EJERCICIOS DE CÁLCULO

Asignatura:	Matemáticas
Curso:	Primero
Grado:	Todos
Año:	2020-2021
Autor:	Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU
Universidad
San Pablo

Índice

1. Derivadas

1. Estudiar si es derivable la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $x = 1$.

Solución

La función no es derivable ya que $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \infty$.

2. Comprobar que la función $f(x) = |x-1|$ es continua en $x = 1$ pero no es derivable en dicho punto.

3. Estudiar la derivabilidad de f en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{si } x < -1, \\ \operatorname{sen} \pi x & \text{si } x \in [-1, 2], \\ x/2 & \text{si } x \in (2, 3), \\ 3/2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

4. Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada, donde exista, de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{si } x \leq -2, \\ x^2 - 3 & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \cos \dfrac{1}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

5. Probar que no es derivable en $x = 0$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

6. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista.

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

   b) $g(x) = 2x + |x^2 - 2|$.

Solución

a) La función es derivable en $x = 0$ ya que $f'^-(0) = f'^+(0) = 1$ y la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

b) La función no es derivable en $x = -\sqrt{2}$ ya que $g'^-(-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$ y $g'^+(-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$, y tampoco es derivable en $x = \sqrt{2}$ ya que $x = -\sqrt{2}$ ya que $g'^-(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$ y $g'^+(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. En el resto de los puntos, la derivada vale

$$g'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 2 + 2x & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

7. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

donde a y b son constantes.

a) ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea continua en todo su dominio? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.

b) ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea derivable en todo su dominio? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.

Solución

a) La función es continua en todo el dominio si $a = -3$ y $b = -1$.

b) No existe ningún valor de a y b con los que la función sea derivable en todo el dominio.

★ 8. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leq c, \\ \ln x & \text{si } c < x, \end{cases}$$

con a, b y c constantes, ¿existe algún valor de las constantes de manera que la función sea continua y derivable en todo su dominio?

Solución

$a = \frac{1}{2e}, b = 0, c = e^{1/2}$.

9. Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3$.

b) $g(x) = \log_3(1+x)^2$.

c) $h(x) = \arcsen \dfrac{1+x}{1-x}$.

d) $i(x) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1})$.

Solución

a) $\frac{df}{dx} = (1+\operatorname{tg}^2((1+x)^3))3(1+x)^2$ y $df = (1+\operatorname{tg}^2((1+x)^3))3(1+x)^2 dx$.

b) $\frac{dg}{dx} = \frac{2(1+x)\log_3 e}{(1+x)^2}$ y $dg = \frac{2(1+x)\log_3 e}{(1+x)^2} dx$.

c) $\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \frac{2}{(1-x)^2}$ y $dh = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \frac{2}{(1-x)^2} dx$.

d) $\frac{di}{dx} = \frac{1}{x^2+2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $di = \frac{1}{x^2+2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

10. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto x_0 indicado.

a) $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad x_0 = \pi/2.$

b) $y = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x_0 = 0.$

Solución

a) Tangente: $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2}$. Normal: $y - \frac{\pi}{2} = -x + \frac{\pi}{2}$.

b) Tangente: $y = x$. Normal: $y = -x$.

---

11. Determinar el ángulo formado por las curvas $y = x^4 + 1$ e $y = 5x^2 - 3$ en el punto $x_0 = 1$.

    Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo que forman sus tangentes.

★ 12. Dadas las funciones $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ y $g(x) = x^3 + 2$, ¿existe algún valor de x en el que la recta normal a f y la recta tangente a g en dicho punto sean paralelas?

Solución

$x = -1/6$.

---

13. Hallar la expresión de la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = a^x \log a.$

b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}.$

c) $h(x) = \dfrac{9x^2 - 2x - 25}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$

d) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}.$

Solución

a) $f^{(n} = (\log a)^{n+1} a^x.$

b) $$g^{(n} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} & \text{si } x = 4k, \\ \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2} & \text{si } x = 4k+1, \\ \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x}{2} & \text{si } x = 4k+2, \\ \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{2} & \text{si } x = 4k+3. \end{cases}$$

c) Descomponiendo en fracciones simples, $h^{(n}(x) = \frac{3(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}.$

d) $j^{(n}(x) = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n} 2i-1}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}.$

★ 14. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{si } x < -\pi; \\ \cos x, & \text{si } -\pi \le x \le \pi; \\ cx^2 + dx, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

Calcular a, b, c y d para que la función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Solución

$a = \frac{1}{\pi^2}$, $b = \frac{2}{\pi}$, $c = \frac{1}{\pi^2}$ y $d = \frac{-2}{\pi}$.

★ 15. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

siendo a y $b \in \mathbb{R}$.

a) Hallar a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$ y su derivada se anule en $x = 2$. Con los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior:

b) Estudiar la derivabilidad de la función f.

c) Hallar las asíntotas de f.

Solución

a) $a = 2$ y $b = -1$.

b) La función es derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en el 0.

c) $y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha y $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

★ 16. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}} & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad en $x = 1$.

b) Mediante la definición de derivada de una función en un punto, calcular tanto la derivada por la derecha como la derivada por la izquierda en $x = 1$.

Solución

a) En $x = 1$ la función presenta una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

b) La dervidad por la izquierda en $x = 1$ vale $f'^{-}(1) = 0$ y no existe la derivada por la derecha en dicho punto.

17. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 8$

b) $y = \dfrac{1}{x^2} - 2x^{-1} + \sqrt{3x}$

c) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

d) $y = 8^{3x^2-1}$

e) $y = \log \dfrac{x-1}{x+1}$

f) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

g) $y = e^{2x} \log x^2$

h) $y = \log_7(x^2 + 2x + 1)$

i) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x}$

j) $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$

k) $y = (\log x + \sqrt{x})^3$

l) $y = \dfrac{\log x}{e^x}$

m) $y = \log \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

n) $y = \operatorname{sen}^2(x^2 + 3x)$

ñ) $y = \cos(\log x^2)$

o) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 2)$

p) $y = 2^{\log \cos x}$

q) $y = \log \left(\cos \dfrac{x^2}{2} \right)$

r) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

s) $y = \log\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen} 2x}}$

t) $y = \dfrac{1}{2}\log \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}$

u) $y = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x^3}{2}$

v) $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x^2) + \operatorname{arc\,sen}(\cos x^2)$

w) $y = x^x$

x) $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

18. Hallar las derivadas sucesivas hasta la quinta de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = \dfrac{1}{x}$.

c) $y = \log(x+2)$

d) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

e) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

f) $e^{2\cos x}$

★ 19. Sea la función $f(x) = (x^2 - x)3^{x/2}$. Calcular su derivada n-ésima. Aplicar el resultado anterior para calcular la derivada de orden 100.

★ 20. Sea

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & \text{si } x < 1 \\ b\log(1/x) + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b para que la función sea continua y derivable en en cualquier valor de x.

★ 21. Calcular la derivada n-ésima de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+2}.$$

Apoyándose en el cálculo anterior, dar la expresión de la derivada de orden 20 de f.

Solución

$f^{(n}(x) = (-1)^n 3n!(x+2)^{-n+1} -$ y $f^{(20}(x) = 3\cdot 20!(x+2)^{-21}$.

★ 22. Analizar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x^2}{|x|} & \text{si } x < 0, \\ -2 + e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

¿Qué sucede si cambiamos en el enunciado e^{-x} por e^x?

Solución

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Si se cambia e^{-x} por e^x la función pasa a ser derivable en todo $\mathbb{R}$.

23. Un balón relleno de aire tiene radio 10 cm cuando se empieza a introducir más aire, de manera que el radio se incrementa con una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad varía el volumen en ese instante? Nota: El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solución

800π cm^3/s.

24. En muchos vertebrados existe una relación entre la longitud del cráneo y la longitud de la espina dorsal que puede expresarse mediante la ecuación

$$C(x) = aE(x)^b$$

donde a es una constante de proporcionalidad y b es otra constante que suele estar entre 0 y 1. Esta ecuación se conoce como *ecuación alométrica*. ¿Cómo se relaciona la tasa de crecimiento de la espina dorsal con la del cráneo? ¿Para qué valores de b es la función C creciente, pero de forma que la relación C/E disminuye al aumentar E? ¿En qué estado de desarrollo tienen los vertebrados cráneos mayores en relación con la longitud de sus cuerpos?

