COMPENDIO DE EJERCICIOS DE CÁLCULO

Autores:
Santiago Angulo Díaz-Parreño (sangulo@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU Universidad San Pablo

Version control information:
Head URL:
https://ejercicioscalculo.googlecode.com/svn/trunk/compendio_ejercicios_calculo.tex
Last changed date: 2010-01-28 20:28:03 +0100 (jue, 28 ene 2010)
Last changes revision: 11
Version: Revision 11
Last changed by: asalber

Índice

1. Domínios e Imágenes

1. Hallar el dominio de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x}$.

   b) $g(x) = \sqrt{x^4-1}$.

   c) $h(x) = \cos\left(\dfrac{x+3}{x^2+1}\right)$.

   d) $l(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$.

2. Límites

1. Dar ejemplo de funciones que cumplan las siguientes condiciones:

   a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   b) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

   c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

2. Determinar el valor de a para que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$ sabiendo que

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1, \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. Calcular los siguientes límites si existen:

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

   b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$.

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{e^{2x}}$.

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^2-1)}{x+2}$.

   e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(1/x)}{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})}$.

   f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a} \quad n\in\mathbb{N}$.

   g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \quad n,m\in\mathbb{Z}$.

   h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

   i) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

   j) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

   k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

   l) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^2}$.

   m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

   n) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen} x}$.

   ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6}{4+e^{-1/x}}$.

   o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$.

   p) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sec x - \operatorname{tg} x$.

4. Calcular los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$ en el punto $x=1$.

5. Obtener las asíntotas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = xe^{1/x}$.

   b) $g(x) = \log(x^2+3x+2)$.

   c) $j(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

   d) $h(x) = \cos x - \log(\cos x)$.

6. Determinar el dominio y las asíntotas de la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

   Nota: Calcular las asíntotas horizontales y oblicuas sólo para $x \to +\infty$.

★ 7. Se ha analizado la cantidad de un nutriente en suelo (mg/K), necesario para el crecimiento de las plantas, en función del tiempo (en días) desde que se procedió a su reposición mediante abonado, y viene dada por la siguiente función:

$$C(t) = \begin{cases} \dfrac{a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}}{\sqrt{t+1}} & \text{si} \quad 0 \leq t < 3 \\ \dfrac{b \ln\left(t^2+1\right)}{t^2+1} & \text{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de las constantes a y b sabiendo que la concentración en el instante inicial era de 50 mg/K, y que la función es continua en $t = 3$ días.

b) Teniendo en cuenta los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, ¿puede la función concentración ser derivable en $t = 3$?

c) ¿Qué valor tendrá la concentración del nutriente transcurridos muchos días desde el abonado?

★ 8. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$.

Resolución

Si sustituimos x por 1 en la expresión, obtenemos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolverla sacamos común denominador y realizamos la resta:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{-x^3+3x-2}{x^4-x^3-x+1}.$$

Si ahora susitutimos x por 1 en la expresión obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver esta indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \to 1} \frac{-x^3+3x-2}{x^4-x^3-x+1} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-3x^2+3}{4x^3-3x^2-1} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-6x}{12x^2-6x} = \frac{-6}{6} = -1.$$

3. Continuidad

1. Las siguientes funciones no están definidas en $x = 0$. Determinar, cuando sea posible, su valor en dicho punto de modo que sean continuas.

a) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$.

b) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

c) $j(x) = \dfrac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$.

d) $k(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ en el punto $x = 0$.

b) $j(x) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ en el punto $x = 0$.

c) $h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ en el punto $x = 0$.

d) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ en el punto $x = 0$.

★ 3. Hallar los puntos de discontinuidad y estudiar el carácter de dichas discontinuidades en la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1}{e^{1/(x^2-1)}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

★ 4. Clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0, \\ e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Resolución

La función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y en consecuencia es continua en la región donde está definida, es decir $(-\infty, 0)$. Por su parte, la función $e^{\frac{1}{x-1}}$ es continua en todos los puntos en que sea continuo el exponente $\frac{1}{x-1}$, es decir en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, en consecuencia, es continua en toda la región en donde está definida, menos en el 1. Así pues, reduciremos el estudio de la continuidad a dos puntos, el 0 por ser donde cambia la definición de la función y el 1, por no estar definida la función $e^{\frac{1}{x-1}}$.

Estudiamos primero la continuidad en el punto $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Como ambos límites laterales son distintos, en $x = 0$ hay una discontinuidad de salto.

Estudiamos ahora la continuidad en el punto $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-\infty} = 0, \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\infty} = \infty. \end{aligned}$$

Como el límite lateral por la derecha no existe, en $x = 1$ hay una discontinuidad esencial de primera especie.

★ 5. Clasificar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

Resolución

A simple vista, podemos ver que se trata de una función racional y estará definida en todo $\mathbb{R}$ salvo en los puntos que anulen alguno de los denominadores. Dichos puntos son fáciles de obtener igualando a 0 los denominadores:

$$\begin{gathered} x = 0 \\ x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{gathered}$$

Por tanto, obtenemos 4 punto de discontinuidad, que son: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Para clasificar estas cuatro discontinuidades, tenemos que estudiar los correspondientes límites por la izquierda y por la derecha.

- Discontinuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{1} = -1,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{1} = -1.$$

  Como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable.

- Discontinuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{0}{6} = 0,$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{0}{6} = 0.$$

  De nuevo, como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable.

- Discontinuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-2}{-0 \cdot -1} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{-2}{+0 \cdot -1} = \infty.$$

  Como ambos límites divergen, se trata de una discontinuidad de tipo esencial.

- Discontinuidad en $x = -\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to -1/2^-} f(x) = \lim_{x \to -1/2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to -1/2^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to -1/2^-} \frac{-3/2}{1/2 \cdot -0} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -1/2^+} f(x) = \lim_{x \to -1/2^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to -1/2^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \to -1/2^+} \frac{-2}{1/2 \cdot +0} = -\infty.$$

  Por último, como ambos límites divergen, se trata también de una discontinuidad de tipo esencial.

4. Derivadas

1. Estudiar si es derivable la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $x = 1$.

Resolución

Aplicando la definición de derivada, tenemos:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h-1} - \sqrt[3]{1-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h^{-2/3} = \infty.$$

Así pues, la función no es derivable en $x = 1$.

2. Comprobar que la función $f(x) = |x-1|$ es continua en $x = 1$ pero no es derivable en dicho punto.

3. Estudiar la derivabilidad de f en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{si } x < -1, \\ \operatorname{sen} \pi x & \text{si } x \in [-1, 2], \\ x/2 & \text{si } x \in (2, 3), \\ 3/2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

4. Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada, donde exista, de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{si } x \leq -2, \\ x^2 - 3 & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \cos \dfrac{1}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

5. Probar que no es derivable en $x = 0$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

6. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista.

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

   b) $g(x) = 2x + |x^2 - 2|$.

Resolución

Para estudiar la derivabilidad primero vamos a expresar la función $|x^2-2|$ como una función a trozos. Para ello necesitamos saber en qué puntos la función $x^2 - 2$ es positiva, y en qué puntos es negativa. Si calculamos las raíces de esta función tenemos:

$$|x^2 - 2| = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Si estudiamos el signo en los intervalos definidos por las raíces, podemos comprobar fácilmente sin más que calcular la función en cualquier punto de los intervalos que $x^2 - 2$ es negativa en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y positiva en el resto de su dominio. Por tanto, podemos expresar el valor absoluto de la siguiente manera:

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ -x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

y entonces, la función original puede expresarse como:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2x - x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 2x + x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ahora, si estudiamos la derivabilidad de cada una de estas funciones en los trozos correspondientes, vemos que ambas son polinomios y por tanto son derivables en sus dominios. Faltaría por estudiar la derivabilidad en los puntos donde cambia la definición de la función. Para ello hay que estudiar la derivada por la izquierda y por la derecha y ver si coinciden. En el punto $x = -\sqrt{2}$ tenemos:

$$g'^{-}(-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$$
$$g'^{+}(-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Y como ámbas derivadas no coinciden la función no es derivable en $x = -\sqrt{2}$. En $x = \sqrt{2}$ tenemos:

$$g'^{-}(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$$
$$g'^{+}(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Ambas derivadas no coinciden y tampoco es derivable en $x = \sqrt{2}$.

Así pues, la derivada vale:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 2 + 2x & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

---

7. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

donde a y b son constantes.

a) ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea continua en todo su dominio? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.

b) ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea derivable en todo su dominio? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.

Resolución

★ 8. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leq c, \\ \ln x & \text{si } c < x, \end{cases}$$

con a, b y c constantes, ¿existe algún valor de las constantes de manera que la función sea continua y derivable en todo su dominio?

Resolución

Estudiaremos primero la continuidad y luego la derivabilidad.

Las funciones $\operatorname{sen} 2x$, $ax^2 + b$ y $\ln x$ son todas contínuas en sus dominios, por tanto, basta con estudiar los puntos donde cambia la definición de la función.

En el punto $x = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 0 = 0,\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} ax^2 + b = a0^2 + b = b,\\
f(0) &= \operatorname{sen}^2 0 = 0.
\end{aligned}$$

Luego la función será contínua en $x = 0$ si y sólo si $b = 0$.

En el punto $x = c$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c^-} f(x) &= \lim_{x\to c^-} ax^2 + b = ac^2 + b,\\
\lim_{x\to c^+} f(x) &= \lim_{x\to c^+} \ln x = \ln c,\\
f(c) &= ac^2 + b.
\end{aligned}$$

Luego la función será contínua en $x = c$ si y sólo si $ac^2 + b = \ln c$.

Por consiguiente, para que la función sea contínua en todo su dominio deben cumplirse las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln c \end{cases}$$

Con la derivabilidad ocurre lo mismo pues las funciones $\operatorname{sen} 2x$, $ax^2 + b$ y $\ln x$ son derivables en su dominio y basta con estudiar la existencia de la derivada en los puntos donde cambia la definición de la función.

En el punto $x = 0$ (imponemos $b = 0$ pues de lo contrario la función no sería continua en este punto y tampoco derivable) tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(0+h) - \operatorname{sen}^2 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 h}{h} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{2\operatorname{sen} h\cos h}{1} = 0,\\
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a(0+h)^2 - \operatorname{sen}^2 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ah^2}{h} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{2ah}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Luego la función es derivable en $x = 0$ si y sólo si $b = 0$.

En el punto $x = c$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a(c+h)^2 + b - (ac^2 + b)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ac^2 + ah^2 + 2ach + b - ac^2 - b}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{ah^2 + 2ach}{h} = \lim_{h\to 0^-} ah + 2ac = 2ac,\\
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(c+h) - (ac^2 + b)}{h} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{1/(c+h)}{1} = \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

Observese que el último límite conduce a una indeterminación porque se debe cumplir $ac^2 + b = \ln c$, para que la función sea continua en dicho punto. Luego para que la función sea derivable en $x = c$, además de la condición de continuidad, se debe cumplir $2ac = \frac{1}{c}$.

Así pues, para que la función sea continua y derivable en todo su dominio deben cumplirse las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln c \\ 2ac = \frac{1}{c} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema llegamos a:

$$a = \frac{1}{2c^2} \Longrightarrow \ln c = ac^2 + b = \frac{1}{2c^2}c^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow c = e^{1/2},$$
$$a = \frac{1}{2(e^{1/2})^2} = \frac{1}{2e},$$

y los valores de las constantes que hacen que la función sea continua y derivable en todo su dominio son:

$$a = \frac{1}{2e},$$
$$b = 0,$$
$$c = e^{1/2}.$$

---

9. Hallar la función derivada y el diferencial de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3$.

   b) $g(x) = \log_3(1+x)^2$.

   c) $h(x) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1+x}{1-x}$.

   d) $i(x) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1})$.

RESOLUCIÓN

---

10. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto x_0 indicado.

    a) $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad x_0 = \pi/2$.

    b) $y = (3-x^2)^4 \sqrt[3]{5x-4}, \quad x_0 = 1$.

    c) $y = \log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \quad x_0 = 0$.

RESOLUCIÓN

---

11. Determinar el ángulo formado por las curvas $y = x^4 + 1$ e $y = 5x^2 - 3$ en el punto $x_0 = 1$.

    Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo que forman sus tangentes.

★ 12. Dadas las funciones $f(x) = \log(\dfrac{x^2}{2})$ y $g(x) = +\sqrt{x^2+2}$, ¿existe algún valor de x en el que la recta normal a f y la recta tangente a g en dicho punto sean paralelas?

