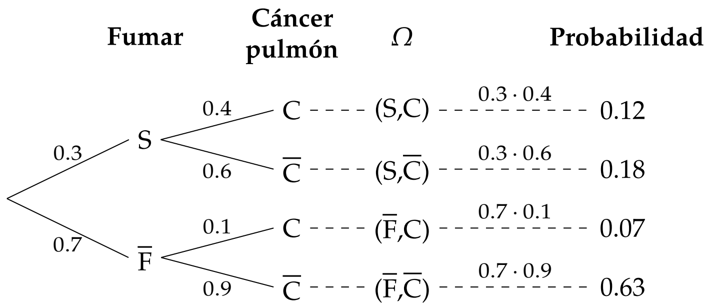


Árboles de probabilidad con variables dependientes

Ejemplo de dependencia del cáncer con respecto al tabaco

Sea una población en la que el 30% de las personas fuman, y que la incidencia del cáncer de pulmón en fumadores es del 40% mientras que en los no fumadores es del 10%.

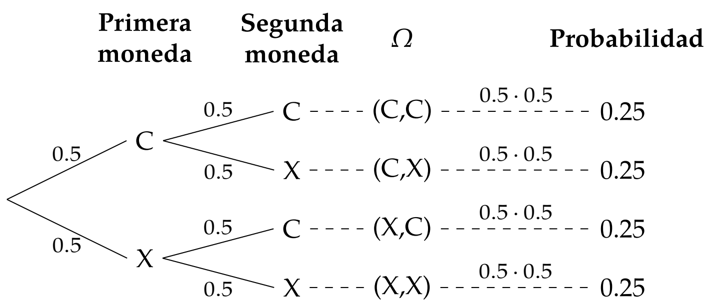
El espacio probabilístico del experimento aleatorio que consiste en elegir una persona al azar y medir las variables Fumar y Cáncer de pulmón se muestra a continuación.



Árboles de probabilidad con variables independientes

Ejemplo de independencia en el lanzamiento de dos monedas

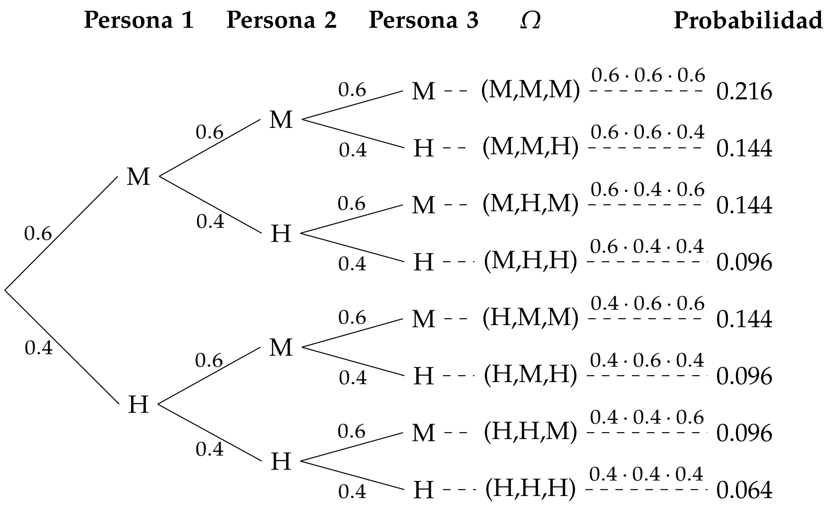
El árbol de probabilidad asociado al experimento aleatorio que consiste en el lanzamiento de dos monedas se muestra a continuación.



Árboles de probabilidad con variables independientes

Ejemplo de independencia en la elección de una muestra aleatoria de tamaño 3

Dada una población en la que hay un 40% de hombres y un 60% de mujeres, el experimento aleatorio que consiste en tomar una muestra aleatoria de tres personas tiene el árbol de probabilidad que se muestra a continuación.

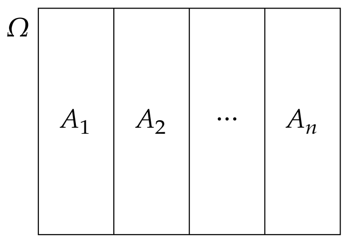


4.6 Teorema de la probabilidad total

Sistema completo de sucesos

Definición 47 (Sistema completo de sucesos)**.** Una colección de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de un mismo espacio muestral Ω es un *sistema completo* si cumple las siguientes condiciones:

1. La unión de todos es el espacio muestral: $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.
2. Son incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$.



En realidad un sistema completo de sucesos es una partición del espacio muestral de acuerdo a algún atributo, como por ejemplo el sexo o el grupo sanguíneo.

Teorema de la probabilidad total

Conocer las probabilidades de un determinado suceso en cada una de las partes de un sistema completo puede ser útil para calcular su probabilidad.

Teorema 48 (Probabilidad total)**.** Dado un sistema completo de sucesos $A_1, \ldots, A_n$ y un suceso B de un espacio muestral Ω, la probabilidad de cualquier suceso B del espacio muestral se puede calcular mediante la fórmula

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Teorema de la probabilidad total

Demostración

La demostración del teorema es sencilla, ya que al ser $A_1, \ldots, A_n$ un sistema completo tenemos

$$B = B \cap E = B \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

y como estos sucesos son incompatibles entre sí, se tiene

$$\begin{aligned} P(B) &= P((B \cap A_1) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n) = \\ &= P(A_1)P(B/A_1) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i). \end{aligned}$$

Total probability theorem

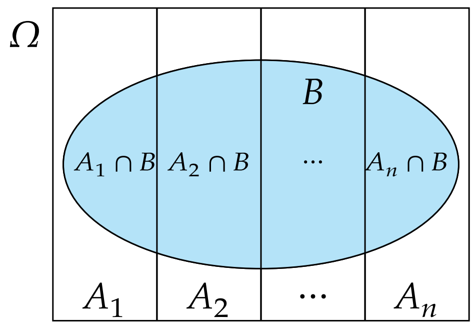
Proof

The proof of the theorem is quite simple. As $A_1, \ldots, A_n$ is a partition of Ω, we have

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \cdots \cup (B \cap A_n).$$

And all the events of this union are mutually incompatible as $A_1, \ldots, A_n$ are, thus

$$\begin{aligned} P(B) &= P((B \cap A_1) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n) = \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned}$$



Teorema de la probabilidad total

Un ejemplo de diagnóstico

Un determinado síntoma S puede ser originado por una enfermedad E pero también lo pueden presentar las personas sin la enfermedad. Sabemos que la prevalencia de la enfermedad E es 0.2. Además, se sabe que el 90% de las personas con la enfermedad presentan el síntoma, mientras que sólo el 40% de las personas sin la enfermedad lo presentan.

Si se toma una persona al azar de la población, *¿qué probabilidad hay de que tenga el síntoma?*

Para responder a la pregunta se puede aplicar el teorema de la probabilidad total usando el sistema completo $\{E, \overline{E}\}$:

$$P(S) = P(E)P(S|E) + P(\overline{E})P(S|\overline{E}) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.5.$$

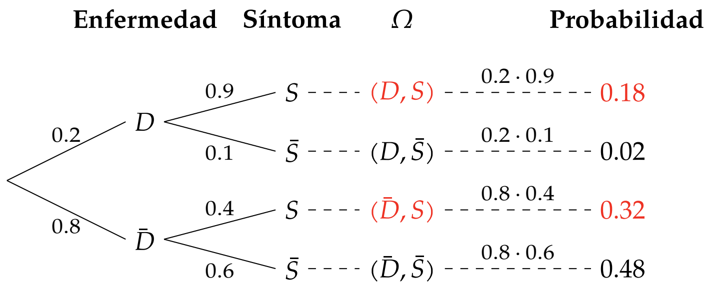
Es decir, la mitad de la población tendrá el síntoma.

¡En el fondo se trata de una media ponderada de probabilidades!

Teorema de la probabilidad total

Cálculo con el árbol de probabilidad

La respuesta a la pregunta anterior es evidente a la luz del árbol de probabilidad del espacio probabilístico del experimento.



$$
\begin{aligned}
P(S) &= P(E,S) + P(\overline{E},S) = P(E)P(S|E) + P(\overline{E})P(S|\overline{E}) \\
&= 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.18 + 0.32 = 0.5.
\end{aligned}
$$

4.7 Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Los sucesos de un sistema completo de sucesos $A_1, \cdots, A_n$ también pueden verse como las distintas hipótesis ante un determinado hecho B.

En estas condiciones resulta útil poder calcular las probabilidades a posteriori $P(A_i|B)$ de cada una de las hipótesis.

Teorema 49 (Bayes)**.** Dado un sistema completo de sucesos $A_1, \ldots, A_n$ y un suceso B de un espacio muestral Ω y otro suceso B del mismo espacio muestral, la probabilidad de cada suceso A_i $i = 1, \ldots, n$ condicionada por B puede calcularse con la siguiente fórmula

$$
P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}.
$$

Teorema de Bayes

Un ejemplo de diagnóstico

En el ejemplo anterior, una pregunta más interesante es qué diagnosticar a una persona que presenta el síntoma.

En este caso se puede interpretar E y $\overline{E}$ como las dos posibles hipótesis para el síntoma S. Las probabilidades a priori para ellas son $P(E) = 0.2$ y $P(\overline{E}) = 0.8$. Esto quiere decir que si no se dispone de información sobre el síntoma, el diagnóstico será que la persona no tiene la enfermedad.

Sin embargo, si al reconocer a la persona se observa que presenta el síntoma, dicha información condiciona a las hipótesis, y para decidir entre ellas es necesario calcular sus probabilidades a posteriori, es decir,

$$
P(E|S) \text{ y } P(\overline{E}|S)
$$

Teorema de Bayes

Un ejemplo de diagnóstico

Para calcular las probabilidades a posteriori se puede utilizar el teorema de Bayes:

$$P(E|S) = \frac{P(E)P(S|E)}{P(E)P(S|E) + P(\overline{E})P(S|\overline{E})} = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4} = \frac{0.18}{0.5} = 0.36,$$
$$P(\overline{E}|S) = \frac{P(\overline{E})P(S|\overline{E})}{P(E)P(S|E) + P(\overline{E})P(S|\overline{E})} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4} = \frac{0.32}{0.5} = 0.64.$$

Como se puede ver la probabilidad de tener la enfermedad ha aumentado. No obstante, la probabilidad de no tener la enfermedad sigue siendo mayor que la de tenerla, y por esta razón el diagnóstico seguirá siendo que no tiene la enfermedad.

En este caso se dice que el síntoma S *no es determinante* a la hora de diagnosticar la enfermedad.

4.8 Tests diagnósticos

Tests diagnósticos

En Epidemiología es común el uso de test para diagnosticar enfermedades.

Generalmente estos test no son totalmente fiables, sino que hay cierta probabilidad de acierto o fallo en el diagnóstico, que suele representarse en la siguiente tabla:

	Presencia enfermedad E	Ausencia enfermedad $\overline{D}$
Test positivo $+$	Verdadero positivo VP	Falso positivo FP
Test negativo $-$	Falso negativo FN	Verdadero Negativo VN

Sensibilidad y especificidad de un test diagnóstico

La fiabilidad de un test diagnóstico depende de las siguientes probabilidades.

Definición 50 (Sensibilidad)**.** La *sensibilidad* de un test diagnóstico es la proporción de resultados positivos del test en personas con la enfermedad,

$$P(+|E) = \frac{VP}{VP + FN}$$

Definición 51 (Especificidad)**.** La *especificidad* de un test diagnóstico es la proporción de resultados negativos del test en personas sin la enfermedad,

$$P(-|\overline{E}) = \frac{VN}{VN + FP}$$

Interpretación de la sensibilidad y la especificidad

Normalmente existe un balance entre la sensibilidad y la especificidad.

Un test con una alta sensibilidad detectará la enfermedad en la mayoría de las personas enfermas, pero también dará más falsos positivos que un test menos sensible. De este modo, un resultado positivo en un test con una gran sensibilidad no es muy útil para confirmar la enfermedad, pero un resultado negativo es útil para descartar la enfermedad, ya que raramente da resultados negativos en personas con la enfermedad.

Por otro lado, un test con una alta especificidad descartará la enfermedad en la mayoría de las personas sin la enfermedad, pero también producirá más falsos negativos que un test menos específico. Así, un resultado negativo en un test con una gran especificidad no es útil para descartar la enfermedad, pero un resultado positivo es muy útil para confirmar la enfermedad, ya que raramente da resultados positivos en personas sin la enfermedad.

Interpretación de la sensibilidad y la especificidad

Decidir entre un test con una gran sensibilidad o un test con una gran especificidad depende del tipo de enfermedad y el objetivo del test. En general, utilizaremos un test sensible cuando:

- La enfermedad es grave y es importante detectarla.
- La enfermedad es curable.
- Los falsos positivos no provocan traumas serios.

Y utilizaremos un test específico cuando:

- La enfermedad es importante pero difícil o imposible de curar.
- Los falsos positivos pueden provocar traumas serios.
- El tratamiento de los falsos positivos puede tener graves consecuencias.

Valores predictivos de un test diagnóstico

Pero el aspecto más importante de un test diagnóstico es su poder predictivo, que se mide con las siguientes probabilidades a posteriori.

Definición 52 (Valor predictivo positivo VPP)**.** El *valor predictivo positivo* de un test diagnóstico es la proporción de personas con la enfermedad entre las personas con resultado positivo en el test,

$$P(E|+) = \frac{VP}{VP + FP}$$

Definición 53 (Valor predictivo negativo VPN)**.** El *valor predictivo negativo* de un test diagnóstico es la proporción de personas sin la enfermedad entre las personas con resultado negativo en el test,

$$P(\overline{E}|-) = \frac{VN}{VN + FN}$$

Interpretación de los valores predictivos

Los valores predictivos positivo y negativo permiten confirmar o descartar la enferemedad, respectivamente, si alcanzan al menos el umbral de 0.5.

$$\begin{aligned} VPP > 0.5 &\quad \Rightarrow \quad \text{Diagnosticar la enfermedad} \\ VPN > 0.5 &\quad \Rightarrow \quad \text{Diagnosticar la no enfermedad} \end{aligned}$$

No obstante, estas probabilidades dependen de la proporción de personas con la enfermedad en la población $P(E)$ que se conoce como **prevalencia** de la enfermedad. Pueden calcularse a partir de la sensibilidad y la especificidad del test diagnóstico usando el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} VPP = P(E|+) &= \frac{P(E)P(+|E)}{P(E)P(+|E) + P(\overline{E})P(+|\overline{E})} \\ VPN = P(\overline{E}|-) &= \frac{P(\overline{E})P(-|\overline{E})}{P(E)P(-|E) + P(\overline{E})P(-|\overline{E})} \end{aligned}$$

Así, con enfermedades frecuentes, el valor predictivo positivo aumenta, y con enfermedades raras, el valor predictivo negativo aumenta.

Test diagnósticos

Ejemplo

Un test diagnóstico para la gripe se ha aplicado a una muestra aleatoria de 1000 personas. Los resultados aparecen resumidos en la siguiente tabla.

	Presencia de gripe E	Ausencia de gripe $\overline{E}$
Test +	95	90
Test −	5	810

Según esta muestra, la prevalencia de la gripe puede estimarse como

$$P(E) = \frac{95+5}{1000} = 0.1.$$

La sensibilidad del test diagnóstico es

$$P(+|E) = \frac{95}{95+5} = 0.95.$$

Y la especificidad es

$$P(-|\overline{E}) = \frac{810}{90+810} = 0.9.$$

Test diagnósticos

Continuación del ejemplo

El valor predictivo positivo del test es

$$VPP = P(E|+) = \frac{95}{95+90} = 0.5135.$$

Como este valor es mayor que 0.5, eso significa que se diagnosticará la gripe si el resultado del test es positivo. No obstante, la confianza en el diagnóstico será baja, ya que el valor es poco mayor que 0.5.

Por otro lado, el valor predictivo negativo es

$$VPN = P(\overline{E}|-) = \frac{810}{5+810} = 0.9939.$$

Como este valor es casi 1, eso significa que es casi seguro que no se tiene la gripe cuando el resultado del test es negativo.

Así, se puede concluir que este test es muy potente para descartar la gripe, pero no lo est tanto para confirmarla.

Razón de verosimilitud de un test diagnóstico

La siguientes medidas también se derivan de la sensibilidad y la especificidiad de un test diagnóstico.

Definición 54 (Razón de verosimilitud positiva $RV+$)**.** La *razón de verosimilitud positiva* de un test diagnóstico es el cociente entre la probabilidad de un resultado positivo en personas con la enfermedad y personas sin la enfermedad, respectivamente.

$$RV+ = \frac{P(+|E)}{P(+|\overline{E})} = \frac{\text{Sensibilidad}}{1-\text{Especificidad}}$$

Definición 55 (Razón de verosimilitud negativa $RV-$)**.** La *razón de verosimilitud negativa* de un test diagnóstico es el cociente entre la probabilidad de un resultado negativo en personas con la enfermedad y personas sin la enfermedad, respectivamente.

$$RV- = \frac{P(-|E)}{P(-|\overline{E})} = \frac{1 - \text{Sensibilidad}}{\text{Especificidad}}$$

Interpretación de las razones de verosimilitud

La razón de verosimilitud positiva puede interpretarse como el número de veces que un resultado positivo es más probable en personas con la enfermedad que en personas sin la enfermedad.

Por otro lado, la razón de verosimilitud negativa puede interpretarse como el número de veces que un resultado negativo es más probable en personas con la enfermedad que en personas sin la enfermedad.

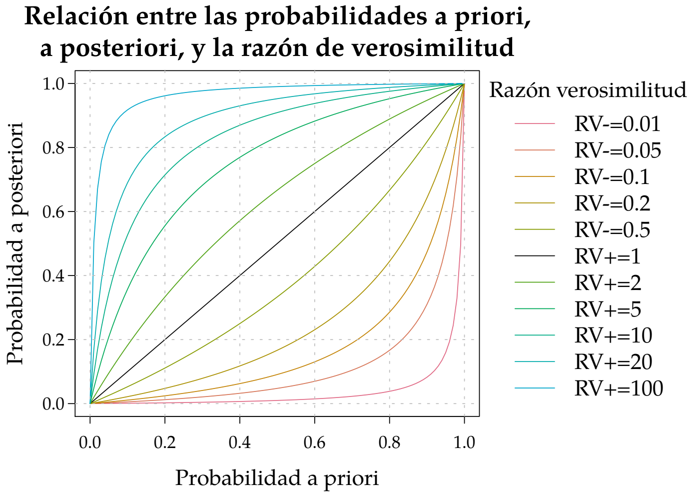
Las probabilidades a posteriori pueden calculares a partir de las probabilidades a priori usando las razones de verosimilitud

$$P(E|+) = \frac{P(E)P(+|E)}{P(E)P(+|E) + P(\overline{E})P(+|\overline{E})} = \frac{P(E)RV+}{1 - P(E) + P(E)RV+}$$

Así,

- Una razón de verosimilitud positiva mayor que 1 aumenta la probabilidad de la enfermedad.
- Una razón de verosimilitud positiva menor que 1 disminuye la probabilidad de la enfermedad.
- Una razón de verosimilitud 1 no cambia la probabilidad a priori de la de tener la enfermedad.

Interpretación de las razones de verosimilitud



5 Variables Aleatorias

Variables aleatorias

Cuando seleccionamos una muestra al azar de una población estamos realizando un experimento aleatorio y cualquier variable estadística medida a partir de la muestra será una variable aleatoria porque sus valores dependerán del azar.

Definición 56 (Variable Aleatoria)**.** Una *variable aleatoria* X es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral de un experimento aleatorio.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Al conjunto de posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le llama *rango* o *recorrido* de la variable, y se representa por $\mathrm{Ran}(X)$.

En el fondo, una variable aleatoria es una variable cuyos valores provienen de la realización de un experimento aleatorio, y por tanto, tendrá asociada una determinada distribución de probabilidad.

Ejemplo. La variable X que mide el resultado del lanzamiento de un dado es una variable aleatoria y su rango es

$$\mathrm{Ran}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Tipos de variables aleatorias

Las variables aleatorias se clasifican en dos tipos:

Discretas (VAD): Toman valores aislados y su rango es numerable. Ejemplo. Número de hijos, número de cigarrillos, número de asignaturas aprobadas, etc.

Continuas (VAC): Toman valores en un intervalo real y su rango es no numerable Ejemplo. Peso, estatura, edad, nivel de colesterol, etc.

Los modelos probabilísticos de cada tipo de variables tienen características diferenciadas y por eso se estudiarán por separado. En este capítulo se estudian los modelos probabilísticos de las variables aleatorias discretas.

5.1 Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Como los valores de una variable aleatoria están asociados a los sucesos elementales del correspondiente experimento aleatorio, cada valor tendrá asociada una probabilidad.

Definición 57 (Función de probabilidad)**.** La *función de probabilidad* de una variable aleatoria discreta X es una función $f(x)$ que asocia a cada valor de la variable su probabilidad

$$f(x_i) = P(X = x_i).$$

Las probabilidades también pueden acumularse, al igual que se acumulaban las frecuencias en las muestras.

Definición 58 (Función de distribución)**.** La *función de distribución* de una variable aleatoria discreta X es una función $F(x)$ que asocia a cada valor x_i de la variable la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que x_i,

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + \cdots + f(x_i).$$

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Al rango de la variable, junto a su función de probabilidad o de distribución, se le llama **Distribución de probabilidad** de la variable, y se suele representar en forma de tabla

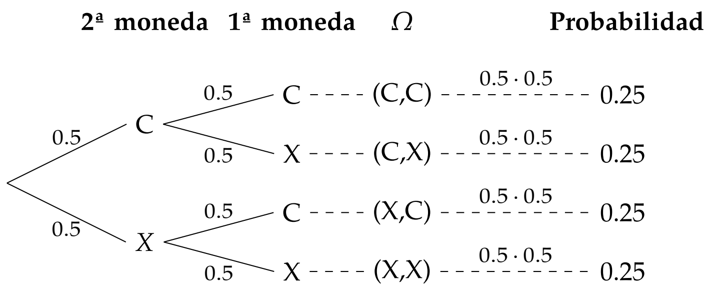
X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\sum$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$	1
$F(x)$	$F(x_1)$	$F(x_2)$	$\cdots$	$F(x_n)=1$	

Al igual que la distribución de frecuencias de una variable reflejaba cómo se distribuían los valores de la variable en una muestra, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria sirve para reflejar cómo se distribuyen los valores de dicha variable en toda la población.

Distribución de probabilidad de una variable discreta

Ejemplo del lanzamiento de dos monedas

Sea X la variable aleatoria que mide el número de caras en el lanzamiento de dos monedas. El árbol de probabilidad del espacio probabilístico del experimento se muestra a continuación.



y según esto, su distribución de probabilidad es

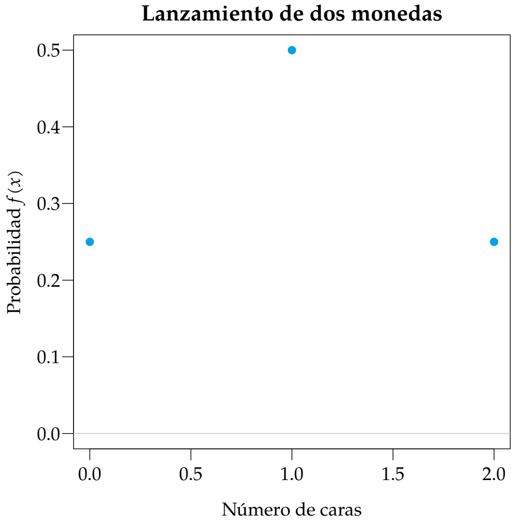
X	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.5	0.25
$F(x)$	0.25	0.75	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 0.25 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 0.75 & \text{si } 1\leq x<2 \\ 1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

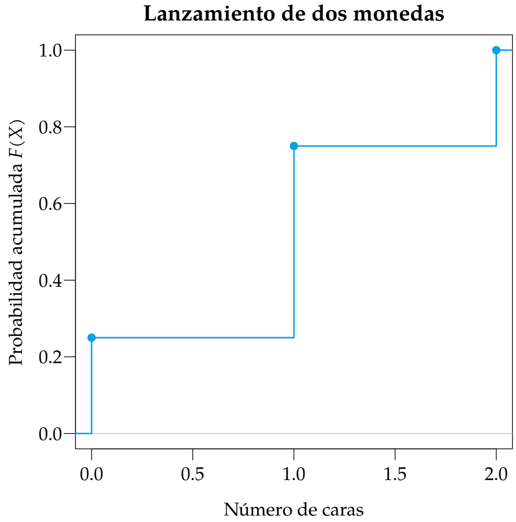
Gráficos de la distribución de probabilidad

Ejemplo del lanzamiento de dos monedas

Función de probabilidad



Función de distribución



Estadísticos poblacionales

Al igual que para describir las variables en las muestras se utilizan estadísticos descriptivos muestrales, para describir las características de las variables aleatorias se utilizan también estadísticos poblacionales.