Solución

800π cm^3/s.

25. La posición que ocupa un coche que se mueve en línea recta, puede expresarse en función del tiempo según la ecuación

$$e(t) = 4t^3 - 2t + 1.$$

Calcular su velocidad y aceleración en cualquier instante.
Nota: La aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad.

Solución

Velocidad $v(t) = 12t^2 - 2$ y aceleración $a(t) = 24t$.

26. El espacio recorrido por un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba, sin tener en cuenta la resistencia del aire, viene dado por la ecuación

$$e(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

donde v_0 es la velocidad inicial con que se lanza el objeto, $g = 9{,}81$ m/s^2 es la constante gravitatoria de la Tierra y t es el tiempo transcurrido desde que el objeto se lanza. Se pide:

a) Calcular la velocidad y la aceleración en cualquier instante.
b) Si el objeto se lanza inicialmente a 50 km/h, ¿cuál será la altura máxima que alcanzará el objeto? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?
c) ¿En qué instante volverá a tocar la tierra el objeto? ¿Con qué velocidad?

Solución

a) Velocidad $v(t) = v_0 - gt$ y aceleración $a(t) = -g$.
b) Alcanzará una altura máxima de 9,83 m a los 1,42 s. La velocidad en ese instante es nula.
c) Tocará tierra de nuevo a los 2,83 s con velocidad $-13{,}89$ m/s.

27. Una pipeta cilíndrica de radio 5 mm almacena una solución. Si la pipeta empieza a vaciarse a razón de 0,5 ml por segundo, ¿a qué velocidad disminuye el nivel de la pipeta?

Solución

$-6{,}37$ mm/s.

28. La función que explica la desintegración radioactiva es

$$m(t) = m_0 e^{-kt},$$

donde $m(t)$ es la cantidad de materia en el instante t, m_0 es la cantidad inicial de materia, k es una constante conocida como *constante de desintegración* y t es el tiempo. Calcular la velocidad de desintegración en cualquier instante t. Si para un material concreto $k = 0{,}002$, ¿cuál es el periodo de semidesintegración del material?
Nota: El *periodo de semidesintegración* de un material radioactivo es el tiempo que transcurre hasta que la masa se reduce a la mitad de su valor inicial.

Solución

Velocidad de desintegración: $-km_0e^{-kt}$.
Periodo de semidesintegración: 346.57 años.

29. Se desea medir la superficie de una célula esférica y para ello se ha medido el radio de una célula de 5 μ con un error de 0.2 μ. ¿Cuál será el error aproximado cometido en el cálculo de la superficie de la célula? En general, si al medir el radio se comete siempre un error relativo del 2 %? ¿Cómo afecta esto al error de la medida de la superficie de la célula?
Nota: La superficie de una esfera es $S = 4\pi r^2$. Utilizar la aproximación lineal, es decir, la recta tangente de esta función.

Solución

Para un error en el radio de 0,2 μ el error aproximado en la superficie es $8\pi\ \mu^2$, y para un error relativo del 2 % el error aproximado en la superficie es del 4 %.

30. La velocidad de la sangre que fluye por una arteria está dada por la ley de Poiseuille

$$v(r) = cr^2,$$

donde v es la velocidad de la sangre, r es el radio de la arteria y c es una constante. Si se puede medir el radio de la arteria con una precisión del 5 %, ¿qué precisión tendrá el cálculo de la velocidad?

Solución

10 %.

31. Un cilindro de 4 cm de radio (r) y 3 cm de altura (h) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que $\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = 1$ cm/s. Hallar de forma aproximada la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

Solución

$dV = 2\pi rhdt + \pi r^2 dt$ y en el instante inicial tenemos $dV = 40\pi dt$. A los 5 segundos la variación aproximada será $dV(5) = 40\pi 5 = 200\pi$ cm^3/s, y a los 10 segundos $dV(10) = 40\pi 10 = 400\pi$ cm^3/s.

32. La velocidad de crecimiento v de una planta depende de la cantidad de nitrógeno disponible n según la ecuación

$$v(n) = \frac{an}{k+n}, \quad n \geq 0,$$

donde a y k son constantes positivas. Estudiar el crecimiento de esta función e interpretarlo.

Solución

La velocidad de crecimiento aumenta a medida que aumenta n pero cada vez con menos fuerza, de manera que cuando $n \to \infty$ la velocidad de crecimiento sería nula.

33. El pH de una solución mide la concentración de iones de hidrógeno (H^+) y se define como

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}(\mathrm{H}^+).$$

Calcular la derivada del pH en función de la concentración de H^+. ¿Cómo es el crecimiento del pH?

Solución

El pH decrece a medida que aumenta la concentración de H^+.

34. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ e interpretarla. Calcular la recta tangente a f en cada uno de los puntos anteriores.

Solución

$f'(-1) = 7$, $f'(0) = 0$ y $f'(1) = -1$.
Recta tangente en $x = -1$: $y = -2 + 7(x + 1)$.
Recta tangente en $x = 0$: $y = 1$.
Recta tangente en $x = 1$: $y = -(x - 1)$.

★ 35. En una reacción química, la concentración de una sustancia c depende de la concentración de otras dos sustancias a y b según la ecuación $c = \sqrt[3]{ab^2}$. Si en un determinado instante t_0 en el que la concentración de $a = b = 2$ mg/mm^3 se empieza a aumentar la concentración de a a razón de 0,2 mg· mm^{-3}/s y la de b a razón de 0,4 mg· mm^{-3}/s, ¿con qué velocidad cambia la concentración de c? ¿Cuál será la concentración aproximada de c a los 2 segundos?

Solución

$c'(t_0) = 1/3$ mg·mm^{-3}/s.
$c(t_0 + 2) \approx 8/3$ mg·mm^{-3}.

2. Diferencial

1. Un cilindro de 4 cm de radio (r) y 3 cm de altura (h) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dh}{dt} = 1$ cm/s. Hallar de forma aproximada la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

Solución

$dV = 2\pi rh dt + \pi r^2 dt$ y en el instante inicial tenemos $dV = 40\pi dt$. A los 5 segundos la variación aproximada será $dV(5) = 40\pi 5 = 200\pi$ cm^3/s, y a los 10 segundos $dV(10) = 40\pi 10 = 400\pi$ cm^3/s.

★ 2. La ecuación de los gases perfectos es $PV = CT$ donde C es constante. Si en un cierto instante el volumen es 0.3 m^3, la presión es 90 Pa, la temperatura 290 K, y comenzamos a aumentar el volumen a razón de 0.01 m^3/s:

a) Hallar la variación de la presión en dicho instante si la temperatura se mantiene constante.

b) Hallar la variación de la temperatura en dicho instante si la presión se mantiene constante.

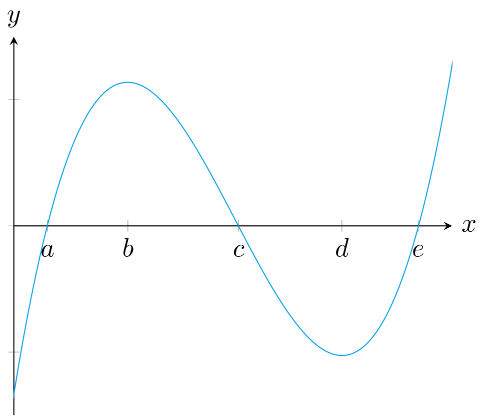
Solución

a) $dP = \frac{-CT}{V^2}dV$ y en el instante indicado vale $dP = -3$ Pa/s.

b) $dT = \frac{P}{C}dV$ y en el instante indicado vale $dT = 9{,}67$ K/s.

3. Crecimiento, concavidad y extremos relativos

★ 1. La figura adjunta es la de la derivada de una función. Estudiar el comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y convexidad).



