

# EJERCICIOS DE CÁLCULO

Asignatura: Matemáticas

Curso: Primero

Grado: Farmacia

Año: 2018-2019

Autores: Eduardo López Ramírez ([elopez@ceu.es](mailto:elopez@ceu.es))  
Anselmo Romero Limón ([arlimon@ceu.es](mailto:arlimon@ceu.es))  
José Rojo Montijano ([jrojo.eps@ceu.es](mailto:jrojo.eps@ceu.es))  
Alfredo Sánchez Alberca ([asalber@ceu.es](mailto:asalber@ceu.es))



CEU

*Universidad  
San Pablo*

## Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Cálculo diferencial en una variable</b>     | <b>2</b>  |
| <b>2. Ecuaciones Diferenciales</b>                | <b>7</b>  |
| <b>3. Cálculo diferencial en varias variables</b> | <b>11</b> |

## 1. Cálculo diferencial en una variable

1. Calcular la derivada de la función  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  para  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$  e interpretarla. Calcular la recta tangente a  $f$  en cada uno de los puntos anteriores.

---

SOLUCIÓN

---

$$f'(-1) = 7, f'(0) = 0 \text{ y } f'(1) = -1.$$

$$\text{Recta tangente en } x = -1: y = -2 + 7(x + 1).$$

$$\text{Recta tangente en } x = 0: y = 1.$$

$$\text{Recta tangente en } x = 1: y = -(x - 1).$$


---

2. El pH de una solución mide la concentración de iones de hidrógeno ( $H^+$ ) y se define como

$$\text{pH} = -\log_{10}(H^+).$$

Calcular la derivada del pH en función de la concentración de  $H^+$ . ¿Cómo es el crecimiento del pH?

---

SOLUCIÓN

---

El pH decrece a medida que aumenta la concentración de  $H^+$ .

---

3. La velocidad de crecimiento  $v$  de una planta depende de la cantidad de nitrógeno disponible  $n$  según la ecuación

$$v(n) = \frac{an}{k + n}, \quad n \geq 0,$$

donde  $a$  y  $k$  son constantes positivas. Estudiar el crecimiento de esta función e interpretarlo.

---

SOLUCIÓN

---

La velocidad de crecimiento aumenta a medida que aumenta  $n$  pero cada vez con menos fuerza, de manera que cuando  $n \rightarrow \infty$  la velocidad de crecimiento sería nula.

---

4. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto  $x_0$  indicado.

a)  $y = x^{\sin x}, \quad x_0 = \pi/2.$

b)  $y = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x_0 = 0.$

---

SOLUCIÓN

---

a) Tangente:  $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2}$ . Normal:  $y - \frac{\pi}{2} = -x + \frac{\pi}{2}$ .

b) Tangente:  $y = x$ . Normal:  $y = -x$ .

---

5. Un balón relleno de aire tiene radio 10 cm cuando se empieza a introducir más aire, de manera que el radio se incrementa con una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad varía el volumen en ese instante? Nota: El volumen de una esfera es  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

---

SOLUCIÓN

---

$$800\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$


---

6. Una pipeta cilíndrica de radio 5 mm almacena una solución. Si la pipeta empieza a vaciarse a razón de 0,5 ml por segundo, ¿a qué velocidad disminuye el nivel de la pipeta?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

−6,37 mm/s.

7. La función que explica la desintegración radioactiva es

$$m(t) = m_0 e^{-kt},$$

donde  $m(t)$  es la cantidad de materia en el instante  $t$ ,  $m_0$  es la cantidad inicial de materia,  $k$  es una constante conocida como *constante de desintegración* y  $t$  es el tiempo. Calcular la velocidad de desintegración en cualquier instante  $t$ . Si para un material concreto  $k = 0,002$ , ¿cuál es el periodo de semidesintegración del material?

Nota: El *periodo de semidesintegración* de un material radioactivo es el tiempo que transcurre hasta que la masa se reduce a la mitad de su valor inicial.

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

Velocidad de desintegración:  $-km_0 e^{-kt}$ .

Periodo de semidesintegración: 346.57 años.

8. La posición que ocupa un coche que se mueve en línea recta, puede expresarse en función del tiempo según la ecuación

$$e(t) = 4t^3 - 2t + 1.$$

Calcular su velocidad y aceleración en cualquier instante.

Nota: La aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad.

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

Velocidad  $v(t) = 12t^2 - 2$  y aceleración  $a(t) = 24t$ .

9. El espacio recorrido por un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba, sin tener en cuenta la resistencia del aire, viene dado por la ecuación

$$e(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial con que se lanza el objeto,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  es la constante gravitatoria de la Tierra y  $t$  es el tiempo transcurrido desde que el objeto se lanza. Se pide:

- Calcular la velocidad y la aceleración en cualquier instante.
- Si el objeto se lanza inicialmente a 50 km/h, ¿cuál será la altura máxima que alcanzará el objeto? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?
- ¿En qué instante volverá a tocar la tierra el objeto? ¿Con qué velocidad?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

- Velocidad  $v(t) = v_0 - gt$  y aceleración  $a(t) = -g$ .
- Alcanzará una altura máxima de 9,83 m a los 1,42 s. La velocidad en ese instante es nula.
- Tocará tierra de nuevo a los 2,83 s con velocidad  $-13,89 \text{ m/s}$ .