La definición de los estadísticos poblacionales es análoga a la de los muestrales, pero utilizando probabilidades en lugar de frecuencias relativas.

Los más importantes son[1]:

- Media o esperanza matemática:
$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$
- Varianza:
$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$
- Desviación típica:
$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

Estadísticos poblacionales

Ejemplo del lanzamiento de dos monedas

En el experimento aleatorio del lanzamiento de dos monedas, a partir de la distribución de probabilidad

X	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.5	0.25
$F(x)$	0.25	0.75	1

[1]Para distinguirlos de los muestrales se suelen representar con letras griegas

se pueden calcular fácilmente los estadísticos poblacionales

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 = 1 \text{ cara},$$
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = (0^0 \cdot 0.25 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.25) - 1^2 = 0.5 \text{ caras}^2,$$
$$\sigma = +\sqrt{0.5} = 0.71 \text{ caras}.$$

Modelos de distribución de probabilidad

De acuerdo al tipo de experimento en el que se mide la variable aleatoria, existen diferentes modelos de distribución de probabilidad. Los más importantes son

- Distribución Uniforme.
- Distribución Binomial.
- Distribución de Poisson.

5.2 Distribución Uniforme discreta

Distribución Uniforme $U(a, b)$

Cuando por la simetría del experimento, todos los valores $a = x_1, \ldots, x_k = b$ de una variable discreta X son igualmente probables, se dice que la variable sigue un *modelo de distribución uniforme*.

Definición 59 (Distribución uniforme $U(a, b)$)**.** Se dice que una variable aleatoria X sigue un *modelo de distribución uniforme* de parámetros a, b, y se nota $X \sim U(a, b)$, si su rango es $Ran(X) = \{a, a+1, \ldots, b\}$, y su función de probabilidad vale

$$f(x) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Obsérvese que a y b son el mínimo y el máximo del rango respectivamente.

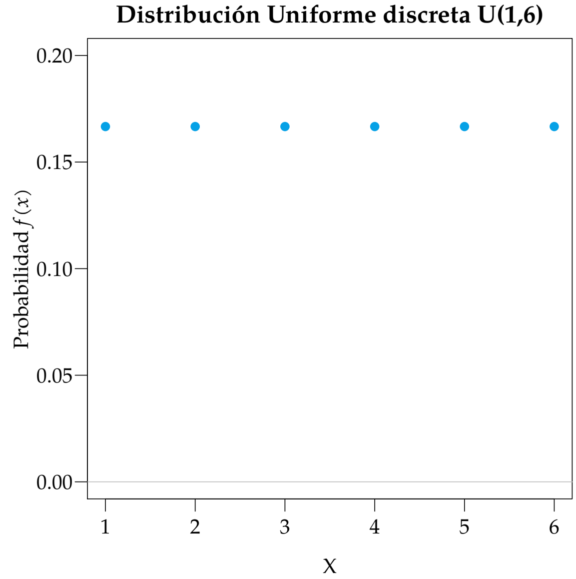
Su media y varianza valen

$$\mu = \sum_{i=0}^{b-a} \frac{a+i}{b-a+1} = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \sum_{i=0}^{b-a} \frac{(a+i-\mu)^2}{b-a+1} = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

Distribución Uniforme $U(a, b)$

Ejemplo del lanzamiento de un dado

La variable que mide el número obtenido al lanzar un dado sigue un modelo de distribución uniforme $U(1, 6)$.



5.3 Distribución Binomial

Distribución Binomial

La distribución binomial corresponde a una variable aleatoria medida en un experimento aleatorio con las siguientes características:

- El experimento consiste en una secuencia de n repeticiones de un mismo ensayo aleatorio.
- Los ensayos se realizan bajo idénticas condiciones, y cada uno de ellos tiene únicamente dos posibles resultados conocidos como *Éxito* o *Fracaso*.
- Los ensayos son independientes.
- La probabilidad de éxito es idéntica para todos los ensayos y vale $P(\text{Éxisto}) = p$.

En estas condiciones, la variable aleatoria X que mide le número de éxitos obtenidos en los n ensayos sigue un *modelo de distribución binomial* de parámetros n y p.

Distribución Binomial $B(n, p)$

Definición 60 (Distribución Binomial $(B(n, p))$**.** Se dice que una variable aleatoria X sigue un *modelo de distribución binomial* de parámetros n y p, y se nota $X \sim B(n, p)$, si su recorrido es $Ran(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$ y su función de probabilidad vale

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Obsérvese que n es conocido como el número de repeticiones de la prueba o ensayo y p como la probabilidad de Éxito en cada repetición.

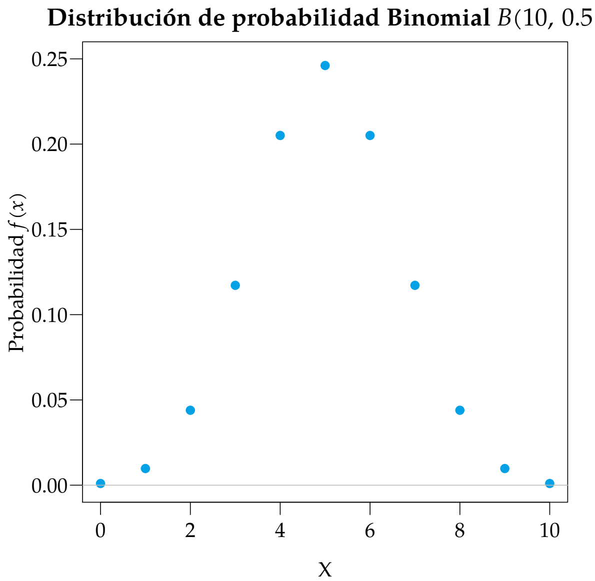
Su media y varianza valen

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p).$$

Distribución Binomial $B(n, p)$

Ejemplo de 10 lanzamientos de una moneda

La variable que mide el número de caras obtenidos al lanzar 10 veces una moneda sigue un modelo de distribución binomial $B(10, 0.5)$.



Distribución Binomial $B(n, p)$

Ejemplo de 10 lanzamientos de una monedas

Sea $X \sim B(10, 0.5)$ la variable que mide el número de caras en 10 lanzamientos de una moneda. Entonces,

- La probabilidad de sacar 4 caras es

$$f(4) = \binom{10}{4} 0.5^4 (1 - 0.5)^{10-4} = \frac{10!}{4!\,6!} 0.5^4 0.5^6 = 210 \cdot 0.5^{10} = 0.2051.$$

- La probabilidad de sacar dos o menos caras es

$$\begin{aligned} F(2) &= f(0) + f(1) + f(2) = \\ &= \binom{10}{0} 0.5^0 (1 - 0.5)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.5^1 (1 - 0.5)^{10-1} + \binom{10}{2} 0.5^2 (1 - 0.5)^{10-2} = \\ &= 0.0547. \end{aligned}$$

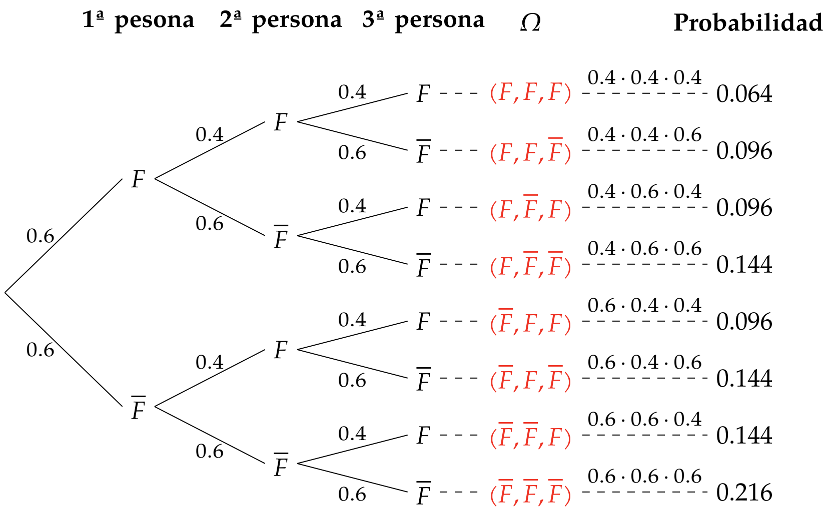
- Y el número esperado de caras es

$$\mu = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ caras}.$$

Distribución Binomial $B(n, p)$

Ejemplo de una muestra aleatoria con reemplazamiento

En una población hay un 40% de fumadores. La variable X que mide el número de fumadores en una muestra aleatoria con reemplazamiento de 3 personas sigue un modelo de distribución binomial $X \sim B(3, 0.6)$.



$$f(0) = \binom{3}{0}0.4^0(1-0.4)^{3-0} = 0.6^3, \qquad f(1) = \binom{3}{1}0.4^1(1-0.4)^{3-1} = 3\cdot 0.4\cdot 0.6^2,$$
$$f(2) = \binom{3}{2}0.4^2(1-0.4)^{3-2} = 3\cdot 0.4^2\cdot 0.6, \qquad f(3) = \binom{3}{3}0.4^3(1-0.4)^{3-3} = 0.4^3.$$

5.4 Distribución de Poisson

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson corresponde a una variable medida en un experimento aleatorio con las siguientes características:

- El experimento consiste en observar la aparición de sucesos puntuales en un intervalo fijo de tiempo o espacio. Por ejemplo, número de nacimientos en un mes, número de correos electrónicos en una hora, número de glóbulos rojos en un volumen de sangre, etc.
- Los sucesos ocurren independientemente.
- El experimento produce, a largo plazo, el mismo número medio de sucesos puntuales λ en el intervalo considerado.

En estas circunstancias, la variable aleatoria X que mide el número de ocurrencias del suceso en el intervalo considerado sigue un *modelo de distribución de Poisson* de parámetro λ.

Distribución de Poisson $P(\lambda)$

Definición 61 (Distribución de Poisson $P(\lambda)$)**.** Se dice que una variable aleatoria X sigue un *modelo de distribución de Poisson* de parámetro λ, y se nota $X \sim P(\lambda)$, si su rango es $Ran(X) = \{0, 1, \ldots, \infty\}$, y su función de probabilidad vale

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}.$$

Obsérvese que λ es el número medio de sucesos en el intervalo unidad de referencia, y cambiará si se cambia la amplitud del intervalo.

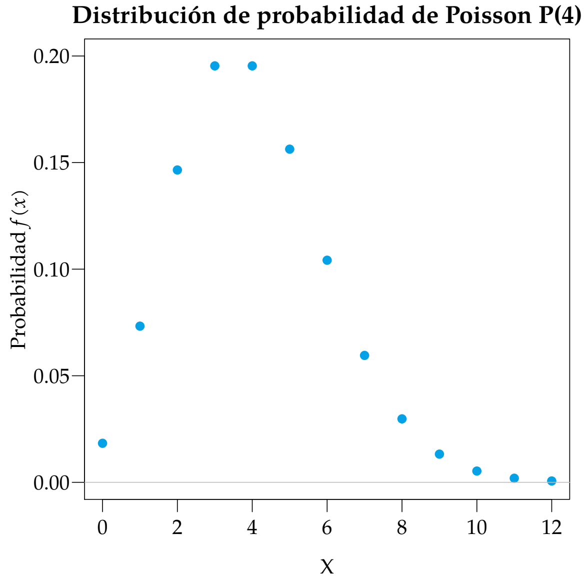
Su media y varianza valen

$$\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda.$$

Distribución de Poisson $P(\lambda)$

Ejemplo del número de nacimientos en una ciudad

En una ciudad hay 4 nacimientos diarios por término medio. La variable aleatoria X que mide el número de nacimientos diarios en la ciudad sigue un modelo de distribución de probabilidad de Poisson $X \sim P(4)$.



Distribución de Poisson $P(\lambda)$

Ejemplo del número de nacimientos en una ciudad

Sea $X \sim P(4)$ la variable que mide el número de ingresos diarios en un hospital. Entonces,

- La probabilidad de que un día cualquiera se produzcan 5 nacimientos es

$$f(5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!} = 0.1563.$$

- La probabilidad de que un día se produzcan menos de 2 nacimientos es

$$F(1) = f(0) + f(1) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!} = 5e^{-4} = 0.0916.$$

- La probabilidad de que un día se produzcan más de un 1 nacimiento es

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.0916 = 0.9084.$$

Aproximación del modelo Binomial mediante el Poisson

Ley de los casos raros

El modelo de distribución de Poisson surge a partir del modelo de distribución Binomial, cuando el número de repeticiones del ensayo tiende a infinito y la probabilidad de Éxito tiende a cero.

Teorema 62 (Ley de los casos raros)**.** La distribución Binomial $X \sim B(n,p)$ tiende a la distribución de Poisson $P(\lambda)$, con $\lambda = n \cdot p$, cuando n tiende a infinito y p tiende a cero, es decir,

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}.$$

En la práctica, esta aproximación suele utilizarse para $n \ge 30$ y $p \le 0.1$.

Aproximación del modelo Binomial mediante el Poisson

Ejemplo

Se sabe que una vacuna produce una reacción adversa en el 4% de los casos. Si se vacunan una muestra 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 2 personas con reacción adversa?

La variable que mide el número de personas con reacción adversa en la muestra sigue un modelo de distribución binomial $X \sim B(50, 0.04)$, pero como $n = 50 > 30$ y $p = 0.04 < 0.1$, se cumplen las condiciones de la ley de los casos raros y se utilizar la distribución de Poisson $P(50 \cdot 0.04) = P(2)$ para realizar los cálculos.

$$
\begin{aligned}
P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) = 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} - e^{-2}\frac{2^1}{1!} - e^{-2}\frac{2^2}{2!} = \\
= 1 - 5e^{-2} = 0.3233.
\end{aligned}
$$

6 Variables aleatorias continuas

Variables aleatorias continuas

Las variables aleatorias continuas, a diferencia de las discretas, se caracterizan porque pueden tomar cualquier valor en un intervalo real. Es decir, el conjunto de valores que pueden tomar no sólo es infinito, sino que además es no numerable.

Tal densidad de valores hace imposible el cálculo de las probabilidades de cada uno de ellos, y por tanto no podemos definir los modelos de distribución de probabilidad por medio de una función de probabilidad como en el caso discreto.

Por otro lado, la medida de una variable aleatoria continua suele estar limitada por la precisión del proceso o instrumento de medida. Por ejemplo, cuando se dice que una estatura es 1.68 m, no se está diciendo que es exactamente 1.68 m, sino que la estatura está entre 1.675 y 1.685 m, ya que el instrumento de medida sólo es capaz de precisar hasta cm.

Así pues, en el caso de variables continuas, *no tiene sentido medir probabilidades de valores aislados, sino que se medirán probabilidades de intervalos.*

6.1 Distribución de probabilidad de una variable continua

Función de densidad de probabilidad

Para conocer cómo se distribuye la probabilidad entre los valores de una variable aleatoria continua se utiliza la función de densidad.

Definición 63 (Función de densidad de probabilidad)**.** La *función de densidad de probabilidad* de una variable aleatoria continua X es una función $f(x)$ que cumple las siguientes propiedades:

- Es no negativa: $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$,
- El área acumulada entre la función y el eje de abscisas es 1, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

- Las probabilidad de que X tome un valor entre a y b es igual al área que queda por debajo de la función de densidad y el eje de abcisas limitada por a y b, es decir,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

La función de densidad de probabilidad mide la probabilidad relativa de cada valor, pero, *¡Ojo! $f(x)$ no es la probabilidad de que la variable tome el valor x.*, porque $P(X = x) = 0$ para cada valor x por definición.

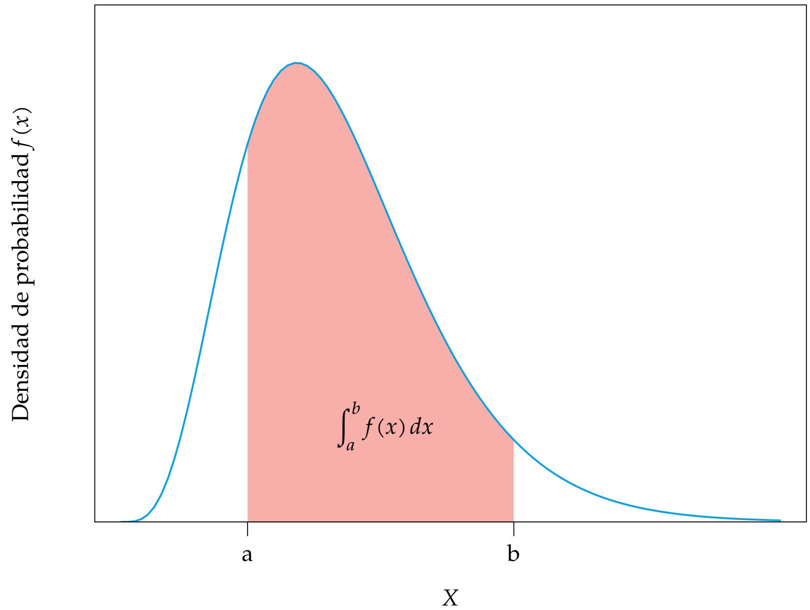
Función de distribución

Al igual que para las variables discretas, también tiene sentido medir probabilidades acumuladas por debajo de un determinado valor.

Definición 64 (Función de distribución)**.** La *función de distribución* de una variable aleatoria continua X es una función $F(x)$ que asocia a cada valor a la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que a, es decir,

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx.$$

Cálculo de probabilidades como áreas



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de probabilidades como áreas

Ejemplo

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

veamos que se trata de una función de densidad.

Como es evidente que la función es no negativa, solo que da por comprobar que el área por debajo de ella es 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx =$$
$$= [-e^{-x}]_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = 1.$$

Calculemos la probabilidad de que la variable tome un valor entre 0 y 2.

$$P(0 \leq X \leq 2) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^2 = -e^{-2} + e^0 = 0.8646.$$

Estadísticos poblacionales

El cálculo de los estadísticos poblacionales es similar al caso discreto, pero utilizando la función de densidad en lugar de la función de probabilidad, y extendiendo la suma discreta a la integral en todo el rango de la variable.

Los más importantes son:

- Media o esperanza matemática:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

- Varianza:
$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

- Desviación típica:
$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

Cálculo de los estadísticos poblacionales

Ejemplo

Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Su media es

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx = \\ = [-e^{-x}(1+x)]_0^{\infty} = 1.$$

y su varianza vale

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \\ = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx - \mu^2 = \left[-e^{-x}(x^2+2x+2)\right]_0^{\infty} - 1^2 = 2e^0 - 1 = 1.$$

Modelos de distribución continuos

Existen varios modelos de distribución de probabilidad que aparecen bastante a menudo en la naturaleza y también como consecuencia de los procesos de muestreo aleatorio simple. Los más importantes son:

- Distribución Uniforme continua.
- Distribución Normal.
- Distribución T de Student.
- Distribución Chi-cuadrado.
- Distribución F de Fisher-Snedecor.

6.2 Distribución Uniforme continua

Distribución Uniforme continua $U(a,b)$

Cuando todos los valores de una variable continua son equiprobables, se dice que la variable sigue un *modelo de distribución uniforme continuo*.

Definición 65 (Distribución Uniforme continua $U(a,b)$)**.** Una variable aleatoria continua X, sigue un modelo de distribución de probabilidad *uniforme*, y se nota $X \sim U(a,b)$, si su rango es $\text{Ran}(X) = [a,b]$ y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a,b]$$

Obsérvese que a y b son el mínimo y el máximo del rango respectivamente, y que la función de densidad es constante.

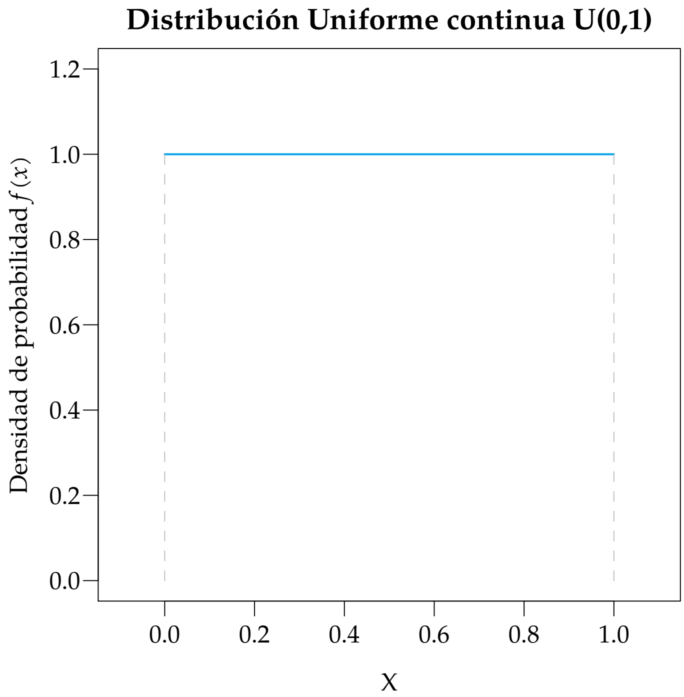
Su media y varianza valen

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Función de densidad de la Uniforme continua $U(a,b)$

Ejemplo

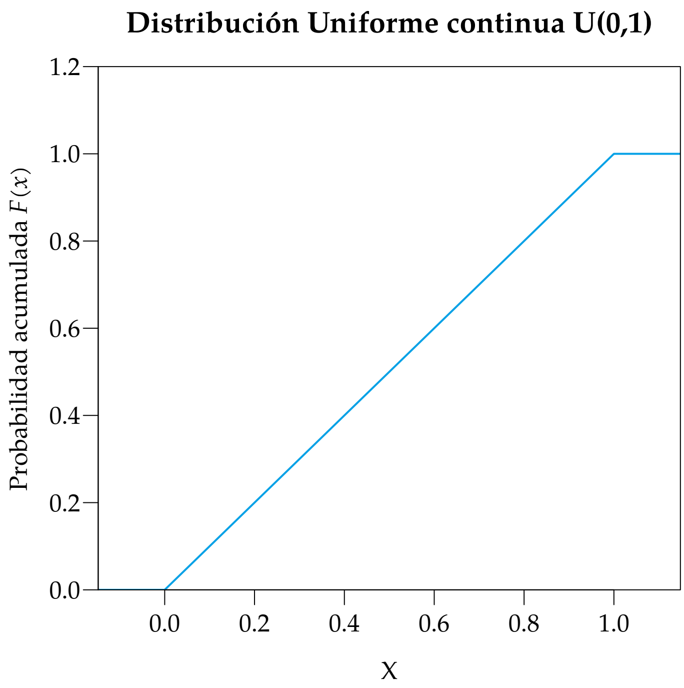
La generación aleatoria de un número real entre 0 y 1 sigue un modelo de distribución uniforme continuo $U(0,1)$.



Función de distribución de la Uniforme continua $U(a,b)$

Ejemplo

Como la función de densidad es constante, la función de distribución presenta un crecimiento lineal.