Solución

Crecimiento: Decreciente en $(-\infty, a)$ y (c, e), y creciente en (a, c) y (e, ∞).
Extremos: Mínimos en $x = a$ y $x = e$, y máximo en $x = c$.
Concavidad: Cóncava en $(-\infty, b)$ y (d, ∞), y convexa en (b, d).

2. Hallar a, b y c en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $x = 3$, pase por el punto $(1, 0)$ y alcance un máximo en $x = 1$.

Solución

$b = -9$, $c = 15$ y $d = -7$.

3. Se ha diseñado un envoltorio cilíndrico para unas cápsulas. Si el contenido de las cápsulas debe ser de 0,15 ml, hallar las dimensiones del cilindro para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

Solución

Radio 0,2879 cm y altura 0,5760 cm.

★ 4. La variable aleatoria bidimensional (X,Y) con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

se conoce como normal bidimensional con X e Y independientes, de parámetros $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ y $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$. Calcular los puntos de inflexión de la curva formada por la intersección de la superficie de f con el plano $y = x$.

★ 5. Mediante simulación por ordenador se ha podido cuantificar la cantidad de agua almacenada en un acuífero en función del tiempo, $m(t)$, en millones de metros cúbicos, y el tiempo t en años transcurridos desde el instante en el que se ha hecho la simulación, teniendo en cuenta que la ecuación sólo tiene sentido para los t mayores que 0:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

a) En el límite, cuando t tiende a infinito, qué cantidad de agua almacenada habrá en el acuífero?

b) Mediante derivadas, calcular el valor del tiempo en el que el agua almacenada ser máxima y cuál es su cantidad de agua correspondiente en millones de metros cúbicos.

Solución

a) $\lim_{t\to\infty} m(t) = 10$.

b) $\frac{dm}{dt} = e^{-t}(\frac{1}{2}t^{-1/2} - t^{1/2})$. El instante en el que el agua almacenada será máxima es $t = 0{,}5$ años y en dicho instante habrá 10,429 millones de m^3.

★ 6. Se está estudiando fabricar unas cápsulas de cuerpo cilíndrico terminadas en sus extremos por dos semiesferas. El volumen de la cápsula debe ser 0,8 cm^3 y se quiere que la superficie sea mínima. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del radio y de la longitud de la parte cilíndrica? Comentar el resultado obtenido.

Nota:
Volumen del cilindro $V = \pi r^2 h$
Superficie lateral del cilindro $S = 2\pi r h$
Volumen de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Superficie de la esfera $S = 4\pi r^2$

Solución

$r = 0{,}5759$ y $h = 0$.

★ 7. Sea $f(x)$ una función cuya derivada vale:

$$f'(x) = \frac{(2-x)e^{-\frac{x^2}{2}+2x-2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Se pide:

a) Estudiar el crecimiento de f.

b) Calcular los valores de x en los que f tiene extremos relativos.

c) Estudiar la concavidad de f.

d) Calcular los valores de x en los que f tiene puntos de inflexión.

Solución

a) Creciente en $x < 2$ y decreciente en $x > 2$.
b) Máximo relativo en $x = 2$.
c) Cóncava en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$. Convexa en $(1, 3)$.
d) Puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$.

8. La velocidad v de una reacción irreversible $A+B \rightarrow AB$ es función de la concentración x del producto AB y puede expresarse según la ecuación

$$v(x) = 4(3 - x)(5 - x).$$

¿Qué valor de x maximiza la velocidad de reacción?

Solución

Ninguno.

9. La cantidad de trigo en una cosecha C depende del nivel de nitrógeno en el suelo n según la ecuación

$$C(n) = \frac{n}{1 + n^2}, \quad n \geq 0.$$

¿Para qué nivel de nitrógeno se obtendrá la mayor cosecha de trigo?

Solución

$n = 1$.

10. Existen organismos que se reproducen una sóla vez en su vida como por ejemplo los salmones. En este tipo de especies, la velocidad de incremento per cápita v, que mide la capacidad reproductiva, depende de la edad x según la ecuación

$$v(x) = \frac{\log(p(x)h(x))}{x},$$

donde $p(x)$ es la probabilidad de sobrevivir hasta la edad x y $h(x)$ es el número de nacimientos de hembras a la edad x. Calcular la edad óptima de reproducción, es decir, el valor que maximice v, para $p(x) = e^{-0{,}1x}$ y $h(x) = 4x^{0{,}9}$.

Solución

$x = 0{,}58$ años.

11. La sensibilidad de S de un organismo ante un fármaco depende de la dosis x suministrada según la relación

$$S(x) = x(C - x),$$

siendo C la cantidad máxima del fármaco que puede suministrarse, que depende de cada individuo. Hallar la dosis x para la que la sensibilidad es máxima.

Solución

$x = C/2$.

4. Derivadas parciales

1. Calcular las siguientes derivadas parciales:

   a) $\dfrac{\partial}{\partial x} \ln \dfrac{x}{y}$.

   b) $\dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{nRT}{v}$.

   Solución

   a) $\frac{\partial}{\partial x} \log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x}$.

   b) $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{n\,R\,T}{v}\right) = -\frac{n\,R\,T}{v^2}$.

2. Calcular el vector gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

   a) $e^{x^2+y^2+z^2}$

   b) $\operatorname{sen}((x^2-y^2)z)$

   Solución

   a) $\nabla e^{x^2+y^2+z^2} = \left(2\,x\,e^{z^2+y^2+x^2}, 2\,y\,e^{z^2+y^2+x^2}, 2\,z\,e^{z^2+y^2+x^2}\right)$,

   $$He^{x^2+y^2+z^2} = \begin{pmatrix} (4x^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} & 4xye^{x^2+y^2+z^2} & 4xze^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xye^{x^2+y^2+z^2} & (4y^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xze^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} & (4z^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

   b) $\nabla \operatorname{sen}((x^2-y^2)z) = \left(2\,x\,z\,\cos\left(\left(x^2-y^2\right)\,z\right), -2\,y\,z\,\cos\left(\left(x^2-y^2\right)\,z\right), \left(x^2-y^2\right)\,\cos\left(\left(x^2-y^2\right)\,z\right)\right)$

   $H\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) =$

   $$\begin{pmatrix} 4x^2\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) + 2\cos((x^2-y^2)z) & 4xy\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & -2x(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) \\ 4xy\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & -4y^2\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) - 2\cos((x^2-y^2)z) & 2y(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) \\ -2x(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & 2y(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & -(x^2-y^2)^2\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) \end{pmatrix}.$$

★ 3. Calcular el gradiente de la función

$$f(x,y,z) = \log\frac{\sqrt{x}}{yz} + \operatorname{arc\,sen}(xz).$$

   Solución

   $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{z}{\sqrt{1-x^2z^2}} + \frac{1}{2x}, \frac{-1}{y}, \frac{x}{\sqrt{1-x^2\,z^2}} - \frac{1}{z}\right)$.

4. Una nave espacial está en problemas cerca del sol. Se encuentra en la posición $(1,1,1)$ y la temperatura de la nave cuando está en la posición (x,y,z) viene dada por $T(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x^2-2y^2-3z^2}$ donde x, y, z se miden en metros. ¿En qué dirección debe moverse la nave para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible?

   Solución

   Debe moverse en la dirección $-\nabla f(1,1,1) = e^{-6}(2,4,6)$.

★ 5. Dada la función

$$f(x,y,z) = \log\sqrt{xy - \frac{z^2}{xy}}$$

a) Hallar el vector gradiente.

b) Hallar un punto en el que el vector gradiente sea paralelo a la bisectriz del plano XY, y calcular el vector gradiente en dicho punto.

Solución

a) $\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{z^2+x^2y^2}{2xz^2-2x^3y^2}, -\frac{z^2+x^2y^2}{2yz^2-2x^2y^3}, \frac{z}{z^2-x^2y^2}\right)$.

b) El vector gradiente es paralelo a la bisectriz del plano XY en cualquier punto de la forma $(a,a,0)$ con $a \in \mathbb{R}$.
$\nabla f(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

★ 6. La cantidad C de cierta toxina en sangre (en mg/dl) depende del número de bacterias, b (bacterias/dl), del número de linfocitos, l (linfocitos/dl), y del tiempo, t (horas), según la ecuación:

$$C(b,l,t) = \frac{t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2} - \frac{1}{\log(b \cdot l)}$$

a) Calcular su gradiente.

b) Comprobar que se cumple: $\dfrac{\partial^2 C}{\partial t \partial b} = \dfrac{\partial^2 C}{\partial b \partial t}$.

