Ejercicios de Cálculo

Temas: Derivadas en n variables: Tangentes y Gradientes
Titulaciones: Todas

Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU Universidad San Pablo

La presión en la posición (x, y, z) de un espacio es

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^3$$

y la trayectoria de un observador A es

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \qquad\qquad t > 0. \\ z = 1/t \end{cases}$$

Se pide:

1. Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de A en el punto $(1, 1, 1)$.
2. ¿Es la dirección de esta trayectoria al pasar por el punto $(1, 1, 1)$ aquella en la que el crecimiento de f es máximo? Justificar la respuesta.

1. Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de A en el punto $(1,1,1)$.

Datos

$A : g(t) = (t, 1, 1/t) \; t > 0$

$g(t) = \left(t, 1, \frac{1}{t}\right) = (1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 1 = 1 \\ \frac{1}{t} = 1 \end{cases}$ $\quad t = 1$

Tangente a A en el instante $t=1$

$\ell : g(1) + t\, g'(1) = (1,1,1) + t\,(1,0,-1) = (1+t, 1, 1-t)$

$g'(t) = \left(t', 1', \left(\frac{1}{t}\right)'\right) = \left(1, 0, -\frac{1}{t^2}\right)$

$g'(1) = \left(1, 0, -\frac{1}{1^2}\right) = (1,0,-1)$

2. ¿Es la dirección de esta trayectoria al pasar por el punto $(1,1,1)$ aquella en la que el crecimiento de f es máximo? Justificar la respuesta.

Datos

$A : g(t) = (t, 1, 1/t)\ t > 0$

$g'(1) = (1, 0, -1)$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^3$

Dirección de la trayectoria A en $(1,1,1)$

$g'(1) = \underline{(1,0,-1)}$

Dirección de máximo crecimiento de f en $(1,1,1)$: $\nabla f(1,1,1)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) = \left(2x, 2y, -3z^2\right)$$

$$\nabla f(1,1,1) = (2\cdot 1, 2\cdot 1, -3\cdot 1^2) = \underline{(2,2,-3)}$$

No coinciden las direcciones