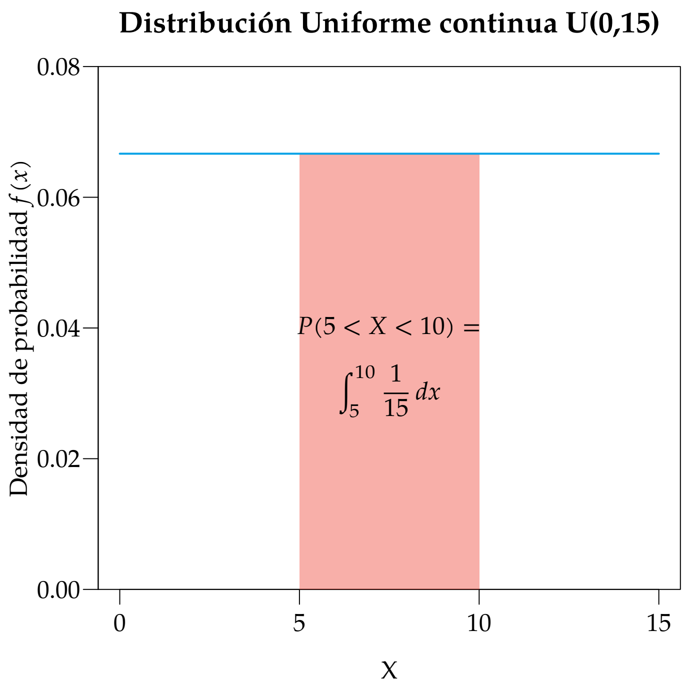
Cálculo de probabilidades con una Uniforme continua

Ejemplo de espera de un autobús

Un autobús pasa por una parada cada 15 minutos. Si una persona puede llegar a la parada en cualquier instante, *¿cuál es la probabilidad de que espere entre 5 y 10 minutos?* En este caso, la variable X que mide el tiempo de espera sigue un modelo de distribución uniforme continua $U(0,15)$ ya que cualquier valor entre los 0 y los 15 minutos es equipobrable.

Así pues, la probabilidad de esperar entre 5 y 10 minutos es

$$P(5 \leq X \leq 10) = \int_5^{10} \frac{1}{15}\,dx = \left[\frac{x}{15}\right]_5^{10} = \\ = \frac{10}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$



Además, el tiempo medio de espera será $\mu = \frac{0+15}{2} = 7.5$ minutos.

6.3 Distribución Normal

Distribución de probabilidad Normal $N(\mu, \sigma)$

El modelo de distribución normal es, sin duda, el modelo de distribución continuo más importante, ya que es el que más a menudo se presenta en la naturaleza.

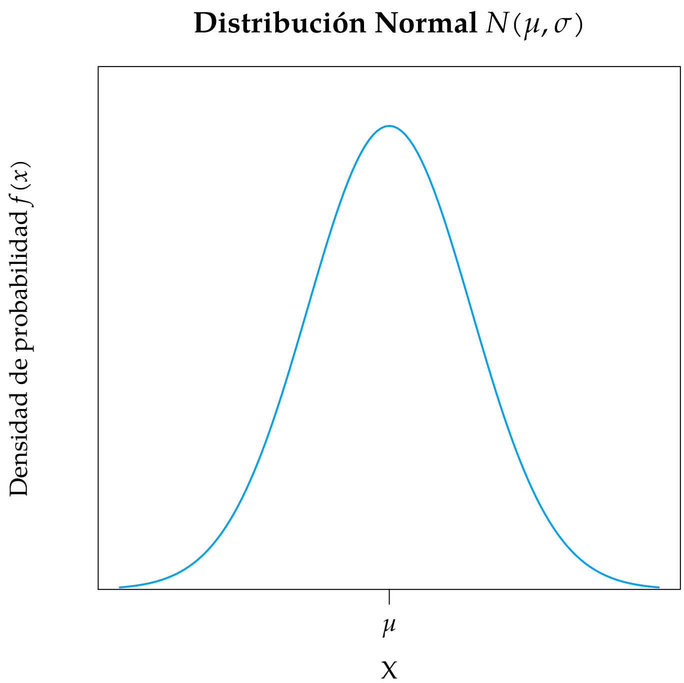
Definición 66 (Distribución de probabilidad Normal $N(\mu, \sigma)$)**.** Una variable aleatoria continua X sigue un modelo de distribución *normal* de parámetros μ y σ, y se nota $X \sim N(\mu, \sigma)$, si su rango es $\mathbb{R}$ y su función de densidad vale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Los dos parámetros μ y σ son la media y la desviación típica de la población respectivamente.

Función de densidad de la Normal

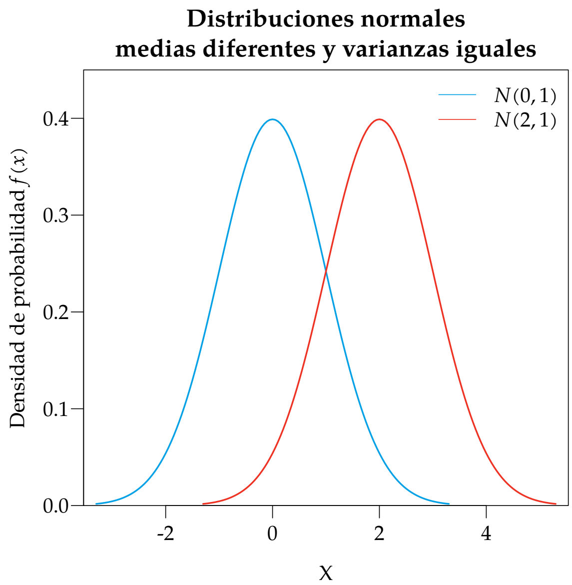
La gráfica de la función de densidad de la distribución normal tiene forma de una especie de campana, conocida como *campana de Gauss* (en honor a su descubridor).

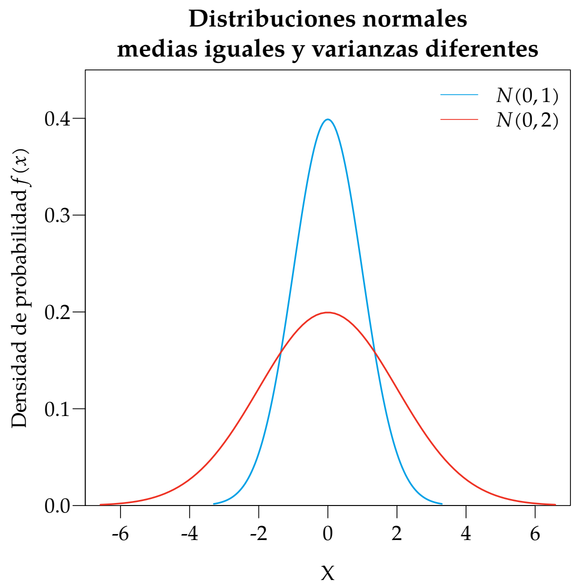


Función de densidad de la Normal

La forma de la campana de Gauss depende de sus dos parámetros:

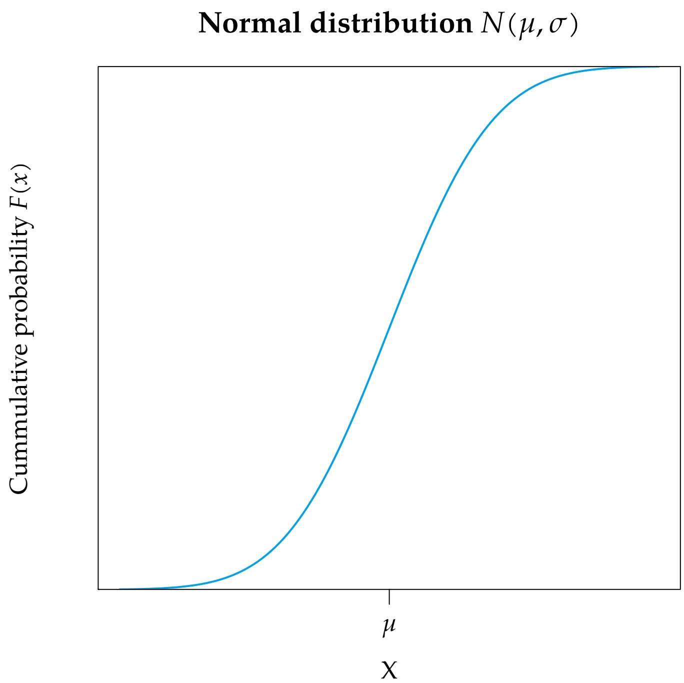
- La media μ determina dónde está centrada la campana.
- La desviación típica σ determina la anchura de la campana.





Función de distribución de la Normal

La gráfica de la función de distribución tiene forma de S.

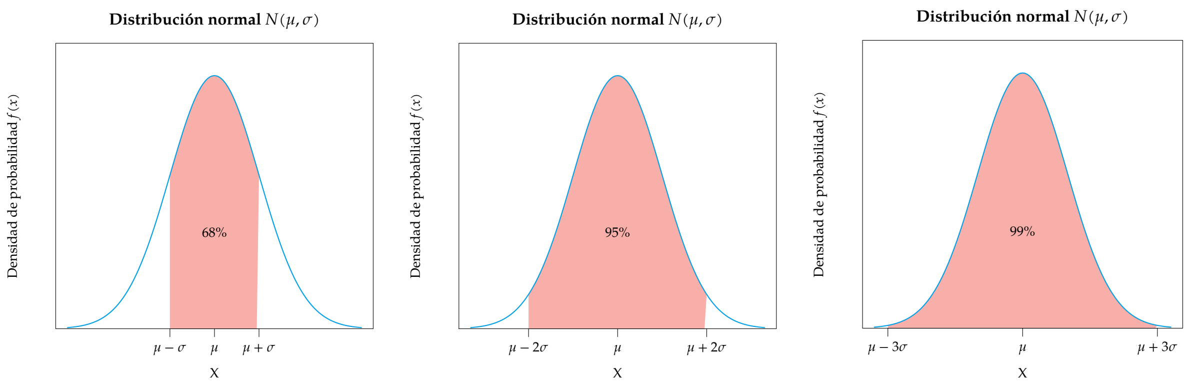


Propiedades de la distribución Normal

- La función de densidad es simétrica respecto a la media y por tanto, su coeficiente de asimetría es $g_1 = 0$.
- También es mesocúrtica, ya que la función de densidad tiene forma de campana de Gauss, y por tanto, su coeficiente de apuntamiento vale $g_2 = 0$.
- La media, la mediana y la moda coinciden
$$\mu = Me = Mo.$$
- Tiende asintóticamente a 0 cuando x tiende a $\pm\infty$.

Propiedades de la distribución Normal

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.68, P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95, P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.99.$$



es decir, casi la totalidad de los individuos de la población presentarán valores entre la media menos tres veces la desviación típica, y la media mas tres veces la desviación típica.

Propiedades de la distribución Normal

Ejemplo

En un estudio se ha comprobado que el nivel de colesterol total en mujeres sanas de entre 40 y 50 años sigue una distribución normal de media de 210 mg/dl y desviación típica 20 mg/dl.

Atendiendo a las propiedades de la campana de Gauss, se tiene que

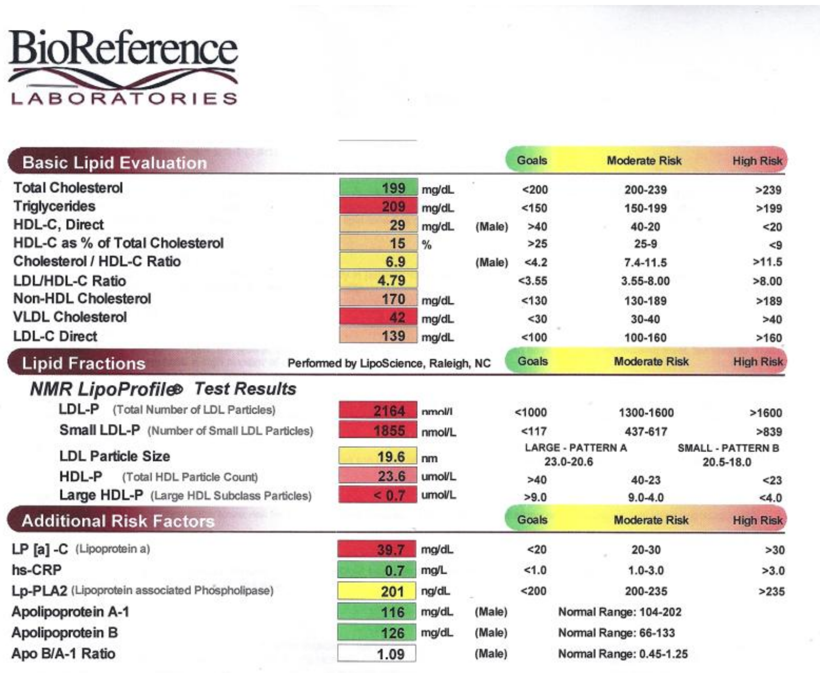
- El 68% de las mujeres sanas tendrán el colesterol entre 210 ± 20 mg/dl, es decir, entre 190 y 230 mg/dl.
- El 95% de las mujeres sanas tendrán el colesterol entre $210 \pm 2 \cdot 20$ mg/dl, es decir, entre 170 y 250 mg/dl.
- El 99% de las mujeres sanas tendrán el colesterol entre $210 \pm 3 \cdot 20$ mg/dl, es decir, entre 150 y 270 mg/dl.

Propiedades de la distribución Normal

Example blood analysis

En la analítica sanguínea suele utilizarse el intervalo $\mu \pm 2\sigma$ para detectar posibles patologías. En el caso del colesterol, dicho intervalo es $[170 \text{ mg/dl}, 250 \text{ mg/dl}]$.

Cuando una persona tiene el colesterol fuera de estos límites, se tiende a pensar que tiene alguna patología, aunque ciertamente podría estar sana,pero la probabilidad de que eso ocurra es sólo de un 5%.



BioReference LABORATORIES

Basic Lipid Evaluation				Goals	Moderate Risk	High Risk
Total Cholesterol	199	mg/dL		<200	200-239	>239
Triglycerides	209	mg/dL		<150	150-199	>199
HDL-C, Direct	29	mg/dL	(Male)	>40	40-20	<20
HDL-C as % of Total Cholesterol	15	%		>25	25-9	<9
Cholesterol / HDL-C Ratio	6.9		(Male)	<4.2	7.4-11.5	>11.5
LDL/HDL-C Ratio	4.79			<3.55	3.55-8.00	>8.00
Non-HDL Cholesterol	170	mg/dL		<130	130-189	>189
VLDL Cholesterol	42	mg/dL		<30	30-40	>40
LDL-C Direct	139	mg/dL		<100	100-160	>160
Lipid Fractions	Performed by LipoScience, Raleigh, NC			Goals	Moderate Risk	High Risk
NMR LipoProfile® Test Results						
LDL-P (Total Number of LDL Particles)	2164	nmol/l		<1000	1300-1600	>1600
Small LDL-P (Number of Small LDL Particles)	1855	nmol/L		<117	437-617	>839
LDL Particle Size	19.6	nm		LARGE - PATTERN A 23.0-20.6		SMALL - PATTERN B 20.5-18.0
HDL-P (Total HDL Particle Count)	23.6	umol/L		>40	40-23	<23
Large HDL-P (Large HDL Subclass Particles)	< 0.7	umol/L		>9.0	9.0-4.0	<4.0
Additional Risk Factors				Goals	Moderate Risk	High Risk
LP [a] -C (Lipoprotein a)	39.7	mg/dL		<20	20-30	>30
hs-CRP	0.7	mg/L		<1.0	1.0-3.0	>3.0
Lp-PLA2 (Lipoprotein associated Phospholipase)	201	ng/dL		<200	200-235	>235
Apolipoprotein A-1	116	mg/dL	(Male)	Normal Range: 104-202		
Apolipoprotein B	126	mg/dL	(Male)	Normal Range: 66-133		
Apo B/A-1 Ratio	1.09		(Male)	Normal Range: 0.45-1.25		

El teorema central del límite

El comportamiento anterior lo presentan muchas variables continuas físicas y biológicas.

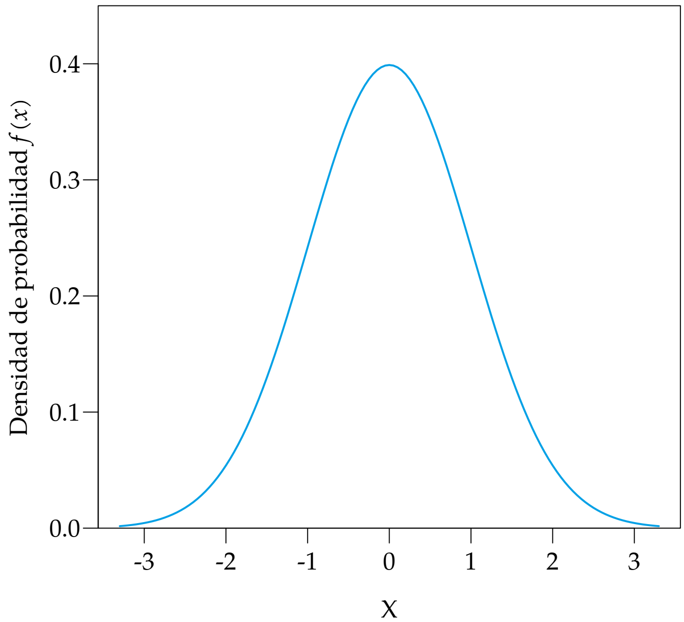
Si se piensa por ejemplo en la distribución de las estaturas, se verá que la mayor parte de los individuos presentan estaturas en torno a la media, tanto por arriba, como por debajo, pero que a medida que van alejándose de la media, cada vez hay menos individuos con dichas estaturas.

La justificación de que la distribución normal aparezca de manera tan frecuente en la naturaleza la encontramos en el **teorema central del límite**, que veremos más adelante, y que establece que si una variable aleatoria continua proviene de un experimento aleatorio cuyos resultados son debidos a un conjunto muy grande de factores independientes que actúan sumando sus efectos, entonces sigue una distribución aproximadamente normal.

La distribución Normal estándar $N(0,1)$

De todas las distribuciones normales, la más importante es la que tiene media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$, que se conoce como **normal estándar** y se designa por $Z \sim N(0,1)$.

Distribución Normal estándar $N(0,1)$



Cálculo de probabilidades con la Normal estándar

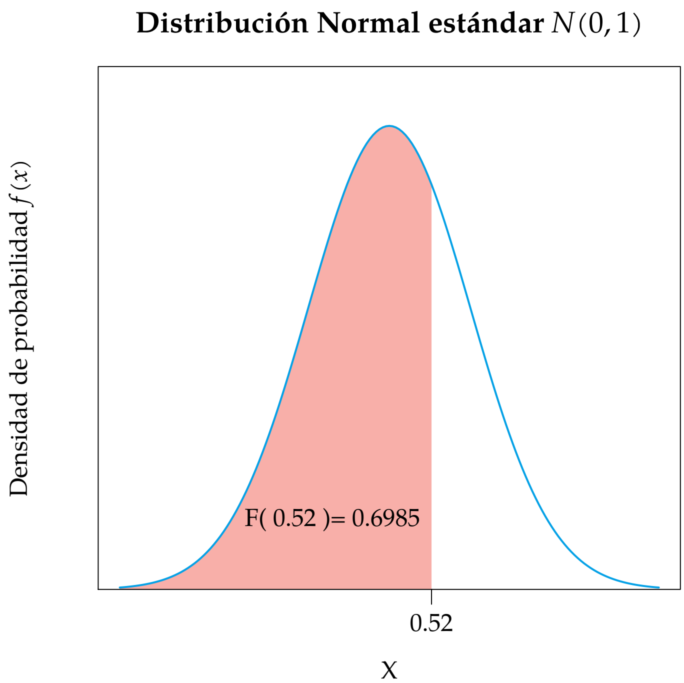
Manejo de la tabla de la función de distribución

Para evitar tener que calcular probabilidades integrando la función de densidad de la normal estándar es habitual utilizar su función de distribución, que se da en forma de tabla como la siguiente.

Por ejemplo, para calcular $P(Z \leq 0.52)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	···
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	···
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	···
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	···
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	···
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	···
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	···
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

0.52 → fila 0.5 + columna 0.02

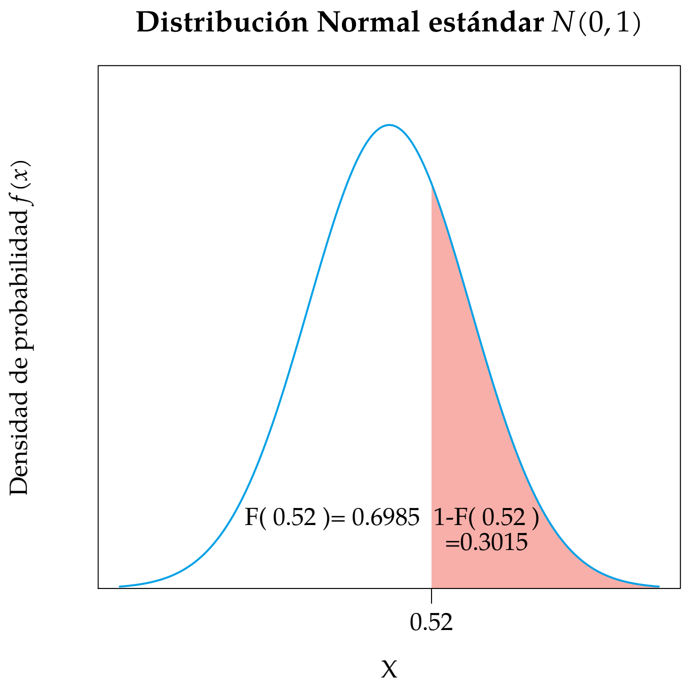


Cálculo de probabilidades con la Normal estándar

Probabilidades acumuladas por encima de un valor

Cuando tengamos que calcular probabilidades acumuladas por encima de un determinado valor (cola de acumulación a la derecha), podemos hacerlo por medio de la probabilidad del suceso contrario. Por ejemplo,

$$P(Z > 0.52) = 1 - P(Z \leq 0.52) = 1 - F(0.52) = 1 - 0.6985 = 0.3015.$$



Tipificación

Ya se ha visto cómo calcular probabilidades con una distribución normal estándar, pero *¿qué hacer cuando la distribución normal no es la estándar?* En tal caso hay que transformar la variable normal en una normal estándar.

Teorema 67 (Tipificación)**.** Si X es una variable que sigue una distribución de probabilidad Normal de media μ y desviación típica σ, $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces la variable resultante de restarle a X su media μ y dividir por su desviación típica σ, sigue un modelo de distribución de probabilidad Normal estándar,

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Esta transformación lineal se conoce como *transformación de tipificación* y la variable resultante Z se conoce como *normal tipificada*.

Así pues, para calcular probabilidades de una variable Normal que no sea la Normal estándar, se aplica primero la transformación de tipificación y después se puede utilizar la función de distribución de la Normal estándar.

Cálculo de probabilidades tipificando

Ejemplo

Supóngase que la nota de un examen sigue un modelo de distribución de probabilidad normal $N(\mu = 6, \sigma = 1.5)$. ¿Qué porcentaje de suspensos habrá en la población?

Como X no es la normal estándar, primero se le aplica la transformación de tipificación $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 6}{1.5}$,

$$P(X < 5) = P\left(\frac{X-6}{1.5} < \frac{5-6}{1.5}\right) = P(Z < -0.67).$$

Después se puede usar la tabla de la función de distribución de la Normal estándar:

$$P(Z < -0.67) = F(-0.67) = 0.2514.$$

Así pues, habrán suspendido el 25.14% de los alumnos.

6.4 Distribución Chi-cuadrado

Distribución de probabilidad chi-cuadrado $\chi^2(n)$

Definición 68 (Distribución de probabilidad Chi-cuadrado $\chi^2(n)$)**.** Dadas n variables aleatorias independientes $Z_1, \ldots, Z_n$, todas ellas siguiendo un modelo de distribución Normal estándar, entonces la variable

$$\chi^2(n) = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2.$$

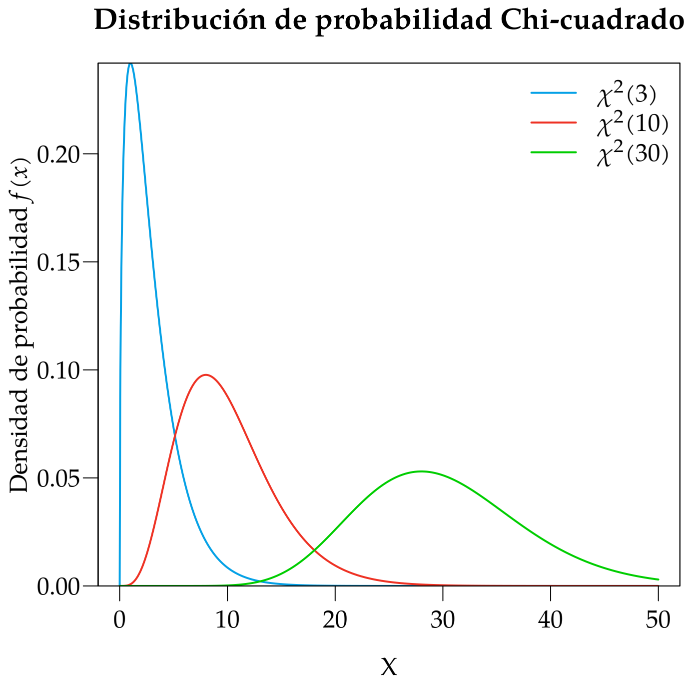
sigue un modelo de distribución de probabilidad *chi-cuadrado de n grados de libertad*.