Solución

a) $\nabla C(b,l,t) = \left(\frac{3t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2} + \frac{1}{b\log^2(b\cdot l)}, \frac{-2t^2\cdot e^{3b+2}}{l^3} + \frac{1}{l\log^2(b\cdot l)}, \frac{2t\cdot e^{3b+2}}{l^2}\right)$.

b) $\frac{\partial^2 C}{\partial t\partial b} = \frac{6t\cdot e^{3b+2}}{l^2}$.

★ 7. Supongamos que la cantidad de agua almacenada en un pantano al final del año hidrológico, A en hectómetros cúbicos, viene dada por:

$$A = \sqrt{\frac{p^3}{t-1} - c^2 e^{cpt}}$$

donde p es la precipitación en litros/m^2 caída durante el año hidrológico, t es la temperatura media del año hidrológico en ºC y c el consumo debido a abastecimiento de poblaciones cercanas y riego, en hectómetros cúbicos. Se pide:

a) Calcular el gradiente de la cantidad de agua almacenada.

b) Suponiendo que hubiese algún año en el que el consumo fuese nulo, ¿qué condición tendría que cumplir la temperatura para que la derivada del agua almacenada con respecto a la temperatura fuese igual a la derivada con respecto a la precipitación?

★ 8. Dada la función $f(x) = e^{2xy}\operatorname{sen}(x+3z)$, se pide:

a) ¿Calcular el vector gradiente en el origen de coordenadas?

b) ¿Es cierto que $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}$?

★ 9. La variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

se conoce como normal bidimensional con X e Y independientes, de parámetros $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ y $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$. Calcular el gradiente de f e interpretarlo. ¿En qué punto se anula el gradiente? ¿Qué conclusiones sacas? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de f cuando $x \to \infty$?

Solución

$\nabla f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x^2}, \frac{y-\mu_y}{\sigma_y^2}\right)$.
El gradiente se anula en $(x = \mu_x, y = \mu_y)$.
$\lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0$.

★ 10. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

se conoce como ecuación de Laplace se aplica a multitud de fenómenos relacionadas con conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Dada la función $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

a) Comprobar que f satisface la ecuación de Laplace.

b) ¿Existe algún punto en el que el crecimiento de la función sea nulo?

c) Si fijamos $z = 1$, calcular

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Solución

b) No hay ningún punto donde se el crecimiento es nulo.

c) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} = 3\left(x^2+y^2+1\right)^{-5/2} - 15\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)^{-7/2} + 105x^2y\left(x^2+y^2+1\right)^{-9/2}$.

★ 11. La siguiente función determina la temperatura en cada punto del plano real:

$$f(x,y) = e^{x+2y}\cos(x^2+y^2).$$

Se pide:

a) Calcular el gradiente de f.

b) Si estamos situados en el origen de coordenadas, ¿en qué dirección aumentará más rápidamente la temperatura? ¿Y si estuviésemos en el punto $(0, 1)$?

c) Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de f en el origen de coordenadas.

Solución

a) $\nabla f(x,y) = e^{x+2y}\left(\cos(x^2+y^2) - 2x\,\mathrm{sen}(x^2+y^2), 2\cos(x^2+y^2) - 2y\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)\right)$.

b) $\nabla f(0,0) = (1,2)$ y $\nabla f(0,1) = (3{,}99\,, -4{,}45)$.

c) $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad |Hf(0,0)| = 0$.

★ 12. Se dice que la función $z(t,x,y)$ satisface la ecuación de ondas si verifica la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

para algún $k \in \mathbb{R}$.

Comprobar que la función:

$$z\,(t,x,y) = \cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}\left(kt\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

donde $a,b,k \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación de ondas.

Solución

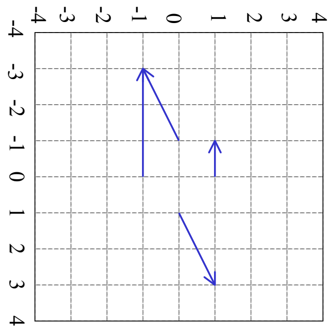
Si la satisface.

★ 13. Dadas las siguientes funciones de dos variables:

$$f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + \mathrm{sen}(xy)$$
$$g(x,y) = \left(2x + 3y^2\right) e^{\left(1-x^2-y^2\right)}$$

a) Calcular el gradiente de cada una de ellas.

b) ¿A cuál de las funciones corresponde el siguiente dibujo del gradiente en los puntos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$?

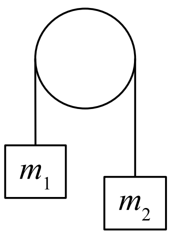


Solución

a) $\nabla f(x,y) = \left(2x - 2y^2 + \cos(xy)y\,,\, -4xy + \cos(xy)x\right)$ y $\nabla g(x,y) = \left((-4x^2 - 6xy^2 + 2)\,,\,(-4xy - 6y^3 + 6y)\right)e^{1-x^2-y^2}$.

b) Los vectores gradientes son de la función f.

14. Tenemos dos objetos de masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa a través de una polea como la de la figura.



Si $m_1 \geq m_2$, la aceleración de m_1 viene dada por la ecuación

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

siendo g la aceleración de la gravedad. Demostrar que se cumple la ecuación

$$m_1 \frac{\partial a}{\partial m_1} + m_2 \frac{\partial a}{\partial m_2} = 0.$$

SOLUCIÓN

$\dfrac{\partial a}{\partial m_1} = \dfrac{2gm_2}{(m_1+m_2)^2}$ y $\dfrac{\partial a}{\partial m_2} = \dfrac{-2gm_1}{(m_1+m_2)^2}$.

★ 15. La relación que modeliza el potencial eléctrico V de un punto del plano en función de su distancia, es $V = \log D$, donde $D = \sqrt{x^2+y^2}$.

Se pide:

a) Calcular el gradiente de V.

b) Hallar la dirección de máxima variación del potencial eléctrico en el punto $(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

c) Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de V en el punto anterior.

d) Si nos movemos a lo largo de la curva $y = x + 1$, cuál será el mínimo potencial alcanzado?

SOLUCIÓN

a) $\nabla V(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

b) $\nabla V(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \sqrt{3}/6(1, 1)$.

c) $HV(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} \\ \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{x^2-y^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/6 & 0 \end{pmatrix}$, y $|H(\sqrt{3}, \sqrt{3})| = -1/36$.

d) El potencial máximo se alcanza en $(x = -1/2, y = 1/2)$ y vale $V(-1/2, 1/2) = -\dfrac{\log 2}{2}$.

16. La ecuación unidimensional del calor es

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2},$$

donde c es una constante y $q(x, t)$ es la temperatura de una varilla en un punto que ocupa la posición x en el instante t. Demostrar que $q(x, t) = e^{ax+bt}$, con $a \neq 0$, satisface dicha ecuación para un valor apropiado de c.

★ 17. Suponiendo que la temperatura, T en ºC, de una zona de la atmósfera es función de la densidad del aire, d, en g por cm^3, la altura, h, en kilómetros, y de la concentración de un determinado elemento, c, en mg por cm^3, viene dada por la expresión:

$$T(d, h, c) = \frac{\ln(dh)}{c} + c^2 3^{hd}$$

a) Suponiendo que la altura a la que medimos la temperatura es de un kilómetro, y que la temperatura medida es de 0 ºC, dar la expresión de la concentración en función de la densidad.

b) Calcular el gradiente de la temperatura en el punto $(d_0, h_0, c_0) = (1, 1, 2)$.

c) Comprobar que se cumple que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial d \partial h} = \frac{\partial^2 T}{\partial h \partial d}$$

18. Sea $z(x, y) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$. Calcular todas sus derivadas parciales de primer y segundo orden.