10. Un cilindro de 4 cm de radio ( $r$ ) y 3 cm de altura ( $h$ ) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que  $\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = 1$  cm/s. Hallar de forma aproximada la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

---

SOLUCIÓN

---

$dV = 2\pi r h dt + \pi r^2 dt$  y en el instante inicial tenemos  $dV = 40\pi dt$ . A los 5 segundos la variación aproximada será  $dV(5) = 40\pi 5 = 200\pi$  cm<sup>3</sup>/s, y a los 10 segundos  $dV(10) = 40\pi 10 = 400\pi$  cm<sup>3</sup>/s.

---

11. Se desea medir la superficie de una célula esférica y para ello se ha medido el radio de una célula de  $5 \mu$  con un error de  $0.2 \mu$ . ¿Cuál será el error aproximado cometido en el cálculo de la superficie de la célula? En general, si al medir el radio se comete siempre un error relativo del 2%? ¿Cómo afecta esto al error de la medida de la superficie de la célula?

Nota: La superficie de una esfera es  $S = 4\pi r^2$ . Utilizar la aproximación lineal, es decir, la recta tangente de esta función.

---

SOLUCIÓN

---

Para un error en el radio de  $0.2 \mu$  el error aproximado en la superficie es  $8\pi \mu^2$ , y para un error relativo del 2% el error aproximado en la superficie es del 4%.

---

- ★ 12. En una reacción química, la concentración de una sustancia  $c$  depende de la concentración de otras dos sustancias  $a$  y  $b$  según la ecuación  $c = \sqrt[3]{ab^2}$ . Si en un determinado instante  $t_0$  en el que la concentración de  $a = b = 2$  mg/mm<sup>3</sup> se empieza a aumentar la concentración de  $a$  a razón de  $0.2$  mg·mm<sup>-3</sup>/s y la de  $b$  a razón de  $0.4$  mg·mm<sup>-3</sup>/s, ¿con qué velocidad cambia la concentración de  $c$ ? ¿Cuál será la concentración aproximada de  $c$  a los 2 segundos?

---

SOLUCIÓN

---

$c'(t_0) = 1/3$  mg·mm<sup>-3</sup>/s.  
 $c(t_0 + 2) \approx 8/3$  mg·mm<sup>-3</sup>.

---

13. La velocidad de la sangre que fluye por una arteria está dada por la ley de Poiseuille

$$v(r) = cr^2,$$

donde  $v$  es la velocidad de la sangre,  $r$  es el radio de la arteria y  $c$  es una constante. Si se puede medir el radio de la arteria con una precisión del 5%, ¿qué precisión tendrá el cálculo de la velocidad?

---

SOLUCIÓN

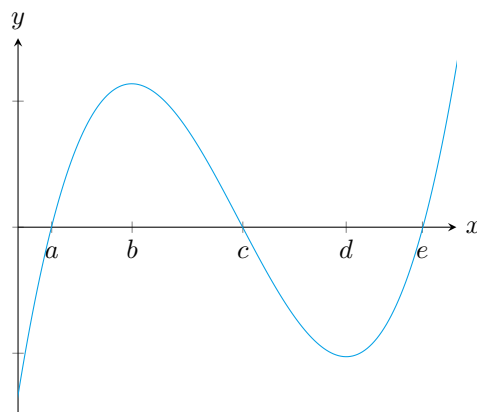
---

10 %.

---

- ★ 14. La figura adjunta es la de la derivada de una función. Estudiar el comportamiento de la función

(crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y convexidad).




---

**SOLUCIÓN**

---

Crecimiento: Decreciente en  $(-\infty, a)$  y  $(c, e)$ , y creciente en  $(a, c)$  y  $(e, \infty)$ .

Extremos: Mínimos en  $x = a$  y  $x = e$ , y máximo en  $x = c$ .

Concavidad: Cóncava en  $(-\infty, b)$  y  $(d, \infty)$ , y convexa en  $(b, d)$ .

---

15. Hallar  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la función  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  para que tenga un punto de inflexión en  $x = 3$ , pase por el punto  $(1, 0)$  y alcance un máximo en  $x = 1$ .

---

**SOLUCIÓN**

---

$b = -9$ ,  $c = 15$  y  $d = -7$ .

---

16. La sensibilidad de  $S$  de un organismo ante un fármaco depende de la dosis  $x$  suministrada según la relación

$$S(x) = x(C - x),$$

siendo  $C$  la cantidad máxima del fármaco que puede suministrarse, que depende de cada individuo. Hallar la dosis  $x$  para la que la sensibilidad es máxima.

---

**SOLUCIÓN**

---

$x = C/2$ .

---

17. La velocidad  $v$  de una reacción irreversible  $A + B \rightarrow AB$  es función de la concentración  $x$  del producto  $AB$  y puede expresarse según la ecuación

$$v(x) = 4(3 - x)(5 - x).$$

¿Qué valor de  $x$  maximiza la velocidad de reacción?

---

**SOLUCIÓN**

---

Ninguno.

---

18. La cantidad de trigo en una cosecha  $C$  depende del nivel de nitrógeno en el suelo  $n$  según la ecuación

$$C(n) = \frac{n}{1+n^2}, \quad n \geq 0.$$

¿Para qué nivel de nitrógeno se obtendrá la mayor cosecha de trigo?

---

**SOLUCIÓN**

$n = 1$ .

---

19. Se ha diseñado un envoltorio cilíndrico para unas cápsulas. Si el contenido de las cápsulas debe ser de 0,15 ml, hallar las dimensiones del cilindro para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

---

**SOLUCIÓN**

Radio 0,2879 cm y altura 0,5760 cm.