Su rango es $\mathbb{R}^+$ y su media y varianza valen

$$\mu = n, \qquad \sigma^2 = 2n.$$

Como se verá más adelante, la distribución chi-cuadrado juega un papel importante en la estimación de la varianza poblacional y en el estudio de la relación entre variables cualitativas.

Función de densidad de la distribución chi-cuadrado



Propiedades de la distribución chi-cuadrado $\chi^2(n)$

- No toma valores negativos.
- Si $X \sim \chi^2(n)$ e $Y \sim \chi^2(m)$, entonces

$$X + Y \sim \chi^2(n+m).$$

- Al aumentar el número de grados de libertad, se aproxima asintóticamente a una normal.

6.5 Distribución T de Student

Distribución de probabilidad T de Student $T(n)$

Definición 69 (Distribución de probabilidad T de Student $T(n)$)**.** Dada una variable Z que sigue un modelo de distribución de probabilidad Normal estándar, $Z \sim N(0,1)$, y una variable X que sigue un modelo de distribución de probabilidad Chi-cuadrado con n grados de libertad, $X \sim \chi^2(n)$, independientes, la variable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}},$$

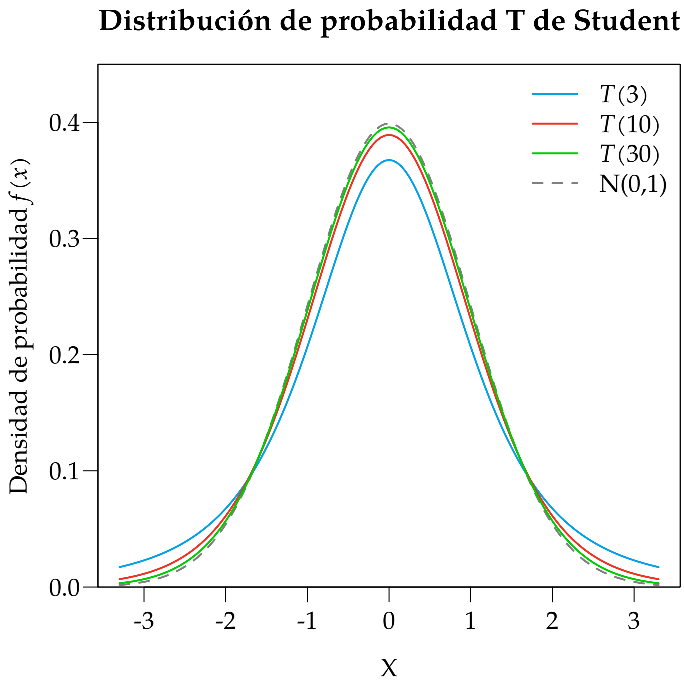
sigue un modelo de distribución de probabilidad *T de Student de n grados de libertad*.

Su rango es $\mathbb{R}$ y su media y varianza valen

$$\mu = 0, \qquad \sigma^2 = \frac{n}{n-2} \text{ si } n > 2.$$

Como se verá más adelante, la distribución T de Student juega un papel importante en la estimación la media poblacional.

Función de densidad de la distribución T de Student



Propiedades de la distribución T de Student $T(n)$

- La media, la mediana y la moda coinciden, $\mu = Me = Mo$.
- Es simétrica, $g_1 = 0$.
- Tiende asintóticamente a la distribución Normal estándar a medida que aumentan los grados de libertad. En la práctica, para $n \geq 30$ ambas distribuciones son aproximadamente iguales.

$$T(n) \overset{n\to\infty}{\approx} N(0,1).$$

6.6 Distribución F de Fisher-Snedecor

Distribución de probabilidad F de Fisher-Snedecor $F(m,n)$

Definición 70 (Distribución de probabilidad F de Fisher-Snedecor $F(m,n)$)**.** Dadas dos variables independientes X e Y, siguiendo modelos de distribución Chi-cuadrado con m y n grados de libertad respectivamente, $X \sim \chi^2(m)$ e $Y \sim \chi^2(n)$, entonces la variable

$$F = \frac{X/m}{Y/n},$$

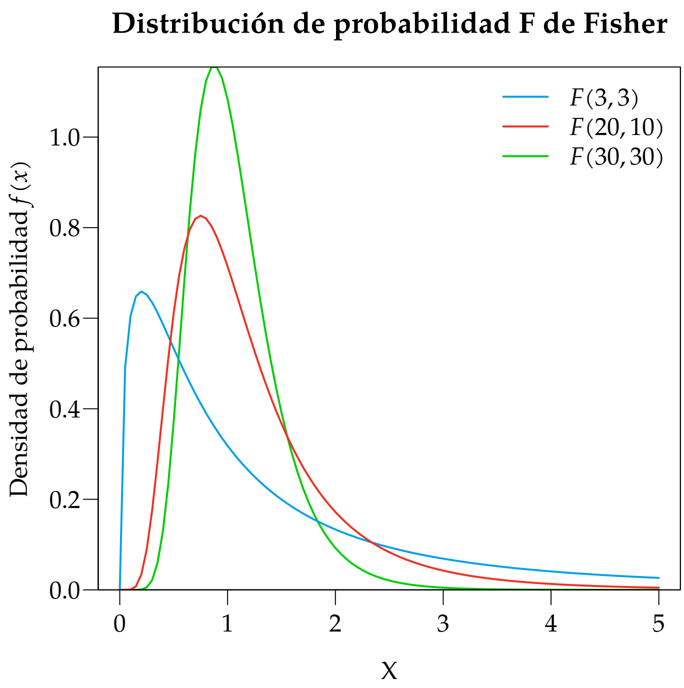
sigue un modelo de distribución de probabilidad *F de Fisher-Snedecor de m y n grados de libertad*.

Su rango es $\mathbb{R}^+$ y su media y varianza valen

$$\mu = \frac{n}{n-2}, \qquad \sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \text{ si } n > 4.$$

Como se verá más adelante, la distribución F de Fisher-Snedecor juega un papel importante en la comparación de varianzas poblacionales y en el análisis de la varianza.

Función de densidad de la distribución F de Fisher-Snedecor $F(m,n)$



Propiedades de la distribución F de Fisher-Snedecor $F(m,n)$

- No está definida para valores negativos.
- De la definición se deduce que

$$F(m,n) = \frac{1}{F(n,m)}$$

de manera que si llamamos $f(m,n)_p$ al valor que cumple que $P(F(m,n) \leq f(m,n)_p) = p$, entonces se cumple

$$f(m,n)_p = \frac{1}{f(n,m)_{1-p}}$$

Esto resulta muy útil para utilizar las tablas de su función de distribución.

7 Estimación de Parámetros

Introducción a la inferencia estadística

Los modelos de distribución de probabilidad vistos en el tema anterior explican el comportamiento de las variables aleatorias, pero para ello debemos saber qué modelo de distribución sigue una determinada variable. Este es el primer paso de la etapa de *Inferencia Estadística*.

Para determinar con exactitud el modelo de distribución hay que conocer la característica estudiada en todos los individuos de la población, lo cual no es posible en la mayoría de los casos (inviabilidad económica, física, temporal, etc.).

Para evitar estos inconvenientes se recurre al estudio de una muestra, a partir de la cual se trata de averiguar, de manera *aproximada*, el modelo de distribución de la variable aleatoria.

Ventajas e inconvenientes del muestreo

Estudiar un número reducido de individuos de una muestra en lugar de toda la población tiene indudables ventajas:

- Menor coste.
- Mayor rapidez.
- Mayor facilidad.

Pero también presenta algunos inconvenientes:

- Necesidad de conseguir una muestra representativa.
- Posibilidad de cometer errores (*sesgos*).

Afortunadamente, estos errores pueden ser superados: La representatividad de la muestra se consigue eligiendo la modalidad de muestreo más apropiada para el tipo de estudio; en el caso de los errores, aunque no se pueden evitar, se tratará de reducirlos al máximo y acotarlos.

7.1 Distribuciones muestrales

Variable aleatoria muestral

Los valores de una variable X en una muestra de tamaño n de una población pueden verse como el valor de una variable aleatoria n-dimensional.

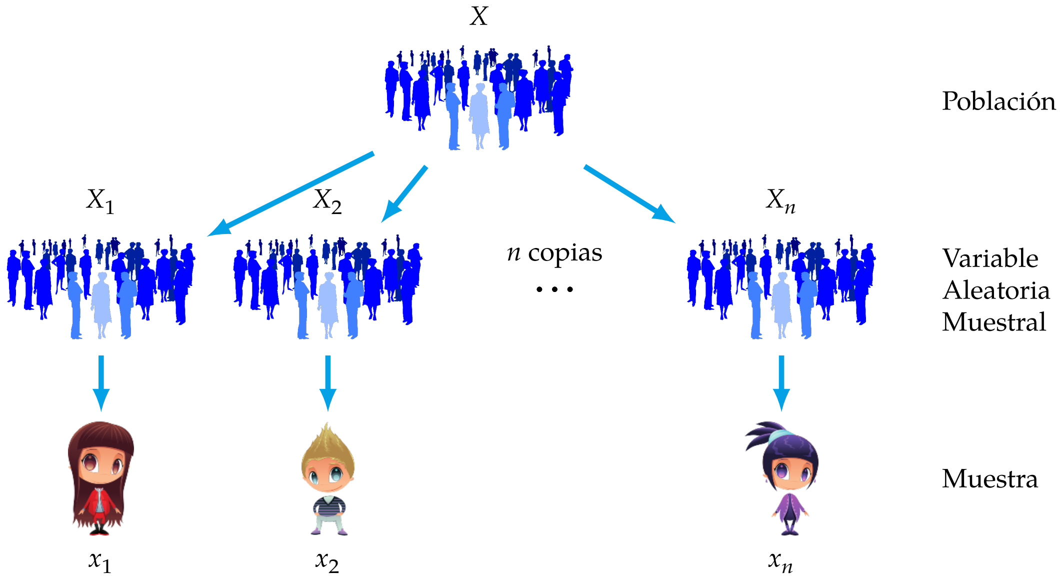
Definición 71 (Variable aleatoria muestral)**.** Una *variable aleatoria muestral* de una variable X estudiada en una población es una colección de n variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ tales que:

– Cada una de las variables X_i sigue la misma distribución de probabilidad que la variable X en la población.

– Todas las variables X_i son mutuamente independientes.

Los valores que puede tomar esta variable n dimensional, serán todas las posibles muestras de tamaño n que pueden extraerse de la población.

Obtención de una muestra



Estimación de parámetros

Las tres cuestiones fundamentales respecto a la variable aleatoria muestral son:

Homogeneidad : Las n variables que componen la variable aleatoria muestral siguen la misma distribución.

Independencia : Las variables son independientes entre sí.

Modelo de distribución : El modelo de distribución que siguen las n variables.

Las dos primeras cuestiones pueden resolverse si se utiliza muestreo aleatorio simple para obtener la muestra. En cuanto a la última, hay que responder, a su vez, a dos cuestiones:

- ¿Qué modelo de distribución se ajusta mejor a nuestro conjunto de datos? Esto se resolverá, en parte, mediante la utilización de técnicas no paramétricas.
- Una vez seleccionado el modelo de distribución más apropiado, ¿qué estadístico del modelo nos interesa y cómo determinar su valor? De esto último se encarga la parte de la inferencia estadística conocida como **Estimación de Parámetros**.

Parámetros a estimar

En este tema se abordará la segunda cuestión, es decir, suponiendo que se conoce el modelo de distribución de una población, se intentará estimar los principales parámetros que la definen. Por ejemplo, los principales parámetros que definen las distribuciones vistas en el tema anterior son:

Distribución	Parámetro
Binomial	n, p
Poisson	λ
Uniforme	a, b
Normal	μ, σ
Chi-cuadrado	n
T-Student	n
F-Fisher	m, n

Distribución de la variable aleatoria muestral

La distribución de probabilidad de los valores de la variable muestral depende claramente de la distribución de probabilidad de los valores de la población.

Ejemplo: Sea una población en la que la cuarta parte de las familias no tienen hijos, la mitad de las familias tiene 1 hijo, y el resto tiene 2 hijos.

Distribución Poblacional

X	$P(x)$
0	0.25
1	0.50
2	0.25

Muestras de tamaño 2

Distribución muestral

(X_1, X_2)	$P(x_1, x_2)$
$(0,0)$	0.0625
$(0,1)$	0.1250
$(0,2)$	0.0625
$(1,0)$	0.1250
$(1,1)$	0.2500
$(1,2)$	0.1250
$(2,0)$	0.0625
$(2,1)$	0.1250
$(2,2)$	0.0625

Distribución de un estadístico muestral

Por ser función de una variable aleatoria, un estadístico en el muestreo es también una variable aleatoria. Por tanto, su distribución de probabilidad también depende de la distribución de la población y de los parámetros que la determinan $(\mu, \sigma, p, \ldots)$.

Ejemplo: Si se toma la media muestral $\bar{X}$ de las muestras de tamaño 2 del ejemplo anterior, su distribución de probabilidad es

Distribución muestral

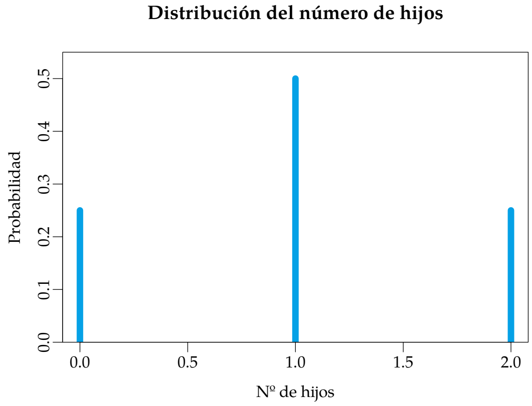
(X_1, X_2)	$P(x_1, x_2)$
$(0,0)$	0.0625
$(0,1)$	0.1250
$(0,2)$	0.0625
$(1,0)$	0.1250
$(1,1)$	0.2500
$(1,2)$	0.1250
$(2,0)$	0.0625
$(2,1)$	0.1250
$(2,2)$	0.0625

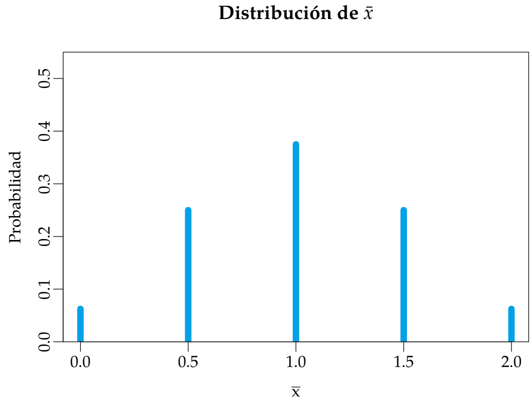
$\bar{x} = \frac{X_1+X_2}{2}$

Distribución de $\bar{x}$

$\bar{X}$	$P(x)$
0	0.0625
0.5	0.2500
1	0.3750
1.5	0.2500
2	0.0625

Distribución de un estadístico muestral





¿Cuál es la probabilidad de obtener una media muestral que aproxime la media poblacional con un error máximo de 0.5?

Teorema central del límite

Como hemos visto, para conocer la distribución de un estadístico muestral, es necesario conocer la distribución de la población, lo cual no siempre es posible. Afortunadamente, para muestras grandes es posible aproximar la distribución de algunos estadísticos como la media, gracias al siguiente teorema:

Teorema 72 (Teorema central del límite)**.** Si $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes ($n \geq 30$) con medias y varianzas $\mu_i = E(X_i)$, $\sigma_i^2 = Var(X_i)$, $i = 1, \dots, n$ respectivamente, entonces la variable aleatoria $X = X_1 + \cdots + X_n$ sigue una distribución aproximadamente normal de media la suma de las medias y varianza la suma de las varianzas

$$X = X_1 + \cdots + X_n \overset{n \geq 30}{\approx} N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

Este teorema además es la explicación de que la mayoría de las variables biológicas presenten una distribución normal, ya que suelen ser causa de múltiples factores que suman sus efectos de manera independiente.

Distribución de la media muestral

Muestras grandes ($n \geq 30$)

La media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n es la suma de n variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}$$

De acuerdo a las propiedades de las transformaciones lineales, la media y la varianza de cada una de estas variables son

$$E\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{\mu}{n} \quad \text{y} \quad Var\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n^2}$$

con μ y σ^2 la media y la varianza de la población de partida.

Entonces, si el tamaño de la muestra es grande ($n \geq 30$), de acuerdo al teorema central del límite, la distribución de la media muestral será normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu}{n}, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n^2}}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Distribución de la media muestral

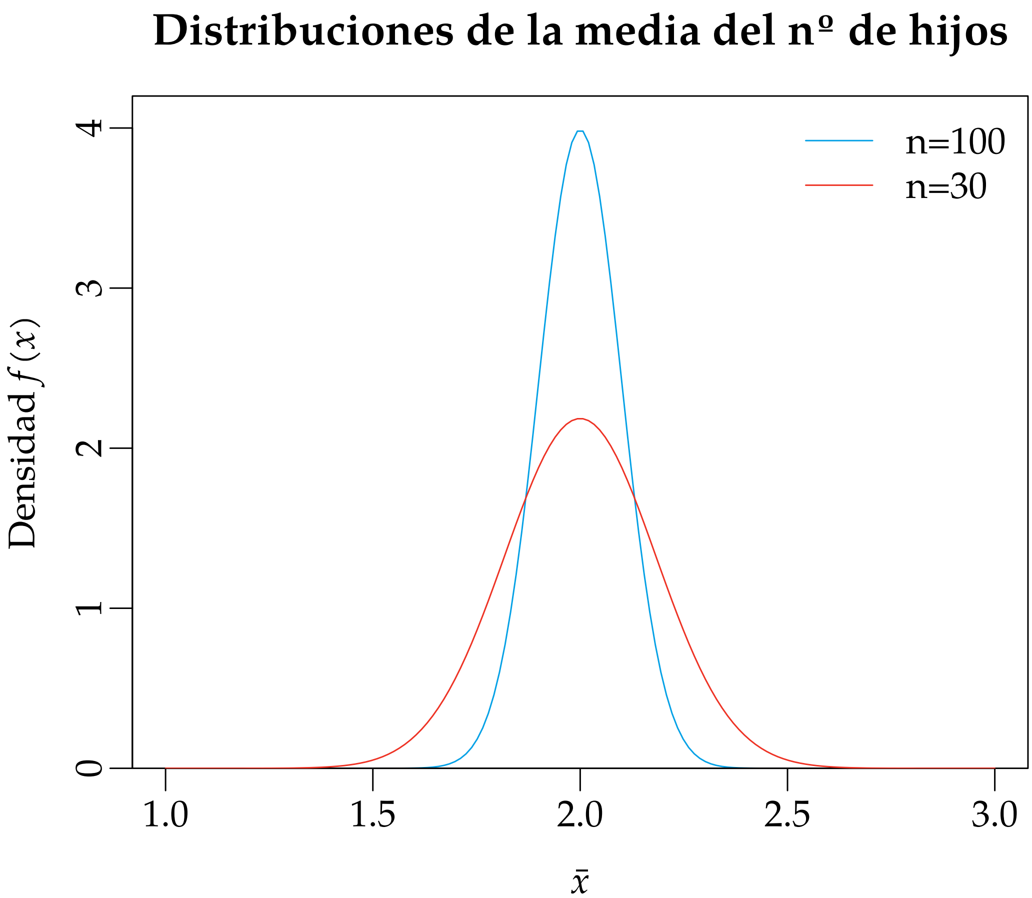
Ejemplo para muestras grandes ($n \geq 30$)

Supongase que se desea estimar el número medio de hijos de una población con media $\mu = 2$ hijos y desviación típica $\sigma = 1$ hijo.

¿Qué probabilidad hay de estimar μ a partir de $\bar{x}$ con un error menor de 0.2?

De acuerdo al teorema central del límite se tiene:

- Para $n = 30$, $\bar{x} \sim N(2, 1/\sqrt{30})$ y
$$P(1.8 < \bar{x} < 2.2) = 0.7267.$$
- Para $n = 100$, $\bar{x} \sim N(2, 1/\sqrt{100})$ y
$$P(1.8 < \bar{x} < 2.2) = 0.9545.$$



Distribución de una proporción muestral

Muestras grandes ($n \geq 30$)

Una proporción p poblacional puede calcularse como la media de una variable dicotómica (0,1). Esta variable se conoce como *variable de Bernouilli* $B(p)$, que es un caso particular de la binomial para $n = 1$. Por tanto, para una muestra aleatoria de tamaño n, una proporción muestral $\hat{p}$ también puede expresarse como la suma de n variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas:

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}, \text{ con } X_i \sim B(p)$$

y con media y varianza

$$E\left(\frac{X_i}{n}\right)=\frac{p}{n} \quad \text{y} \quad Var\left(\frac{X_i}{n}\right)=\frac{p(1-p)}{n^2}$$

Entonces, si el tamaño de la muestra es grande ($n \geq 30$), de acuerdo al teorema central del límite, la distribución de la proporción muestral también será normal:

$$\hat{p} \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p}{n}, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{p(1-p)}{n^2}}\right)=N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right).$$

7.2 Estimadores

Estimador y estimación

Los estadísticos muestrales pueden utilizarse para aproximar los parámetros de la población, y cuando un estadístico se utiliza con este fin se le llama *estimador del parámetro*.

Definición 73 (Estimador y estimación)**.** Un *estimador* es una función de la variable aleatoria muestral

$$\hat{\theta}=F(X_1,\ldots,X_n).$$

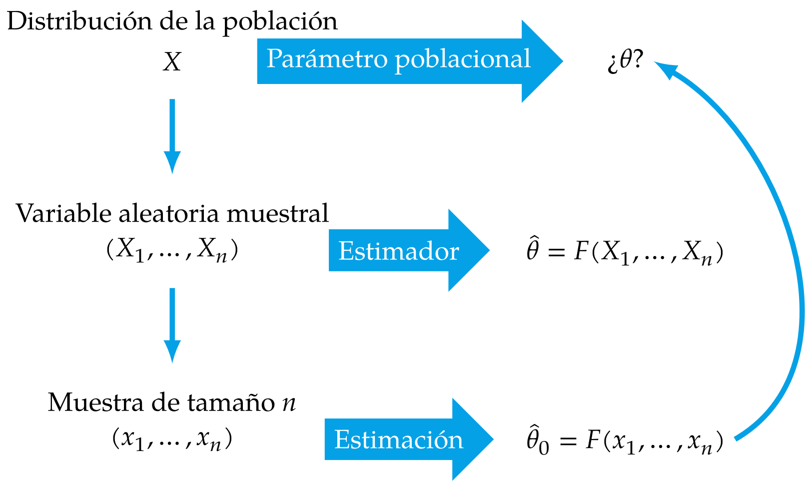
Dada una muestra concreta $(x_1,\ldots,x_n)$, el valor del estimador aplicado a ella se conoce como *estimación*

$$\hat{\theta}_0=F(x_1,\ldots,x_n).$$

Por ser una función de la variable aleatoria muestral, un estimador es, a su vez, una variable aleatoria cuya distribución depende de la población de partida.

Mientras que el estimador es una función que es única, la estimación no es única, sino que depende de la muestra tomada.

Estimador y estimación



Estimador y estimación

Ejemplo

Supóngase que se quiere saber la proporción p de fumadores en una ciudad. En ese caso, la variable dicotómica que mide si una persona fuma (1) o no (0), sigue una distribución de Bernouilli $B(p)$.