Solución

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{x^3} + \frac{2}{y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2y}{x^2} - \frac{2x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^2} - \frac{2x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2}{y^3} + \frac{2}{x}$.

19. Dada la función $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(2, -1)$.

★ 20. Supongamos la función de varias variables $f(x, y, z) = x^3 + \sqrt{xyz}$ que da la presión en un recipiente en función de la posición (x, y, z). Suponiendo que en el recipiente hay un insecto y que se encuentra en el punto de coordenadas $(2, 1, 3)$, ¿en qué dirección debe moverse si busca ir lo más rápidamente posible hacia zonas de menor presión?

21. Dado el siguiente campo escalar expresado en coordenadas cartesianas:

$$f(x, y, z) = 3xy \ln\left(\frac{1}{z}\right)$$

Calcular:

a) Su vector gradiente.

b) Su matriz Hessiana.

★ 22. La definición del polinomio de Taylor de grado 2 de una función de dos variables, $f(x, y)$, centrado en el punto (x_0, y_0), es

$$P^2_{f,(x_0,y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + $$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0)$$

a) Utilizar la fórmula anterior para calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x, y) = e^{(x+2y)}$ centrado en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b) Utilizar el polinomio anterior para dar el valor aproximado de $e^{(0{,}1+2\cdot 0{,}1)}$.

★ 23. Suponiendo que el potencial eléctrico en un punto de coordenadas cartesianas (x, y, z) viene dado por:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{x e^y \ln z},$$

calcular en el punto $(1, 0, e)$:

a) El campo eléctrico (recordar que el campo eléctrico es el gradiente del potencial cambiado de signo: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$).

b) La divergencia del campo eléctrico.

★ 24. Para la función de 2 variables $f(x, y) = x^{y^2}$

a) Calcular su dirección y sentido de máximo crecimiento en el punto $(1, 1)$.

b) Calcular su matriz Hessiana.

★ 25. La Quimiotaxis es el movimiento de los organismos dirigido por un gradiente de concentración, es decir, en la dirección en la que la concentración aumenta con más rapidez. El moho del cieno Dictyoselium discoideum muestra este comportamiento. En esta caso, las amebas unicelulares de esta especie se mueven según el gradiente de concentración de una sustancia química denominada adenosina monofosfato (AMP cíclico). Si suponemos que la expresión que da la concentración de AMP cíclico en un punto de coordenadas (x, y, z) es:

$$C(x, y, z) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^4 + 1}}$$

y se sitúa una ameba de moho del cieno en el punto $(-1, 0, 1)$, ¿en qué dirección se moverá la ameba?

Solución

$(4/\sqrt{27}, 0, -8/\sqrt{27})$.

★ 26. Se han diseñado unas cápsulas con forma piramidal con base un rectángulo de lados a=3 cm, b=4 cm, y altura h=6 cm. Se pide:

a) ¿Cómo deben cambiar las dimensiones de la cápsula para que el volumen aumente lo más rápidamente posible? ¿Cuál sería la tasa de variación del volumen si cambian las dimensiones de la cápsula en la proporciones anteriores?

b) Si se empiezan a cambiar las dimensiones de la cápsula de manera que el lado mayor del rectángulo disminuye la mitad de lo que aumenta el lado menor, y la altura aumenta el doble de lo que aumenta el lado menor, ¿cuál sería la tasa de variación del volumen de la cápsula en las condiciones anteriores?

Nota: El volumen de una pirámide es 1/3 del área la base por la altura.

Solución

a) $\nabla V(3, 4, 6) = (8, 6, 4)$ y el volumen aumentará $|\nabla V(3, 4, 6)| = 10{,}7703$ cm^3/s si cambiamos las dimensiones de la cápsula siguiendo esta dirección.

b) Derivada direccional de V en $(3, 4, 6)$ siguiendo la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, -1/2, 2)$: $V'_{\mathbf{u}}(3, 4, 6) = 5{,}6737$ cm^3/s.

★ 27. Supongamos que tenemos una superficie plana, y que la cantidad de una sustancia, C en g/cm^2, depositada sobre cada punto de coordenadas x e y, en metros, es función del punto y del tiempo t, en horas, y viene dada por la expresión:

$$C(x, y, t) = \sqrt{e^{-\frac{3ty}{x^2+1}}}$$

a) Calcular la dirección y sentido de máximo crecimiento de la función en el punto $(x_0, y_0, t_0) = (1, 0, 1)$.

b) Calcular: $\dfrac{\partial^2 C}{\partial y \partial x}$.

c) ¿En qué puntos se anulará el gradiente de C?

Solución

a) $\nabla C(1, 0, 1) = \frac{1}{4}(0, -3, 0)$.

b) $$\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} = \frac{e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}}}{(2x^2+2)^2}\left(\frac{-36t^2yx}{2x^2+2} + 12tx\right).$$

c) En los puntos de la forma $(x, 0, 0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

★ 28. Una barra de metal de un metro de largo se calienta de manera irregular y de forma tal que a x metros de su extremo izquierdo y en el instante t minutos, su temperatura en grados centígrados esta dada por $H(x,t) = 100e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi x t)$ con $0 \leq x \leq 1$.

a) Calcular $\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}2, 1)$ y $\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}8, 1)$. ¿Cuál es la interpretación práctica (en términos de temperatura) de estas derivadas parciales? Explicar por qué cada una tiene el signo que tiene.

b) Calcular la matriz hessiana de H.

Solución

a) $\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}2,\ 1) = 100e^{-0,1}\cos(0{,}2\pi)\pi = 229{,}9736$
$\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}8,\ 1) = 100e^{-0,1}\cos(0{,}8\pi)\pi = -229{,}9736.$

b) $\begin{pmatrix} -100e^{-0,1t}\pi^2t^2\operatorname{sen}(\pi x t) & 100e^{-0,1t}\left((-0{,}1\pi t+\pi)\cos(\pi x t) - \pi^2 x t\operatorname{sen}(\pi x t)\right) \\ 100e^{-0,1t}\left((-0{,}1\pi t+\pi)\cos(\pi x t) - \pi^2 x t\operatorname{sen}(\pi x t)\right) & 100e^{-0,1t}\left(0{,}01\operatorname{sen}(\pi x t) - (0{,}2+\pi^2x^2)\cos(\pi x t)\right) \end{pmatrix}$

★ 29. Dar la dirección de máximo crecimiento de la función

$$f(x,y,z) = \frac{\log(zx)}{z} - xe^{-zxy}$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

Solución

$\nabla f(1,1,1) = (1, e^{-1}, 1+e^{-1})$.

★ 30. Calcular el gradiente de la función

$$f(x,y,z) = e^{\sqrt{x^2+2yz}} + \ln(\frac{xy}{z})$$

en el punto $(1, -2, -2)$.

Solución

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{xe^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} + \frac{1}{x}, \frac{ze^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} + \frac{1}{y}, \frac{ye^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} - \frac{1}{z}\right)$
y $\nabla f(1,-2,-2) = \left(\frac{e^3}{3} + 1, \frac{-2e^3}{3} - \frac{1}{2}, \frac{-2e^3}{3} + \frac{1}{2}\right)$.

★ 31. Calcular el vector gradiente de la función

$$\log\left(\sqrt{x^2-z^2}\right) + 3^{\frac{x^2}{y}}$$

en el punto $(1, 1, 0)$.

Solución

$\nabla f(x,y,z) = (\frac{x}{x^2-z^2} + 3^{\frac{x^2}{y}}\log 3\frac{2x}{y}, 3^{\frac{x^2}{y}}\log 3\frac{-x^2}{y^2}, -\frac{z}{x^2-z^2})$, y $\nabla f(1,-2,-2) = (1+6\log 3, -3\log 3, 0)$.

---

32. La asimilación de CO_2 de una planta depende de la temperatura ambiente (t) y de la intensidad de la luz (l), según la función

$$f(t,l) = ctl^2,$$

donde c es una constante. Estudiar cómo evoluciona la asimilación de CO_2 para distintas intensidades de luz, cuando se mantiene la temperatura constante. Estudiar también cómo evoluciona para distintas temperaturas cuando se mantiene la intensidad de la luz constante.