---

- ★ 20. Mediante simulación por ordenador se ha podido cuantificar la cantidad de agua almacenada en un acuífero en función del tiempo,  $m(t)$ , en millones de metros cúbicos, y el tiempo  $t$  en años transcurridos desde el instante en el que se ha hecho la simulación, teniendo en cuenta que la ecuación sólo tiene sentido para los  $t$  mayores que 0:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

- En el límite, cuando  $t$  tiende a infinito, qué cantidad de agua almacenada habrá en el acuífero?
- Mediante derivadas, calcular el valor del tiempo en el que el agua almacenada será máxima y cuál es su cantidad de agua correspondiente en millones de metros cúbicos.

---

**SOLUCIÓN**

- $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 10$ .
  - $\frac{dm}{dt} = e^{-t}(\frac{1}{2}t^{-1/2} - t^{1/2})$ . El instante en el que el agua almacenada será máxima es  $t = 0,5$  años y en dicho instante habrá 10,429 millones de m<sup>3</sup>.
- 

- ★ 21. Sea  $f(x)$  una función cuya derivada vale:

$$f'(x) = \frac{(2-x)e^{-\frac{x^2}{2}+2x-2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Se pide:

- Estudiar el crecimiento de  $f$ .
- Calcular los valores de  $x$  en los que  $f$  tiene extremos relativos.
- Estudiar la concavidad de  $f$ .
- Calcular los valores de  $x$  en los que  $f$  tiene puntos de inflexión.

---

**SOLUCIÓN**

- Creciente en  $x < 2$  y decreciente en  $x > 2$ .
  - Máximo relativo en  $x = 2$ .
  - Cóncava en  $(-\infty, 1)$  y  $(3, \infty)$ . Convexa en  $(1, 3)$ .
  - Puntos de inflexión en  $x = 1$  y  $x = 3$ .
-

## 2. Ecuaciones Diferenciales

22. Integrar las siguientes ecuaciones de variables separables:

- a)  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$  con la condición inicial  $y(0) = 1$ .
- b)  $(1+e^x)yy' = e^y$  con la condición inicial  $y(0) = 0$ .
- c)  $e^y(1+x^2)y' - 2x(1+e^y) = 0$ .
- d)  $y - xy' = a(1+x^2y')$ .

---

SOLUCIÓN

---

- a)  $-\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2} - 1$ .
  - b)  $e^{-y}(y+1) = \log(1+e^x) - x - \log 2 + 1$ .
  - c)  $y = \log(C(1+x^2) - 1)$ .
  - d)  $y = C\frac{x}{ax+1} + a$ .
- 

23. La desintegración radioactiva está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial x}{\partial t} + ax = 0,$$

donde  $x$  es la masa,  $t$  el tiempo y  $a$  es una constante positiva. La vida media  $T$  es el tiempo durante el cual la masa se desintegra a la mitad de su valor inicial. Expresar  $T$  en función de  $a$  y evaluar  $a$  para el isótopo de uranio  $U^{238}$ , para el cual  $T = 4'5 \cdot 10^9$  años.

---

SOLUCIÓN

---

$$T = \frac{\log 2}{a} \text{ y } a = 1,54 \cdot 10^{-10} \text{ años}^{-1}.$$


---

24. El azúcar se disuelve en el agua con una velocidad proporcional a la cantidad que queda por disolver. Si inicialmente había 13.6 kg de azúcar y al cabo de 4 horas quedan sin disolver 4.5 kg, ¿cuánto tardará en disolverse el 95 % del azúcar contando desde el instante inicial?

---

SOLUCIÓN

---

$$C(t) = 13,6e^{-0,276t} \text{ y el instante en que se habrá disuelto el 95 \% del azúcar es } t_0 = 10,854 \text{ horas.}$$


---

★ 25. Una reacción química sigue la siguiente ecuación diferencial

$$y' - 2y = 4,$$

donde  $y = f(t)$  es la concentración de oxígeno en el instante  $t$  (medido en segundos). Si la concentración de oxígeno al comienzo de la reacción era nula, ¿cuál será la concentración (mg/lt) a los 3 segundos? ¿En qué instante la concentración de oxígeno será de 200 mg/lt?

---

SOLUCIÓN

---

$$y(t) = 2e^{2t} - 2. \text{ La concentración a los tres segundos será } y(3) = 804 \text{ mg/lt y el instante en que la concentración de oxígeno será de 200 mg/lt es } t_0 = 2,3076 \text{ s.}$$


---



26. Un depósito contiene 5 kg de sal disueltos en 500 litros de agua en el instante en que comienza entrar una solución salina con 0.4 kg de sal por litro a razón de 10 litros por minuto. Si la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación y sale la misma cantidad de litros que entra, ¿cuánta sal quedará en el depósito después de 5 minutos? ¿y después de 1 hora?

**Nota:** La tasa de variación de la cantidad de sal en el tanque es la diferencia entre la cantidad de sal que entra y la que sale del tanque en cada instante.

---

**SOLUCIÓN**

---

$C(t) = -195e^{-t/50} + 200$ . La cantidad de sal a los 5 minutos será  $C(5) = 23,557$  kg y a la hora  $C(60) = 141,267$  kg.

---

- ★ 27. Sea la siguiente ecuación diferencial que relaciona la temperatura y el tiempo en un determinado sistema físico:

$$x't^2 - x't + x' - 2xt + x = 0,$$

siendo  $x$  la temperatura expresada en Kelvins y  $t$  el tiempo en segundos.