Si se toma una muestra aleatoria de tamaño 5, $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, de esta población, se puede utilizar la proporción de fumadores en la muestra como estimador para la proporción de fumadores en la población:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5}$$

Este estimador es una variable que se distribuye $\hat{p} \sim \frac{1}{n} B\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Si se toman distintas muestras, se obtienen diferentes estimaciones:

Muestra	Estimación
$(1,0,0,1,1)$	$3/5$
$(1,0,0,0,0)$	$1/5$
$(0,1,0,0,1)$	$2/5$
$\cdots$	$\cdots$

Tipos de estimación

La estimación de parámetros puede realizar de de dos formas:

Estimación puntual : Se utiliza un único estimador que proporciona un valor o estimación aproximada del parámetro. El principal inconveniente de este tipo de estimación es que no se especifica la bondad de la estimación.

Estimación por intervalos : Se utilizan dos estimadores que proporcionan los extremos de un intervalo dentro del cual se cree que está el verdadero valor del parámetro con un cierto grado de seguridad. Esta forma de estimar sí permite controlar el error cometido en la estimación.

7.3 Estimación puntual

Estimación puntual

La estimación puntual utiliza un único estimador para estimar el valor del parámetro desconocido de la población.

En teoría pueden utilizarse distintos estimadores para estimar un mismo parámetro. Por ejemplo, en el caso de estimar la proporción de fumadores en una ciudad, podrían haberse utilizado otros posibles estimadores además de la proporción muestral, como pueden ser:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 &= \sqrt[5]{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5} \\
\hat{\theta}_2 &= \frac{X_1 + X_5}{2} \\
\hat{\theta}_3 &= X_1 \cdots
\end{aligned}$$

¿Cuál es el mejor estimador?

La respuesta a esta cuestión depende de las propiedades de cada estimador.

Propiedades de los estimadores

Aunque la estimación puntual no proporciona ninguna medida del grado de bondad de la estimación, existen varias propiedades que garantizan dicha bondad.

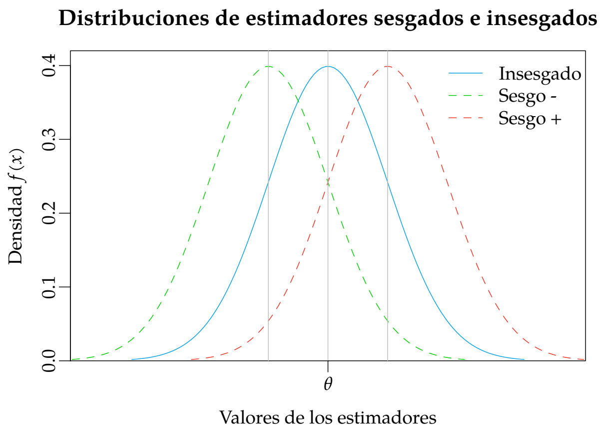
Las propiedades más deseables en un estimador son:

- Insesgadez
- Eficiencia
- Consistencia
- Normalidad asintótica
- Suficiencia

Insesgadez

Definición 74 (Estimador insesgado)**.** Un estimador $\hat{\theta}$ es *insesgado* para un parámetro θ si su esperanza es precisamente θ, es decir,

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$



Sesgo de un estimador

Cuando un estimador no es insesgado, a la diferencia entre su esperanza y el valor del parámetro θ se le llama *sesgo*:

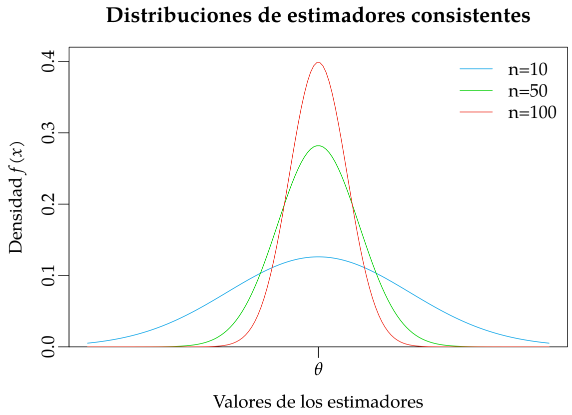
$$Sesgo(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

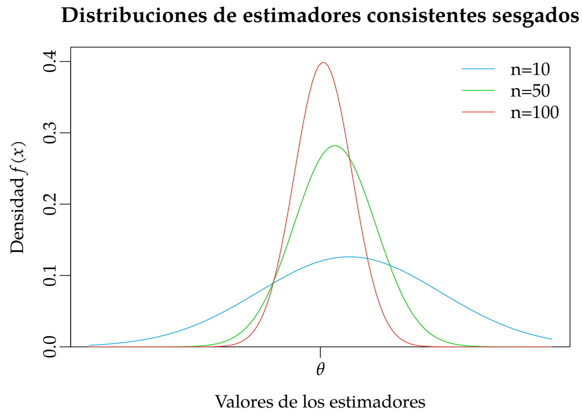
Cuanto menor sea el sesgo de un estimador, mejor se aproximarán sus estimaciones al verdadero valor del parámetro.

Consistencia

Definición 75 (Estimador consistente)**.** Un estimador $\hat{\theta}_n$ para muestras de tamaño n es *consistente* para un parámetro θ si para cualquier valor $\epsilon > 0$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) = 1.$$





Condiciones para la consistencia

Las condiciones suficientes para que un estimador sea consistente son:

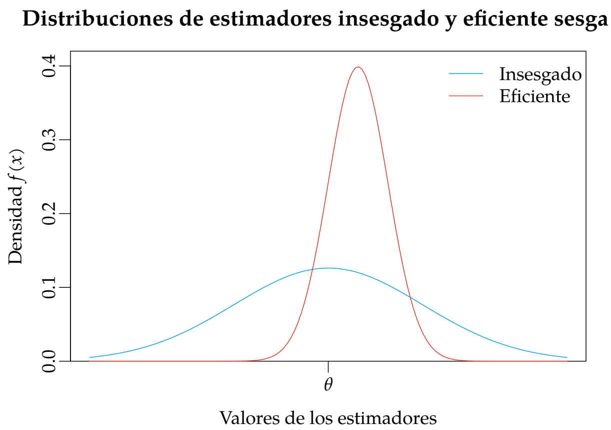
- $Sesgo(\hat{\theta}_n) = 0$ o $\lim_{n\to\infty} Sesgo(\hat{\theta}_n) = 0$.
- $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$.

Así pues, si la varianza y el sesgo disminuyen a medida que aumenta el tamaño de la muestra, el estimador será consistente.

Eficiencia

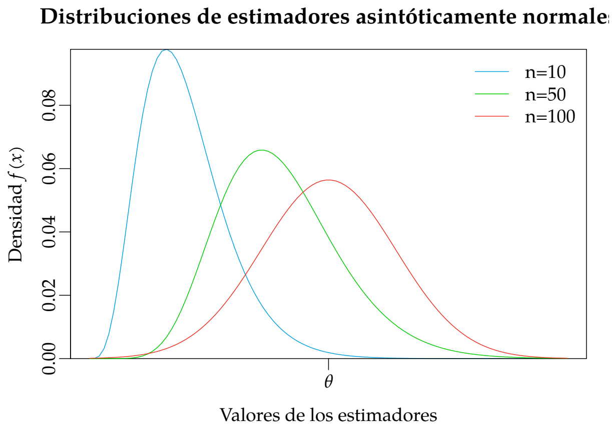
Definición 76 (Estimador eficiente)**.** Un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ es *eficiente* si tiene el menor error cuadrático medio

$$ECM(\hat{\theta}) = Sesgo(\hat{\theta})^2 + Var(\theta).$$



Normalidad asintótica

Definición 77 (Estimador asintóticamente normal)**.** Un estimador $\hat{\theta}$ es *asintóticamente normal* si, independientemente de la distribución de la variable aleatoria muestral, su distribución es normal si el tamaño de la muestra es suficientemente grande.



Como veremos más adelante esta propiedad es muy interesante para hacer estimaciones de parámetros mediante intervalos.

Suficiencia

Definición 78 (Estimador suficiente)**.** Un estimador $\hat{\theta}$ es *suficiente* para un parámetro θ, si la distribución condicionada de la variable aleatoria muestral, una vez dada la estimación $\hat{\theta} = \hat{\theta}_0$, no depende de θ.

Esto significa que cuando se obtiene una estimación, cualquier otra información es irrelevante para θ.

Estimador de la media poblacional

El estimador que se suele utilizar para estimar la media poblacional es la media muestral.

Para muestras de tamaño n resulta la siguiente variable aleatoria:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Si la población de partida tiene media μ y varianza σ^2 se cumple

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{y} \quad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Así pues, la media muestral es un estimador insesgado, y como su varianza disminuye a medida que aumenta el tamaño muestral, también es consistente y eficiente.

Estimador para la varianza poblacional: La cuasivarianza

Sin embargo, la varianza muestral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

es un estimador sesgado para la varianza poblacional, ya que

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

No obstante, resulta sencillo corregir este sesgo para llegar a un estimador insesgado:

Definición 79 (Cuasivarianza muestral)**.** Dada una muestra de tamaño n de una variable aleatoria X, se define la *cuasivarianza muestral* como

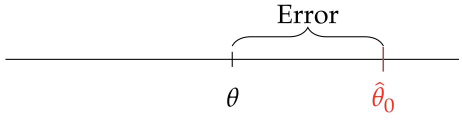
$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}S^2.$$

7.4 Estimación por intervalos

Estimación por intervalos

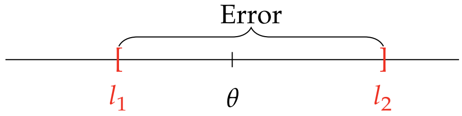
El principal problema de la estimación puntual es que, una vez seleccionada la muestra y hecha la estimación, resulta imposible saber el error cometido.

Estimación puntual



Para controlar el error de la estimación es mejor utilizar la estimación por intervalos

Estimación por intervalo



Intervalos de confianza

La estimación por intervalos trata de construir a partir de la muestra un intervalo dentro del cual se supone que se encuentra el parámetro a estimar con un cierto grado de confianza. Para ello se utilizan dos estimadores, uno para el límite inferior del intervalo y otro para el superior.

Definición 80 (Intervalo de confianza)**.** Dados dos estimadores $\hat{l}_i(X_1, \ldots, X_n)$ y $\hat{l}_s(X_1, \ldots, X_n)$, y sus respectivas estimaciones l_1 y l_2 para una muestra concreta, se dice que el intervalo $I = [l_1, l_2]$ es un intervalo de confianza para un parámetro poblacional θ, con un nivel de confianza $1 - \alpha$ (o nivel de significación α), si se cumple

$$P(\hat{l}_i(X_1, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \hat{l}_s(X_1, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha.$$

Nivel de confianza

Un intervalo de confianza nunca garantiza con absoluta certeza que el parámetro se encuentra dentro él.

Tampoco se puede decir que la probabilidad de que el parámetro esté dentro del intervalo es $1 - \alpha$, ya que una vez calculado el intervalo, las variables aleatorias que determinan sus extremos han tomado un valor concreto y ya no tiene sentido hablar de probabilidad, es decir, o el parámetro está dentro, o está fuera, pero con absoluta certeza.

Lo que si se deduce de la definición es que el $(1 - \alpha)\%$ de los intervalos correspondientes a las todas las posibles muestras aleatorias, contendrán al parámetro. Es por eso que se habla de *confianza* y no de probabilidad.

Para que un intervalo sea útil su nivel de confianza debe ser alto:

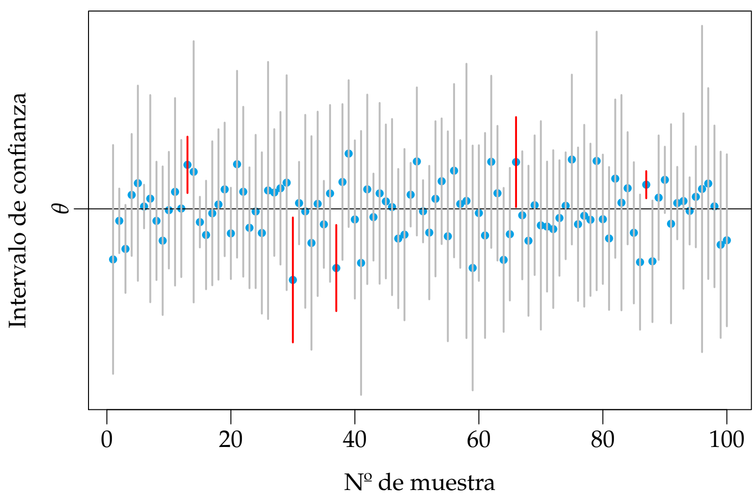
$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= 0.90 \text{ o } \alpha = 0.10 \\
1 - \alpha &= 0.95 \text{ o } \alpha = 0.05 \\
1 - \alpha &= 0.99 \text{ o } \alpha = 0.01
\end{aligned}$$

siendo 0.95 el nivel de confianza más habitual y 0.99 en casos críticos.

Nivel de confianza

Teóricamente, de cada 100 intervalos para estimar un parámetro θ con nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$, 95 contendrían a θ y sólo 5 lo dejarían fuera.

Intervalos de confianza del 95% para estimar θ



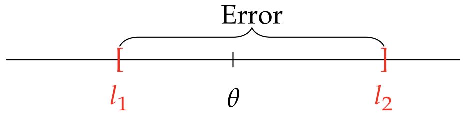
Error o imprecisión de un intervalo

Otro de los aspectos más importantes de un intervalo de confianza es su *error* o *imprecisión*.

Definición 81 (Error o imprecisión de un intervalo)**.** El *error* o la *imprecisión* de un intervalo de confianza $[l_i, l_s]$ es su amplitud

$$A = l_s - l_i.$$

Estimación por intervalo



Para que un intervalo sea útil no debe ser demasiado impreciso.

¿De qué depende la imprecisión de un intervalo?

En general, la precisión de un intervalo depende de tres factores:

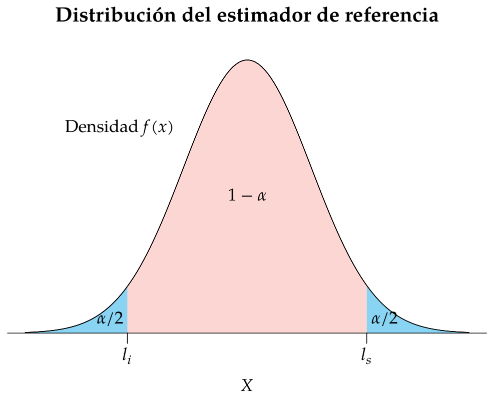
- La dispersión de la población. Cuanto más dispersa sea, menos preciso será el intervalo.
- El nivel de confianza. Cuanto mayor sea el nivel de confianza, menos preciso será el intervalo.
- El tamaño muestral. Cuanto mayor sea el tamaño muestral, más preciso será el intervalo.

Si la confianza y la precisión están reñidas, ¿cómo se puede ganar precisión sin perder confianza?

Cálculo de los intervalos de confianza

Habitualmente, para calcular un intervalo de confianza se suele partir de un estimador puntual del que se conoce su distribución muestral.

A partir de este estimador se calculan los extremos del intervalo sobre su distribución, buscando los valores que dejan encerrada una probabilidad $1-\alpha$. Estos valores suelen tomarse de manera simétrica, de manera que el extremo inferior deje una probabilidad acumulada inferior $\alpha/2$ y el extremo superior deje una probabilidad acumulada superior también de $\alpha/2$.



Intervalos de confianza más importantes

Intervalos para una población:

- Intervalo para la media de una población normal con varianza conocida.
- Intervalo para la media de una población normal con varianza desconocida.
- Intervalo para la media de una población con varianza desconocida a partir de muestras grandes.
- Intervalo para la varianza de una población normal.
- Intervalo para un proporción de una población.

Intervalos para la comparación de dos poblaciones:

- Intervalo para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas.
- Intervalo para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas pero iguales.
- Intervalo para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas y diferentes.
- Intervalo para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales.
- Intervalo para la diferencia de proporciones de dos poblaciones.

7.5 Intervalos de confianza para una población

Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

– Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.

– La media μ es desconocida, pero su varianza σ^2 es conocida.

Bajo estas hipótesis, la media muestral, para muestras de tamaño n, sigue también una distribución normal

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Tipificando la variable se tiene

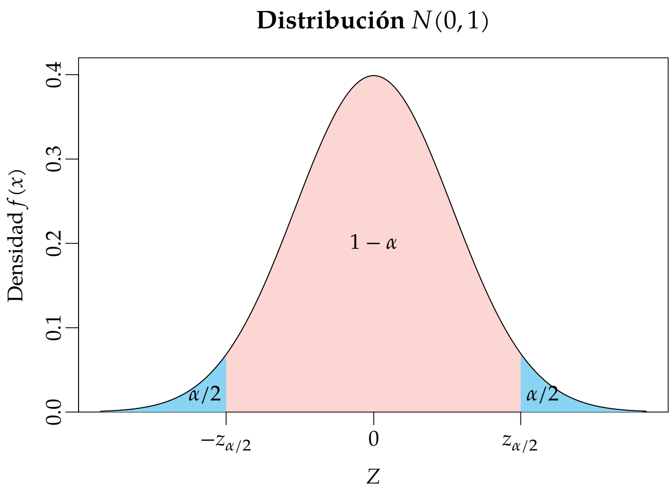
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Sobre esta distribución resulta sencillo calcular los valores z_i y z_s de manera que

$$P(z_i \leq Z \leq z_s) = 1 - \alpha.$$

Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida

Como la distribución normal estándar es simétrica respecto al 0, lo mejor es tomar valores opuestos $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que dejen sendas colas de probabilidad acumulada $\alpha/2$.



Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida

A partir de aquí, deshaciendo la tipificación, resulta sencillo llegar a los estimadores que darán los extremos del intervalo de confianza:

$$\begin{aligned}
1-\alpha = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) &= P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = \\
&= P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(-\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Así pues, el intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida es:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \text{ o bien } \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Características del intervalo

De la fórmula del intervalo de confianza

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se deducen varias características:

- El intervalo está centrado en la media muestral $\bar{X}$ que era el mejor estimador de la media poblacional.
- La amplitud o imprecisión del intervalo es

  $$A = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  de manera que depende de:

  - σ: cuanto mayor sea la varianza poblacional, mayor será la imprecisión.
  - $z_{\alpha/2}$: que a su vez depende del nivel de confianza, y cuanto mayor sea $1-\alpha$, mayor será la imprecisión.
  - n: cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, menor será la imprecisión.

Por tanto, la única forma de reducir la imprecisión del intervalo, manteniendo la confianza, es aumentando el tamaño muestral.

Control de la imprecisión mediante el tamaño muestral

Teniendo en cuenta que la amplitud o imprecisión del intervalo para la media de una población normal con varianza conocida es

$$A = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se puede calcular fácilmente el tamaño muestral necesario para conseguir un intervalo de amplitud A con confianza $1-\alpha$:

$$A = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{A},$$

de donde se deduce

$$n = 4z_{\alpha/2}^2\frac{\sigma^2}{A^2}$$

Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida

Ejemplo

Sea una población de estudiantes en la que la puntuación obtenida en un examen sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma = 1.5)$.

Para estimar la nota media μ, se toma una muestra de 10 estudiantes:

$$4-6-8-7-7-6-5-2-5-3$$

A partir de esta muestra, podemos calcular el intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$ (nivel de significación $\alpha = 0.05$):

- $\bar{X} = \frac{4+\cdots+3}{10} = \frac{53}{10} = 5.3$ puntos.
- $z_{\alpha/2} = z_{0.025}$ es el valor de la normal estándar que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, que vale aproximadamente 1.96.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se tiene

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5.3 \pm 1.96\frac{1.5}{\sqrt{10}} = 5.3 \pm 0.93 = [4.37, 6.23]\,.$$

Es decir, μ estaría entre 4.37 y 6.23 puntos con un 95% de confianza.

Control de la imprecisión mediante el tamaño muestral

Ejemplo

La imprecisión del intervalo anterior es de ± 0.93 puntos.

Si se desea reducir esta imprecisión a ± 0.5 puntos, *¿qué tamaño muestral sería necesario?*

$$n = 4z_{\alpha/2}^2\frac{\sigma^2}{A^2} = 4\cdot 1.96^2\frac{1.5^2}{(2\cdot 0.5)^2} = 34.57.$$

Por tanto, se necesitaría una muestra de al menos 35 estudiantes para conseguir un intervalo del 95% de confianza y una precisión de ± 0.5 puntos.

Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Cuando se desconoce la varianza poblacional se suele estimar mediante la cuasivarianza $\hat{S}^2$. Como consecuencia, el estimador de referencia ya no sigue una distribución normal como en el caso de conocer la varianza, sino un T de Student de $n-1$ grados de libertad:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \dfrac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \sim T(n-1),$$

Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida

Como la distribución T de Student, al igual que la normal, también es simétrica respecto al 0, se pueden tomar dos valores opuestos $-t_{\alpha/2}^{n-1}$ y $t_{\alpha/2}^{n-1}$ de manera que

$$P\left(-t_{\alpha/2}^{n-1} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}^{n-1}\right) = 1-\alpha.$$

y a partir de aquí se llega, razonando como antes, al intervalo

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right] \text{ o bien } \bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

Control de la imprecisión mediante el tamaño muestral

Al igual que antes, teniendo en cuenta que la amplitud o imprecisión del intervalo para la media de una población con varianza desconocida es

$$A = 2t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

se puede calcular fácilmente el tamaño muestral necesario para conseguir un intervalo de amplitud A con confianza $1-\alpha$:

$$A = 2t^{n-1}_{\alpha/2}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2t^{n-1}_{\alpha/2}\frac{\hat{S}}{A},$$

de donde se deduce

$$n = 4(t^{n-1}_{\alpha/2})^2\frac{\hat{S}^2}{A^2}$$

El único problema, a diferencia del caso anterior en que σ era conocida, es que se necesita $\hat{S}$, por lo que se suele tomar una muestra pequeña previa para calcularla. Por otro lado, el valor de la T de student suele aproximarse asintóticamente por el de la normal estándar $t^{n-1}_{\alpha/2} \approx z_{\alpha/2}$.

Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida

Ejemplo

Supóngase que en el ejemplo anterior no se conoce la varianza poblacional de las puntuaciones.

Trabajando con la misma muestra de las puntuaciones de 10 estudiantes

$$4-6-8-7-7-6-5-2-5-3$$

se puede calcular el intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$ (nivel de significación $\alpha = 0.05$):

- $\bar{X} = \frac{4+\cdots+3}{10} = \frac{53}{10} = 5.3$ puntos.
- $\hat{S}^2 = \frac{(4-5.3)^2+\cdots+(3-5.3)^2}{9} = 3.5667$ y $\hat{S} = \sqrt{3.5667} = 1.8886$ puntos.
- $t^{n-1}_{\alpha/2} = t^9_{0.025}$ es el valor de la T de Student de 9 grados de libertad, que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, que vale 2.2622.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se tiene

$$\bar{X} \pm t^{n-1}_{\alpha/2}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = 5.3 \pm 2.2622\frac{1.8886}{\sqrt{10}} = 5.3 \pm 1.351 = [3.949, 6.651]\,.$$

Control de la imprecisión mediante el tamaño muestral

Ejemplo

Como se puede apreciar, la imprecisión del intervalo anterior es de ± 1.8886 puntos, que es significativamente mayor que en el caso de conocer la varianza de la población. Esto es lógico pues al tener que estimar la varianza de la población, el error de la estimación se agrega al error del intervalo.

Ahora, el tamaño muestral necesario para reducir la imprecisión a ± 0.5 puntos es

$$n = 4(z_{\alpha/2})^2\frac{\hat{S}^2}{A^2} = 4\cdot 1.96^2\frac{3.5667}{(2\cdot 0.5)^2} = 54.81.$$

Por tanto, si se desconoce la varianza de la población se necesita una muestra de al menos 55 estudiantes para conseguir un intervalo del 95% de confianza y una precisión de ± 0.5 puntos.

Intervalo de confianza para la media de una población no normal con varianza desconocida y muestras grandes

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

– Su distribución no es normal.

– Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Si la población no es normal las distribuciones de los estimadores de referencia cambian, de manera que los intervalos anteriores no son válidos.

No obstante, si la muestras es grande ($n \geq 30$), de acuerdo al teorema central del límite, la distribución de la media muestral se aproximará a una normal, de modo que sigue siendo cierto

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

y en consecuencia, sigue siendo válido el intervalo

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Para estimar la varianza de una población normal, se parte del estimador de referencia

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

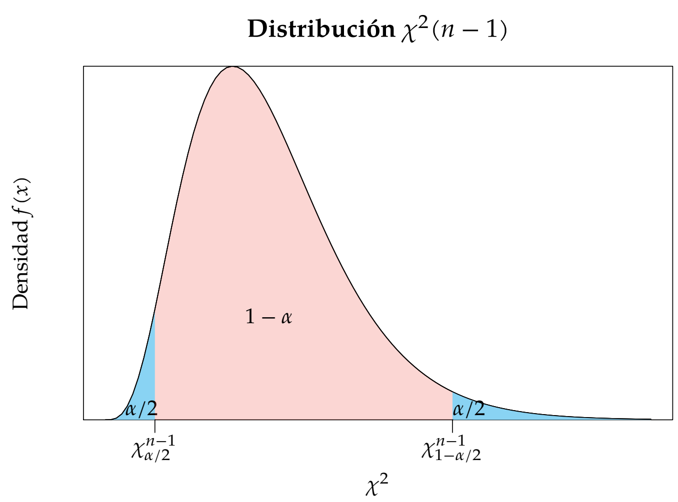
que sigue una distribución chi-cuadrado de $n-1$ grados de libertad.

Sobre esta distribución hay que calcular los valores χ_i y χ_s tales que

$$P(\chi_i \leq \chi^2(n-1) \leq \chi_s) = 1 - \alpha.$$

Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Como la distribución chi-cuadrado no es simétrica respecto al 0, se toman dos valores $\chi_{\alpha/2}^{n-1}$ y $\chi_{1-\alpha/2}^{n-1}$ que dejen sendas colas de probabilidad acumulada inferior de $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$ respectivamente.



Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Así pues, se tiene

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(\chi^{n-1}_{\alpha/2} \leq \frac{nS^2}{\sigma^2} \leq \chi^{n-1}_{1-\alpha/2}\right) = P\left(\frac{1}{\chi^{n-1}_{\alpha/2}} \geq \frac{\sigma^2}{nS^2} \geq \frac{1}{\chi^{n-1}_{1-\alpha/2}}\right) = \\
&= P\left(\frac{1}{\chi^{n-1}_{1-\alpha/2}} \leq \frac{\sigma^2}{nS^2} \leq \frac{1}{\chi^{n-1}_{\alpha/2}}\right) = P\left(\frac{nS^2}{\chi^{n-1}_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{\chi^{n-1}_{\alpha/2}}\right),
\end{aligned}
$$

y el intervalo de confianza para la varianza de una población normal es:

$$\left[\frac{nS^2}{\chi^{n-1}_{1-\alpha/2}}, \frac{nS^2}{\chi^{n-1}_{\alpha/2}}\right]$$

Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo de las puntuaciones en un examen, si se quiere estimar la varianza a partir de la muestra:

$$4-6-8-7-7-6-5-2-5-3$$

para el intervalo de confianza para σ^2 con un nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$ (nivel de significación $\alpha = 0.05$) se tiene:

- $S^2 = \frac{(4-5.3)^2+\cdots+(3-5.3)^2}{10} = 3.21$ puntos^2.
- $\chi^{n-1}_{\alpha/2} = \chi^{9}_{0.025}$ es el valor de la chi-cuadrado de 9 grados de libertad, que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.025, y vale 2.7.
- $\chi^{n-1}_{1-\alpha/2} = \chi^{9}_{0.975}$ es el valor de la chi-cuadrado de 9 grados de libertad, que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.975, y vale 19.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se llega a

$$\left[\frac{nS^2}{\chi^{n-1}_{1-\alpha/2}}, \frac{nS^2}{\chi^{n-1}_{\alpha/2}}\right] = \left[\frac{10\cdot 3.21}{19}, \frac{10\cdot 3.21}{2.7}\right] = [1.69,\ 11.89] \text{ puntos}^2.$$

Intervalo de confianza para la proporción de una población y muestras grandes

Para estimar la proporción p de individuos de una población que presentan una determinada característica, se parte de la variable que mide el número de individuos que la presentan en una muestra de tamaño n. Dicha variable sigue una distribución binomial

$$X \sim B(n,p)$$

Como ya se vio, si el tamaño muestral es suficientemente grande (en realidad basta que se cumpla $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$), el teorema central de límite asegura que X tendrá una distribución aproximadamente normal

$$X \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

En consecuencia, la proporción muestral $\hat{p}$ también será normal

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right),$$

que es el estimador de referencia.

Intervalo de confianza para la proporción de una población y muestras grandes

Trabajando con la distribución del estimador de referencia

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

tras tipificar, se pueden encontrar fácilmente, al igual que hicimos antes, valores $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que cumplan

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq z_{\alpha/2}\right).$$

Finalmente, deshaciendo la tipificación y razonando como antes, se llega fácilmente a la fórmula del intervalo

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \text{ o bien } \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Control de la imprecisión mediante el tamaño muestral

La amplitud o imprecisión del intervalo para la proporción de una población es

$$A = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

así que se puede calcular fácilmente el tamaño muestral necesario para conseguir un intervalo de amplitud A con confianza $1-\alpha$:

$$A = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Leftrightarrow A^2 = 4z_{\alpha/2}^2\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n},$$

de donde se deduce

$$n = 4z_{\alpha/2}^2\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{A^2}$$

Para poder hacer el cálculo se necesita una estimación de la proporción $\hat{p}$, por lo que suele tomarse una muestra previa pequeña para calcularla. En el peor de los casos, si no se dispone de una muestra previa, puede tomarse $\hat{p} = 0.5$.

Intervalo de confianza para la proporción de una población y muestras grandes

Ejemplo

Supóngase que se quiere estimar la proporción de fumadores que hay en una determinada población. Para ello se toma una muestra de 20 personas y se observa si fuman (1) o no (0):

$$0-1-1-0-0-0-1-0-0-1-0-0-0-1-1-0-1-1-0-0$$

Entonces:

- $\hat{p} = \frac{8}{20} = 0.4$, por tanto, se cumple $np = 20 \cdot 0.4 = 8 \geq 5$ y $n(1-p) = 20 \cdot 0.6 = 12 \geq 5$.
- $z_{\alpha/2} = z_{0.025}$ es el valor de la normal estándar que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, que vale aproximadamente 1.96.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se tiene

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.4 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{10}} = 0.4 \pm 0.3 = [0.1, 0.7].$$

Es decir, p estaría entre 0.1 y 0.7 con un 95% de confianza.

Control de la imprecisión mediante el tamaño muestral

Ejemplo

Como se puede apreciar la imprecisión del intervalo anterior es ± 0.3, que es enorme teniendo en cuenta que se trata de un intervalo para una proporción.

Para conseguir intervalos precisos para estimar proporciones se necesitan tamaños muestrales bastante grandes. Si por ejemplo se quiere una precisión de ± 0.05, el tamaño muestral necesario sería:

$$n = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{A^2} = 4 \cdot 1.96^2 \frac{0.4 \cdot 0.6}{(2 \cdot 0.05)^2} = 368.79.$$

Es decir, se necesitarían al menos 369 individuos para conseguir un intervalo para la proporción con una confianza del 95%.

7.6 Intervalos de confianza para la comparación dos poblaciones

Comparación de dos poblaciones

En muchos estudios el objetivo en sí no es averiguar el valor de un parámetro, sino compararlo con el de otra población. Por ejemplo, comparar si un determinado parámetro vale lo mismo en la población de hombres y en la de mujeres.

En estos casos no interesa realmente estimar los dos parámetros por separado, sino hacer una estimación que permita su comparación.

Se verán tres casos:

Comparación de medias : Se estima la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$.

Comparación de varianzas : Se estima la razón de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Comparación de proporciones : Se estima la diferencia de proporciones $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas, pero sus varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas.

Bajo estas hipótesis, si se toman dos muestras independientes, una de cada población, de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, la diferencia de las medias muestrales sigue una distribución normal

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right) \\ \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas

A partir de aquí, tipificando, se pueden buscar los valores de la normal estándar $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que cumplen:

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Y deshaciendo la tipificación, se llega fácilmente al intervalo

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

o bien

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas y sus varianzas también, pero son iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Cuando se desconoce la varianza poblacional se puede estimar a partir de las muestras de tamaños n_1 y n_2 de ambas poblaciones mediante la *cuasivarianza ponderada*:

$$\hat{S}_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

El estimador de referencia en este caso sigue una distribución T de Student:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\right) \\ \dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{S}_p\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} \sim T(n_1 + n_2 - 2).$$

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

A partir de aquí, se pueden buscar los valores de la T de Student $-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$ y $t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$ que cumplen

$$P\left(-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{S}_p\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} \leq t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}\right) = 1 - \alpha,$$

de donde se llega al intervalo

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}\hat{S}_p\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}\hat{S}_p\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}\right]$$

o bien

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}\hat{S}_p\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

Interpretación del intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones

Si $[l_i, l_s]$ es un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$, entonces

$$\mu_1 - \mu_2 \in [l_i, l_s]$$

con una confianza del $1-\alpha$%.

Por consiguiente, según los valores del intervalo de confianza se tiene:

- Si todos los valores del intervalo son negativos ($l_s < 0$), entonces se puede concluir que $\mu_1 - \mu_2 < 0$ y por tanto $\mu_1 < \mu_2$.
- Si todos los valores del intervalo son positivos ($l_i > 0$), entonces se puede concluir que $\mu_1 - \mu_2 > 0$ y por tanto $\mu_1 > \mu_2$.
- Si el intervalo tiene tanto valores positivos como negativos, y por tanto contiene al 0 ($0 \in [l_i, l_s]$), entonces no se puede afirmar que una media sea mayor que la otra. En este caso se suele asumir la hipótesis de que las medias son iguales $\mu_1 = \mu_2$.

Tanto en el primer como en el segundo caso se dice que entre las medias hay diferencias *estadísticamente significativas*.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Ejemplo

Supóngase que se quiere comparar el rendimiento académico de dos grupos de alumnos, uno con 10 alumnos y otro con 12, que han seguido metodologías diferentes. Para ello se les realiza un examen y se obtienen las siguientes puntuaciones:

$$X_1 : 4-6-8-7-7-6-5-2-5-3$$
$$X_2 : 8-9-5-3-8-7-8-6-8-7-5-7$$

Si se supone que ambas variables tienen la misma varianza, se tiene

- $\bar{X}_1 = \frac{4+\cdots+3}{10} = 5.3$ y $\bar{X}_2 = \frac{8+\cdots+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $S_1^2 = \frac{4^2+\cdots+3^2}{10} - 5.3^2 = 3.21$ y $S_2^2 = \frac{8^2+\cdots+3^2}{12} - 6.75^2 = 2.6875$ puntos^2.
- $\hat{S}_p^2 = \frac{10\cdot 3.21+12\cdot 2.6875}{10+12-2} = 3.2175$ puntos^2, y $\hat{S}_p = 1.7937$.
- $t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} = t_{0.025}^{20}$ es el valor de la T de Student de 20 grados de libertad que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, y que vale aproximadamente 2.09.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Ejemplo

Y sustituyendo en la fórmula del intervalo llegamos a

$$5.3 - 6.75 \pm 2.086 \cdot 1.7937\sqrt{\frac{10+12}{10\cdot 12}} = -1.45 \pm 1.6021 = [-3.0521,\ 0.1521] \text{ puntos.}$$

Es decir, la diferencia de puntuaciones medias $\mu_1 - \mu_2$ está entre -3.0521 y 0.1521 puntos con una confianza del 95%.

A la vista del intervalo se puede concluir que, puesto que el intervalo contiene tanto valores positivos como negativos, y por tanto contiene al 0, no puede afirmarse que una de las medias se mayor que la otra, de modo que se supone que son iguales y no se puede decir que haya diferencias significativas entre los grupos.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2, σ_2^2, son desconocidas, pero $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

En este caso el estimador de referencia sigue una distribución T de Student

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} \sim T(g),$$

donde el número de gados de libertad es

$$g = n_1 + n_2 - 2 - \Delta \quad \text{siendo } \Delta = \frac{\left(\frac{n_2-1}{n_1}\hat{S}_1^2 - \frac{n_1-1}{n_2}\hat{S}_2^2\right)^2}{\frac{n_2-1}{n_1^2}\hat{S}_1^4 + \frac{n_1-1}{n_2^2}\hat{S}_2^4}.$$

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas

A partir de aquí, una vez más, se pueden buscar los valores de la T de Student $-t^g_{\alpha/2}$ y $t^g_{\alpha/2}$ que cumplen

$$P\left(-t^g_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} \leq t^g_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

de donde llegamos al intervalo

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t^g_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t^g_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}\right]$$

o bien

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t^g_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}$$

Elección del intervalo de confianza para la diferencia de medias en función de las varianzas

Como se acaba de ver, existen dos intervalos posibles para estimar la diferencia de medias: uno para cuando las varianzas poblacionales son iguales y otro para cuando no lo son.

Ahora bien, si las varianzas poblacionales son desconocidas,

¿cómo saber qué intervalo utilizar?

La respuesta está en el próximo intervalo que se verá, que permite estimar la razón de varianzas $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ y por tanto, su comparación.

Así pues, antes de calcular el intervalo de confianza para la comparación de medias, cuando las varianzas poblacionales sean desconocidas, es necesario calcular el intervalo de confianza para la razón de varianzas y elegir el intervalo para la comparación de medias en función del valor de dicho intervalo.

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2, σ_2^2 son desconocidas.

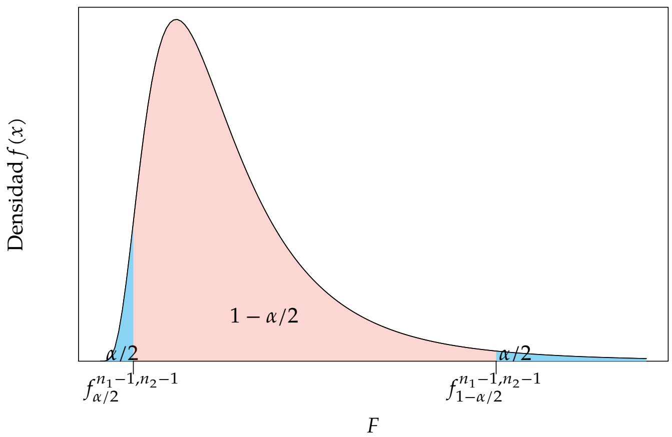
En este caso, para muestras de ambas poblaciones de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, el estimador de referencia sigue una distribución F de Fisher-Snedecor:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(n_1-1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1) \\ \dfrac{(n_2-1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{(n_2-1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}}{n_2-1}}{\frac{\frac{(n_1-1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{n_1-1}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\hat{S}_2^2}{\hat{S}_1^2} \sim F(n_2-1, n_1-1).$$

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales

Como la distribución F de Fisher-Snedecor no es simétrica respecto al 0, se toman dos valores $f_{\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1}$ y $f_{1-\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1}$ que dejen sendas colas de probabilidad acumulada inferior de $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$ respectivamente.

Distribución $F(n_1-1, n_2-1)$



Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales

Así pues, se tiene

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(f_{\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\hat{S}_2^2}{\hat{S}_1^2} \leq f_{1-\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1}\right) = \\ &= P\left(f_{\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq f_{1-\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}\right) \end{aligned}$$

y el intervalo de confianza para la comparación de varianzas de dos poblaciones normales es:

$$\left[f_{\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}, f_{1-\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}\right]$$

Interpretación del intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos poblaciones

Si $[l_i, l_s]$ es un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la razón de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, entonces

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in [l_i, l_s]$$

con una confianza del $1-\alpha\%$.

Por consiguiente, según los valores del intervalo de confianza se tiene:

- Si todos los valores del intervalo son menores que 1 ($l_s < 1$), entonces se puede concluir que $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ y por tanto $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.
- Si todos los valores del intervalo son mayores que 1 ($l_i > 1$), entonces se puede concluir que $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ y por tanto $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.
- Si el intervalo tiene tanto valores mayores como menores que 1, y por tanto contiene al 1 ($1 \in [l_i, l_s]$), entonces no se puede afirmar que una varianza sea mayor que la otra. En este caso se suele asumir la hipótesis de que las varianzas son iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo de las puntuaciones en dos grupos:

$$X_1 : 4-6-8-7-7-6-5-2-5-3$$
$$X_2 : 8-9-5-3-8-7-8-6-8-7-5-7$$

Para calcular el intervalo de confianza para la razón de varianzas con una confianza del 95%, se tiene:

- $\bar{X}_1 = \frac{4+\cdots+3}{10} = 5.3$ puntos y $\bar{X}_2 = \frac{8+\cdots+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $\hat{S}_1^2 = \frac{(4-5.3)^2+\cdots+(3-5.3)^2}{9} = 3.5667$ puntos^2 y $\hat{S}_2^2 = \frac{(8-6.75)^2+\cdots+(3-6.75)^2}{11} = 2.9318$ puntos^2.
- $f_{\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1} = f_{0.025}^{11,9}$ es el valor de la F de Fisher de 11 y 9 grados de libertad que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.025, y que vale aproximadamente 0.2787.
- $f_{1-\alpha/2}^{n_2-1,n_1-1} = f_{0.975}^{11,9}$ es el valor de la F de Fisher de 11 y 9 grados de libertad que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.975, y que vale aproximadamente 3.9121.

Intervalo de confianza para la razón de de varianzas de dos poblaciones normales

Ejemplo

Sustituyendo en la fórmula del intervalo se llega a

$$\left[0.2787\frac{3.5667}{2.9318},\ 3.9121\frac{3.5667}{2.9318}\right] = [0.3391,\ 4.7591] \text{ puntos}^2.$$

Es decir, la razón de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ está entre 0.3391 y 4.7591 con una confianza del 95%.

Como el intervalo tiene tanto valores menores como mayores que 1, no se puede concluir que una varianza sea mayor que la otra, y por tanto se mantiene la hipótesis de que ambas varianzas son iguales.

Si ahora se quisiesen comparar las medias de ambas poblaciones, el intervalo de confianza para la diferencia de medias que habría que tomar es el que parte de la hipótesis de igualdad de varianzas, que precisamente es el que se ha utilizado antes.

Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones de dos poblaciones y muestras grandes

Para comparar las proporciones p_1 y p_2 de individuos que presentan una determinada característica en dos poblaciones independientes, se estima su diferencia $p_1 - p_2$.

Si se toma una muestra de cada población, de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, las variables que miden el número de individuos que presentan la característica en cada una de ellas siguen distribuciones

$$X_1 \sim B(n_1, p_1) \quad \text{y} \quad X_2 \sim B(n_2, p_2)$$

Cuando los tamaños muestrales son grandes (en realidad basta que se cumpla $n_1p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2p_2 \geq 5$ y $n_2(1-p_2) \geq 5$), el teorema central de límite asegura que X_1 y X_2 tendrán distribuciones normales

$$X_1 \sim N(n_1p_1, \sqrt{n_1p_1(1-p_1)}) \quad \text{y} \quad X_2 \sim N(n_2p_2, \sqrt{n_2p_2(1-p_2)}),$$

y las proporciones muestrales

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \sim N\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}\right) \quad \text{y} \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} \sim N\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)$$

Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones de dos poblaciones y muestras grandes

A partir de las proporciones muestrales se construye el estimador de referencia

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right).$$

Tipificando, se buscan valores $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que cumplan

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}\right).$$

Finalmente, deshaciendo la tipificación, se llega fácilmente a la fórmula del intervalo

$$\left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right]$$

Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones de dos poblaciones y muestras grandes

Ejemplo

Supóngase que se quieren comparar las proporciones o porcentajes de aprobados en dos grupos que han seguido metodologías distintas. En el primer grupo han aprobado 24 alumnos de un total de 40, mientras que en el segundo han aprobado 48 de 60.

Para calcular el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones con un nivel de confianza del 95%, se tiene:

- $\hat{p}_1 = 24/40 = 0.6$ y $\hat{p}_2 = 48/60 = 0.8$, de manera que se cumplen las hipótesis $n_1\hat{p}_1 = 40 \cdot 0.6 = 24 \geq 5$, $n_1(1-\hat{p}_1) = 40(1-0.6) = 26 \geq 5$, $n_2\hat{p}_2 = 60 \cdot 0.8 = 48 \geq 5$ y $n_2(1-\hat{p}_2) = 60(1-0.8) = 12 \geq 5$.
- $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

Sustituyendo en la fórmula del intervalo se tiene

$$0.6 - 0.8 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{40} + \frac{0.8(1-0.8)}{60}} = -0.2 \pm 0.17 = [-0.37, -0.03].$$

Como el intervalo es negativo se tiene $p_1 - p_2 < 0 \Rightarrow p_1 < p_2$, y se puede concluir que hay diferencias significativas en el porcentaje de aprobados.

8 Contraste de hipótesis

Hipótesis estadística

En muchos estudios estadísticos, el objetivo, más que estimar el valor de un parámetro desconocido en la población, es comprobar la veracidad de una hipótesis formulada sobre la población objeto de estudio.

El investigador, de acuerdo a su experiencia o a estudios previos, suele tener conjeturas sobre la población estudiada que expresa en forma de hipótesis.

Definición 82 (Hipótesis estadística)**.** Una *hipótesis estadística* es cualquier afirmación o conjetura que determina, total o parcialmente, la distribución de una o varias variables de la población.

Ejemplo. Para contrastar el rendimiento académico de un grupo de alumnos en una determinada asignatura, podríamos platear la hipótesis de si el porcentaje de aprobados es mayor del 50%.

Contraste de hipótesis

En general nunca se sabrá con absoluta certeza si una hipótesis estadística es cierta o falsa, ya que para ello habría que estudiar a todos los individuos de la población.

Para comprobar la veracidad o falsedad de estas hipótesis hay que contrastarlas con los resultados empíricos obtenidos de las muestras. Si los resultados observados en las muestras coinciden, dentro del margen de error admisible debido al azar, con lo que cabría esperar en caso de que la hipótesis fuese cierta, la hipótesis se aceptará como verdadera, mientras que en caso contrario se rechazará como falsa y se buscarán nuevas hipótesis capaces de explicar los datos observados.

Como las muestras se obtienen aleatoriamente, *la decisión de aceptar o rechazar una hipótesis estadística se tomará sobre una base de probabilidad*.

La metodología que se encarga de contrastar la veracidad de las hipótesis estadísticas se conoce como *contraste de hipótesis*.

Tipos de contrastes de hipótesis

- **Contrastes de bondad de ajuste**: El objetivo es comprobar una hipótesis sobre la forma de la distribución de la población. **Ejemplo**. Contastar si las notas de un grupo de alumnos siguen una distribución normal.
- **Contrastes de conformidad**: El objetivo es comprobar una hipótesis sobre alguno de los parámetros de la población. **Ejemplo**. Contrastar si las nota media en un grupo de alumnos es igual a 5.
- **Contrastes de homogeneidad**: El objetivo es comparar dos o más poblaciones con respecto a alguno de sus parámetros. **Ejemplo**. Contrastar si el rendimiento de dos grupos de alumnos es el mismo comparando sus notas medias.
- **Contrastes de independencia**: El objetivo es comprobar si existe relación entre dos variables de la población. **Ejemplo**. Contrastar si existe relación entre la notas de dos asignaturas diferentes.

Cuando las hipótesis se plantean sobre parámetros de la población, también se habla de **contrastes paramétricos**.

8.1 Planteamiento de un contraste de hipótesis

Hipótesis nula e hipótesis alternativa

En la mayoría de los casos un contraste supone tomar una decisión entre dos hipótesis antagonistas:

Hipótesis nula Es la hipótesis conservadora, ya que se mantendrá mientras que los datos de las muestras no reflejen claramente su falsedad. Se representa como H_0.

Hipótesis alternativa Es la negación de la hipótesis nula y generalmente representa la afirmación que se pretende probar. Se representa como H_1.