Solución

$\frac{\partial f}{\partial l}(t,l) = 2ctl$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(t,l) = cl^2$.

33. La abundancia de una determinada especie de planta depende del nivel de nitrógeno en el suelo y del nivel de perturbaciones, de manera que un incremento del nivel de nitrógeno tiene un efecto negativo en la abundancia de esta especie, y un aumento de las perturbaciones también tiene un efecto negativo. Si en un momento dado comienza a aumentar el nivel de nitrógeno en el suelo y también las perturbaciones debidas al pastoreo, ¿cómo se verá afectada la abundancia de la especie?

Solución

La abundancia de la especie disminuirá.

34. La velocidad de crecimiento de un organismo depende de la disponibilidad de alimento y del número de competidores en busca de alimento. ¿Cómo se verá afectada la velocidad de crecimiento si la disponibilidad de alimento aumenta con el tiempo y el número de competidores disminuye?

Solución

La velocidad de crecimiento aumentará.

35. Un organismo se mueve sobre una superficie inclinada siguiendo la línea de máxima pendiente descendiente. Si la expresión de la superficie es

$$f(x,y) = x^2 - y^2,$$

calcule la dirección en la que se moverá el organismo en el punto $(2,3)$.

Solución

Se moverá en la dirección $-\nabla f(2,3) = (-4,6)$.

36. Si $f(x,y,z) = x^3y^2z$ y $g(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, calcular $(f \circ g)'(t)$.

Solución

$(f \circ g)'(t) = e^{3t}(3\operatorname{sen} t\cos^2 t - 2\operatorname{sen}^2 t\cos t + \cos^3 t)$.

37. Obtener los puntos críticos de $z = f(x,y)$ para:

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
   b) $f(x,y) = x^2y + y^2x$.
   c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.

Solución

a) $(0,0)$.
b) $(0,0)$.
c) $(0,0)$.

38. La superficie de una montaña tiene la forma

$$S : z = a - bx^2 - cy^2,$$

donde a, b y c son constantes, x es la coordenada Este-Oeste e y la coordenada Norte-Sur en el mapa, y z la altura sobre el nivel del mar en metros. En el punto $P = (1,1)$ del mapa, ¿en qué dirección crece más rápidamente la altura?

Solución

$(-2b, -2c)$.

39. Hallar las direcciones de máximo y mínimo crecimiento de las siguientes funciones en el punto P:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P = (-1,1)$.
b) $f(x,y) = x^2y + e^{xy} \operatorname{sen} y$, $P = (1,0)$.
c) $f(x,y,z) = \log(xy) + \log(yz) + \log(xz)$, $P = (1,1,1)$.
d) $f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$, $P = (1,1,0)$.

Solución

a) Máximo crecimiento en la dirección $(-1,1)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(1,-1)$.
b) Máximo crecimiento en la dirección $(0,2)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(0,-2)$.
c) Máximo crecimiento en la dirección $(2,2,2)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(-2,-2,-2)$.
d) Máximo crecimiento en la dirección $(2,3,6)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(-2,-3,-6)$.

40. ¿En qué direcciones se anulará la derivada direccional de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

en el punto $P = (1,1)$?

Solución

En la dirección $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

41. ¿Existe alguna dirección en la que la derivada direccional en el punto $P = (1,2)$ de la función

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$$

valga 14?

Solución

No.

42. La derivada direccional de una función f en un punto P es máxima en la dirección del vector $(1, 1, -1)$ y su valor es $2\sqrt{3}$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en P en la dirección del vector $(1, 1, 0)$?

Solución

$2\sqrt{2}$.

43. Dado el campo escalar

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xyz^3 - zx$$

en el punto $P = (1, 2, 3)$, se pide:

a) Calcular la derivada direccional de f en P a lo largo del vector unitario $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.

b) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional de f en P? Obtener el valor de dicha derivada direccional.

Solución

a) $15\sqrt{2}$.

b) La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente $(53, 23, 53)$ y vale $\sqrt{6147}$.

44. En el ajuste de regresión de una recta $y = a + bx$, se suele utilizar la técnica de mínimos cuadrados que consisten en buscar los valores de a y b que hacen mínima la función

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2,$$

donde el sumatorio abarca a todos los pares de la muestra (x_i, y_i) para $i = 1, \ldots, n$, siendo n el tamaño de la muestra.

Demostrar que esta función alcanza el mínimo en los puntos

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{y } b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

45. La siguiente función mide la presión del aire en la posición (x, y, z).

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^3.$$

Sea A un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1/t \end{cases} \quad t > 0.$$

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de A en el punto $(1, 1, 1)$.

b) Sigue la trayectoria de A en el punto $(1, 1, 1)$ la dirección de máximo crecimiento de la función f?

Solución

a) $(1 + t, 1, 1 - t)$.

b) No ya que la dirección de máximo crecimiento de f es $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 2, -3)$ y la dirección de la trayectoria es $(1, 0, -1)$.

★ 46. Obtener la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie

$$S : xyz = 8$$

en el punto $P = (4, -2, -1)$.

Solución

Recta normal $l : (4 + 2t, -2 - 4t, -1 - 8t)$. Plano tangente $\pi : 2x - 4y - 8z + 24 = 0$.

5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables

1. Integrar las siguientes ecuaciones de variables separables:
   a) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$ con la condición inicial $y(0) = 1$.
   b) $(1 + e^x)yy' = e^y$ con la condición inicial $y(0) = 0$.
   c) $\mathrm{e}^y(1 + x^2)y' - 2x(1 + \mathrm{e}^y) = 0$.
   d) $y - xy' = a(1 + x^2y')$.

Solución

   a) $-\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2} - 1$.
   b) $e^{-y}(y + 1) = \log(1 + e^x) - x - \log 2 + 1$.
   c) $y = \log(C(1 + x^2) - 1)$.
   d) $y = C\frac{x}{ax+1} + a$.

2. La desintegración radioactiva está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial x}{\partial t} + ax = 0,$$

donde x es la masa, t el tiempo y a es una constante positiva. La vida media T es el tiempo durante el cual la masa se desintegra a la mitad de su valor inicial. Expresar T en función de a y evaluar a para el isótopo de uranio U^{238}, para el cual $T = 4'5 \cdot 10^9$ años.

Solución

$T = \frac{\log 2}{a}$ y $a = 1{,}54 \cdot 10^{-10}$ años^{-1}.

3. El azúcar se disuelve en el agua con una velocidad proporcional a la cantidad que queda por disolver. Si inicialmente había 13.6 kg de azúcar y al cabo de 4 horas quedan sin disolver 4.5 kg, ¿cuánto tardará en disolverse el 95 % del azúcar contando desde el instante inicial?

Solución

$C(t) = 13{,}6e^{-0{,}276t}$ y el instante en que se habrá disuelto el 95 % del azúcar es $t_0 = 10{,}854$ horas.

★ 4. Una reacción química sigue la siguiente ecuación diferencial

$$y' - 2y = 4,$$

donde $y = f(t)$ es la concentración de oxígeno en el instante t (medido en segundos). Si la concentración de oxígeno al comienzo de la reacción era nula, ¿cuál será la concentración (mg/lt) a los 3 segundos? ¿En qué instante la concentración de oxígeno será de 200 mg/lt?

Solución

$y(t) = 2e^{2t} - 2$. La concentración a los tres segundos será $y(3) = 804$ mg/lt y el instante en que la concentración de oxígeno será de 200 mg/lt es $t_0 = 2{,}3076$ s.

5. La sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de $5°C$. Mientras se encontraba realizando la autopsia de una víctima de asesinato, el forense es asesinado y el cuerpo de la víctima robado. A las 10 de la mañana el ayudante el forense descubre su cadáver a una temperatura de $23°C$ y llama a la policía. A medio día llega ésta y comprueba que la temperatura del cadáver es de $18'5°C$. Supuesto que el forense tenía en vida una temperatura normal de $37°C$, ¿a qué hora fue asesinado?

Solución

Fue asesinado a las 6 de la mañana aproximadamente.