Sabiendo que la temperatura en el instante inicial del experimento es 100 K, calcular la temperatura en función del tiempo, y dar la temperatura del sistema físico tres segundos después de comenzar el experimento.

---

**SOLUCIÓN**

---

$x(t) = 100(t^2 - t + 1)$  y la temperatura del sistema a los tres segundos de comenzar el experimento es  $x(3) = 700$  K.

---

- ★ 28. Se tiene un medicamento en un frigorífico a 2°C, y se debe administrar a 15°C. A las 9 h se saca el medicamento del frigorífico y se coloca en una habitación que se encuentra a 22°C. A las 10 h se observa que el medicamento está a 10°C. Suponiendo que la velocidad de calentamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medicamento y la del ambiente, ¿en qué hora se deberá administrar dicho medicamento?

---

**SOLUCIÓN**

---

A las 11,06 horas.

---

- ★ 29. La cantidad de masa de un determinado reactivo de una reacción química,  $M$ , en gramos, es función del tiempo, en segundo, y se rige mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$M' - (a + b)M = 0$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Si inicialmente tenemos 20 gramos de reactivo, al cabo de 10 segundos tenemos 40 gramos, calcular:

- La cantidad de reactivo para todo tiempo  $t$ .
- La cantidad de reactivo al cabo de medio minuto.
- ¿Cuándo será la cantidad de reactivo 100 g?

---

**SOLUCIÓN**

---

- $M(t) = 20 e^{\frac{\ln 2}{10} t}$ .
- $M(30) = 160$  gr.
- $t_0 = 23,22$  s.

- 
- ★ 30. En una reacción química, un compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional al cuadrado de la cantidad no transformada. Si había inicialmente 20 gr de la sustancia original y tras 1 hora queda la mitad, ¿en qué momento se habrá transformado el 75 % de dicho compuesto?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

$C(t) = \frac{20}{t+1}$  y el instante en que se habrá transformado el 75 % de la cantidad inicial es  $t_0 = 3$  horas.

---

- ★ 31. La cantidad de masa,  $M$ , expresada en Kg, de sustancias contaminantes en un depósito de aguas residuales, cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{dM}{dt} = -0,5M + 1000$$

donde  $k$  es una constante y  $t$  es el tiempo expresado en días (podemos imaginar que el depósito está conectado a una depuradora que elimina sustancia contaminante con un ritmo proporcional a la propia cantidad de contaminante, lo cual explicaría el sumando  $-0,5M$ , y que también hay un aporte constante de contaminante de 1000 kg/día, que puede provenir de un desagüe, lo cual explicaría el sumando constante  $+1000$ ).

Si la cantidad inicial de contaminante es de 10000 Kg:

- a) ¿Cuál será la cantidad de contaminante para todo tiempo  $t$ ?  
b) ¿Cuál será la cantidad de contaminante al cabo de una semana?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

- a)  $M(t) = 8000e^{-0,5t} + 2000$ .  
b)  $M(7) = 2241,579$  kg.
- 

32. El plasma sanguíneo se conserva a 4°C. Para poder utilizarse en una transfusión el plasma tiene que alcanzar la temperatura del cuerpo (37°C). Sabemos que se tardan 45 minutos en alcanzar dicha temperatura en un horno a 50°C. ¿Cuánto se tardará si aumentamos la temperatura del horno a 60°?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

Con el horno a 50°C se tiene  $T(t) = -46e^{-0,02808t} + 50$ , con el horno a 60°C se tiene  $T(t) = -56e^{-0,02808t} + 60$  y en este horno tardará 31,69 min.

---

33. Hallar las curvas tales que en cada punto  $(x, y)$  la pendiente de la recta tangente sea igual al cubo de la abscisa en dicho punto. ¿Cuál de estas curvas pasa por el origen?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

$y = x^4/4$ .

---

- ★ 34. Obtener la ecuación de la curva que pasa por el punto  $P = (1, 1)$ , tal que la pendiente de la tangente en cada punto coincida con el cuadrado de su ordenada.

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

$$y = \frac{-1}{x-2}.$$

35. Al introducir glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio de concentración global de glucosa con respecto al tiempo  $c(t)$  se explica mediante la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc,$$

donde  $G$  es la velocidad constante a la que se suministra la glucosa,  $V$  es el volumen total de la sangre en el cuerpo y  $k$  es una constante positiva que depende del paciente. Se pide calcular  $c(t)$ .

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

$$c(t) = De^{kt} + \frac{G}{100Vk}$$

36. La temperatura  $T$  de una habitación en un día de invierno varía con el tiempo de acuerdo a la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = \begin{cases} 40 - T, & \text{si la calefacción está encendida;} \\ -T, & \text{si la calefacción está apagada.} \end{cases}$$

Suponiendo que la temperatura del aula es de  $5^\circ\text{C}$  a las 9:00 de la mañana, y que a esa hora se enciende la calefacción, pero que debido a una avería la calefacción permanece apagada de 11:00 a 12:00, ¿qué temperatura habrá en la habitación a las 13:00?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

De 9 a 11 la temperatura es  $T(t) = -35e^{-t} + 40$  y la temperatura a las 11 será de  $35,263^\circ\text{C}$ .

De 11 a 12 la temperatura es  $T(t) = 35,263e^{-t}$  y la temperatura a las 12 será de  $12,973^\circ\text{C}$ .

De 12 a 13 la temperatura es  $T(t) = -27,027e^{-t} + 40$  y la temperatura a las 13 será de  $30,057^\circ\text{C}$ .