Ambas hipótesis se eligen de acuerdo con el principio de simplicidad científica:

"Solamente se debe abandonar un modelo simple por otro más complejo cuando la evidencia a favor del último sea fuerte." (Navaja de Occam)

Elección de las hipótesis nula y alternativa

Analogía con un juicio

En el caso de un juicio, en el que el juez debe decidir si el acusado es culpable o inocente, la elección de hipótesis debería ser

$$\begin{array}{ll} H_0: & \text{Inocente} \\ H_1: & \text{Culpable} \end{array}$$

ya que la inocencia se asume, mientras que la culpabilidad hay que demostrarla.

Según esto, el juez sólo aceptaría la hipótesis alternativa cuando hubiese pruebas significativas de la culpabilidad del acusado.

El investigador jugaría el papel del fiscal, ya que su objetivo consistiría en intentar rechazar la hipótesis nula, es decir, demostrar culpabilidad del acusado.

¡Esta metodología siempre favorece a la hipótesis nula!

Contrastes de hipótesis paramétricos

En muchos contrastes, sobre todo en las pruebas de conformidad y de homogeneidad, las hipótesis se formulan sobre parámetros desconocidos de la población como puede ser una media, una varianza o una proporción.

En tal caso, la hipótesis nula siempre asigna al parámetro un valor concreto, mientras que la alternativa suele ser una hipótesis abierta que, aunque opuesta a la hipótesis nula, no fija el valor del parámetro.

Esto da lugar a tres tipos de contrastes:

Bilateral	Unilateral de menor	Unilateral de mayor
H_0: $\theta = \theta_0$ H_1: $\theta \neq \theta_0$	H_0: $\theta = \theta_0$ H_1: $\theta < \theta_0$	H_0: $\theta = \theta_0$ H_1: $\theta > \theta_0$

Elección del tipo de contraste

Ejemplo

Supóngase que existen sospechas de que en una población hay menos hombres que mujeres.

¿Qué tipo de contraste debería plantearse para validar o refutar esta sospecha?

1. Las sospechas se refieren al porcentaje o la proporción p de hombres en la población, por lo que se trata de un *contraste paramétrico*.
2. El objetivo es averiguar el valor de p, por lo que se trata de una *prueba de conformidad*. En la hipótesis nula el valor de p se fijará a 0.5 ya que, de acuerdo a las leyes de la genética, en la población debería haber la misma proporción de hombres que de mujeres.

3. Finalmente, existen sospechas de que el porcentaje de hombres es menor que el de mujeres, por lo que la hipótesis alternativa será de menor $p < 0.5$.

Así pues, el contraste que debería plantearse es el siguiente:

$$\begin{aligned} H_0&: \quad p = 0.5,\\ H_1&: \quad p < 0.5. \end{aligned}$$

8.2 Estadístico del contraste

Estadístico del contraste

La aceptación o rechazo de la hipótesis nula depende, en última instancia, de lo que se observe en la muestra.

La decisión se tomará según el valor que presente algún estadístico de la muestra relacionado con el parámetro o característica que se esté contrastando, y cuya distribución de probabilidad debe ser conocida suponiendo cierta la hipótesis nula y una vez fijado el tamaño de la muestra. Este estadístico recibe el nombre de **estadístico del contraste**.

Para cada muestra, el estadístico dará una estimación a partir de la cual se tomará la decisión: *Si la estimación difiere demasiado del valor esperado bajo la hipótesis* H_0*, entonces se rechazará, y en caso contrario se aceptará.*

La lógica que guía la decisión es la de mantener la hipótesis nula a no ser que en la muestra haya pruebas contundentes de su falsedad. Siguiendo con el símil del juicio, se trataría de mantener la inocencia mientras no haya pruebas claras de culpabilidad.

Estadístico del contraste

Ejemplo

Volviendo al ejemplo del contraste sobre la proporción de hombres de una población

$$\begin{aligned} H_0&: \quad p = 0.5,\\ H_1&: \quad p < 0.5. \end{aligned}$$

Si para resolver el contraste se toma una muestra aleatoria de 10 personas, podría tomarse como estadístico del contraste X el número de hombres en la muestra.

Suponiendo cierta la hipótesis nula, el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $X \sim B(10, 0.5)$, de manera que el número esperado de hombres en la muestra sería 5.

Así pues, es lógico aceptar la hipótesis nula si en la muestra se obtiene un número de hombres próximo a 5 y rechazarla cuando el número de hombres sea muy inferior a 5. Pero,

¿dónde poner el límite entre los valores X que lleven a la aceptación y los que lleven al rechazo?

8.3 Regiones de aceptación y de rechazo

Regiones de aceptación y de rechazo

Una vez elegido el estadístico del contraste, lo siguiente es decidir para qué valores de este estadístico se decidirá aceptar la hipótesis nula y para que valores se rechazará. Esto divide del conjunto de valores posibles del estadístico en dos regiones:

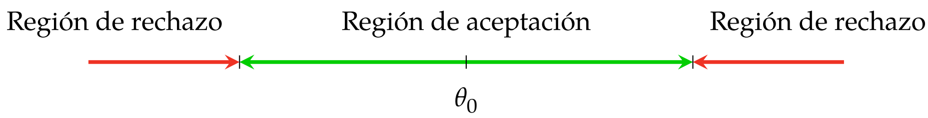
Región de aceptación : Es el conjunto de valores del estadístico del contraste a partir de los cuales se decidirá aceptar la hipótesis nula.

Región de rechazo : Es el conjunto de valores del estadístico del contraste a partir de los cuales se decidirá rechazar la hipótesis nula, y por tanto, aceptar la hipótesis alternativa.

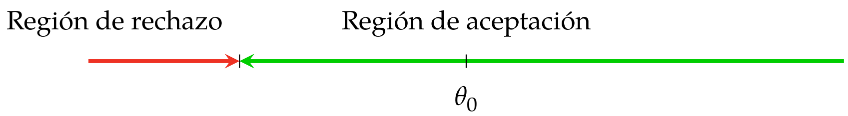
Ubicación de las regiones de aceptación y de rechazo

Dependiendo de la dirección del contraste, la región de rechazo quedará a un lado u otro del valor esperado del estadístico del contraste según la hipótesis nula:

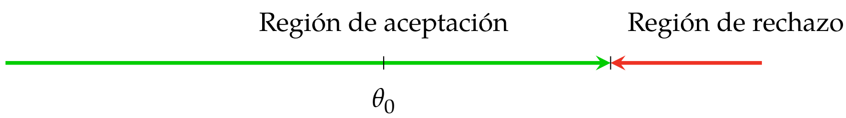
- Contraste bilateral $H_0: \ \theta = \theta_0 \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$.



- Contraste unilateral de menor $H_0: \ \theta = \theta_0 \quad H_1: \ \theta < \theta_0$.



- Contraste unilateral de mayor $H_0: \ \theta = \theta_0 \quad H_1: \ \theta > \theta_0$.



Regiones de aceptación y de rechazo

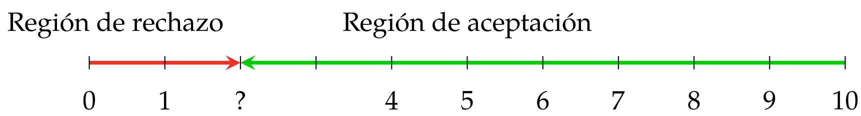
Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo del contraste sobre la proporción de hombres de una población

$$\begin{aligned} H_0&: \quad p = 0.5, \\ H_1&: \quad p < 0.5. \end{aligned}$$

Como el estadístico del contraste tenía una distribución binomial $X \sim B(10, 0.5)$ suponiendo cierta la hipótesis nula, su recorrido será de 0 a 10 y su valor esperado 5, por lo que, al tratarse de un contraste unilateral de menor, la región de rechazo quedará por debajo del 5. Pero,

¿dónde poner el límite entre las regiones de aceptación y de rechazo?



¡Todo dependerá del riesgo de equivocarse!

8.4 Errores en un contraste de hipótesis

Errores en un contraste de hipótesis

Hemos visto que un contraste de hipótesis se realiza mediante una regla de decisión que permite aceptar o rechazar la hipótesis nula dependiendo del valor que tome el estadístico del contraste.

Al final el contraste se resuelve tomando una decisión de acuerdo a esta regla. El problema es que nunca se conocerá con absoluta certeza la veracidad o falsedad de una hipótesis, de modo que al aceptarla o rechazarla es posible que se esté tomando una decisión equivocada.

Los errores que se pueden cometer en un contraste de hipótesis son de dos tipos:

- **Error de tipo I**. Se comete cuando se rechaza la hipótesis nula siendo esta verdadera.
- **Error de tipo II**. Se comete cuando se acepta la hipótesis nula siendo esta falsa.

	Hipótesis verdadera	
Decisión	H_0	H_1
Aceptar H_0	Decisión correcta	Error de tipo II
Rechazar H_0	Error de tipo I	Decisión correcta

Riesgos de los errores de un contraste de hipótesis

Los riesgos de cometer cada tipo de error se cuantifican mediante probabilidades:

Definición 83 (Riesgos α y β)**.** En un contraste de hipótesis, se define el *riesgo* α como la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I, es decir,

$$P(\text{Rechazar } H_0|H_0) \leq \alpha$$

y se define el *riesgo* β como la máxima probabilidad de cometer un error de tipo II, es decir,

$$P(\text{Aceptar } H_0|H_1) \leq \beta$$

Riesgos de los errores de un contraste de hipótesis

	Hipótesis verdadera	
Decisión	H_0	H_1
Aceptar H_0	Decisión correcta $P(\text{Aceptar } H_0\|H_0 \text{ cierta}) \geq 1-\alpha$	Error de tipo II $P(\text{Aceptar } H_0\|H_0 \text{ falsa}) \leq \beta$
Rechazar H_0	Error de tipo I $P(\text{Rechazar } H_0\|H_0 \text{ cierta}) \leq \alpha$	Decisión correcta $P(\text{Rechazar } H_0\|H_0 \text{ falsa}) \geq 1-\beta$

Interpretación del riesgo α

En principio, puesto que esta metodología favorece a la hipótesis nula, el error del tipo I suele ser más grave que el error del tipo II, y por tanto, el riesgo α suele fijarse a niveles bajos de 0.1, 0.05 o 0.01, siendo 0.05 lo más habitual.

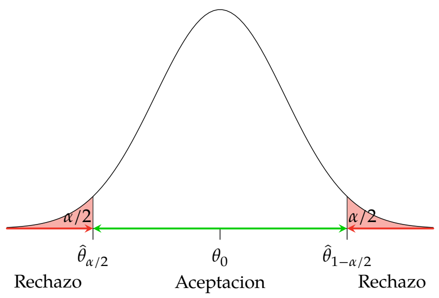
Debe tenerse cuidado al interpretar el riesgo α ya que se trata de una probabilidad condicionada a que la hipótesis nula sea cierta. Por tanto, cuando se rechace la hipótesis nula con un riesgo $\alpha = 0.05$, es erróneo decir 5 de cada 100 veces nos equivocaremos, ya que esto sería cierto sólo si la hipótesis nula fuese siempre verdadera.

Tampoco tiene sentido hablar de la probabilidad de haberse equivocado una vez tomada una decisión a partir de una muestra concreta, pues en tal caso, si se ha tomado la decisión acertada, la probabilidad de error es 0 y si se ha tomado la decisión equivocada, la probabilidad de error es 1.

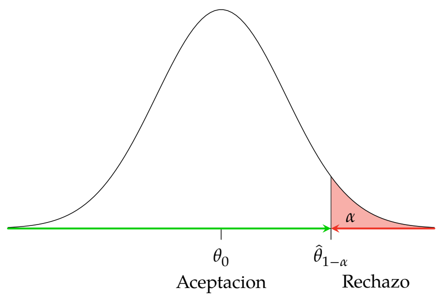
Determinación de las regiones de aceptación y de rechazo en función del riesgo α

Una vez fijado el riesgo α que se está dispuesto a tolerar, es posible delimitar las regiones de aceptación y de rechazo para el estadístico del contraste de manera que la probabilidad acumulada en la región de rechazo sea α, suponiendo cierta la hipótesis nula.

Regiones de un contraste bilateral



Regiones de un contraste unilateral de mayor



Determinación de las regiones de aceptación y de rechazo en función del riesgo α

Ejemplo

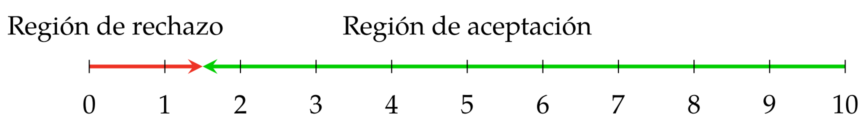
Siguiendo con el contraste sobre la proporción de hombres de una población, como el estadístico del contraste sigue una distribución binomial $X \sim B(10, 0.5)$, si se decide rechazar la hipótesis nula cuando en la muestra haya 2 o menos hombres, la probabilidad de cometer un error de tipo I será

$$P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.0010 + 0.0098 + 0.0439 = 0.0547.$$

Si riesgo máximo de error de tipo I que se está dispuesto a tolerar es $\alpha = 0.05$, ¿qué valores del estadístico permitirán rechazar la hipótesis nula?

$$P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = 0.0010 + 0.0098 = 0.0107.$$

Es decir, sólo se podría rechazar la hipótesis nula con 0 o 1 hombres en la muestra.



Riesgo β y tamaño del efecto

Aunque el error de tipo II pueda parecer menos grave, también interesa que el riesgo β sea bajo, ya que de lo contrario será difícil rechazar la hipótesis nula (que es lo que se persigue la mayoría de las veces), aunque haya pruebas muy claras de su falsedad.

El problema, en el caso de contrastes paramétricos, es que la hipótesis alternativa es una hipótesis abierta en la que no se fija el valor del parámetro a contrastar, de modo que, para poder calcular el riesgo β es necesario fijar dicho valor.

Lo normal es fijar el valor del parámetro del contraste a la mínima cantidad para admitir diferencias significativas desde un punto de vista práctico o clínico. Esa mínima diferencia que se considera clínicamente significativa se conoce como **tamaño del efecto** y se representa por δ.

8.5 Potencia de un contraste

Potencia de un contraste $1 - \beta$

Puesto que el objetivo del investigador suele ser rechazar la hipótesis nula, a menudo, lo más interesante de un contraste es su capacidad para detectar la falsedad de la hipótesis nula cuando realmente hay diferencias mayores que δ entre el verdadero valor del parámetro y el que establece la hipótesis nula.

Definición 84 (Potencia de un contraste)**.** La *potencia* de un contraste de hipótesis se define como

$$\text{Potencia} = P(\text{Rechazar } H_0|H_1) = 1 - P(\text{Aceptar } H_0|H_1) = 1 - \beta.$$

Así pues, al reducir el riesgo β se aumentará la potencia del contraste.

Un contraste poco potente no suele ser interesante ya que no permitirá rechazar la hipótesis nula aunque haya evidencias en su contra.

Cálculo del riesgo β y de la potencia $1 - \beta$

Ejemplo

Supóngase que en el contraste sobre la proporción de hombres no se considera importante una diferencia de menos de un 10% con respecto al valor que establece la hipótesis nula, es decir, $\delta = 0.1$.

Esto permite fijar la hipótesis alternativa

$$H_1 : \ p = 0.5 - 0.1 = 0.4.$$

Suponiendo cierta esta hipótesis el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $X \sim B(10, 0.4)$.

En tal caso, el riesgo β para las regiones de aceptación y rechazo fijadas antes será

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0|H_1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.0464 = 0.9536.$$

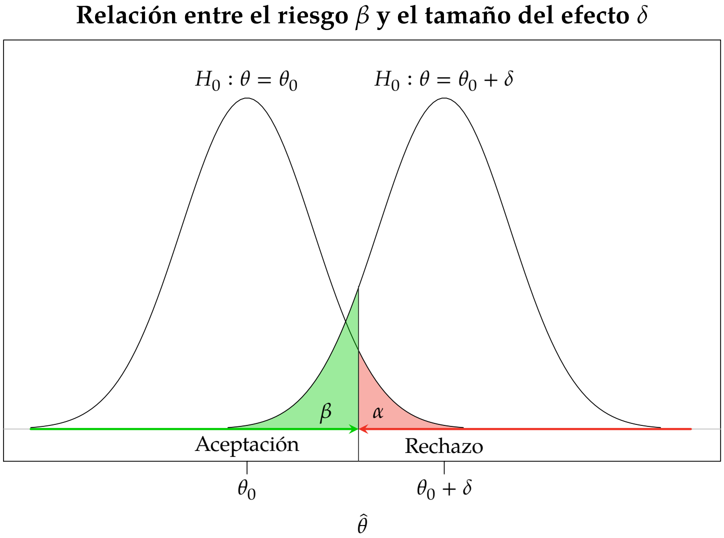
Como puede apreciarse, se trata de un riesgo β muy alto, por lo que la potencia del contraste sería sólo de

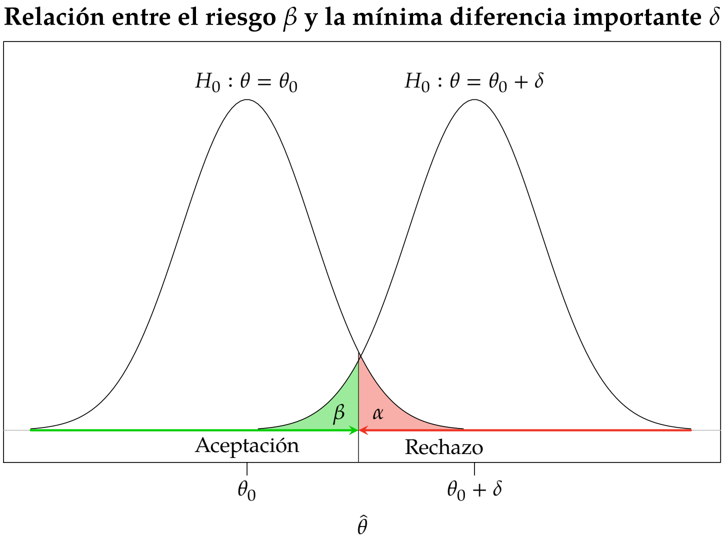
$$1 - \beta = 1 - 0.9536 = 0.0464,$$

lo que indica que no se trataría de un buen contraste para detectar diferencias de un 10% en el valor del parámetro.

Relación del riesgo β y el tamaño del efecto δ

El riesgo β depende directamente de la mínima diferencia δ que se desea detectar con respecto al valor del parámetro que establece la hipótesis nula.





Relación del riesgo β y el tamaño del efecto δ

Si en el contraste sobre la proporción de hombres se desease detectar una diferencia de al menos un 20% con respecto al valor que establece la hipótesis nula, es decir, $\delta = 0.2$, entonces la hipótesis alternativa se fijaría a

$$H_1 : \ p = 0.5 - 0.2 = 0.3,$$

y bajo esta hipótesis el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $X \sim B(10, 0.3)$.

En tal caso, el riesgo β para las regiones de aceptación y rechazo fijadas antes sería

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0|H_1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.1493 = 0.8507,$$

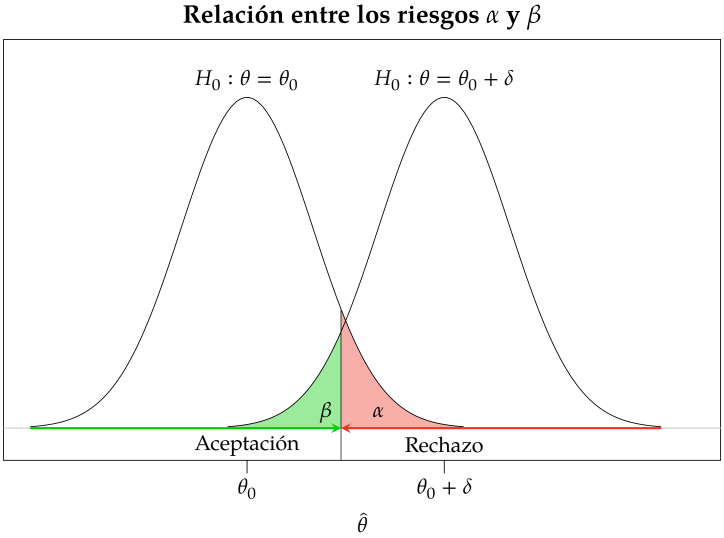
por lo que el riesgo riesgo β disminuiría y la potencia del contraste aumentaría

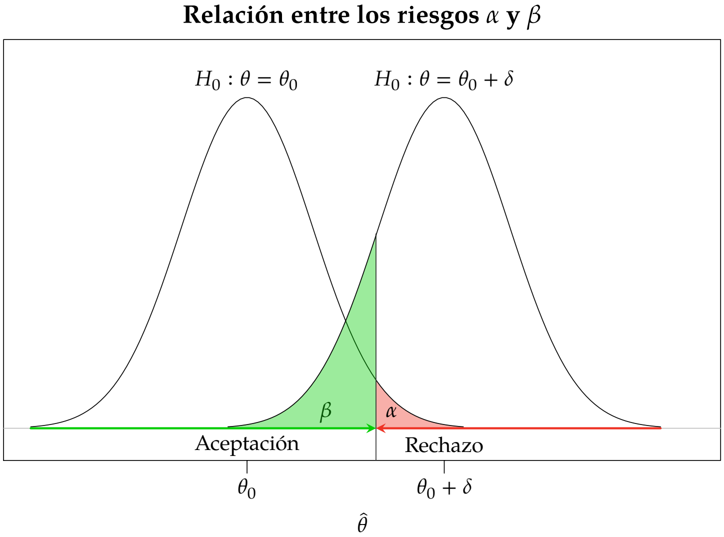
$$1 - \beta = 1 - 0.8507 = 0.1493,$$

aunque seguiría siendo un contraste poco potente.

Relación entre los riesgos α y β

Los riesgos α y β están enfrentados, es decir, cuando uno aumenta el otro disminuye y viceversa.





Relación entre los riesgos α y β

Ejemplo

Si en el contraste sobre la proporción de hombres toma como riesgo $\alpha = 0.1$, entonces la región de rechazo sería $X \leq 2$ ya que, suponiendo cierta la hipótesis nula, $X \sim B(10, 0.5)$, y

$$P(X \leq 2) = 0.0547 \leq 0.1 = \alpha.$$

Entonces, para una diferencia mínima $\delta = 0.1$ y suponiendo cierta la hipótesis alternativa, $X \sim B(10, 0.4)$, el riesgo β será

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0|H_1) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0.1673 = 0.8327,$$

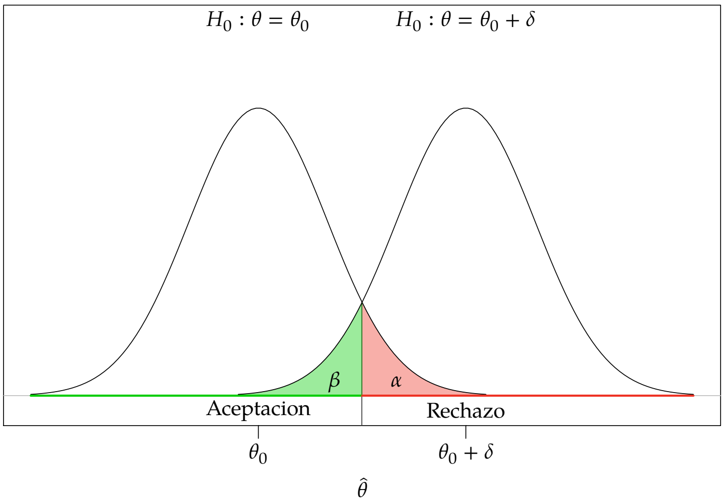
y ahora la potencia ha subido hasta

$$1 - \beta = 1 - 0.8327 = 0.1673.$$

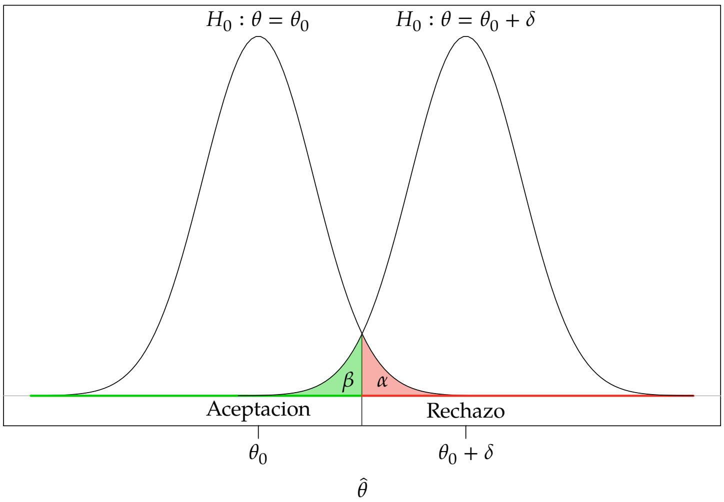
Relación de los riesgos de error y el tamaño muestral

Los riesgos de error también dependen el tamaño de la muestra, ya que al aumentar el tamaño de la muestra, la dispersión del estadístico del contraste disminuye y con ello también lo hacen los riesgos de error.