★ 6. Sea la siguiente ecuación diferencial que relaciona la temperatura y el tiempo en un determinado sistema físico:

$$x't^2 - x't + x' - 2xt + x = 0,$$

siendo x la temperatura expresada en Kelvins y t el tiempo en segundos.

Sabiendo que la temperatura en el instante inicial del experimento es 100 K, calcular la temperatura en función del tiempo, y dar la temperatura del sistema físico tres segundos después de comenzar el experimento.

Solución

$x(t) = 100(t^2 - t + 1)$ y la temperatura del sistema a los tres segundos de comenzar el experimento es $x(3) = 700$ K.

★ 7. Se tiene un medicamento en un frigorífico a 2ºC, y se debe administrar a 15ºC. A las 9 h se saca el medicamento del frigorífico y se coloca en una habitación que se encuentra a 22ºC. A las 10 h se observa que el medicamento está a 10ºC. Suponiendo que la velocidad de calentamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medicamento y la del ambiente, ¿en qué hora se deberá administrar dicho medicamento?

Solución

A las 11,06 horas.

★ 8. Una cámara de 500 l está llena de aire en condiciones normales cuando comienza a entrar oxígeno puro a razón de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo se extrae la misma cantidad de la mezcla uniforme. ¿Qué concentración de oxígeno habrá a los 10 minutos? Suponiendo que una concentración de oxígeno en el aire superior a 0.5 gr/l puede ser perjudicial, ¿cuándo será peligroso respirar el aire de la cámara?

Nota: La concentración de oxígeno en el aire en condiciones normales es de 0,15 gr/l, mientras que en el oxígeno puro es de 0,71 gr/l. La ecuación diferencial que explica el fenómeno es

$$\frac{dx}{dt} = c_e v_e - c_s v_s$$

donde x es la cantidad de oxígeno en la cámara en el instante t, c_e y c_s son las concentraciones de oxígeno en el aire que entra y sale respectivamente, y v_e y v_s son las velocidades de entrada y salida del aire.

Solución

★ 9. Sabiendo que el núcleo del Polonio 210 es radiactivo y que su tiempo de semidesintegración (tiempo necesario para que la cantidad inicial se reduzca a la mitad) es de 138 días:

a) ¿Qué cantidad inicial de Polonio 210 teníamos si al cabo de 100 días nos quedan 20 gramos?

b) ¿Qué tiempo tendrá que transcurrir para que se desintegre un 10 % de la masa inicial?

Solución

★ 10. Estudios científicos han demostrado que la longitud en función del tiempo de muchas especies, entre ellas las de gran variedad de peces, viene dada por la ecuación de Bertalanffy:

$$\frac{dL}{dt} = k\,(L_f - L(t))$$

donde L_f es la longitud de la especie al final del periodo de crecimiento, y k es una constante. Suponiendo que la longitud de una especie de peces al final de su periodo de crecimiento es de un metro, y que con uno y dos meses mide, respectivamente, 20 y 40 cm:

a) ¿Cuál será la longitud de esa especie para todo tiempo t?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir desde su nacimiento hasta que la longitud sea de 95 cm?

Solución

a) $L(t) = -1{,}0667e^{-0{,}2877t} + 1$.

b) $t_0 = 10{,}637$ años.

★ 11. La cantidad de masa de un determinado reactivo de una reacción química, M, en gramos, es función del tiempo, en segundo, y se rige mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$M' - (a+b)M = 0$$

donde a y b son constantes. Si inicialmente tenemos 20 gramos de reactivo, al cabo de 10 segundos tenemos 40 gramos, calcular:

a) La cantidad de reactivo para todo tiempo t.

b) La cantidad de reactivo al cabo de medio minuto.

c) ¿Cuando será la cantidad de reactivo 100 g?

Solución

a) $M(t) = 20\, e^{\frac{\ln 2}{10}t}$.

b) $M(30) = 160$ gr.

c) $t_0 = 23{,}22$ s.

★ 12. Se sabe que en una reacción química una sustancia se transforma en otra a una velocidad proporcional a la cantidad sin transformar. Si a las 2 horas del comienzo de la reacción había 20 gr. de la sustancia original y a las 3 horas quedaban 10 gr., ¿qué cantidad es sustancia había al comienzo de la reacción? ¿Cuándo se habrá transformado el 90 % de la sustancia?

Solución

La cantidad original de sustancia era $x(0) = 80$ gr y el tiempo que tiene que pasar para que se transforme el 90 % es 3,32 horas.

---

13. Un depósito contiene 5 kg de sal disueltos en 500 litros de agua en el instante en que comienza entrar una solución salina con 0.4 kg de sal por litro a razón de 10 litros por minuto. Si la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación y sale la misma cantidad de litros que entra, ¿cuánta sal quedará en el depósito después de 5 minutos? ¿y después de 1 hora?

Nota: La tasa de variación de la cantidad de sal en el tanque es la diferencia entre la cantidad de sal que entra y la que sale del tanque en cada instante.

Solución

$C(t) = -195e^{-t/50} + 200$. La cantidad de sal a los 5 minutos será $C(5) = 23{,}557$ kg y a la hora $C(60) = 141{,}267$ kg.

★ 14. En una reacción química, un compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional al cuadrado de la cantidad no transformada. Si había inicialmente 20 gr de la sustancia original y tras 1 hora queda la mitad, ¿en qué momento se habrá transformado el 75 % de dicho compuesto?

Solución

$C(t) = \frac{20}{t+1}$ y el instante en que se habrá transformado el 75 % de la cantidad inicial es $t_0 = 3$ horas.

---

15. Cuando el movimiento se produce en un medio en el que hay cierta resistencia, como en el aire, aparece una fuerza proporcional a la velocidad que se opone al mismo. En este caso, las leyes de Newton conducen a la siguiente ecuación diferencial para la velocidad de caída en el medio:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg$$

donde v es la velocidad, m es la masa, g es la gravedad, y k es la constante de proporcionalidad.

Si se dispara un móvil directamente hacia arriba al nivel del suelo, con velocidad inicial 100 m/s, una masa de 0,05 kg, una constante k de $0,002$ kg/s y g de 10 m/s^2, ¿cuál será la máxima altura del móvil y cuándo la alcanzará? ¿Cuándo y con qué velocidad golpeará el móvil en el suelo?

Solución

★ 16. La cantidad de masa, M, expresada en Kg, de sustancias contaminantes en un depósito de aguas residuales, cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{dM}{dt} = -0{,}5M + 1000$$

donde k es una constante y t es el tiempo expresado en días (podemos imaginar que el depósito está conectado a una depuradora que elimina sustancia contaminante con un ritmo proporcional a la propia cantidad de contaminante, lo cual explicaría el sumando $-0{,}5M$, y que también hay un aporte constante de contaminante de 1000 kg/día, que puede provenir de un desagüe, lo cual explicaría el sumando constante $+1000$).

Si la cantidad inicial de contaminante es de 10000 Kg:

a) ¿Cuál será la cantidad de contaminante para todo tiempo t?

b) ¿Cuál será la cantidad de contaminante al cabo de una semana?

Solución

a) $M(t) = 8000e^{-0{,}5t} + 2000$.

b) $M(7) = 2241{,}579$ kg.

17. Si tenemos en cuenta que cualquier onda sonora que atraviesa un medio sufre un proceso de amortiguamiento, y que su Intensidad I (cantidad de energía por unidad de área y tiempo que atravesaría una superficie colocada de forma perpendicular a la dirección de desplazamiento de la onda, en w/m^2) viene dada por la ley de Lamber-Beer:

$$\frac{dI}{dx} = -\alpha I$$

donde α es el coeficiente de absorción, y suponemos una onda sonora que llega a una pared con una intensidad de 1 w/m^2, y atraviesa 10 cm de pared con un coeficiente de absorción del material de la pared de $0,1$ cm$^-1$. En estas condiciones:

a) ¿Cuál es la intensidad que llega al otro lado de la pared?

b) Teniendo en cuenta que en ondas sonoras más que la intensidad misma se utiliza el nivel de intensidad β, cuya unidad es el decibelio, que viene dado por:

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es una intensidad de referencia asociada con la intensidad más débil que se puede oír e igual a 10^{-12} W/m^2, calcular cuál es el nivel de intensidad de la onda entrante en la pared, y cuál el de la saliente.