- ★ 37. Dos figuras de cerámicas del mismo material se ponen en un horno para su cocción a  $1000^\circ\text{C}$ . Si en el instante en que se meten al horno la primera está a  $40^\circ\text{C}$  y la segunda a  $5^\circ\text{C}$ , y al minuto la temperatura de la primera ha aumentado hasta los  $200^\circ\text{C}$ , ¿cuales serán sus temperaturas a los 5 minutos?
- ★ 38. El carbono contenido en la materia viva incluye una ínfima proporción del isótopo radioactivo  $C^{14}$ , que proviene de los rayos cósmicos de la parte superior de la atmósfera. Gracias a un proceso de intercambio complejo, la materia viva mantiene una proporción constante de  $C^{14}$  en su carbono total (esencialmente constituido por el isótopo estable  $C^{12}$ ). Después de morir, ese intercambio cesa y la cantidad de carbono radioactivo disminuye: pierde  $1/8000$  de su masa al año. Estos datos permiten determinar el año en que murió un individuo. Se pide:
- Si el análisis de los fragmentos de un esqueleto de un hombre de Neandertal mostró que la proporción de  $C^{14}$  era de  $6,24\%$  de la que hubiera tenido al estar vivo. ¿Cuándo murió el individuo?
  - Calcular la vida media del carbono  $C^{14}$ , es decir, el tiempo a partir del cual se ha desintegrado la mitad del carbono inicial.

39. Una colonia de salmones vive tranquilamente en una zona costera. La tasa de natalidad es del 2 % por día y la de mortalidad del 1 % por día. En el instante inicial, la colonia tiene 1000 salmones y ese día llega un tiburón a esa zona costera que se come 15 salmones todos los días. ¿Cuánto tiempo tarda el tiburón en hacer desaparecer a la colonia de salmones?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_  
 Aproximadamente 110 días.

### 3. Cálculo diferencial en varias variables

40. Calcular las siguientes derivadas parciales:

$$a) \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{x}{y}. \qquad b) \frac{\partial}{\partial v} \frac{nRT}{v}.$$

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_  
 $a) \frac{\partial}{\partial x} \log \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{x}.$   
 $b) \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{nRT}{v} \right) = -\frac{nRT}{v^2}.$

41. La asimilación de CO<sub>2</sub> de una planta depende de la temperatura ambiente (t) y de la intensidad de la luz (l), según la función

$$f(t, l) = c t l^2,$$

donde  $c$  es una constante. Estudiar cómo evoluciona la asimilación de CO<sub>2</sub> para distintas intensidades de luz, cuando se mantiene la temperatura constante. Estudiar también cómo evoluciona para distintas temperaturas cuando se mantiene la intensidad de la luz constante.

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_  
 $\frac{\partial f}{\partial l}(t, l) = 2ct l$  y  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, l) = cl^2.$

42. La abundancia de una determinada especie de planta depende del nivel de nitrógeno en el suelo y del nivel de perturbaciones, de manera que un incremento del nivel de nitrógeno tiene un efecto negativo en la abundancia de esta especie, y un aumento de las perturbaciones también tiene un efecto negativo. Si en un momento dado comienza a aumentar el nivel de nitrógeno en el suelo y también las perturbaciones debidas al pastoreo, ¿cómo se verá afectada la abundancia de la especie?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_  
 La abundancia de la especie disminuirá.

43. La velocidad de crecimiento de un organismo depende de la disponibilidad de alimento y del número de competidores en busca de alimento. ¿Cómo se verá afectada la velocidad de crecimiento si la disponibilidad de alimento aumenta con el tiempo y el número de competidores disminuye?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_  
 La velocidad de crecimiento aumentará.

- ★ 44. Calcular el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = \log \frac{\sqrt{x}}{yz} + \arcsen(xz).$$

---

SOLUCIÓN

---

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{z}{\sqrt{1-x^2z^2}} + \frac{1}{2x}, \frac{-1}{y}, \frac{x}{\sqrt{1-x^2z^2}} - \frac{1}{z} \right).$$


---

- ★ 45. Dada la función

$$f(x, y, z) = \log \sqrt{xy - \frac{z^2}{xy}}$$

- a) Hallar el vector gradiente.  
 b) Hallar un punto en el que el vector gradiente sea paralelo a la bisectriz del plano  $XY$ , y calcular el vector gradiente en dicho punto.

---

SOLUCIÓN

---

a)  $\nabla f(x, y, z) = \left( -\frac{z^2+x^2y^2}{2xz^2-2x^3y^2}, -\frac{z^2+x^2y^2}{2yz^2-2x^2y^3}, \frac{z}{z^2-x^2y^2} \right).$

- b) El vector gradiente es paralelo a la bisectriz del plano  $XY$  en cualquier punto de la forma  $(a, a, 0)$  con  $a \in \mathbb{R}$ .  
 $\nabla f(1, 1, 0) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right).$
- 

46. Una nave espacial está en problemas cerca del sol. Se encuentra en la posición  $(1, 1, 1)$  y la temperatura de la nave cuando está en la posición  $(x, y, z)$  viene dada por  $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$  donde  $x, y, z$  se miden en metros. ¿En qué dirección debe moverse la nave para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible?

---

SOLUCIÓN

---

Debe moverse en la dirección  $-\nabla f(1, 1, 1) = e^{-6}(2, 4, 6).$

---

47. Un organismo se mueve sobre una superficie inclinada siguiendo la línea de máxima pendiente descendiente. Si la expresión de la superficie es

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

calcule la dirección en la que se moverá el organismo en el punto  $(2, 3)$ .