RESOLUCIÓN

---

13. Hallar la expresión de la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = a^x \log a$.

b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$.

c) $h(x) = \dfrac{9x^2 - 2x - 25}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$.

d) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Resolución

★ 14. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{si } x < -\pi; \\ \cos x, & \text{si } -\pi \leq x \leq \pi; \\ cx^2 + dx, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

Calcular a, b, c y d para que la función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Resolución

Estudiamos primero la continuidad. Los distintos trozos de la función están formados por funciones polinómicas y la función $\cos x$ que están definidas en todo su dominio, de manera que los únicos posibles puntos de discuntinuidad son los puntos donde cambia la definición de la función. Calculamos los límites laterales en dichos puntos: En el punto $x = -\pi$ tenemos

$$\lim_{x \to -\pi^-} f(x) = \lim_{x \to -\pi^-} ax^2 + bx = a\pi^2 - b\pi,$$
$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \lim_{x \to -\pi^+} \cos x = \cos -\pi = -1,$$

de modo que para que la función sea continua en este punto debe cumplirse

$$a\pi^2 - b\pi = -1 \tag{1}$$

Y en el punto $x = \pi$ tenemos

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \cos x = \cos \pi = -1,$$
$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} cx^2 + dx = c\pi^2 + d\pi,$$

de modo que para que la función sea continua en este punto debe cumplirse

$$c\pi^2 + d\pi = -1 \tag{2}$$

En cuanto a la derivabilidad, calculamos primero las derivadas de las funciones de cada uno de los trozos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & \text{si } x < -\pi; \\ -\operatorname{sen} x, & \text{si } -\pi < x < \pi; \\ 2cx + d, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

Al igual que antes, las derivadas de las funciones de cada uno de los trozos existen en sus respectivos dominios por lo que faltaría por ver si existe la derivada en los puntos donde cambia la definición de la función. Calculamos las derivadas laterales en dichos puntos: En el punto $x = -\pi$ tenemos

$$\lim_{x \to -\pi^-} f'(x) = \lim_{x \to -\pi^-} 2ax + b = -2a\pi + b,$$
$$\lim_{x \to -\pi^+} f'(x) = \lim_{x \to -\pi^+} -\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} -\pi = 0,$$

de modo que para que la función sea derivable en este punto, además de la condición 1 debe cumplirse la condición

$$-2a\pi + b = 0 \tag{3}$$

Y en el punto $x = \pi$ tenemos

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = \lim_{x\to-\pi^-} -\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}\pi = 0,$$
$$\lim_{x\to\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to-\pi^+} 2cx + d = 2c\pi + d,$$

de modo que para que la función sea derivable en este punto, además de la condición 2 debe cumplirse la condición

$$2c\pi + d = 0 \tag{4}$$

Así pues, para que $f(x)$ sea continua y derivable en el punto $x = -\pi$ deben cumplirse las ecuaciones 1 y 3. Resolviendo el sistema que forman llegamos a que

$$a = \frac{1}{\pi^2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{2}{\pi}.$$

Y para que sea continua y derivable en el punto $x = \pi$ deben cumplirse las ecuaciones 2 y 4. Resolviendo el sistema que forman llegamos a que

$$c = \frac{1}{\pi^2} \qquad \text{y} \qquad d = \frac{-2}{\pi}.$$

★ 15. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

siendo a y $b \in \mathbb{R}$.

a) Hallar a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$ y su derivada se anule en $x = 2$. Con los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior:

b) Estudiar la derivabilidad de la función f.

c) Hallar las asíntotas de f.

RESOLUCIÓN

a) Estudiemos primero la continuidad de la función. Puesto que se trata de una función definida por tramos, primero estudiamos cada tramo por separado. En el primer tramo $x < 0$ la función vale $\frac{x^2+1}{x-1}$ que es una función racional, y por tanto, está definida y es continua en todos los puntos excepto en aquellos que anulen en denominador. Pero el único punto que anula el denominador es $x = 1$ que se sale del tramo de definición de la función, por lo que en el primer tramo la función es continua. En el segundo tramo $x > 0$ la función vale $\frac{ax+b}{x^2+2x+1} = \frac{ax+b}{(x+1)^2}$ que también es una función racional. El único punto que anula el denominador es $x = -1$, pero al igual que antes, se sale del intervalo de definición de la función, por lo que también es continua en su tramo. Por último queda estudiar la continuidad en $x = 0$, que es donde cambia la definición de la función, por lo que procedemos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{0^2+1}{0-1} = -1,$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{ax+b}{x^2+2x+1} = \frac{a\cdot0+b}{0^2+2\cdot0+1} = b,$$

de donde se deduce que para que exista el límite debe ser $b = -1$. En este caso, el límite coincidiría con el valor de la función $f(0) = -1$, por lo que la función sería continua en todo $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la derivada en $x = 2$. Puesto que el punto pertenece al segundo tramo de la función, derivamos este tramo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2+2x+1}\right) &= \frac{\frac{d}{dx}(ax+b)(x^2+2x+1)-(ax+b)\frac{d}{dx}(x^2+2x+1)}{(x^2+2x+1)^2} = \\ &= \frac{a(x^2+2x+1)-(ax+b)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}\end{aligned}$$

Sustituyendo en $x = 2$ y $b = -1$ tenemos

$$f'(2) = \frac{a(2^2+2\cdot 2+1)-(2a-1)(2\cdot 2+2)}{(2^2+2\cdot 2+1)^2} = \frac{-3a+6}{81} = 0 \Leftrightarrow -3a+6 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

b) Antes de estudiar la derivabilidad, sustituimos a y b por los valores obtenidos con lo que tenemos la función

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \le 0, \\ \dfrac{2x-1}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad, derivamos cada tramo por separado. La derivada del segundo tramo la calculamos en el apartado anterior, así que falta calcular la del primer tramo que es inmediata

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)(x-1)-(x^2+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{2x(x-1)-(x^2+1)1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Así pues, a falta de estudiar la derivabilidad en el punto $x = 0$, tenemos que f es derivable en cada un de los tramos y sus derivadas valen

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2x+1)^2}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Por último estudiamos la derivabilidad en $x = 0$ mirando la derivada por la izquierda y por la derecha:

$$\begin{aligned} f'^{-}(0) &= \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{0^2-2\cdot 0-1}{(0-1)^2} = -1, \\ f'^{+}(0) &= \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2x+1)^2} = \frac{-2\cdot 0^2+2\cdot 0+4}{(0^2+2\cdot 0+1)^2} = 4, \end{aligned}$$

y como no coinciden, la función es derivable en en todo $\mathbb{R}$ excepto en el 0, y su derivada es la anterior.

- Asíntotas Verticales. Puesto que la función está definida en todo $\mathbb{R}$ y además es continua, no existen puntos en los que la función tienda a $\pm\infty$, de modo que no hay asíntotas verticales.
- Asíntotas Horizontales. Para las asíntotas horizontales estudiamos la tendencia de f en $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1} = -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2+2x+1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x+2} = 0, \end{aligned}$$

(1) Indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos la regla de L'Hôpital.

Así pues, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha. Por la izquierda no hay asíntota horizontal.

- Asíntotas oblicuas. Estudiamos la existencia de asíntotas oblicuas sólo por la izquierda porque por la derecha no puede existir asíntota oblicua al haber asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2}=1.$$

(1) Indeterminación del tipo $0/0$. Aplicamos la regla de L'Hôpital.

Así pues, existe asíntota oblicua con pendiente 1. El término independiente nos lo da el siguiente límite

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1}=1,$$

(1) Indeterminación del tipo $0/0$. Aplicamos la regla de L'Hôpital.

de manera que la ecuación de la asíntota oblicua es $y=x+1$.

★ 16. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}} & \text{si } x\neq 1,\\ 0 & \text{si } x=1.\end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad en $x=1$.

b) Mediante la definición de derivada de una función en un punto, calcular tanto la derivada por la derecha como la derivada por la izquierda en $x=1$.

Resolución

a) Para que la función sea continua en $x=1$ debe cumplirse que $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$. En primer lugar, la función está bien definida en $x=1$ y $f(1)=0$. Veamos ahora los límites laterales:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{1-2^{+\infty}}=\frac{1}{1-\infty}=\frac{1}{-\infty}=0,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{1-2^{-\infty}}=\frac{1}{1-0}=\frac{1}{1}=1.$$

Así pues, como $\lim_{x\to1^-}\neq\lim_{x\to1^+}$, no existe el límite y la función presenta una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

b) Puesto que la función no es continua en $x=1$, tampoco será derivable. No obstante, pueden existir las derivadas laterales. Pasamos a calcularlas mediante la definición de derivada:

$$f'^-(1)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\frac{1}{1-2^{\frac{1+h}{1-(1+h)}}}-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{1/h}{1-2^{\frac{1+h}{-h}}}=$$
$$=\frac{1/0^-}{1-2^{\frac{1+0}{0^+}}}=\frac{-\infty}{1-2^{+\infty}}=\frac{-\infty}{-\infty},$$

que es una indeterminación. Aplicando la regla de L'Hôpital tenemos

$$f'^{-}(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1/h)'}{\left(1-2^{\frac{1+h}{-h}}\right)'} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1/h^2}{-2^{\frac{1+h}{-h}} \log 2 \left(\frac{-h+1+h}{h^2}\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1/h^2}{-2^{\frac{1+h}{-h}} \log 2 \left(\frac{1}{h^2}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{2^{\frac{1+h}{-h}} \log 2} = \frac{1}{2^{+\infty} \log 2} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

$$f'^{+}(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-2^{\frac{1+h}{1-(1+h)}}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-2^{\frac{1+h}{-h}}} - 0}{h} = \frac{\frac{1}{1-2^{\frac{1+0}{0^-}}}}{0^+} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1-2^{-\infty}}}{0^+} = \frac{\frac{1}{1-0}}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

En consecuencia, existe derivada por la izquierda pero no por la derecha.

---

17. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 8$

b) $y = \dfrac{1}{x^2} - 2x^{-1} + \sqrt{3x}$

c) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

d) $y = 8^{3x^2-1}$

e) $y = \log \dfrac{x-1}{x+1}$

f) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

g) $y = e^{2x} \log x^2$

h) $y = \log_7(x^2 + 2x + 1)$

i) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x}$

j) $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$

k) $y = (\log x + \sqrt{x})^3$

l) $y = \dfrac{\log x}{e^x}$

m) $y = \log \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

n) $y = \operatorname{sen}^2(x^2 + 3x)$

ñ) $y = \cos(\log x^2)$

o) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 2)$

p) $y = 2^{\log \cos x}$

q) $y = \log\left(\cos \dfrac{x^2}{2}\right)$

r) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

s) $y = \log \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen} 2x}}$

t) $y = \dfrac{1}{2} \log \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x}$

u) $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x^3}{2}$

v) $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x^2) + \operatorname{arc\,sen}(\cos x^2)$

w) $y = x^x$

x) $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

18. Hallar las derivadas sucesivas hasta la quinta de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = \dfrac{1}{x}$.

c) $y = \log(x+2)$

d) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

e) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

f) $e^{2\cos x}$

★ 19. Sea la función $f(x) = (x^2 - x)3^{x/2}$. Calcular su derivada n-ésima. Aplicar el resultado anterior para calcular la derivada de orden 100.

★ 20. Sea

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & \text{si } x < 1 \\ b\log(1/x) + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b para que la función sea continua y derivable en en cualquier valor de x.

★ 21. Calcular la derivada n-ésima de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}.$$

Apoyándose en el cálculo anterior, dar la expresión de la derivada de orden 20 de f.

Resolución

★ 22. Analizar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x^2}{|x|} & \text{si } x < 0, \\ -2 + e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

¿Qué sucede si cambiamos en el enunciado e^{-x} por e^x?

Resolución

Antes de estudiar la continuidad nos interesa eliminar el valor absoluto que aparece en la primera rama de deficinición de la función. Si observamos la definición de la función, la primera rama de definición es para los negativos ($x < 0$); en consecuencia, como el argumento del valor absoluto es precisamente x, lo que hará el valor absoluto será cambiar de signo el valor de x. Por lo tanto, podemos sustituir $|x|$ por $-x$ en la primera rama de definición y de esta forma la función quedaría definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{x^2}{x} & \text{si } x < 0, \\ -2 + e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Por otro lado, el cociente $\dfrac{x^2}{x}$ de la primera rama también puede simplificarse ya que en dicha rama no está incluido el 0 que sería el único valor que anularía el cociente. Es decir, tras simplificar, la función con la que tenemos que trabajar es

$$f(x) = \begin{cases} -1 + x & \text{si } x < 0, \\ -2 + e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad, comprobamos que la primera rama contiene un polinomio que es continuo en todo su dominio, mientras que la segunda rama contiene una función exponencial compuesta con una suma, y también es continua en todo su dominio. En consecuencia, el único punto en el que queda por estudiar la continuidad es en el cambia la definición de la función, es decir, en el 0.

Para estudiar la continuidad en el 0, calculamos los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 + x = -1,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -2 + e^{-x} = -2 + 1 = -1.$$

Como ambos límites coinciden y además $f(0) = -2 + e^{-0} = -2 + 1 = -1$, también coincide con el valor del límite, concluimos que la función es continua en el 0 y por consiguiente en todo $\mathbb{R}$.

Para estudiar la derivabilidad, comprobamos que el polinomio de la primera rama es derivable en todo su dominio y su derivada vale 1. Del mismo modo la función de la segunda rama también es derivable en todo su dominio y su derivada vale $-e^{-x}$. De nuevo, el único punto que queda por estudiar es el 0.