Solución

18. El plasma sanguíneo se conserva a 4ºC. Para poder utilizarse en una transfusión el plasma tiene que alcanzar la temperatura del cuerpo (37ºC). Sabemos que se tardan 45 minutos en alcanzar dicha temperatura en un horno a 50ºC. ¿Cuánto se tardará si aumentamos la temperatura del horno a 60º?

Solución

Con el horno a 50ºC se tiene $T(t) = -46e^{-0{,}02808t} + 50$, con el horno a 60ºC se tiene $T(t) = -56e^{-0{,}02808t} + 60$ y en este horno tardará 31,69 min.

19. Hallar las curvas tales que en cada punto (x, y) la pendiente de la recta tangente sea igual al cubo de la abscisa en dicho punto. ¿Cuál de estas curvas pasa por el origen?

Solución

$y = x^4/4$.

---

20. Al introducir glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio de concentración global de glucosa con respecto al tiempo $c(t)$ se explica mediante la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc,$$

donde G es la velocidad constante a la que se suministra la glucosa, V es el volumen total de la sangre en el cuerpo y k es una constante positiva que depende del paciente. Se pide calcular $c(t)$.

Solución

$c(t) = De^{kt} + \frac{G}{100Vk}$

---

21. La temperatura T de una habitación en un día de invierno varía con el tiempo de acuerdo a la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = \begin{cases} 40 - T, & \text{si la calefacción está encendida;} \\ -T, & \text{si la calefacción está apagada.} \end{cases}$$

Suponiendo que la temperatura del aula es de 5ºC a las 9:00 de la mañana, y que a esa hora se enciende la calefacción, pero que debido a una avería la calefacción permanece apagada de 11:00 a 12:00, ¿qué temperatura habrá en la habitación a las 13:00?

Solución

De 9 a 11 la temperatura es $T(t) = -35e^{-t} + 40$ y la temperatura a las 11 será de 35,263ºC.
De 11 a 12 la temperatura es $T(t) = 35{,}263e^{-t}$ y la temperatura a las 12 será de 12,973ºC.
De 12 a 13 la temperatura es $T(t) = -27{,}027e^{-t} + 40$ y la temperatura a las 13 será de 30,057ºC.

---

22. Se considera que la población de una determinada ciudad, $P(t)$, con índices constantes de natalidad y mortalidad, β y γ respectivamente, pero en la que también ingresan por inmigración I personas al año, sigue la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \gamma)\, P + I$$

Suponiendo que dicha población tenía $1,5$ millones de habitantes en 1980, que la diferencia entre los índices de natalidad y mortalidad es de 0,01 (es decir, crece un 1 % anual), y también que absorbe 40000 inmigrantes al año, ¿cuál será la población en el año 2005?

Solución

---

23. Una reacción química se comporta según la siguiente ecuación diferencial:

$$y\sqrt{2x}\, dy - 2y^2\, dx = 0$$

donde y es la energía liberada (en Kj) y x es la cantidad de una determinada sustancia (en gr). Sabiendo que para 2 gr la energía liberada es de 50 Kj, ¿cuánta cantidad habrá que utilizar para obtener 1000 Kj?

Solución

6,12 gr.

★ 24. Resolver el problema del valor inicial

$$\begin{cases} y\sqrt{2x}dy - 2y^2dx = 0 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

¿Para qué valor de x, se obtiene $y = 1000$?

Solución

$y(x) = 5e^{2\sqrt{2x}}$. El valor de x para el que $y = 1000$ es $x = 3{,}509$.

★ 25. La velocidad de aumento del número de bacterias en un cultivo es proporcional al número de bacterias presentes, siguiendo la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

siendo x el número de bacterias presentes y t el tiempo.

a) ¿Por cuánto se habrá multiplicado el número de bacterias al cabo de 5 horas, si se duplicó al cabo de 3 horas?

b) Si al cabo de 4 horas hay 10000 bacterias, ¿cuántas había al principio?

Solución

La solución general de la ecuación es $x(t) = Ce^{at}$.

a) $k = 3{,}17$.

b) Al principio había 3968 bacterias.

★ 26. Dada la ecuación diferencial: $yy' + e^{x^2}x = 2xy^2e^{x^2}$, calcular el valor de $y(1)$ sabiendo que $y(0) = -1$.

Solución

$y(1) = 4{,}005$.

★ 27. Dos figuras de cerámicas del mismo material se ponen en un horno para su cocción a 1000°C. Si en el instante en que se meten al horno la primera está a 40°C y la segunda a 5°C, y al minuto la temperatura de la primera ha aumentado hasta los 200°C, ¿cuales serán sus temperaturas a los 5 minutos?

★ 28. El átomo de radio se desintegra dando helio y una emanación gaseosa, radón, que también es radioactiva. Sabiendo que la velocidad de desintegración es proporcional a la masa (m) en cada instante, se pide:

a) Resolver la ecuación diferencial que explica la desintegración del radio.

b) Calcular la constante de desintegración sabiendo que la masa del radio disminuye un 0,043 % cada año.

c) Calcular el periodo del radio, que es el instante T tal que $m(t + T) = \frac{1}{2}m(t)$ $\forall t \geq 0$.

★ 29. Obtener la ecuación de la curva que pasa por el punto $P = (1, 1)$, tal que la pendiente de la tangente en cada punto coincida con el cuadrado de su ordenada.

Solución

$y = \frac{-1}{x-2}$.

★ 30. Un investigador constata que, tras una inyección intravenosa de glucosa, la tasa de glucosa en sangre $g(t)$ en cada instante t sigue la ecuación diferencial

$$g' + kg = 0,$$

donde $k > 0$ es una constante conocida como *coeficiente de asimilación*. Se pide:

a) Resolver la ecuación diferencial para un sujeto cuya tasa de glucosa en el instante de aplicar la inyección es 80 mg/dl.

b) Si el valor del coeficiente de asimilación varía de $1{,}06 \cdot 10^{-2}$ a $2{,}42 \cdot 10^{-2}$ en los sujetos normales, estudiar si los resultados del sujeto anterior son normales tiendo en cuenta que a los 30 minutos la tasa de glucosa era de 1,2 mg/dl.

Solución

★ 31. El carbono contenido en la materia viva incluye una ínfima proporción del isótopo radioactivo C^{14}, que proviene de los rayos cósmicos de la parte superior de la atmósfera. Gracias a un proceso de intercambio complejo, la materia viva mantiene una proporción constante de C^{14} en su carbono total (esencialmente constituido por el isótopo estable C^{12}). Después de morir, ese intercambio cesa y la cantidad de carbono radioactivo disminuye: pierde 1/8000 de su masa al año. Estos datos permiten determinar el año en que murió un individuo. Se pide:

a) Si el análisis de los fragmentos de un esqueleto de un hombre de Neandertal mostró que la proporción de C^{14} era de 6,24 % de la que hubiera tenido al estar vivo. ¿Cuándo murió el individuo?

b) Calcular la vida media del carbono C^{14}, es decir, el tiempo a partir del cual se ha desintegrado la mitad del carbono inicial.

32. Una colonia de salmones vive tranquilamente en una zona costera. La tasa de natalidad es del 2 % por día y la de mortalidad del 1 % por día. En el instante inicial, la colonia tiene 1000 salmones y ese día llega un tiburón a esa zona costera que se come 15 salmones todos los días. ¿Cuánto tiempo tarda el tiburón en hacer desaparecer a la colonia de salmones?

Solución

Aproximadamente 110 días.

★ 33. El número de bacterias en un determinado cultivo crece a una velocidad proporcional al número de bacterias presente. Al cabo de dos días, el número de bacterias se ha duplicado y un día más tarde había 1000 bacterias. ¿Cuántas bacterias había al principio?

Solución

353.55 bacterias.

Nota: Los problemas marcados con una estrella (★) son problemas de exámenes de otros años.