Ejercicios de Cálculo

Temas: Derivadas implícitas
Titulaciones: Todas

Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU Universidad San Pablo

La ecuación

$$x \log y + \frac{2e^{y^2+z}}{x} - \frac{x}{z^2} = -1$$

define a z como función de x e y alrededor del punto $(2, 1, -1)$. Calcular el vector gradiente de z en ese punto e interpretarlo.

Calcular el vector gradiente de z en el punto $(2,1,-1)$ e interpretarlo.

Datos

$$x\log y+\frac{2e^{y^2+z}}{x}-\frac{x}{z^2}=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\log y\, z^2+2e^{y^2+z}z^2-x^2=-xz^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\log y\, z^2+2e^{y^2+z}z^2-x^2+xz^2=0$$

$$f(x,y,z)=x^2\log y\, z^2+2e^{y^2+z}z^2-x^2+xz^2$$

$$f(x,y,z)=0$$

$$\nabla z(x,y)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}=-\frac{2x\log y\, z^2-2x+z^2}{x^2\log y\, 2z+2e^{y^2+z}z^2+2e^{y^2+z}2z+x2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1,-1)=-\frac{2\cdot 2\cancel{\log 1(-1)^2}-2\cdot 2+(-1)^2}{\cancel{2^2\log 1\cdot 2(-1)}+2\cancel{e^{1^2+(-1)}}(-1)^2+2\cancel{e^{1^2+(-1)}}2\cdot(-1)+2\cdot 2\cdot(-1)}=$$

$$=-\frac{-3}{2-4-4}=-\frac{-3}{-6}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}=-\frac{x^2\frac{1}{y}\cdot z^2+2e^{y^2+z}2y\,z^2}{x^2\log y\, 2z+2e^{y^2+z}z^2+2e^{y^2+z}2z+x2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1,-1)=-\frac{2^2\cdot\frac{1}{1}(-1)^2+2\cancel{e^{1^2+(-1)}}\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)^2}{-6}=-\frac{4+4}{-6}=-\frac{8}{-6}=\frac{4}{3}$$

$$\nabla z(2,1,-1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$$

Dirección de máximo crecimiento de z en el punto $(2,1,-1)$