Para estudiar la derivabilidad en el 0 tomamos la función derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

y calculamos los límites laterales en el 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -e^{-x} = -1.$$

Como ambos límites son distintos, no existe derivada en el 0 y la función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Por último, si cambiamos e^{-x} por e^x en la definición de la función, entonces la continuidad seguiría igual pues el límite por la derecha en el 0 no cambiaría

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -2 + e^x = -2 + 1 = -1.$$

Sin embargo, la función derivada sí cambiaría:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ e^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Y ahora, al calcular el límite por la derecha en el 0 tendríamos

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1.$$

que coincide con el límite por la izquierda. Así pues, la función sería derivable en el 0 y, por lo tanto, en todo $\mathbb{R}$. Además, la función derivada sería

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ e^x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

5. Diferencial

1. Un cilindro de 4 cm de radio (r) y 3 cm de altura (h) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que $\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = 1$ cm/s. Hallar la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

Resolución

★ 2. La ecuación de los gases perfectos es $PV = CT$ donde C es constante. Si en un cierto instante el volumen es 0.3 m^3, la presión es 90 Pa, la temperatura 290 K, y comenzamos a aumentar el volumen a razón de 0.01 m^3/s:

   a) Hallar la variación de la presión en dicho instante si la temperatura se mantiene constante.

   b) Hallar la variación de la temperatura en dicho instante si la presión se mantiene constante.

Resolución

6. Derivadas Implícitas

1. Derivar implícitamente las siguientes expresiones tomando y como función de x:

a) $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$.

b) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x^2+y^2}$.

RESOLUCIÓN

★ 2. Dada la función $xy + e^x - \log y = 0$, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a ella en el punto $x = 0$.

RESOLUCIÓN

★ 3. Suponiendo que la temperatura, T en grados centígrados, y el volumen, V en metros cúbicos, de un gas real encerrado en un contenedor de volumen variable están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$T^2\left(V^2 - \pi^2\right) - V\cos(TV) = 0$$

Se pide:

a) Calcular la derivada del volumen con respecto a la temperatura en el momento en el que el volumen es de π m^3 y la temperatura es medio grado centígrado.

b) ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que daría el volumen en función de la temperatura en el mismo punto del apartado anterior?

c) Suponiendo que tanto la temperatura como el volumen son, a su vez, funciones de la presión, qué ecuación ligaría la derivada de la temperatura con respecto a la presión con la derivada del volumen con respecto a la presión.

RESOLUCIÓN

★ 4. Dada la función:

$$\frac{x}{y^2} + e^{x^2y} - \log\sqrt{x-y} = 0$$

Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto de abcisa $x = 0$.

★ 5. Un cuerpo se mueve en el plano a través de los puntos de coordenadas (x, y) relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$2e^{xy}\operatorname{sen} x + y\cos x = 2$$

Se pide:

a) Calcular su posición cuando $x = \pi/2$

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuando $x = 0$.

RESOLUCIÓN

a) El punto (x_0, y_0) en el que se encontrará el cuerpo cuando $x_0 = \pi/2$ cumple la ecuación del enunciado. Por lo tanto:

$$2e^{x_0y_0}\operatorname{sen} x_0 + y_0\cos x_0 = 2$$

y sustituyendo $x_0 = \pi/2$, obtenemos:

$$2e^{\frac{\pi}{2}y_0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + y_0\cos\frac{\pi}{2} = 2 \Rightarrow 2e^{\frac{\pi}{2}y_0} = 2$$

con lo cual:

$$e^{\frac{\pi}{2}y_0} = 1 \Leftrightarrow y_0 = 0$$

b) Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de coordenadas (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

En nuestro caso, no tenemos la expresión explícita de la función f, pero sí que tenemos la expresión de partida que define a y como función de x de forma implícita. Suponiendo que y es función de x y derivando con respecto a x, obtenemos:

$$2e^{xy}(y + xy')\operatorname{sen} x + 2e^{xy}\cos x + y'\cos x - y\operatorname{sen} x = 0$$

Y sacando como factor común y' y despejando, nos queda:

$$y' = \frac{-2e^{xy}y\operatorname{sen} x - 2e^{xy}\cos x + y\operatorname{sen} x}{2xe^{xy}\operatorname{sen} x + \cos x}$$

Teniendo en cuenta que $x_0 = 0$, y sustituyendo en la expresión inicial, obtenemos el valor de y_0:

$$2e^0\operatorname{sen} 0 + y_0\cos 0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2$$

Y teniendo en cuenta el valor de la derivada implícita obtenido anteriormente:

$$f'(0) = y'(0,2) = \frac{-2e^0\cos 0}{\cos 0} = -2$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 2$$

★ 6. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $x^2 + y^2 = 3xy - 1$ en los puntos en que $x = 1$. Calcular también los extremos relativos y decir si son máximos o mínimos.

Resolución

Consideremos y como función de x. Veamos primero los puntos de la curva en los que $x = 1$:

$$1^2 + y^2 = 3 \cdot 1 \cdot y - 1 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos dos soluciones $y = 1$ e $y = 2$, de modo que existen dos puntos para los que $x = 1$, que son el $(1,1)$ y el $(1,2)$.

Para calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal en estos puntos, necesitamos calcular la derivada dy/dx en dichos puntos. Derivamos implicitamente:

$$d(x^2 + y^2 = d(3xy - 1) \Leftrightarrow 2xdx + 2ydy = 3(dxy + xdy) \Leftrightarrow (2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0,$$

de donde se deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x},$$

que en el punto $(1,1)$ vale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1} = -1,$$

y en el punto $(1,2)$ vale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = 4.$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1)$ es

$$y - 1 = \frac{dy}{dx}(1,1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2 - x,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{dy/dx}(1,1)(x-1) \Leftrightarrow y = x,$$

mientras que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,2)$ es

$$y - 2 = \frac{dy}{dx}(1,2)(x-1) \Leftrightarrow y = 4x - 2,$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 2 = -\frac{1}{dy/dx}(1,2)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{9-x}{4}.$$

Por otro lado, para calcular los extremos relativos, primero calculamos los puntos críticos, que son los que anulan la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-2x}{2y-3x} = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x/3.$$

Pero además deben pertenecer a la curva de la función, y por tanto deben satisfacer la ecuación de la función:

$$x^2 + (2x/3)^2 = 3x(2x/3) - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2/9 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 9/5 \Leftrightarrow x = \pm 3/\sqrt{5}.$$

Así pues, existen dos puntos críticos que son el $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$. Para ver si son puntos de máximo o mínimo relativos, necesitamos calcular la segunda derivada en dichos puntos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y-2x}{2y-3x}\right) = \frac{(3\frac{dy}{dx} - 2)(2y-3x) - (2\frac{dy}{dx} - 3)(3y-2x)}{(2y-3x)^2}.$$

En el punto, $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = \frac{(3\cdot 0 - 2)(2\frac{2}{\sqrt{5}} - 3\frac{3}{\sqrt{5}}) - (2\cdot 0 - 3)(3\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\frac{3}{\sqrt{5}})}{(2\frac{2}{\sqrt{5}} - 3\frac{3}{\sqrt{5}})^2} = 2\sqrt{5},$$

que al ser positiva, indica que el punto $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ es un punto de mínimo relativo.
En el punto, $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ la segunda derivada vale

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) = \frac{(3\cdot 0 - 2)(2\frac{-2}{\sqrt{5}} - 3\frac{-3}{\sqrt{5}}) - (2\cdot 0 - 3)(3\frac{-2}{\sqrt{5}} - 2\frac{-3}{\sqrt{5}})}{(2\frac{-2}{\sqrt{5}} - 3\frac{--3}{\sqrt{5}})^2} = -2\sqrt{5},$$

que al ser negativa, indica que el punto $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ es un punto de máximo relativo.

★ 7. Dada la curva $x^2 - xy + y^2 = 3$

a) Calcular los posibles extremos relativos de y, considerando y como función implícita de x. ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

b) Analizar si lo puntos anteriores son máximos o mínimos haciendo uso de la derivada segunda.

Resolución

a) Derivamos implícitamente la ecuación

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}3 = 0$$

Derivando el lado izquierdo tenemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x - (\frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx}) + 2y\frac{dy}{dx} =$$
$$= 2x - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2x - y + (2y - x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Los posibles extremos serán los puntos donde se anule la derivada, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$. Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$$2x - y + (2y - x) \cdot 0 = 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Y sustituyendo ahora en la ecuación de la función tenemos

$$x^2 - x \cdot 2x + (2x)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Por tanto, los posibles puntos de extremo serán (1,2) y (-1,-2).

b) Para ver si los puntos anteriores son efectivamente extremos, calculamos la derivada segunda en dichos puntos.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - xy + y^2) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2)\right) = \\
&= \frac{d}{dx}\left(2x - y + (2y - x)\frac{dy}{dx}\right) = \\
&= \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}y + \left(\frac{d}{dx}(2y - x)\frac{dy}{dx} + (2y - x)\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}\right) = \\
&= 2 - \frac{dy}{dx} + \left(2\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (2y - x)\frac{d^2y}{dx^2} = \\
&= 2 - \frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + (2y - x)\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 2\frac{dy}{dx} + (2y - x + 2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0
\end{aligned}$$

Para el primer punto tenemos que sustituir $x = 1$, $y = 2$ y $\frac{dy}{dx} = 0$, y queda

$$2 - 2 \cdot 0 + (2 \cdot 2 - 1 + 2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow 2 + 5\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{5},$$

que al ser negativo indica que el en el punto $(1, 2)$ hay un máximo.

Para el segundo punto tenemos que sustituir $x = -1$, $y = -2$ y $\frac{dy}{dx} = 0$, y queda

$$2 - 2 \cdot 0 + (2 \cdot (-2) - (-1)1 + 2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2,$$

que al ser positivo indica que el en el punto $(-1, -2)$ hay un mínimo.

---

8. Caldular dy/dx y dx/dy para las siguientes funciones implícitas:

a) $2x^2 + 3y^3 - x^y = 2$

b) $3x^2y^2 = x^2 + 3y^3$

c) $\operatorname{sen}(xy^2) = \cos(x^2y)$

d) $x\ln(x^2 + 3y) = y^3e^{2xy^2}$

Resolución

9. Caldular dy/dx para las siguientes funciones definidas implícitamente:

   a) $xy^3 - 3x^2 = xy + 5$.

   b) $e^{xy} + y \log x = \cos 2x$.

★ 10. La expresión

$$e^{xy} \log\left(\frac{1}{x}\right) + a\frac{1}{y} = 2,$$

donde a es una constante, define a y como función implícita de x en el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Calcular la derivada de y con respecto a x en dicho punto.

★ 11. La concentración de un fármaco en sangre, C en mg/dl, y el tiempo, t en s, están relacionados mediante la expresión:

$$e^{tC} - t^2C^3 - \ln C = 0$$

Suponiendo que la ecuación anterior define a C como función implícita de t, y que, por lo tanto, también puede definir a t como función implícita de C, calcular:

   a) La derivada de C con respecto a t.

   b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de C en función de t cuando $t = 0$.

   c) La ecuación de la recta normal a la gráfica de t en función de C cuando $C = e$.

Resolución

a) Derivamos implícitamente:

$$d(e^{tC} - t^2C^3 - \ln C) = d0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(e^{tC}) - d(t^2C^3) - d\ln C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{tC}d(tC) - (d(t^2)C^3 + t^2d(C^3)) - \frac{1}{C}dC = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{tC}(dtC + tdC) - 2tdtC^3 - t^2 3C^2dC - \frac{1}{C}dC = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{tC}Cdt + e^{tC}tdC - 2tC^3dt - 3t^2C^2dC - \frac{1}{C}dC = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{tC}C^2dt + e^{tC}tCdC - 2tC^4dt - 3t^2C^3dC - dC = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{tC}C^2 - 2tC^4)dt + (e^{tC}tC - 3t^2C^3 - 1)dC = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{tC}tC - 3t^2C^3 - 1)dC = (2tC^4 - e^{tC}C^2)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dC}{dt} = \frac{2tC^4 - e^{tC}C^2}{e^{tC}tC - 3t^2C^3 - 1}.$$

b) En primer lugar veamos qué valores de C corresponden a $t = 0$. Sustituyendo en la ecuación que define la función tenemos:

$$e^{0\cdot C} - 0^2C^3 - \ln C = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln C = 0 \Leftrightarrow \ln C = 1 \Leftrightarrow C = e.$$

Así pues, se trata de calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $(t = 0, C = e)$. La ecuación de la recta tangente es

$$C = e + \frac{dC}{dt}(t = 0, C = e)(t - 0)$$

Utilizando la derivada calculada en el apartado anterior tenemos

$$\frac{dC}{dt}(t=0,C=e) = \frac{2\cdot 0\cdot e^4 - e^{0\cdot e}e^2}{e^{0\cdot e}\cdot 0\cdot e - 3\cdot 0^2\cdot e^3 - 1} = \frac{-e^2}{-1} = e^2,$$

y sustituyendo en la ecuación de la tangente llegamos a

$$C = e + e^2 t.$$

c) Del apartado anterior se deduce que el valor de t que le corresponde a $C=e$ según la función es $t=0$, es decir, se trata de calcular la recta normal en el mismo punto del apartado anterior pero considerando a t como función de C. La ecuación de la recta normal es

$$t = 0 - \frac{1}{dt/dC}(t=0,C=e)(C-e) = -\frac{dC}{dt}(t=0,C=e)(C-e),$$

y como la derivada ya la tenemos del apartado anterior, simplemente sustituimos y tenemos

$$t = -e^2(C-e).$$

★ 12. Calcular las ecuaciones de las tangentes a la curva definida por

$$\operatorname{tg}(xy) - \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2} = \log(x^2+y^2)$$

en los puntos de abscisa $x=0$.