Riesgos de error para muestras pequeñas



Riesgos de error para muestras grandes



Relación de los riesgos de error y el tamaño muestral

Ejemplo

Si para realizar el contraste sobre la proporción de hombres se hubiese tomado una muestra de tamaño 100, en lugar de 10, entonces, bajo la suposición de certeza de la hipótesis nula, el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $B(100, 0.5)$, y ahora la región de rechazo sería $X \leq 41$, ya que

$$P(X \leq 41) = 0.0443 \leq 0.05 = \alpha.$$

Entonces, para $\delta = 0.1$ y suponiendo cierta la hipótesis alternativa, $X \sim B(100, 0.4)$, el riesgo β sería

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 | H_1) = P(X \geq 42) = 0.3775,$$

y ahora la potencia habría aumentado considerablemente

$$1 - \beta = 1 - 0.3775 = 0.6225.$$

Este contraste sería mucho más útil para detectar una diferencia de al menos un 10% con respecto al valor del parámetro que establece la hipótesis nula.

Curva de potencia

La potencia de un contraste depende del valor del parámetro que establezca la hipótesis alternativa y, por tanto, es una función de este

$$\text{Potencia}(x) = P(\text{Rechazar } H_0|\theta = x).$$

Esta función da la probabilidad de rechazar la hipótesis nula para cada valor del parámetro y se conoce como **curva de potencia**.

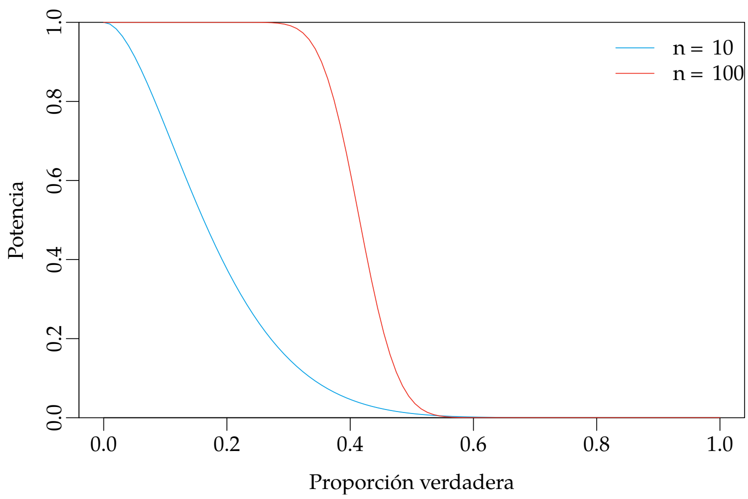
Cuando no se puede fijar el valor concreto del parámetro en la hipótesis alternativa, resulta útil representar esta curva para ver la bondad del contraste cuando no se rechaza la hipótesis nula. También es útil cuando sólo de dispone de un número determinado de individuos en la muestra, para ver si merece la pena hacer el estudio.

¡Un contraste será mejor cuanto mayor sea el área encerrada por debajo de la curva de potencia!

Curva de potencia

Ejemplo

La curva de potencia correspondiente al contraste sobre la proporción de hombres en la población es la siguiente



8.6 *p*-valor de un contraste

p-valor de un contraste de hipótesis

En general, siempre que la estimación del estadístico caiga dentro de la región de rechazo, rechazaremos la hipótesis nula, pero evidentemente, si dicha estimación se aleja bastante de la región de aceptación tendremos más confianza en el rechazo que si la estimación está cerca del límite entre las regiones de aceptación y rechazo.

Por este motivo, al realizar un contraste, también se calcula la probabilidad de obtener una discrepancia mayor o igual a la observada entre la estimación del estadístico del contraste y su valor esperado según la hipótesis nula.

Definición 85 (*p*-valor)**.** En un contraste de hipótesis, para cada estimación x_0 del estadístico del contraste X, dependiendo del tipo de contraste, se define el *p*-valor del contraste como

Contraste bilateral:	$2P(X \geq x_0 \vert H_0)$
Contraste unilateral de menor:	$P(X \leq x_0 \vert H_0)$
Contraste unilateral de mayor:	$P(X \geq x_0 \vert H_0)$

Realización del contraste con el p-valor

En cierto modo, el p-valor expresa la confianza que se tiene al tomar la decisión de rechazar la hipótesis nula. Cuanto más próximo esté el p-valor a 1, mayor confianza existe al aceptar la hipótesis nula, y cuanto más próximo esté a 0, mayor confianza hay al rechazarla.

Una vez fijado el riesgo α, la regla de decisión para realizar un contraste también puede expresarse de la siguiente manera:

Regla de decisión de un contraste

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } p\text{-valor} \leq \alpha & \rightarrow & \text{Rechazar } H_0, \\ \text{Si } p\text{-valor} > \alpha & \rightarrow & \text{Aceptar } H_0. \end{array}$$

De este modo, el p-valor nos da información de para qué niveles de significación puede rechazarse la hipótesis nula y para cuales no.

Cálculo del p-valor de un contraste de hipótesis

Ejemplo

Si el contraste sobre la proporción de hombres se toma una muestra de tamaño 10 y se observa 1 hombre, entonces el p-valor, bajo a supuesta certeza de la hipótesis nula, $X \sim B(10, 0.5)$, será

$$p = P(X \leq 1) = 0.0107,$$

mientras que si en la muestra se observan 0 hombres, entonces el p-valor será

$$p = P(X \leq 0) = 0.001.$$

En el primer caso se rechazaría la hipótesis nula para un riesgo $\alpha = 0.05$, pero no podría rechazarse par un riesgo $\alpha = 0.01$, mientas que en el segundo caso también se rechazaría para $\alpha = 0.01$. Es evidente que en el segundo la decisión de rechazar la hipótesis nula se tomaría con mayor confianza.

Pasos para la realización de un contraste de hipótesis

1. Formular la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1.
2. Fijar los riesgos α y β deseados.
3. Seleccionar el estadístico del contraste.
4. Fijar la mínima diferencia clínicamente significativa (tamaño del efecto) δ.
5. Calcular el tamaño muestral necesario n.
6. Delimitar las regiones de aceptación y rechazo.
7. Tomar una muestra de tamaño n.
8. Calcular el estadístico del contraste en la muestra.
9. Rechazar la hipótesis nula si la estimación cae en la región de rechazo o bien si el p-valor es menor que el riesgo α y aceptarla en caso contrario.

Contrastes paramétricos más importantes

Pruebas de conformidad:

- Contraste para la media de una población normal con varianza conocida.
- Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida.
- Contraste para la media de una población con varianza desconocida a partir de muestras grandes.
- Contraste para la varianza de una población normal.
- Contraste para un proporción de una población.

Pruebas de homogeneidad:

- Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas.
- Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas pero iguales.
- Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas y diferentes.
- Contraste de comparación de varianzas de dos poblaciones normales.
- Contraste de comparación de proporciones de dos poblaciones.

8.7 Pruebas de conformidad

Contraste para la media de una población normal con varianza conocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- La media μ es desconocida, pero su varianza σ^2 es conocida.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Región de aceptación: $z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $z \leq z_{\alpha/2}$ y $z \geq z_{1-\alpha/2}$.

Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Contraste:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del contraste: Utilizando la cuasivarianza como estimador de la varianza poblacional se tiene

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \sim T(n-1).$$

Región de aceptación: $t^{n-1}_{\alpha/2} < T < t^{n-1}_{1-\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $T \leq t^{n-1}_{\alpha/2}$ y $T \geq t^{n-1}_{1-\alpha/2}$.

Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida

Ejemplo

En un grupo de alumnos se quiere contrastar si la nota media de estadística es mayor que 5 puntos. Para ello se toma la siguiente muestra:

6.3, 5.4, 4.1, 5.0, 8.2, 7.6, 6.4, 5.6, 4.3, 5.2

El contraste que se plantea es

$$H_0 : \mu = 5 \quad H_1 : \mu > 5$$

Para realizar el contraste se tiene:

- $\bar{x} = \frac{6.3+\cdots+5.2}{10} = \frac{58.1}{10} = 5.81$ puntos.
- $\hat{s}^2 = \frac{(6.3-5.56)^2+\cdots+(5.2-5.56)^2}{9} = \frac{15.949}{9} = 1.7721$ puntos^2, y $\hat{s} = 1.3312$ puntos.

Y el estadístico del contraste vale

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} = \frac{5.81 - 5}{1.3312/\sqrt{10}} = 1.9246.$$

El p-valor del contraste es $P(T(9) \geq 1.9246) = 0.04323$, lo que indica que se rechazaría la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$.

Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida

Ejemplo

La región de rechazo es

$$T = \frac{\bar{x} - 5}{1.3312/\sqrt{10}} \geq t^9_{0.95} = 1.8331 \Leftrightarrow \bar{x} \geq 5 + 1.8331\frac{1.3312}{\sqrt{10}} = 5.7717,$$

de modo que se rechazará la hipótesis nula siempre que la media de la muestra sea mayor que 5.7717 y se aceptará en caso contrario.

Suponiendo que en la práctica la mínima diferencia importante en la nota media fuese de un punto $\delta = 1$, entonces bajo la hipótesis alternativa $H_1 : \mu = 6$, si se decidiese rechazar la hipótesis nula, el riesgo β sería

$$\beta = P\left(T(9) \leq \frac{5.7717 - 6}{1.3312\sqrt{10}}\right) = P(T(9) \leq -0.5424) = 0.3004,$$

de manera que la potencia del contraste para detectar una diferencia de $\delta = 1$ punto sería $1 - \beta = 1 - 0.3004 = 0.6996$.

Determinación del tamaño muestral en un contraste para la media

Se ha visto que para un riesgo α la región de rechazo era

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}^{n-1} \approx z_{1-\alpha} \quad \text{para } n \geq 30.$$

o lo que es equivalente

$$\bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}.$$

Si la mínima diferencia clínicamente significativa es δ, para una hipótesis alternativa $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$, el riesgo β es

$$\beta = P\left(Z < \frac{\mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + \delta)}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z < \frac{z_{1-\alpha}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} - \delta}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}\right).$$

de modo que

$$z_\beta = \frac{z_{1-\alpha}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} - \delta}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow \delta = (z_{1-\alpha} - z_\beta)\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = (z_{1-\alpha} - z_\beta)^2\frac{\hat{s}^2}{\delta^2} = (z_\alpha + z_\beta)^2\frac{\hat{s}^2}{\delta^2}.$$

Determinación del tamaño muestral en un contraste para la media

Ejemplo

Se ha visto en el ejemplo anterior que la potencia del contraste para detectar una diferencia en la nota media de 1 punto era del 69.96%. Para aumentar la potencia del test hasta un 90%, ¿cuántos alumnos habría que tomar en la muestra?

Como se desea una potencia $1-\beta = 0.9$, el riesgo $\beta = 0.1$ y mirando en la tabla de la normal estándar se puede comprobar que $z_\beta = z_{0.1} = 1.2816$.

Aplicando la fórmula anterior para determinar el tamaño muestral necesario, se tiene

$$n = (z_\alpha + z_\beta)^2\frac{\hat{s}^2}{\delta^2} = (1.6449 + 1.2816)^2\frac{1.7721}{1^2} = 15.18,$$

de manera que habría que haber tomado al menos 16 alumnos.

Contraste para la media de una población con varianza desconocida y muestras grandes $n \geq 30$

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

– Su distribución puede ser de cualquier tipo.

– Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Contraste:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del contraste: Utilizando la cuasivarianza como estimador de la varianza poblacional y gracias al teorema central del límite por tratarse de muestras grandes ($n \geq 30$) se tiene

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Región de aceptación: $-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $z \leq -z_{\alpha/2}$ y $z \geq z_{\alpha/2}$.

Contraste para la varianza de una población normal

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

– Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.

– Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma = \sigma_0 \\ H_1 &: \sigma \neq \sigma_0 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste: Partiendo de la cuasivarianza muestral como estimador de la varianza poblacional, se tiene

$$J = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

que sigue una distribución chi-cuadrado de $n-1$ grados de libertad.

Región de aceptación: $\chi^{n-1}_{\alpha/2} < J < \chi^{n-1}_{1-\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $J \leq \chi^{n-1}_{\alpha/2}$ y $J \geq \chi^{n-1}_{1-\alpha/2}$.

Contraste para la varianza de una población normal

Ejemplo

En un grupo de alumnos se quiere contrastar si la desviación típica de la nota es mayor de 1 punto. Para ello se toma la siguiente muestra:

$$6.3, 5.4, 4.1, 5.0, 8.2, 7.6, 6.4, 5.6, 4.3, 5.2$$

El contraste que se plantea es

$$H_0 : \sigma = 1 \quad H_1 : \sigma > 1$$

Para realizar el contraste se tiene:

– $\bar{x} = \frac{6.3+\cdots+5.2}{10} = \frac{58.1}{10} = 5.81$ puntos.

– $\hat{s}^2 = \frac{(6.3-5.56)^2+\cdots+(5.2-5.56)^2}{9} = \frac{15.949}{9} = 1.7721$ puntos^2.

El estadístico del contraste vale

$$J = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot 1.7721}{1^2} = 15.949,$$

y el p-valor del contraste es $P(\chi(9) \geq 15.949) = 0.068$, por lo que no se puede rechazar la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$.

Contraste para proporción de una población

Sea p la proporción de individuos de una población que tienen una determinada característica.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: p = p_0 \\ H_1 &: p \neq p_0 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste: La variable que mide el número de individuos con la característica en una muestra aleatoria de tamaño n sigue una distribución binomial $X \sim B(n, p_0)$. De acuerdo al teorema central del límite, para muestras grandes ($np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$), $X \sim N(np_0, \sqrt{np_0(1-p_0)})$, y se cumple

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1).$$

Región de aceptación: $z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $z \leq z_{\alpha/2}$ y $z \geq z_{1-\alpha/2}$.

Contraste para proporción de una población

Ejemplo

En un grupo de alumnos se desea estimar si el porcentaje de aprobados es mayor del 50%. Para ello se toma una muestra de 80 alumnos entre los que hay 50 aprobados.

El contraste que se plantea es

$$H_0 : p = 0.5$$
$$H_1 : p > 0.5$$

Para realizar el contraste se tiene que $\hat{p} = 50/80 = 0.625$ y como se cumple $n\hat{p} = 80 \cdot 0.625 = 50 \geq 5$ y $n(1-\hat{p}) = 80(1-0.625) = 30 \geq 5$, el estadístico del contraste vale

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.625 - 0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)/80}} = 2.2361.$$

y el p-valor del contraste es $P(Z \geq 2.2361) = 0.0127$, por lo que se rechaza la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$ y se concluye que el porcentaje de aprobados es mayor de la mitad.

8.8 Pruebas de homogeneidad

Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas, pero sus varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas.

Contraste:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Estadístico del contraste:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right) \\ \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Región de aceptación: $-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $z \leq -z_{\alpha/2}$ y $z \geq z_{\alpha/2}$.

Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas y sus varianzas también, pero son iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\right) \\ \dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2) \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} \sim T(n_1 + n_2 - 2).$$

Región de aceptación: $-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} < T < t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$. **Región de rechazo**: $T \leq -t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$ y $T \geq t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$.

Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Ejemplo

Se quiere comparar el rendimiento académico de dos grupos de alumnos, uno con 10 alumnos y otro con 12, que han seguido metodologías diferentes. Para ello se les realiza un examen y se obtienen las siguientes puntuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &: 4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3 \\ X_2 &: 8 - 9 - 5 - 3 - 8 - 7 - 8 - 6 - 8 - 7 - 5 - 7 \end{aligned}$$

El contraste que se plantea es

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Para realizar el contraste, se tiene

- $\bar{X}_1 = \frac{4+\cdots+3}{10} = 5.3$ puntos y $\bar{X}_2 = \frac{8+\cdots+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $S_1^2 = \frac{(4^2+\cdots+3^2}{10} - 5.3^2 = 3.21$ puntos^2 y $S_2^2 = \frac{8^2+\cdots+3^2}{12} - 6.75^2 = 2.69$ puntos^2.
- $\hat{S}_p^2 = \frac{10 \cdot 3.21 + 12 \cdot 2.6875}{10+12-2} = 3.2175$ puntos^2, y $\hat{S}_p = 1.7937$.

Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Ejemplo

Si se suponen varianzas iguales, el estadístico del contraste vale

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{5.3 - 6.75}{1.7937\sqrt{\frac{10+12}{10 \cdot 12}}} = -1.8879,$$

y el p-valor del contraste es $2P(T(20) \leq -1.8879) = 0.0736$, de modo que no se puede rechazar la hipótesis nula y se concluye que no hay diferencias significativas entre las notas medias de los grupos.

Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

– Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

– Sus medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2, σ_2^2, son desconocidas, pero $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Contraste:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\
H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2
\end{aligned}
$$

Estadístico del contraste:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} \sim T(g), \quad \text{con } g = n_1 + n_2 - 2 - \Delta \quad \text{y } \Delta = \frac{(\frac{n_2-1}{n_1}\hat{S}_1^2 - \frac{n_1-1}{n_2}\hat{S}_2^2)^2}{\frac{n_2-1}{n_1^2}\hat{S}_1^4 + \frac{n_1-1}{n_2^2}\hat{S}_2^4}.$$

Región de aceptación: $-t^g_{\alpha/2} < T < t^g_{\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $T \leq -t^g_{\alpha/2}$ y $T \geq t^g_{\alpha/2}$.

Contraste de comparación de varianzas de dos poblaciones normales

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

– Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

– Sus medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2, σ_2^2 son desconocidas.

Contraste:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \sigma_1 = \sigma_2 \\
H_1 &: \sigma_1 \neq \sigma_2
\end{aligned}
$$

Estadístico del contraste:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(n_1-1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1) \\ \dfrac{(n_2-1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1) \end{array}\right\} \Rightarrow F = \frac{\frac{\frac{(n_1-1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{n_1-1}}{\frac{\frac{(n_2-1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}}{n_2-1}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

Región de aceptación: $F^{n_1-1,n_2-1}_{\alpha/2} < F < F^{n_1-1,n_2-1}_{1-\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $F \leq F^{n_1-1,n_2-1}_{\alpha/2}$ y $F \geq F^{n_1-1,n_2-1}_{1-\alpha/2}$.

Contraste de comparación de varianzas de dos poblaciones normales

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo de las puntuaciones en dos grupos:

$$
\begin{aligned}
X_1 &: 4-6-8-7-7-6-5-2-5-3 \\
X_2 &: 8-9-5-3-8-7-8-6-8-7-5-7
\end{aligned}
$$

Si se desea comparar las varianzas, el contraste que se plantea es

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \qquad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Para realizar el contraste, se tiene

- $\bar{X}_1 = \frac{4+\cdots+3}{10} = 5.3$ puntos y $\bar{X}_2 = \frac{8+\cdots+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $\hat{S}_1^2 = \frac{(4-5.3)^2+\cdots+(3-5.3)^2}{9} = 3.5667$ y $\hat{S}_2^2 = \frac{(8-6.75)^2+\cdots+(3-6.75)^2}{11} = 2.9318$ puntos^2.

El estadístico del contraste vale

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{3.5667}{2.9318} = 1.2165,$$

y el p-valor del contraste es $2P(F(9,11) \leq 1.2165) = 0.7468$, por lo que se mantiene la hipótesis de igualdad de varianzas.

Contraste de comparación de proporciones de dos poblaciones

Sean p_1 y p_2 las respectivas proporciones de individuos que presentan una determinada característica en dos poblaciones.

Contraste:

$$H_0 : p_1 = p_2 \qquad H_1 : p_1 \neq p_2$$

Estadístico del contraste: Las variables que miden el número de individuos con la característica en dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, siguen distribuciones binomiales $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ y $X_2 \sim B(n_2, p_2)$. Si las muestras son grandes ($n_i p_i \geq 5$ y $n_i(1-p_i) \geq 5$), de acuerdo al teorema central del límite, $X_1 \sim N(np_1, \sqrt{np_1(1-p_1)})$ y $X_2 \sim N(np_2, \sqrt{np_2(1-p_2)})$, y se cumple

$$\left.\begin{array}{l} \hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \sim N\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}\right) \\ \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} \sim N\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Región de aceptación: $z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}$. **Región de rechazo**: $z \leq z_{\alpha/2}$ y $z \geq z_{1-\alpha/2}$.

Contraste de comparación de proporciones de dos poblaciones

Ejemplo

Se quiere comparar los porcentajes de aprobados en dos grupos que han seguido metodologías distintas. En el primer grupo han aprobado 24 alumnos de un total de 40, mientras que en el segundo han aprobado 48 de 60.

El contraste que se plantea es

$$H_0 : p_1 = p_2 \qquad H_1 : p_1 \neq p_2$$

Para realizar el contraste, se tiene $\hat{p}_1 = 24/40 = 0.6$ y $\hat{p}_2 = 48/60 = 0.8$, de manera que se cumplen las condiciones $n_1\hat{p}_1 = 40 \cdot 0.6 = 24 \geq 5$, $n_1(1-\hat{p}_1) = 40(1-0.6) = 26 \geq 5$, $n_2\hat{p}_2 = 60 \cdot 0.8 = 48 \geq 5$ y $n_2(1-\hat{p}_2) = 60(1-0.8) = 12 \geq 5$, y el estadístico del contraste vale

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \frac{0.6 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{40} + \frac{0.8(1-0.8)}{60}}} = -2.1483,$$

y el p-valor del contraste es $2P(Z \leq -2.1483) = 0.0317$, de manera que se rechaza la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$ y se concluye que hay diferencias.

8.9 Realización de contrastes mediante intervalos de confianza

Realización de un contraste mediante un intervalo de confianza

Una interesante alternativa a la realización de un contraste

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

con un riesgo α, es calcular el intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza $1-\alpha$, ya que este intervalo se puede interpretar como el conjunto aceptable de hipótesis para θ, de manera que si θ_0 está fuera del intervalo, la hipótesis nula es poco creíble y puede rechazarse, mientras que si está dentro la hipótesis es creíble y se acepta.

Cuando el contraste sea unilateral de menor, el contraste se realizaría comparando θ_0 con el límite superior del intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza $1-2\alpha$, mientras que si el contraste es unilateral de mayor, se comparará con el límite inferior del intervalo.

Contraste	Intervalo de confianza	Decisión
Bilateral	$[l_i, l_s]$ con nivel de confianza $1-\alpha$	Rechazar H_0 si $\theta_0 \notin [l_i, l_s]$
Unilateral menor	$[-\infty, l_s]$ con nivel de confianza $1-2\alpha$	Rechazar H_0 si $\theta_0 \geq l_s$
Unilateral mayor	$[l_i, \infty]$ con nivel de confianza $1-2\alpha$	Rechazar H_0 si $\theta_0 \leq l_i$

Realización de un contraste mediante un intervalo de confianza

Ejemplo

Volviendo al contraste para comparar el rendimiento académico de dos grupos de alumnos que han obtenido las siguientes puntuaciones:

$$X_1 : 4-6-8-7-7-6-5-2-5-3$$
$$X_2 : 8-9-5-3-8-7-8-6-8-7-5-7$$

El contraste que se planteaba era

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Como se trata de un contraste bilateral, el intervalo de confianza para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$, suponiendo varianzas iguales, vale $[-3.0521, 0.1521]$ puntos. Y como según la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$, y el 0 cae dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula.

La ventaja del intervalo es que, además de permitirnos realizar el contraste, nos da una idea de la magnitud de la diferencia entre las medias de los grupos.