---

SOLUCIÓN

---

Se moverá en la dirección  $-\nabla f(2, 3) = (-4, 6).$

---

48. Obtener los puntos críticos de  $z = f(x, y)$  para:

- a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .  
 b)  $f(x, y) = x^2y + y^2x$ .  
 c)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ .

---

SOLUCIÓN

---

- a)  $(0, 0)$ .  
 b)  $(0, 0)$ .  
 c)  $(0, 0)$ .
- 

49. La superficie de una montaña tiene la forma

$$S : z = a - bx^2 - cy^2,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes,  $x$  es la coordenada Este-Oeste e  $y$  la coordenada Norte-Sur en el mapa, y  $z$  la altura sobre el nivel del mar en metros. En el punto  $P = (1, 1)$  del mapa, ¿en qué dirección crece más rápidamente la altura?

---

SOLUCIÓN

---

$$(-2b, -2c).$$


---

50. Hallar las direcciones de máximo y mínimo crecimiento de las siguientes funciones en el punto  $P$ :

- a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ ,  $P = (-1, 1)$ .  
 b)  $f(x, y) = x^2y + e^{xy} \sin y$ ,  $P = (1, 0)$ .  
 c)  $f(x, y, z) = \log(xy) + \log(yz) + \log(xz)$ ,  $P = (1, 1, 1)$ .  
 d)  $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$ ,  $P = (1, 1, 0)$ .

---

SOLUCIÓN

---

- a) Máximo crecimiento en la dirección  $(-1, 1)$  y máximo decrecimiento en la dirección  $(1, -1)$ .  
 b) Máximo crecimiento en la dirección  $(0, 2)$  y máximo decrecimiento en la dirección  $(0, -2)$ .  
 c) Máximo crecimiento en la dirección  $(2, 2, 2)$  y máximo decrecimiento en la dirección  $(-2, -2, -2)$ .  
 d) Máximo crecimiento en la dirección  $(2, 3, 6)$  y máximo decrecimiento en la dirección  $(-2, -3, -6)$ .
- 

51. Si  $f(x, y, z) = x^3y^2z$  y  $g(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$ , calcular  $(f \circ g)'(t)$ .

---

SOLUCIÓN

---

$$(f \circ g)'(t) = e^{3t}(3 \sin t \cos^2 t - 2 \sin^2 t \cos t + \cos^3 t).$$


---

- ★ 52. La Quimiotaxis es el movimiento de los organismos dirigido por un gradiente de concentración, es decir, en la dirección en la que la concentración aumenta con más rapidez. El moho del cieno *Dictyoselium discoideum* muestra este comportamiento. En esta caso, las amebas unicelulares de esta especie se mueven según el gradiente de concentración de una sustancia química denominada adenosina monofosfato (AMP cíclico). Si suponemos que la expresión que da la concentración de AMP cíclico en un punto de coordenadas  $(x, y, z)$  es:

$$C(x, y, z) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^4 + 1}}$$

y se sitúa una ameba de moho del cieno en el punto  $(-1, 0, 1)$ , ¿en qué dirección se moverá la ameba?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

$(4/\sqrt{27}, 0, -8/\sqrt{27})$ .

53. ¿En qué direcciones se anulará la derivada direccional de la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

en el punto  $P = (1, 1)$ ?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

En la dirección  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

54. ¿Existe alguna dirección en la que la derivada direccional en el punto  $P = (1, 2)$  de la función

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$$

valga 14?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

No.

55. La derivada direccional de una función  $f$  en un punto  $P$  es máxima en la dirección del vector  $(1, 1, -1)$  y su valor es  $2\sqrt{3}$ . ¿Cuánto vale la derivada direccional de  $f$  en  $P$  en la dirección del vector  $(1, 1, 0)$ ?

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

$2\sqrt{2}$ .

56. Dado el campo escalar

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xyz^3 - zx$$

en el punto  $P = (1, 2, 3)$ , se pide:

a) Calcular la derivada direccional de  $f$  en  $P$  a lo largo del vector unitario  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ .

b) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional de  $f$  en  $P$ ? Obtener el valor de dicha derivada direccional.

\_\_\_\_\_ SOLUCIÓN \_\_\_\_\_

a)  $15\sqrt{2}$ .

b) La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente  $(53, 23, 53)$  y vale  $\sqrt{6147}$ .

- ★ 57. Obtener la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie

$$S : xyz = 8$$

en el punto  $P = (4, -2, -1)$ .

---

SOLUCIÓN

---

Recta normal  $l : (4 + 2t, -2 - 4t, -1 - 8t)$ . Plano tangente  $\pi : 2x - 4y - 8z + 24 = 0$ .

---

58. Derivar implícitamente las siguientes expresiones tomando  $y$  como función de  $x$ :

a)  $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$ .

b)  $y = \frac{\text{sen}(x+y)}{x^2 + y^2}$ .

---

SOLUCIÓN

---

a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 + y^2}{-2xy + y^2}$ .

b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy + \cos(x+y)}{(x^2 + y^2) + 2y^2 - \cos(x+y)}$ .

---

- ★ 59. Dada la función  $xy + e^x - \log y = 0$ , calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a ella en  $x = 0$ .

---

SOLUCIÓN

---

Tangente:  $y = (e^2 + e)x + e$ . Normal:  $y = \frac{-x}{e^2 + e} + e$ .