Resolución

En primer lugar hay que calcular los puntos de la función en los que $x=0$, es decir los puntos donde la función corta el eje de ordenadas. Sustituyendo x por 0 en la ecuación que define la función tenemos

$$\operatorname{tg}(0) - \cos 0 + 0 = \log(y^2) \Leftrightarrow \log(y^2) = -1 \Leftrightarrow y^2 = e^{-1} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{e^{-1}}$$

Así pues, hay dos puntos en los que hay que calcular las tangentes que son $(0,-\sqrt{e^{-1}})$ y $(0,\sqrt{e^{-1}})$. La ecuación de la recta tangente en $(0,-\sqrt{e^{-1}})$ es

$$y = -\sqrt{e^{-1}} + \frac{dy}{dx}(0,-\sqrt{e^{-1}})(x-0), \tag{5}$$

y por tanto necesitamos calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$. Para ello derivamos implícitamente:

$$\begin{aligned}
&d\left(\operatorname{tg}(xy) - \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}\right) = d\left(\log(x^2+y^2)\right) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow d\operatorname{tg}(xy) - d\cos\left(\frac{x}{y}\right) + d\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2}d(x^2+y^2) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (1+\operatorname{tg}^2(xy))d(xy) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{dxy^2 - xdy^2}{y^4} = \frac{1}{x^2+y^2}(dx^2+dy^2) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (1+\operatorname{tg}^2(xy))(dxy+xdy) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dxy - xdy}{y^2} + \frac{dxy^2 - x2ydy}{y^4} = \frac{1}{x^2+y^2}(2xdx+2ydy) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (1+\operatorname{tg}^2(xy))(dxy+xdy) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dxy - xdy}{y^2} + \frac{dxy - 2xdy}{y^3} = \frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

La derivada en el punto $(0, -\sqrt{e^{-1}})$ es

$$(1+\operatorname{tg}^2(0\cdot(-\sqrt{e^{-1}})))(dx(-\sqrt{e^{-1}})+0dy)+\operatorname{sen}\left(\frac{0}{-\sqrt{e^{-1}}}\right)\frac{dx(-\sqrt{e^{-1}})-0dy}{e^{-1}}+\frac{dx(-\sqrt{e^{-1}})-2\cdot 0dy}{(-\sqrt{e^{-1}})^3}=$$

$$=\frac{2\cdot 0dx+2\cdot(-\sqrt{e^{-1}})dy}{0^2+(-\sqrt{e^{-1}})^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{e^{-1}}dx+\frac{-\sqrt{e^{-1}}dx}{(-\sqrt{e^{-1}})^3}=\frac{-2\sqrt{e^{-1}}dy}{e^{-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{e^{-1}}dx+\frac{dx}{e^{-1}}=-2\sqrt{e}dy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{e^{-1}}dx+edx=-2\sqrt{e}dy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e-\sqrt{e^{-1}})dx=-2\sqrt{e}dy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e-\sqrt{e^{-1}}}{-2\sqrt{e}}=\frac{1-e\sqrt{e}}{2e}.$$

y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que la tangente en el punto $(0, -\sqrt{e^{-1}})$ es

$$y=-\sqrt{e^{-1}}+\frac{1-e\sqrt{e}}{2e}x,$$

Del mismo modo, la derivada en el punto $(0, -\sqrt{e^{-1}})$ es

$$(1+\operatorname{tg}^2(0\cdot\sqrt{e^{-1}}))(dx\sqrt{e^{-1}}+0dy)+\operatorname{sen}\left(\frac{0}{\sqrt{e^{-1}}}\right)\frac{dx\sqrt{e^{-1}}-0dy}{e^{-1}}+\frac{dx\sqrt{e^{-1}}-2\cdot 0dy}{\sqrt{e^{-1}}^3}=$$

$$=\frac{2\cdot 0dx+2\cdot\sqrt{e^{-1}}dy}{0^2+\sqrt{e^{-1}}^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{-1}}dx+\frac{\sqrt{e^{-1}}dx}{\sqrt{e^{-1}}^3}=\frac{2\sqrt{e^{-1}}dy}{e^{-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{-1}}dx+\frac{dx}{e^{-1}}=2\sqrt{e}dy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{-1}}dx+edx=2\sqrt{e}dy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e+\sqrt{e^{-1}})dx=2\sqrt{e}dy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e+\sqrt{e^{-1}}}{2\sqrt{e}}=\frac{1+e\sqrt{e}}{2e}.$$

y la ecuación de la tangente en el punto $(0, \sqrt{e^{-1}})$ es

$$y=\sqrt{e^{-1}}+\frac{1+e\sqrt{e}}{2e}x,$$

7. Derivadas Paramétricas

1. Una partícula se mueve a lo largo de una curva $y = \cos(2x+1)$, siendo $x = t^2 + 1$ y t el tiempo. ¿Con qué velocidad está desplazándose respecto a las direcciones vertical y horizontal cuando $t = 2$?

   Resolución

2. Un punto se mueve en el plano siguiendo una trayectoria

$$\begin{cases} x &= \operatorname{sen} t, \\ y &= t^2 - 1. \end{cases}$$

   Se pide:

   a) Hallar la derivada de la función $y(x)$ (es decir, $\frac{dy}{dx}$) para los puntos $t = 0$ y $t = 2$.

   b) Hallar la tangente a la trayectoria en el punto (0,-1).

   Resolución

3. Una partícula se mueve a lo largo de la curva

$$\begin{cases} x &= 2\operatorname{sen} t, \\ y &= \sqrt{3}\cos t, \end{cases}$$

   donde x e y están medidos en metros y el tiempo t en segundos.

   a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el punto (1,3/2).

   b) ¿Con qué velocidad se mueve la partícula respecto a las direcciones vertical y horizontal en dicho punto?

★ 4. Las coordenadas paramétricas de un punto material lanzado bajo un ángulo respecto al horizonte son

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

   donde t es el tiempo contado a partir del instante en que el punto llega a la posición más alta, v_0 es la velocidad horizontal en el instante $t = 0$ y $g = 9{,}8$ m^2/s es la aceleración de la gravedad. ¿En qué instante la magnitud de la velocidad horizontal será igual a la de la velocidad vertical? ¿Cuánto debería valer v_0 para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente? Calcular la ecuación de la recta tangente en dicho instante con el valor de v_0 calculado.

   Resolución

   La velocidad horizontal es la derivada del espacio recorrido horizontalmente (componente x) con respecto al tiempo, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t) = v_0.$$

   Del mismo modo, la velocidad vertical es la derivada del espacio recorrido verticalmente (componente y) en relación al tiempo,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-\frac{1}{2}gt^2) = -gt$$

   Para ver en qué instante ambas magnitudes serán iguales, las igualamos y resolvemos la ecuación:

$$|\frac{dx}{dt}| = |\frac{dy}{dt}| \Leftrightarrow v_0 = gt \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{9{,}8}.$$

Para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente, debe cumplirse que $x(v_0/9{,}8) = 100$, de lo que se deduce:

$$x(v_0/9{,}8) = v_0\frac{v_0}{9{,}8} = \frac{v_0^2}{9{,}8} = 100 \Leftrightarrow v_0^2 = 980 \Leftrightarrow v_0 = +\sqrt{980} = 31{,}3.$$

Por tanto, el instance en cuestión es $t = v_0/9{,}8 = 31{,}3/9{,}8 = 3{,}19$.

Por último, la ecuación de la recta tangente en dicho instante, para el valor de v_0 calculado es:

$$y = y(3{,}19) + \frac{dy}{dx}(3{,}19)(x - x(3{,}19))$$

Ya hemos visto que $x(3{,}19) = 100$, y que en dicho instante la velocidad horizontal y vertical coinciden, de manera que

$$\frac{dy}{dx}(3{,}19) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -1,$$

de modo que sólo nos queda calcular el espacio vertical recorrido en dicho instante, que es

$$y(3{,}19) = -\frac{1}{2}9{,}8 \cdot 3{,}19^2 = -49{,}86.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a la recta tangente:

$$y = -49{,}86 - (x - 100) \Leftrightarrow y = -x + 50{,}14.$$

★ 5. Dada la función paramétrica

$$\left(x = \frac{(t-2)^2}{t^2+1},\, y = \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

Calcular los valores máximos y mínimos de x y de y. ¿En qué instante la tasa de crecimiento de y coincide con la de x?

RESOLUCIÓN

★ 6. Una mosca se mueve en un plano siguiendo la trayectoria

$$\begin{cases} x &= \operatorname{sen} t\,, \\ y &= \cos t + t^2 - 1\,. \end{cases}$$

Se pide

a) Hallar la derivada de la función $y(x)$, es decir dy/dx, en los puntos $t = 0$ y $t = \pi/2$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la trayectoria en el punto $(x, y) = (0, 0)$.

★ 7. Dadas las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}t \\ y(t) = \ln t \cos(t-1) \end{cases}$$

calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de y como función de x en el punto que corresponde a $t = 1$.

★ 8. La cantidad de árboles en un ecosistema, a, depende del tiempo según la expresión:

$$a(t) = 100 \ln(t^2 + 1)$$

Y la cantidad de un determinado parásito de los árboles, p, que también depende del tiempo, viene dada por:

$$p(t) = \sqrt[3]{t^2 + 2}$$

Y se pide:

a) Calcular el número de parásitos cuando el número de árboles sea 500.

b) La derivada del número de parásitos con respecto al número de árboles cuando el número de parásitos sea 3.

★ 9. Supongamos un ecosistema en el que hay una especie "presa", p, y otra "depredador", d, y que la cantidad de individuos de una y otra dependen del tiempo, en años, según las siguientes expresiones ($t > 0$):

$$p(t) = \frac{\ln(t^2 + 1)}{t + 1}$$

$$d(t) = te^{-2t}$$

a) Calcular el número de presas y depredadores para tiempos muy grandes.

b) Calcular la derivada del número de presas con respecto a los depredadores cuando $d = 2/e^4$.

★ 10. Un punto se mueve en el plano siguiendo una trayectoria

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = t^2 - 2t + 3. \end{cases}$$

a) Hallar $\frac{\partial y}{\partial x}$ en $t = 0$.

b) Hallar la tangente a la trayectoria en el punto $(0, 3)$.

Resolución

Se trata de la ecuación de una trayectoria en coordenadas paramétricas.

a) Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t},$$

en consecuencia,

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t) = \frac{\partial y/\partial t}{\partial x/\partial t}(t) = \frac{2t - 2}{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$

En el punto $t = 0$ tendremos

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0) = \frac{-2}{1 + \operatorname{tg}^2 0} = -2.$$

b) La ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x(t_0), y(t_0))$ correspondiente al instante t_0, viene dada por la expresión

$$y - y(t_0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t_0)(x - x(t_0)).$$

Como el punto $(0, 3)$ se alcanza precisamente en el instante $t = 0$ tenemos que la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en dicho instante es:

$$y - y(0) = \frac{\partial y}{\partial x}(0)(x - x(0)),$$

es decir,

$$y - 3 = -2(x - 0),$$

y simplificando obtenemos:

$$y = 3 - 2x.$$

8. Teorema de Rolle y del Valor Medio

1. Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a las funciones siguientes en los intervalos indicados:

   a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$ en [-1,1].

   b) $g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$ en [-1,1].

   c) $h(x) = x^3 - x$ en [0,1] o [-1,0].

   d) $k(x) = 1 - e^{\operatorname{sen} x}$ en $[0, \pi]$.

   En caso afirmativo, encontrar un punto en el que la derivada se anule.

2. Demostrar que la ecuación $e^x = 1 + x$ tiene exactamente una solución real.

3. Demostrar que para cualquier valor de $k \in \mathbb{R}$ la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$ no puede tener dos raíces en el intervalo $(0, 1)$.

4. En el movimiento uniformemente acelerado de ecuación $x = 8t^2 - 2t + 5$ se puede asegurar, durante el intervalo de tiempo [0,1], que la velocidad media coincide con la velocidad instantánea en un cierto momento t_0. Calcular t_0. ¿Qué propiedad nos asegura la certeza de la proposición anterior?

5. A las cuatro de la tarde un coche pasa, a una velocidad de 70 km/h por el punto kilométrico 400 de la autopista $A4$. Diez minutos después pasa, circulando a una velocidad de 80 km/h, por el punto kilométrico 425 de la citada autopista. Le para la policía y le pone una multa por exceso de velocidad. ¿Tenía razón la policía?

   Nota: Velocidad máxima permitida 120 km/h.

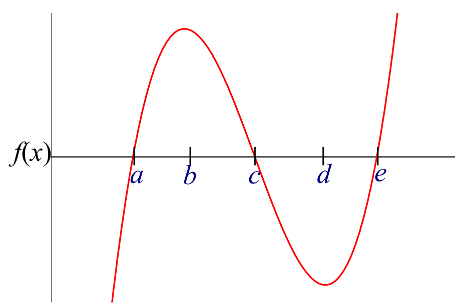
6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, determinar los puntos que verifican el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[a, b]$ para las siguiente funciones:

   a) $f(x) = x^3$.

   b) $g(x) = e^x$.

9. Crecimiento, Concavidad y Extremos Relativos

★ 1. La figura adjunta es la de la derivada de una función. Estudiar el comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y convexidad).



RESOLUCIÓN

2. Hallar a, b y c en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $x = 3$, pase por el punto $(1, 0)$ y alcance un máximo en $x = 1$.

RESOLUCIÓN

3. Se ha diseñado un envoltorio cilíndrico para unas cápsulas. Si el contenido de las cápsulas debe ser de 0,15 ml, hallar las dimensiones del cilindro para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

RESOLUCIÓN

★ 4. La variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

se conoce como normal bidimensional con X e Y independientes, de parámetros $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ y $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$. Calcular los puntos de inflexión de la curva formada por la intersección de la superficie de f con el plano $y = x$.

★ 5. Mediante simulación por ordenador se ha podido cuantificar la cantidad de agua almacenada en un acuífero en función del tiempo, $m(t)$, en millones de metros cúbicos, y el tiempo t en años transcurridos desde el instante en el que se ha hecho la simulación, teniendo en cuenta que la ecuación sólo tiene sentido para los t mayores que 0:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

a) En el límite, cuando t tiende a infinito, qué cantidad de agua almacenada habrá en el acuífero?

b) Mediante derivadas, calcular el valor del tiempo en el que el agua almacenada ser máxima y cuál es su cantidad de agua correspondiente en millones de metros cúbicos.

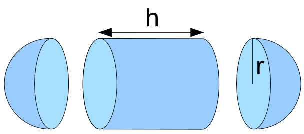
RESOLUCIÓN

★ 6. Se está estudiando fabricar unas cápsulas de cuerpo cilíndrico terminadas en sus extremos por dos semiesferas. El volumen de la cápsula debe ser 0,8 cm^3 y se quiere que la superficie sea mínima. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del radio y de la longitud de la parte cilíndrica? Comentar el resultado obtenido.

Nota:
Volumen del cilindro $V = \pi r^2 h$
Superficie lateral del cilindro $S = 2\pi r h$
Volumen de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Superficie de la esfera $S = 4\pi r^2$

Resolución

La capsula está formada por un cilindro de radio r y altura h mas una esfera (2 semiesferas) de radio r,



así que su volumen es

$$V(r,h) = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3,$$

y su superficie

$$S(r,h) = 2\pi r h + 4\pi r^2.$$

Como el volumen debe ser 0,8 cm^3 tenemos que

$$V(r,h) = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 0{,}8 \Leftrightarrow h = \frac{0{,}8 - 4/3\pi r^3}{\pi r^2},$$

y sustituyendo en la fórmula de superficie tenemos

$$S(r) = 2\pi r \frac{0{,}8 - 4/3\pi r^3}{\pi r^2} + 4\pi r^2 = \frac{1{,}6 - 8/3\pi r^2}{r} + 4\pi r^2 = \frac{1{,}6}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2 = \frac{1{,}6}{r^2} + \frac{4}{3}\pi r^2$$

Como queremos que la superficie de la cápsula sea mínima, tenemos que buscar el mínimo de esta función. Para ello, calculamos primero los puntos críticos que anulan su derivada:

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{1{,}6}{r^2} + \frac{4}{3}\pi 2r = 0 \Leftrightarrow \frac{1{,}6}{r^2} = \frac{8}{3}\pi r \Leftrightarrow \frac{8}{3}\pi r^3 = 1{,}6 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1{,}6}{8/3\pi} = 0{,}1910 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{0{,}1910} = 0{,}5759$$

y por tanto la altura será

$$h = \frac{0{,}8 - 4/3\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{0{,}8 - 4/3\pi 0{,}5759^3}{\pi 0{,}5759^2} = 0.$$

Esto quiere decir, que realmente no habría cilindro, y por tanto para que la supercie sea mínima la cápsula debería tener forma de esfera.

Sólo falta comprobar que el punto anterior es realmente un punto de mínimo. Para ello podemos utilizar la segunda derivada

$$\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1{,}6}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r\right) = \frac{1{,}6 \cdot 2r}{r^4} + \frac{8}{3}\pi = \frac{3{,}2}{r^3} + \frac{8}{3}\pi.$$

y sustituyendo en el punto anterior tenemos

$$\frac{d^2S}{dr^2}(0{,}5759) = \frac{3{,}2}{0{,}5759^3} + \frac{8}{3}\pi = 25{,}13 > 0,$$

que al tener signo positivo indica que efectivamente se trata de un mínimo.

10. Polinomios de Taylor

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se pide:

   a) El polinomio de Taylor de cuarto grado de f en $x = 0$.

   b) Calcular un valor aproximado de $\sqrt{1{,}02}$ utilizando un polinomio de segundo grado y otro utilizando un polinomio de cuarto grado. Dar una cota del error cometido en cada caso.

2. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se pide:

   a) Obtener el polinomio de Taylor de tercer grado de f en el punto $x = \pi/6$ y usarlo para aproximar $\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}$ dando una cota del error cometido.

   b) Dar una aproximación de $\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}$ usando un el polinomio de Taylor de quinto grado en el punto $x = 0$, acotando el error cometido.

Resolución

3. Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en un entorno del punto $x = 1$.

Resolución

4. Calcular el polinomio de McLaurin de tercer grado para la función $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

Resolución

5. Calcular $\cos 1$ con un error menor de 10^{-7} usando aproximaciones de Taylor.

★ 6. Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \cos x$, se pide:

   a) Calcular los polinomios de McLaurin de segundo grado para f y g.

   b) Utilizar los polinomios anteriores para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}.$$

Resolución

★ 7. La función $C(t)$ da la concentración (en mg/dl) de un fármaco en el torrente sanguíneo en función del tiempo (en horas):

$$C(t) = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$$

   a) Calcular el polinomio de Mc Laurin de orden 3.

   b) Utilizando el polinomio anterior, calcular aproximadamente la concentración del fármaco transcurridos 15 minutos.

Resolución

   a) La fórmula del polinomio de Mc Laurin de orden 3 para la función $C(t)$ es:

$$P^3_{C,0}(t) = C(0) + \frac{dC}{dt}(0)t + \frac{d^2C}{dt^2}(0)\frac{t^2}{2!} + \frac{d^3C}{dt^3}(0)\frac{t^3}{3!} \tag{6}$$

Necesitamos calcular las tres primeras derivadas:

$$
\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{2e^{-2t}}{(1+e^{-2t})^2},\\
\frac{d^2C}{dt^2} &= \frac{\frac{d}{dt}(2e^{-2t})(1+e^{-2t})^2 - 2e^{-2t}\frac{d}{dt}(1+e^{-2t})^2}{(1+e^{-2t})^4} =\\
&= \frac{-4e^{-2t}(1+e^{-2t})^2 - 2e^{-2t}2(1+e^{-2t})(-2e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^4} = \frac{-4e^{-2t}+4e^{-4t}}{(1+e^{-2t})^3},\\
\frac{d^3C}{dt^3} &= \frac{\frac{d}{dt}(-4e^{-2t}1+4e^{-4t})(1+e^{-2t})^3 - (-4e^{-2t}+4e^{-4t})\frac{d}{dt}(1+e^{-2t})^3}{(1+e^{-2t})^6} =\\
&= \frac{(8e^{-2t}-16e^{-4t})(1+e^{-2t})^3 - (-4e^{-2t}+4e^{-4t})3(1+e^{-2t})^2(-2e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^6} =\\
&= \frac{(8e^{-2t}-16e^{-4t})(1+e^{-2t}) - (-4e^{-2t}+4e^{-4t})(-6e^{-2t})}{(1+e^{-2t})^4} =\\
&= \frac{(8e^{-2t}-8e^{-4t}-16e^{-6t}) - (24e^{-4t}-24e^{-6t})}{(1+e^{-2t})^4} =\\
&= \frac{8e^{-2t}-32e^{-4t}+8e^{-6t}}{(1+e^{-2t})^4}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo para $t=0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
C(0) &= \frac{1}{1+e^{-2\cdot 0}} = \frac{1}{2},\\
\frac{dC}{dt}(0) &= \frac{2e^{-2\cdot 0}}{(1+e^{-2\cdot 0})^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2},\\
\frac{d^2C}{dt^2}(0) &= \frac{-4e^{-2\cdot 0}+4e^{-4\cdot 0}}{(1+e^{-2\cdot 0})^3} = \frac{-4+4}{2^3} = 0,\\
\frac{d^3C}{dt^3}(0) &= \frac{(8e^{-2\cdot 0}-32e^{-4\cdot 0}+8e^{-6\cdot 0})}{(1+e^{-2\cdot 0})^4} = \frac{8-32+8}{16} = -1.
\end{aligned}
$$

Y por último, sustituyendo en la ecuación 6 llegamos al polinomio

$$P^3_{C,0}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + 0\frac{t^2}{2!} - 1\frac{t^3}{3!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3.$$

b) La concentración del fármaco transcurridos 15 minutos (0,25 horas) es aproximadamente

$$C(0{,}25) \approx P^3_{C,0}(0{,}25) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0{,}25 - \frac{1}{6}0{,}25^3 = 0{,}6223958333 \text{ mg/dl}.$$

★ 8. Obtener el desarrollo en serie de Taylor hasta orden tres en el punto 1 de la función

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}.$$

Utilizar el polinomio obtenido calcular una aproximación de $\ln\sqrt{1{,}22}$ y acotar el error cometido.

Resolución

★ 9. Dada la función $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x/2)$ se pide:

a) Calcular el polinomio de Mc Laurin de orden 3.

b) Utilizar el polinomio anterior para aproximar $\operatorname{arc\,tg} 0{,}05$.

c) Dar una cota del error cometido.

Resolución

★ 10. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ con $x \neq 1$, se pide:

a) Calcular el polinomio de Mc Laurin de f de grado 4.

b) Calcular el polinomio de Mc Laurin de f de grado n.

c) Calcular el resto de Lagrange para el polinomio de grado n en el punto $x = 0{,}03$.

d) ¿Hasta qué grado tendríamos que llegar para conseguir una aproximación de $f(0{,}03)$ con un error menor de 10^{-10}?

Resolución

★ 11. Dada la función $f(x) = \operatorname{tg}(x/2)$, se pide:

a) Aproximar $\operatorname{tg}(0{,}1)$ mediante un polinomio de Taylor de grado 3 para la función f.

b) Dar una cota del error cometido.

Resolución

a) Sabemos que el desarrollo de Taylor de grado 3 de una función f, centrado en a y en función de x viene dado por:

$$T_3(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

y que el valor de la función en un cierto x_0, próximo a a, puede calcularse de forma aproximada mediante:

$$f(x_0) \approx T_3(f,a)(x_0)$$

En nuestro caso, la función $f(x) = \operatorname{tg} x/2$ y debemos aproximar el valor de $\operatorname{tg} 0{,}1$. Por lo tanto:

$$\operatorname{tg} 0{,}1 = \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow x_0 = 0{,}2$$

Y como valor de a (punto en el que centramos el polinomio de Taylor) podemos tomar 0, ya que está lo suficientemente próximo a 0,2 como para que la aproximación sea buena, además de simplificar notablemente los cálculos. Es decir, vamos a calcular el polinomio de Mc Laurin.

Entre las múltiples expresiones para la derivada de la tangente (como cociente de senos y cosenos, con la secante y también con la propia tangente), posiblemente la más cómoda para hacer derivadas de orden superior es:

$$f(x) = \operatorname{tg}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2(u(x))\right) u'(x)$$

Aplicado a nuestra función:

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

Procediendo de forma similar con las derivadas de segundo y tercer orden, obtenemos:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}$$

Por lo tanto:

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 1/2;\ f''(0) = 0;\ f'''(0) = 1/4$$

Con ello, el polinomio de Mac Laurin buscado es:

$$T_3(f, 0)(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3$$

Y la aproximación buscada vale:

$$\operatorname{tg} 0{,}1 \approx T_3(f, 0)(0{,}2) = \frac{1}{2}\, 0{,}2 + \frac{1}{24}\, 0{,}2^3 = 0{,}1003333$$

Para comprobar que la aproximación obtenida es correcta, mediante calculadora, utilizando como unidad angular el radián, obtenemos: $\operatorname{tg} 0{,}1 = 0{,}1003346$

b) Sabemos que el error cometido con la anterior aproximación es igual al valor absoluto del resto, y que este último viene dado por la fórmula:

$$R_n(f, a)(x) = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde t pertenece al intervalo (a, x) si $x > a$, o a (x, a) si $a > x$. En nuestro caso:

$$R_3(f, 0)(0{,}2) = \frac{f^{(4}(t)}{4!}(0{,}2)^4$$

Si tenemos en cuenta que la derivada cuarta vale:

$$f^{(4}(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2} \Rightarrow f^{(4}(t) = \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \frac{5}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{t}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^5 \frac{t}{2}$$

obtenemos:

$$R_3(f, 0)(0{,}2) = \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + \frac{5}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{t}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^5 \frac{t}{2}}{24}(0{,}2)^4; \quad t \in (0,\ 0{,}2)$$

Por lo tanto el error cometido vale:

$$\left| \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + \frac{5}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{t}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^5 \frac{t}{2}}{4!}(0{,}2)^4 \right|; \quad t \in (0,\ 0{,}2)$$

Y nos piden que acotemos el error, es decir, que encontremos una cierta cantidad tal que se demuestre que el error es menor o igual que esa cantidad. Para ello, nos damos cuenta de que la función tangente, e igualmente la tangente al cubo o a la quinta potencia, son funciones crecientes en el intervalo (0, 0,2) y, por lo tanto, el error alcanzará su máximo valor posible cuando t sea un valor muy próximo a 0,2. No obstante obtenemos un error en cuya expresión aparece de nuevo la tangente de 0,1, y no tiene ningún sentido utilizar la calculadora para calcular la tangente de 0,1 presente en el resto, cuando precisamente es la tangente de 0,1 lo que pretendemos calcular mediante el polinomio de Taylor. No obstante, podemos utilizar otras cotas menos precisas pero que supongan cálculos fácilmente realizables sin necesidad de calculadora, y evitando a la vez el que la tangente de 0,1 aparezca en el error. Por ejemplo, la más sencilla se obtiene considerando que en el intervalo (0, 0,2) $\operatorname{tg}(t/2) \leq 1$, e igualmente la tangente cubo o a la quinta potencia.