---

- ★ 60. Suponiendo que la temperatura,  $T$  en grados centígrados, y el volumen,  $V$  en metros cúbicos, de un gas real encerrado en un contenedor de volumen variable están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$T^2 (V^2 - \pi^2) - V \cos(TV) = 0$$

Se pide:

- Calcular la derivada del volumen con respecto a la temperatura en el momento en el que el volumen es de  $\pi \text{ m}^3$  y la temperatura es medio grado centígrado.
- ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que daría el volumen en función de la temperatura en el mismo punto del apartado anterior?
- Suponiendo que tanto la temperatura como el volumen son, a su vez, funciones de la presión, qué ecuación ligaría la derivada de la temperatura con respecto a la presión con la derivada del volumen con respecto a la presión.

---

SOLUCIÓN

---

a)  $\frac{dV}{dT} = \frac{-2T(V^2 - \pi^2) - V^2 \text{sen}(TV)}{2T^2 V - \cos(TV) + TV \text{sen}(TV)}$  y  $\frac{dV}{dT}(V = \pi, T = 0,5) = -\pi \text{ m}^3 / ^\circ\text{C}$ .

b) Tangente:  $V = \pi(-T + 1,5)$ .

c)  $2T \frac{dT}{dP}(V^2 - \pi^2) + T^2(2V \frac{dV}{dP}) - \frac{dV}{dP} \cos(TV) - V(-\text{sen}(TV)(\frac{dT}{dP}V + T \frac{dV}{dP})) = 0$ .

---

61. Hallar la recta tangente y la recta normal a la línea  $C$  en el punto  $P$  en cada uno de los casos siguientes:



- a)  $C : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, P = (-3, 0).$   
 b)  $C : x^3 - y^5 + xy^2 = 8, P = (2, 0).$   
 c)  $C : x = y^2, P = (0, 0).$   
 d)  $C : x^{2/3} + y^{2/3} = 1, P = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4).$

---

**SOLUCIÓN**

---

- a) Tangente  $x = -3$  y normal  $y = 0.$   
 b) Tangente  $x = 2$  y normal  $y = 0.$   
 c) Tangente  $x = 0$  y normal  $y = 0.$   
 d) Tangente  $y = -x + \sqrt{2}/2$  y normal  $y = x.$
- 

62. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie  $S$  en el punto  $P$  en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $S : x - y + z = 1, P = (0, 0, 1).$   
 b)  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, P = (0, 1, 0).$   
 c)  $S : z = \log(x^2 + y^2), P = (1, 0, 0).$   
 d)  $S : z = e^{-(x^2+y^2)}, P = (0, 0, 1).$   
 e)  $S : z = e^{x+y} \sin x, P = (\pi, 0, 0).$

---

**SOLUCIÓN**

---

- a) Plano tangente  $x - y + z - 1 = 0$  y recta normal  $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}.$   
 b) Plano tangente  $y = 1$  y recta normal  $(x = 0, y = 1 + 2t, z = 0).$   
 c) Plano tangente  $2x - z - 2 = 0$  y recta normal  $(x = 1 + 2t, y = 0, z = -t).$   
 d) Plano tangente  $z = 1$  y recta normal  $(x = 0, y = 0, z = 1 + t).$   
 e) Plano tangente  $z = -e^\pi(x - \pi)$  y recta normal  $(x = \pi - e^\pi t, y = 0, z = -t).$
- 

63. Suponiendo que  $z$  es función de  $x$  e  $y$  ( $z = f(x, y)$ ), a partir de la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , deducir que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Aplicarlo para obtener  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ , sabiendo que  $x^2yz = 4$  y que  $f(2, 1) = 1.$

---

**SOLUCIÓN**

---

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = -1.$$


---

★ 64. La ecuación

$$x \log y + \frac{2e^{y^2+z}}{x} - \frac{x}{z^2} = -1$$

define a  $z$  como función de  $x$  e  $y$  alrededor del punto  $(2, 1, -1)$ . Calcular el vector gradiente de  $z$  en ese punto e interpretarlo.

SOLUCIÓN

$$\nabla z(2, 1, -1) = (-1/2, 4/3).$$

65. Calcular el vector gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

a)  $e^{x^2+y^2+z^2}$

b)  $\sin((x^2 - y^2)z)$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{a) } \nabla e^{x^2+y^2+z^2} &= (2x e^{x^2+y^2+z^2}, 2y e^{x^2+y^2+z^2}, 2z e^{x^2+y^2+z^2}), \\ H e^{x^2+y^2+z^2} &= \begin{pmatrix} (4x^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} & 4xye^{x^2+y^2+z^2} & 4xz e^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xye^{x^2+y^2+z^2} & (4y^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xz e^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} & (4z^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}. \\ \text{b) } \nabla \sin((x^2-y^2)z) &= (2xz \cos((x^2-y^2)z), -2yz \cos((x^2-y^2)z), (x^2-y^2) \cos((x^2-y^2)z)) \\ H \sin((x^2-y^2)z) &= \begin{pmatrix} 4x^2 \sin((x^2-y^2)z) + 2 \cos((x^2-y^2)z) & 4xy \sin((x^2-y^2)z) & -2x(x^2-y^2) \sin((x^2-y^2)z) \\ 4xy \sin((x^2-y^2)z) & -4y^2 \sin((x^2-y^2)z) - 2 \cos((x^2-y^2)z) & 2y(x^2-y^2) \sin((x^2-y^2)z) \\ -2x(x^2-y^2) \sin((x^2-y^2)z) & 2y(x^2-y^2) \sin((x^2-y^2)z) & -(x^2-y^2)^2 \sin((x^2-y^2)z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