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\text{Error} \leq \frac{(0{,}2)^4}{4!} \left| 1 + \frac{5}{2} + \frac{3}{4} \right| = 0{,}00033$$

Una cota más precisa se obtiene tomando, por ejemplo, $t = \pi/3$, tal que la tangente de $\pi/6$ sí que tiene un valor fácilmente calculable (sin calculadora):

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Con ello, la cota para el error cometido vale:

$$\text{Error} \le \frac{(0{,}2)^4}{4!}\left|1\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5\right| = 0{,}000077$$

★ 12. Dada la función $f(x) = 2\sqrt[3]{1+x}$, se pide:

a) Hallar el polinomio de Mc Laurin de tercer grado de la función.

b) Utilizar el polinomio obtenido en el apartado anterior para calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{9}$.

c) Dar una cota del error cometido.

Resolución

a) La fórmula del polinomio de Mc Laurin de orden 3 para la función f es

$$P_{3,f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3, \tag{7}$$

de modo que tenemos que calcular hasta la tercera derivada de f en el 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\sqrt[3]{1+x} = 2(1+x)^{1/3}, & f(0) &= 2(1+0)^{1/3} = 2,\\
f'(x) &= 2\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} = \frac{2}{3}(1+x)^{-2/3}, & f'(0) &= \frac{2}{3}(1+0)^{-2/3} = \frac{2}{3},\\
f''(x) &= \frac{2}{3}\frac{-2}{3}(1+x)^{-5/3} = \frac{-4}{9}(1+x)^{-5/3}, & f''(0) &= \frac{-4}{9}(1+0)^{-5/3} = \frac{-4}{9},\\
f'''(x) &= \frac{-4}{9}\frac{-5}{3}(1+x)^{-8/3} = \frac{20}{27}(1+x)^{-8/3}, & f'''(0) &= \frac{20}{27}(1+0)^{-8/3} = \frac{20}{27},
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 8, obtenemos el polinomio que nos piden

$$P(3,f,0)(x) = 2 + \frac{2}{3}x + \frac{-4/9}{2}x^2 + \frac{20/27}{6}x^3 = 2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{10}{81}x^3.$$

b) Primero averiguamos en qué punto la función vale $\sqrt[3]{9}$.

$$f(x) = 2\sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow (2\sqrt[3]{1+x})^3 = (\sqrt[3]{9})^3 \Leftrightarrow 2^3(1+x) = 9 \Leftrightarrow 8 + 8x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Calculando el polinomio anterior en este punto tenemos

$$\sqrt[3]{9} \approx P(3,f,0)(0{,}125) = 2 + \frac{2}{3}0{,}125 - \frac{2}{9}0{,}125^2 + \frac{10}{81}0{,}125^3 = 2{,}080102258.$$

c) El error cometido en la aproximación anterior nos lo da el resto de Taylor, que en la forma Lagrange es

$$R_{3,f,0}(x) = \frac{f^{iv}(t)}{4!}x^4 = \frac{\frac{160}{81}(1+t)^{-11/3}}{24}x^4 = \frac{20}{243}\frac{1}{(1+t)^{11/3}}x^4 \quad t \in (0,x),$$

En el punto $x = 0{,}125$ donde hemos calculado la aproximación, vale

$$R_{3,f,0}(0{,}125) = \frac{20}{243}\frac{1}{(1+t)^{11/3}}0{,}125^4 = 2{,}00938 \cdot 10^{-5}\frac{1}{(1+t)^{11/3}} \quad t \in (0\,,\,0{,}125).$$

Para acotar el resto, basta con calcular el máximo de esta función en el intervalo $(0\,,\,0{,}125)$. Puesto que la función $1/(1+t)^{11/3}$ es decreciente en dicho intervalo, el máximo se alcanza en el extremo inferior del intervalo, es decir, $t = 0$. Así pues, tenemos la siguiente cota

$$|R_{3,f,0}(0{,}125)| = |2{,}00938 \cdot 10^{-5}\frac{1}{(1+t)^{11/3}}| \le |2{,}00938 \cdot 10^{-5}\frac{1}{(1+0)^{11/3}}| = 2{,}00938 \cdot 10^{-5}.$$

★ 13. Dada la función: $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3x+1}}$

a) Obtener el polinomio de Mac Laurin de tercer grado.

b) Calcular el valor aproximado de $\dfrac{2}{1,3}$ empleando el polinomio anterior.

Resolución

a) La fórmula del polinomio de Mc Laurin de orden 3 para la función f es

$$P_{3,f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3, \tag{8}$$

de modo que tenemos que calcular hasta la tercera derivada de f en el 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\sqrt{3x+1}} = 2(3x+1)^{-1/2}, & f(0) &= 2(3\cdot 0+1)^{-1/2} = 2,\\
f'(x) &= 2\frac{-1}{2}(3x+1)^{-3/2}3 = -3(3x+1)^{-3/2}, & f'(0) &= -3(3\cdot 0+1)^{-3/2} = -3,\\
f''(x) &= -3\frac{-3}{2}(3x+1)^{-5/2}3 = \frac{27}{2}(3x+1)^{-5/2}, & f''(0) &= \frac{27}{2}(3\cdot 0+1)^{-5/2} = \frac{27}{2},\\
f'''(x) &= \frac{27}{2}\frac{-5}{2}(3x+1)^{-7/2}3 = \frac{-405}{4}(3x+1)^{-7/2}, & f'''(0) &= \frac{-405}{4}(3\cdot 0+1)^{-7/2} = \frac{-405}{4},
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 8, obtenemos el polinomio que nos piden

$$P(3,f,0)(x) = 2 - 3x + \frac{27/4}{2!}x^2 - \frac{405/24}{3!}x^3 = 2 - 3x + \frac{27}{4}x^2 - \frac{135}{8}x^3.$$

b) Primero averiguamos en qué punto la función vale 2/1,3.

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{1{,}3} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1{,}3 \Leftrightarrow 3x+1 = 1{,}3^2 = 1{,}69 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}69}{3} = 0{,}23.$$

Calculando el polinomio anterior en este punto tenemos

$$\frac{2}{1{,}3} \approx P(3,f,0)(0{,}23) = 2 - 3\cdot 0{,}23 + \frac{27}{4}0{,}23^2 - \frac{135}{8}0{,}23^3 = 1{,}461756910.$$

★ 14. Sea la función

$$f(x) = 2\sqrt[4]{1+x}$$

a) Calcular su desarrollo de Mc Laurin de orden 3.

b) Utilizar el desarrollo anterior para calcular de forma aproximada: $\sqrt[4]{16,16}$.

c) Acotar el error cometido con la aproximación anterior.

★ 15. Sea la función $f(x) = x^x$.

a) Calcular su polinomio de Taylor de segundo orden, centrado en $x = 1$.

b) Aproximar con dicho polinomio el valor de: $1{,}1^{1{,}1}$.

★ 16. Para la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{1+2x}$$

Calcular:

a) Su polinomio de Taylor de tercer orden centrado en 0.

b) El valor aproximado de $\sqrt[3]{1{,}2}$ mediante el polinomio de Taylor calculado anteriormente.

c) Acotar el error cometido mediante dicha aproximación.

★ 17. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$ y los desarrollos de McLarin de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, ¿cuál será el desarrollo de Mc Laurin de orden 3 para la función $\operatorname{sen}(2x)$?

Calcular directamente el desarrollo de Mc Laurin de orden 3 de la función $\operatorname{sen}(2x)$ para comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

★ 18. En los libros de Cálculo se afirma que la función binómica, $(1+x)^p$, puede desarrollarse desarrollada mediante una serie de sumandos de la forma:

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}x^k$$

para todo x si p es un entero no negativo.

a) Demostrar dicha fórmula hasta el término en x^4 mediante el desarrollo de Mc Laurin de orden 4.

b) Utilizar el resultado anterior para calcular de forma aproximada el valor de: $0{,}9^6$.

★ 19. La concentración de un fármaco en sangre, en mg/dl, en función del tiempo, en horas, viene dada por la expresión:

$$C(t) = \ln\left(\frac{t^2+2t+1}{2t+1}\right)$$

Se pide:

a) Calcular el polinomio de Mc Laurin de orden 3 de C.

b) Utilizar el polinomio anterior para dar el valor aproximado de la concentración al cabo de 15 minutos.

c) Calcular el polinomio de Taylor, centrado en 0, de orden 2 para la función:

$$f(t) = 2\ln(t+1) - \ln(2t+1)$$

Resolución

a) La ecuación del polinomio de Mc Laurin de orden 3 de C es

$$P^3_{C,0}(t) = C(0) + C'(0)t + \frac{C''(0)}{2}t^2 + \frac{C'''(0)}{3!}t^3. \tag{9}$$

Necesitamos calcular las 3 primeras derivadas, pero antes conviene simplificar la función

$$\begin{aligned}
C(t) &= \ln\left(\frac{t^2+2t+1}{2t+2}\right) = \ln(t^2+2t+1) - \ln(2t+1) = \\
&= \ln((t+1)^2) - \ln(2t+1) = 2\ln(t+1) - \ln(2t+1),\\
C'(t) &= \frac{2}{t+1} - \frac{2}{2t+1},\\
C''(t) &= \frac{-2}{(t+1)^2} + \frac{4}{(2t+1)^2},\\
C'''(t) &= \frac{4}{(t+1)^3} - \frac{16}{(2t+1)^3}
\end{aligned}$$

Las derivadas en 0 valen

$$\begin{aligned}
C(0) &= 2\ln(1) - \ln(1) = 0,\\
C'(0) &= \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = 0,\\
C''(0) &= \frac{-2}{1^2} + \frac{4}{1^2} = 2,\\
C'''(t) &= \frac{4}{1^3} - \frac{16}{1^3} = -12.
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior llegamos al polinomio

$$P^3_{C,0}(t) = \frac{2}{2}t^2 - \frac{12}{3!}t^3 = t^2 - 2t^3.$$

b) El valor de la función a los 15 minutos es $C(0{,}25)$ ya que las unidades del tiempo se consideran en horas. El valor aproximado de que da el polinomio en ese instante es

$$P^3_{C,0}(0{,}25) = 0{,}25^2 - 2 \cdot 0{,}25^3 = 0{,}03125.$$

c) Según hemos podido comprobar al simplificar $C(t)$ resulta que $C(t)$ y $f(t)$ son la misma función, así que el polinomio de Mc Laurin de orden 2 es el mismo que el calculado en el primer apartado pero considerando sólo hasta el término de grado 2, es decir,

$$P^2_{f,0}(t) = t^2.$$

---

20. Dada la función $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$:

a) Utilizar el polinomio de Mc Laurin de grado 3 para aproximar $\frac{\operatorname{sen} 1 + \cos 1}{2}$.

b) Utilizar el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $x_0 = \pi/2$ para aproximar $\frac{\operatorname{sen} 1 + \cos 1}{2}$.

c) Dar la cota de error cometida en ambas aproximaciones y decir cual es mejor.

Resolución

a) El polinomio de Mc Laurin de grado 3 para $f(x)$ viene dado por la fórmula siguiente:

$$P^3_0(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Calculamos las tres primeras derivadas de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2},$$
$$f''(x) = \frac{-\ senx - \cos x}{2},$$
$$f'''(x) = \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{2}.$$

Particularizando en $x = 0$ tenemos:

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen} 0 + \cos 0}{2} = \frac{1}{2},$$
$$f'(0) = \frac{\cos 0 - \operatorname{sen} 0}{2} = \frac{1}{2},$$
$$f''(0) = \frac{-\operatorname{sen} 0 - \cos 0}{2} = -\frac{1}{2},$$
$$f'''(0) = \frac{-\cos 0 + \operatorname{sen} 0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto, el polinomio de Mc Laurin que nos interesa es:

$$P^3_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3.$$

Para aproximar $f(1) = \frac{\operatorname{sen} 1 + \cos 1}{2}$, tenemos que tomar $x = 1$, y en ese punto, la aproximación que da el polinomio es:

$$P^3_0(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

b) El polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $x_0 = \pi/2$ para $f(x)$ viene dado por la fórmula siguiente:

$$P^2_{\pi/2}(x) = f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2) + \frac{f''(\pi/2)}{2!}(x - \pi/2)^2.$$

Particularizando en $x = \pi/2$ hasta la segunda derivada tenemos:

$$f(\pi/2) = \frac{\operatorname{sen}\pi/2 + \cos\pi/2}{2} = \frac{1}{2}$$
$$f'(\pi/2) = \frac{\cos\pi/2 - \operatorname{sen}\pi/2}{2} = -\frac{1}{2},$$
$$f''(\pi/2) = \frac{-\operatorname{sen}\pi/2 - \cos\pi/2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor que nos interesa es:

$$P^2_{\pi/2}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - \pi/2) - \frac{1}{4}(x - \pi/2)^2,$$

y, de nuevo, tomando $x = 1$, la aproximación que da este polinomio para $f(1) = \frac{\operatorname{sen}1 + \cos 1}{2}$ es:

$$P^2_{\pi/2}(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \pi/2) - \frac{1}{4}(1 - \pi/2)^2 = 0{,}70395.$$

c) El error cometido en las aproximaciones se puede calcular mediante el resto de Lagrange. Para el polinomio de Mc Laurin anterior, dicho resto se puede calcular con la fórmula siguiente:

$$R^3_0(x) = \frac{f^{iv}(c)}{4!}x^4 \qquad \text{con } c \in (0, x).$$

Como la cuarta derivada de $f(x)$ coincide con $f(x)$, entonces particularizando el resto en $x = 1$, tenemos:

$$R^3_0(1) = \frac{\operatorname{sen}c + \cos c}{2 \cdot 4!}1^4 = \frac{\operatorname{sen}c + \cos c}{48} \qquad \text{con } c \in (0, 1),$$

y puesto que tanto el seno como el coseno no pueden tomar valores mayores que 1, tenemos que $|\operatorname{sen}c + \cos c| \leq 2$, y obtenemos la siguiente cota de error para la primera aproximación:

$$|R^3_0(1)| \leq |\frac{2}{48}| = 0{,}04166.$$

Para el polinomio de Taylor, el resto de Lagrange tiene la forma siguiente:

$$R^2_{\pi/2}(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x - \pi/2)^3 \qquad \text{con } c \in (x, \pi/2).$$

Como antes, particularizando en $x = 1$ tenemos:

$$R^2_{\pi/2}(1) = \frac{-\cos c + \operatorname{sen}c}{2 \cdot 3!}(1 - \pi/2)^3 \qquad \text{con } c \in (1, \pi/2),$$

y como $|\operatorname{sen}c + \cos c| \leq 2$, obtenemos la siguiente cota de error para la segunda aproximación:

$$|R^2_{\pi/2}(1)| \leq |\frac{2}{2 \cdot 3!}(1 - \pi/2)^3| = 0{,}03099.$$

Podemos concluir que la segunda aproximación es mejor que la primera.

★ 21. Calcular el polinomio de Mc Laurin de orden 4 de la función $\cos\frac{x}{3}$, y utilizarlo para aproximar $\cos\frac{\pi}{4}$, dando una cota del error cometido.

Resolución

Llamando $f(x) = \cos\dfrac{x}{3}$, el polinomio que se nos pide viene dado por la fórmula siguiente:

$$P_0^4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{\text{iv}}(0)}{4!}x^4.$$

Calculamos primero hasta la derivada cuarta de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\frac{x}{3} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= -\frac{1}{3}\,\text{sen}\,\frac{x}{3} & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= -\frac{1}{9}\cos\frac{x}{3} & f''(0) &= -\frac{1}{9}\\
f'''(x) &= \frac{1}{27}\,\text{sen}\,\frac{x}{3} & f'''(0) &= 0\\
f^{iv}(x) &= \frac{1}{81}\cos\frac{x}{3} & f^{iv}(0) &= \frac{1}{81}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en la fórmula anterior obtenemos el polinomio que buscamos:

$$P_0^4(x) = 1 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{1944}x^4.$$

Para aproximar ahora $\cos\frac{\pi}{4}$ utilizando este polinomio, tenemos que calcular el valor del polinomio para un x tal que $f(x) = \cos\frac{\pi}{4}$, es decir, un x tal que $\cos\frac{x}{3} = \cos\frac{\pi}{4}$, de lo que se deduce $x = \frac{3\pi}{4}$. La aproximación que da el polinomio en este punto es

$$P_0^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{18}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{1944}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^4 = 0{,}7074292$$

Finalmente, el error cometido en esta aproximación lo da el resto de Langrange que se obtiene con la fórmula

$$R_0^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{f^v(t)}{5!}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^5 \quad \text{con } t \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right).$$

Calculando la quinta derivada de $f(t)$,

$$f^v(t) = -\frac{1}{243}\,\text{sen}\,\frac{t}{3},$$

y sustitutyendo en la fórmula anterior, obtenemos el error cometido:

$$R_0^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\text{sen}(t/3)}{29160}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^5 \quad \text{con } t \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right).$$

Este error puede acotarse fácilmente aprovechando que $|\text{sen}(t/3)| \leq 1$, con lo que llegamos a la cota

$$\left|R_0^4\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right| \leq \left|-\frac{1}{29160}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^5\right| = 0{,}00249.$$

★ 22. Calcular $0{,}98^{3/5}$ tomando hasta el término correspondiente a $n = 3$ del desarrollo de Mac Laurin de la función $(1+x)^{3/5}$.

Resolución

Llamando $f(x) = (1+x)^{3/5}$, el polinomio que se nos pide viene dado por la fórmula siguiente:

$$P_0^3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Calculamos primero hasta la derivada tercera de $f(x)$ en el 0:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{3/5} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= \frac{3}{5}(1+x)^{-2/5} & f'(0) &= \frac{3}{5}\\
f''(x) &= -\frac{6}{25}(1+x)^{-7/5} & f''(0) &= -\frac{6}{25}\\
f'''(x) &= \frac{42}{125}(1+x)^{-12/5} & f'''(0) &= \frac{42}{125}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en la fórmula anterior obtenemos el polinomio que buscamos:

$$P_0^3(x) = 1 + \frac{3}{5}x - \frac{3}{25}x^2 + \frac{7}{125}x^3.$$

Para aproximar $0{,}98^{3/5}$ usando este polinomio, tenemos que calcular el valor del polinomio para un x tal que $f(x) = 0{,}98^{3/5}$, es decir, un x tal que $0{,}98^{3/5} = (1+x)^{3/5}$, de lo que se deduce que $x = -0{,}02$. La aproximación que da el polinomio en este punto es

$$P_0^3(-0{,}02) = 1 + \frac{3}{5}(-0{,}02) - \frac{3}{25}(-0{,}02)^2 + \frac{7}{125}(-0{,}02)^3 = 0{,}9879515521.$$

★ 23. Obtener polinomio de Mc Laurin de grado 3 de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$, y utilizar los polinomios anteriores para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Resolución

La formula general para calcular el polinomio de Mc Laurin de grado 3 de una función $f(x)$ es:

$$P_0^3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Consideremos, en primer lugar, la función $\operatorname{sen} x$, y calculemos sus tres primeras derivadas en 0:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0,\\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= \cos 0 = 1,\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0,\\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -\cos 0 = -1.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de arriba, llegamos al primer polinomio que buscamos:

$$P_0^3(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

Consideremos ahora la función $\operatorname{tg} x$ y calculemos sus tres primeras derivadas en 0:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \operatorname{tg} x & g(0) &= \operatorname{tg} 0 = 0\\
g'(x) &= 1 + \operatorname{tg}^2 x & g'(0) &= 1 + \operatorname{tg}^2 0 = 1\\
g''(x) &= 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x & g''(0) &= 2\operatorname{tg} 0 + 2\operatorname{tg}^3 0 = 0\\
g'''(x) &= 2 + 8\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg}^4 x & g'''(0) &= 2 + 8\operatorname{tg}^2 0 + 6\operatorname{tg}^4 0 = 2
\end{aligned}$$

Sustituyendo de nuevo en la fórmula de arriba, pero utilizando esta vez $g(x)$ en lugar de $f(x)$, llegamos al otro polinomio que buscamos:

$$Q_0^3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}$$

Finalmente, para calular ahora el límite que nos piden, podemos sustituir $\operatorname{sen} x$ por $P_0^3(x)$ y $\operatorname{tg} x$ por $Q_0^3(x)$, teniendo en cuenta dichos polinomios se comportan de igual forma que las correspondientes funciones en un entorno del 0. Así pues, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{Q_0^3(x) - x}{x - P_0^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x}{x - x + \frac{x^3}{6}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{3} = 2.$$

11. Derivadas Parciales

1. Calcular las siguientes derivadas parciales:

   a) $\dfrac{\partial}{\partial x} \ln \dfrac{x}{y}$.

   b) $\dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{nRT}{v}$.

   c) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(e^{x+y} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y} \right)$.

   d) $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(e^{x+y} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y} \right)$.

Resolución

2. Calcular el vector gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

   a) $e^{x^2+y^2+z^2}$

   b) $\operatorname{sen}((x^2 - y^2)z)$

Resolución

★ 3. Calcular el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = \log \frac{\sqrt{x}}{yz} + \operatorname{arc\,sen}(xz).$$

Resolución

4. Una nave espacial está en problemas cerca del sol. Se encuentra en la posición $(1, 1, 1)$ y la temperatura de la nave cuando está en la posición (x, y, z) viene dada por $T(x, y, z) = \mathrm{e}^{-x^2-2y^2-3z^2}$ donde x, y, z se miden en metros. ¿En qué dirección debe moverse la nave para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible?

★ 5. Dada la función

$$f(x, y, z) = \log \sqrt{xy - \frac{z^2}{xy}}$$

a) Hallar el vector gradiente.

b) Hallar un punto en el que el vector gradiente sea paralelo a la bisectriz del plano XY, y calcular el vector gradiente en dicho punto.

Resolución

★ 6. La cantidad C de cierta toxina en sangre (en mg/dl) depende del número de bacterias, b (bacterias/dl), del número de linfocitos, l (linfocitos/dl), y del tiempo, t (horas), según la ecuación:

$$C(b,l,t) = \frac{t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2} - \frac{1}{\log(b \cdot l)}$$

a) Calcular su gradiente.

b) Comprobar que se cumple: $\dfrac{\partial^2 C}{\partial t \partial b} = \dfrac{\partial^2 C}{\partial b \partial t}$.

Resolución

a) La fórmula del gradiente es

$$\nabla C(b,l,t) = \left(\frac{\partial C}{\partial b}, \frac{\partial C}{\partial l}, \frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{10}$$

de modo que necesitamos calcular las tres primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial C}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\log(b \cdot l)}\right) = \frac{3t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2} + \frac{1}{b \log^2(b \cdot l)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2}\right) - \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\log(b \cdot l)}\right) = \frac{-2t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^3} + \frac{1}{l \log^2(b \cdot l)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\log(b \cdot l)}\right) = \frac{2t \cdot e^{3b+2}}{l^2}$$

Así que, sustituyendo en la fórmula 10 tenemos:

$$\nabla C(b,l,t) = \left(\frac{3t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2} + \frac{1}{b \log^2(b \cdot l)}, \frac{-2t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^3} + \frac{1}{l \log^2(b \cdot l)}, \frac{2t \cdot e^{3b+2}}{l^2}\right).$$

b) Para ver si se satisface la igualdad calculamos ambas derivadas:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t \partial b} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial C}{\partial b}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3t^2 \cdot e^{3b+2}}{l^2} + \frac{1}{b \log^2(b \cdot l)}\right) = \frac{6t \cdot e^{3b+2}}{l^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial b \partial t} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{2t \cdot e^{3b+2}}{l^2}\right) = \frac{6t \cdot e^{3b+2}}{l^2}$$

Por tanto, la igualdad es cierta.

★ 7. Supongamos que la cantidad de agua almacenada en un pantano al final del año hidrológico, A en hectómetros cúbicos, viene dada por:

$$A = \sqrt{\frac{p^3}{t-1} - c^2 e^{cpt}}$$

donde p es la precipitación en litros/m^2 caída durante el año hidrológico, t es la temperatura media del año hidrológico en °C y c el consumo debido a abastecimiento de poblaciones cercanas y riego, en hectómetros cúbicos. Se pide:

a) Calcular el gradiente de la cantidad de agua almacenada.

b) Suponiendo que hubiese algún año en el que el consumo fuese nulo, ¿qué condició tendría que cumplir la temperatura para que la derivada del agua almacenada con respecto a la temperatura fuese igual a la derivada con respecto a la precipitación?

★ 8. Dada la función $f(x) = e^{2xy}\operatorname{sen}(x+3z)$, se pide:

a) ¿Calcular el vector gradiente en el origen de coordenadas?

b) ¿Es cierto que $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}$?

★ 9. La variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

se conoce como normal bidimensional con X e Y independientes, de parámetros $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ y $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$. Calcular el gradiente de f e interpretarlo. ¿En qué punto se anula el gradiente? ¿Qué conclusiones sacas? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de f cuando $x \to \infty$?