★ 66. La siguiente función determina la temperatura en cada punto del plano real:

$$f(x, y) = e^{x+2y} \cos(x^2 + y^2).$$

Se pide:

- Calcular el gradiente de  $f$ .
- Si estamos situados en el origen de coordenadas, ¿en qué dirección aumentará más rápidamente la temperatura? ¿Y si estuviésemos en el punto  $(0, 1)$ ?
- Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de  $f$  en el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{a) } \nabla f(x, y) &= e^{x+2y} (\cos(x^2 + y^2) - 2x \sin(x^2 + y^2), 2 \cos(x^2 + y^2) - 2y \sin(x^2 + y^2)). \\ \text{b) } \nabla f(0, 0) &= (1, 2) \text{ y } \nabla f(0, 1) = (3, 99, -4, 45). \\ \text{c) } H f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad |H f(0, 0)| = 0. \end{aligned}$$

★ 67. La relación que modeliza el potencial eléctrico  $V$  de un punto del plano en función de su distancia, es  $V = \log D$ , donde  $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Se pide:

- Calcular el gradiente de  $V$ .
- Hallar la dirección de máxima variación del potencial eléctrico en el punto  $(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

- c) Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de  $V$  en el punto anterior.  
 d) Si nos movemos a lo largo de la curva  $y = x + 1$ , cuál será el mínimo potencial alcanzado?

---

SOLUCIÓN

---

- a)  $\nabla V(x, y) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ .  
 b)  $\nabla V(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \sqrt{3}/6(1, 1)$ .  
 c)  $HV(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} \\ \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{x^2-y^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/6 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad |H(\sqrt{3}, \sqrt{3})| = -1/36$ .  
 d) El potencial máximo se alcanza en  $(x = -1/2, y = 1/2)$  y vale  $V(-1/2, 1/2) = -\frac{\log 2}{2}$ .
- 

- ★ 68. Una barra de metal de un metro de largo se calienta de manera irregular y de forma tal que a  $x$  metros de su extremo izquierdo y en el instante  $t$  minutos, su temperatura en grados centígrados esta dada por  $H(x, t) = 100e^{-0,1t} \sin(\pi xt)$  con  $0 \leq x \leq 1$ .

- a) Calcular  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 2, 1)$  y  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 8, 1)$ . ¿Cuál es la interpretación práctica (en términos de temperatura) de estas derivadas parciales? Explicar por qué cada una tiene el signo que tiene.  
 b) Calcular la matriz hessiana de  $H$ .

---

SOLUCIÓN

---

- a)  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 2, 1) = 100e^{-0,1} \cos(0, 2\pi) \pi = 229,9736$   
 $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 8, 1) = 100e^{-0,1} \cos(0, 8\pi) \pi = -229,9736$ .  
 b)  $\begin{pmatrix} -100e^{-0,1t} \pi^2 t^2 \sin(\pi xt) & 100e^{-0,1t} ((-0,1\pi t + \pi) \cos(\pi xt) - \pi^2 xt \sin(\pi xt)) \\ 100e^{-0,1t} ((-0,1\pi t + \pi) \cos(\pi xt) - \pi^2 xt \sin(\pi xt)) & 100e^{-0,1t} (0,01 \sin(\pi xt) - (0,2 + \pi^2 x^2) \cos(\pi xt)) \end{pmatrix}$
- 

69. Si suponemos que el rendimiento de una cosecha,  $R$ , depende de las concentraciones de nitrógeno,  $n$ , y fósforo,  $p$ , presentes en el suelo según la función:

$$R(n, p) = n \cdot p \cdot e^{-(n+p)}$$

- a) Calcular todas las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función  $R(n, p)$ .  
 b) Teniendo en cuenta que una condición necesaria para que una función de varias variables presente un máximo en un punto es que todas las derivadas parciales de primer orden se anulen en dicho punto, ¿cuánto deben valer las concentraciones de nitrógeno y fósforo para que el rendimiento de la cosecha sea máximo?

---

SOLUCIÓN

---

El rendimiento de la cosecha será máximo para  $n = p = 1$ .

---

70. Estudiar los extremos y los puntos de silla de  $f$  en los siguientes casos:

- a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .  
 b)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .  
 c)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ .  
 d)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$ .

---

SOLUCIÓN

---

- a) Mínimo en  $(0, 0)$ .
  - b) Punto de silla en  $(0, 0)$ .
  - c) No se puede saber con el hessiano.
  - d) Mínimo en  $(0, 0)$ .
- 

71. La función

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x - \left( \frac{y^3}{3} - y \right)$$

tiene un máximo, un mínimo y dos puntos de silla. Encontrarlos.

---

SOLUCIÓN

---

Máximo en  $(-1, 1)$ , mínimo en  $(1, -1)$  y puntos de silla en  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$ .

---

★ 72. Hallar los extremos relativos y los puntos de silla de la función:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2),$$

con  $a \neq 0$ .

---

SOLUCIÓN

---

No tiene máximos relativos. Mínimos relativos en  $(-a, 0)$  y  $(a, 0)$ . Punto de silla en  $(0, 0)$ .

---

★ 73. Dado el campo escalar

$$h(x, y) = xy + \frac{xy^2}{2} - 2x^2,$$

determinar sus extremos relativos y sus puntos de silla.

---

SOLUCIÓN

---

Máximo relativo en  $(-1/8, -1)$ . No tiene mínimos relativos. Puntos de silla en  $(0, 0)$  y  $(0, -2)$ .

---

REMARK: The problems with a (★) are exam problems of previous years.