Resolución

★ 10. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

se conoce como ecuación de Laplace se aplica a multitud de fenómenos relacionadas con conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Dada la función $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

a) Comprobar que f satisface la ecuación de Laplace.

b) ¿Existe algún punto en el que el crecimiento de la función sea nulo?

c) Si fijamos $z = 1$, calcular

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Resolución

a) Para comprobar que $u(x,y,z)$ satisface la ecuación de Laplace calculamos las tres derivadas parciales segundas que intervienen en la ecuación. Comenzando con las derivadas parciales con respecto a la variable x, obtenemos:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} 2x = -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right) = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$$

e igualmente para las variables y y z, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} =$$

$$= -3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = 0$$

b) Una condición necesaria para que el crecimiento de una función de varias variables en un punto sea nulo es que el gradiente en dicho punto se anule, y el gradiente se anula si se anulan sus tres componentes:

$$\vec{\nabla} u = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (0,0,0)$$

Por lo tanto, tenemos un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = 0$$

$$-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = 0$$

$$-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = 0$$

Y teniendo en cuenta que el término $(x^2+y^2+z^2)$, por tratarse de una suma de cuadrados, únicamente puede ser 0 si $x = y = z = 0$; y a igual conclusión llegamos si suponemos que es distinto de 0, ya que entonces la primera ecuación implica que necesariamente $x = 0$, la segunda implica que $y = 0$, y la tercera implica que $z = 0$. Por lo tanto, concluimos que el único punto en el que el crecimiento puede ser nulo es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, pero dicho punto no pertenece al dominio de definición de la función (tendríamos un cero como denominador de una fracción), por lo que no hay ningún punto en el que la función presente un crecimiento nulo.

c) Suponiendo $z = 1$, la función resultante presenta únicamente dos variables:

$$u(x,y,1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \left(x^2+y^2+1\right)^{-1/2}$$

La derivada propuesta es:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right)$$

en donde, como ya sabemos, se puede cambiar el orden de derivación sin que afecte al resultado final, aunque nunca el número total de derivadas con respecto a cada variable.

Operando como ya hicimos en los cálculos previos de las derivadas segundas, obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y\left(x^2+y^2+1\right)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\left(x^2+y^2+1\right)^{-3/2} + 3y^2\left(x^2+y^2+1\right)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 3x\left(x^2+y^2+1\right)^{-5/2} - 15y^2x\left(x^2+y^2+1\right)^{-7/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} =$$

$$= 3\left(x^2+y^2+1\right)^{-5/2} - 15\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)^{-7/2} + 105x^2y\left(x^2+y^2+1\right)^{-9/2}$$

★ 11. La siguiente función determina la temperatura en cada punto del plano real:

$$f(x,y) = e^{x+2y}\cos(x^2+y^2).$$

Se pide:

a) Calcular el gradiente de f.

b) Si estamos situados en el origen de coordenadas, ¿en qué dirección aumentará más rápidamente la temperatura? ¿Y si estuviésemos en el punto $(0,1)$?

c) Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de f en el origen de coordenadas.

Resolución

a) Para calcular el vector gradiente de f necesitamos calcular sus derivadas parciales de primer orden.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+2y}\cos(x^2+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}e^{x+2y}\cos(x^2+y^2) + e^{x+2y}\frac{\partial}{\partial x}\cos(x^2+y^2) = \\
&= e^{x+2y}\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\cos(x^2+y^2) + e^{x+2y}(-\operatorname{sen}(x^2+y^2))\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \\
&= e^{x+2y}\cos(x^2+y^2) - e^{x+2y}\operatorname{sen}(x^2+y^2)2x = e^{x+2y}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)), \\
\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+2y}\cos(x^2+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial y}e^{x+2y}\cos(x^2+y^2) + e^{x+2y}\frac{\partial}{\partial y}\cos(x^2+y^2) = \\
&= e^{x+2y}\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\cos(x^2+y^2) + e^{x+2y}(-\operatorname{sen}(x^2+y^2))\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \\
&= e^{x+2y}\cos(x^2+y^2)2 - e^{x+2y}\operatorname{sen}(x^2+y^2)2y = e^{x+2y}(2\cos(x^2+y^2) - 2y\operatorname{sen}(x^2+y^2)),
\end{aligned}$$

Así pues, el vector gradiente es

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right) = \\
&= e^{x+2y}\left(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2), 2\cos(x^2+y^2) - 2y\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right).
\end{aligned}$$

b) La dirección en que más rápidamente aumenta la temperatura es la dirección del vector gradiente. Si estamos en el origen de coordenadas, dicha dirección es

$$\nabla f(0,0) = e^{0+2\cdot 0}\left(\cos(0^2+0^2) - 2\cdot 0\operatorname{sen}(0^2+0^2), 2\cos(0^2+0^2) - 2\cdot 0\operatorname{sen}(0^2+0^2)\right) = (1,2).$$

Y si estamos en el punto $(0,1)$, la dirección de máximo crecimiento de la temperatura es

$$\begin{aligned}
\nabla f(0,1) &= e^{0+2\cdot 1}\left(\cos(0^2+1^2) - 2\cdot 0\operatorname{sen}(0^2+1^2), 2\cos(0^2+1^2) - 2\cdot 1\operatorname{sen}(0^2+1^2)\right) = \\
&= e^2(\cos 1, 2\cos 1 - 2\operatorname{sen} 1) = (3{,}99\,,\,-4{,}45).
\end{aligned}$$

c) Para calcular la matriz Hessiana necesitamos calcular las derivadas parciales de segundo orden de f.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+2y}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}e^{x+2y}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2) + \\
&+ e^{x+2y}\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2) = \\
&= e^{x+2y}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2) + \\
&+ e^{x+2y}(-\operatorname{sen}(x^2+y^2)2x - 2\operatorname{sen}(x^2+y^2) - 2x\cos(x^2+y^2))2x = \\
&= e^{x+2y}((1-4x^2)\cos(x^2+y^2) - (4x+2)\operatorname{sen}(x^2+y^2)), \\
\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+2y}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}e^{x+2y}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2) + \\
&+ e^{x+2y}\frac{\partial}{\partial y}(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2) = \\
&= e^{x+2y}2(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2) + \\
&+ e^{x+2y}(-\operatorname{sen}(x^2+y^2)2y - 2x\cos(x^2+y^2))2y = \\
&= e^{x+2y}((2-4xy)\cos(x^2+y^2) - (4x+2y)\operatorname{sen}(x^2+y^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} \quad \text{(Igualdad de derivadas cruzadas)}, \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+2y}(2\cos(x^2+y^2) - 2y\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}e^{x+2y}(2\cos(x^2+y^2) - 2y\operatorname{sen}(x^2+y^2) + \\
&+ e^{x+2y}\frac{\partial}{\partial y}(2\cos(x^2+y^2) - 2y\operatorname{sen}(x^2+y^2) = \\
&= e^{x+2y}2(2\cos(x^2+y^2) - 2y\operatorname{sen}(x^2+y^2) + \\
&+ e^{x+2y}(-2\operatorname{sen}(x^2+y^2)2y - 2\operatorname{sen}(x^2+y^2) - 2y\cos(x^2+y^2))2y = \\
&= e^{x+2y}((4-4y^2)\cos(x^2+y^2) - (8y+2)\operatorname{sen}(x^2+y^2)).
\end{aligned}$$

Así pues la matriz hessiana es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{x+2y}\begin{pmatrix} (1-4x^2)\cos(x^2+y^2) - (4x+2)\operatorname{sen}(x^2+y^2) & (2-4xy)\cos(x^2+y^2) - (4x+2y)\operatorname{sen}(x^2+y^2) \\ (2-4xy)\cos(x^2+y^2) - (4x+2y)\operatorname{sen}(x^2+y^2) & (4-4y^2)\cos(x^2+y^2) - (8y+2)\operatorname{sen}(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

En el origen de coordenadas, la matriz Hessiana es

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y el hessiano vale

$$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

★ 12. Se dice que la función $z(t,x,y)$ satisface la ecuación de ondas si verifica la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

para algún $k \in \mathbb{R}$.

Comprobar que la función:

$$z\,(t,x,y) = \cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}\left(kt\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

donde $a,b,k \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación de ondas.

Resolución

Para comprobar que $z(t,x,y)$ satisface la ecuación de ondas vamos a calcular primero las derivadas parciales de segundo orden que aparecen en dicha ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\cos(kt\sqrt{a^2+b^2})\frac{\partial}{\partial t}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\cos(kt\sqrt{a^2+b^2})k\sqrt{a^2+b^2}\right) = \\
&= k\sqrt{a^2+b^2}\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(kt\sqrt{a^2+b^2})\right) = \\
&= k\sqrt{a^2+b^2}\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)(-\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2}))\frac{\partial}{\partial t}\left(kt\sqrt{a^2+b^2}\right) = \\
&= k\sqrt{a^2+b^2}\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)(-\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2}))k\sqrt{a^2+b^2} = \\
&= -k^2(a^2+b^2)\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\cos(ax))\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\,\mathrm{sen}(ax)a\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\,\mathrm{sen}(ax)\right)a\,\mathrm{sen}(by)\cos(kt\sqrt{a^2+b^2}) = \\
&= -a^2\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\cos(kt\sqrt{a^2+b^2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(ax)\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{sen}(by))\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(ax)\cos(by)b\,\mathrm{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2})\right) = \\
&= \cos(ax)\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(by)\right)b\cos(kt\sqrt{a^2+b^2}) = \\
&= -b^2\cos(ax)\,\mathrm{sen}(by)\cos(kt\sqrt{a^2+b^2}).
\end{aligned}$$

Para terminar, sustituimos estas derivadas en la ecuación de ondas y constatamos que efectivamente se cumple

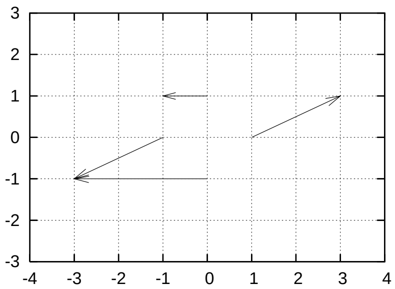
$$\begin{aligned}&-k^2(a^2+b^2)\cos(ax)\operatorname{sen}(by)\operatorname{sen}(kt\sqrt{a^2+b^2}) =\\ &= k^2\left(-a^2\cos(ax)\operatorname{sen}(by)\cos(kt\sqrt{a^2+b^2}) - b^2\cos(ax)\operatorname{sen}(by)\cos(kt\sqrt{a^2+b^2})\right).\end{aligned}$$

★ 13. Dadas las siguientes funciones de dos variables:

$$f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + \operatorname{sen}(xy)$$
$$g(x,y) = \left(2x+3y^2\right)e^{\left(1-x^2-y^2\right)}$$

a) Calcular el gradiente de cada una de ellas.

b) ¿A cuál de las funciones corresponde el siguiente dibujo del gradiente en los puntos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$?



Resolución

a) Para calcular el gradiente necesitamos calcular las derivadas parciales de f y g con respecto a sus variables:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-2xy^2+\operatorname{sen}(xy)\right) = 2x-2y^2+\cos(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) = 2x-2y^2+\cos(xy)y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-2xy^2+\operatorname{sen}(xy)\right) = -4xy+\cos(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) = -4xy+\cos(xy)x,$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left((2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2} + (2x+3y^2)\frac{\partial}{\partial x}e^{1-x^2-y^2} =\\ &= 2e^{1-x^2-y^2} + (2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(1-x^2-y^2\right) =\\ &= 2e^{1-x^2-y^2} + (2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2}(-2x) = (-4x^2-6xy^2+2)e^{1-x^2-y^2},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left((2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2} + (2x+3y^2)\frac{\partial}{\partial y}e^{1-x^2-y^2} =\\ &= 6ye^{1-x^2-y^2} + (2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(1-x^2-y^2\right) =\\ &= 6ye^{1-x^2-y^2} + (2x+3y^2)e^{1-x^2-y^2}(-2y) = (-4xy-6y^3+6y)e^{1-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Así pues, los gradientes son

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2x-2y^2+\cos(xy)y\,,\ -4xy+\cos(xy)x\right)$$
$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \left((-4x^2-6xy^2+2)\,,\ (-4xy-6y^3+6y)\right)e^{1-x^2-y^2}$$

b) Para ver a qué función corresponde la gráfica, calculamos el gradiente en los puntos que nos dan

$$\nabla f(1,0) = \big(2\cdot 1 - 2\cdot 0^2 + \cos(1\cdot 0)\cdot 0\,,\ -4\cdot 1\cdot 0 + \cos(1\cdot 0)\cdot 1\big) = (2,1),$$
$$\nabla g(1,0) = \big((-4\cdot 1^2 - 6\cdot 1\cdot 0^2 + 2)\,,\ (-4\cdot 1\cdot 0 - 6\cdot 0^3 + 6\cdot 0)\big)\,e^{1-1^2-0^2} = (-2,0).$$

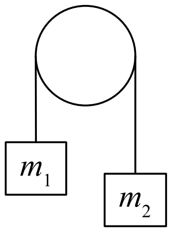
Como el vector libre situado en el punto $(1,0)$ es el $(2,1)$, la gráfica no puede pertenecer a la función $g(x,y)$. Para asegurarnos que se corresponde con la $f(x,y)$, calculamos el gradiente de esta función en el resto de los puntos:

$$\nabla f(0,1) = \big(2\cdot 0 - 2\cdot 1^2 + \cos(0\cdot 1)\cdot 1\,,\ -4\cdot 0\cdot 1 + \cos(0\cdot 1)\cdot 0\big) = (-1,0),$$
$$\nabla f(-1,0) = \big(2\cdot(-1) - 2\cdot 0^2 + \cos(-1\cdot 0)\cdot 0\,,\ -4\cdot -1\cdot 0 + \cos(-1\cdot 0)\cdot(-1)\big) = (-2,-1),$$
$$\nabla f(0,-1) = \big(2\cdot 0 - 2\cdot(-1)^2 + \cos(0\cdot(-1))\cdot(-1)\,,\ -4\cdot 0\cdot(-1) + \cos(0\cdot(-1))\cdot 0\big) = (-3,0).$$

Luego los vectores de la gráfica se corresponden con los vectores gradientes de $f(x,y)$.

---

14. Tenemos dos objetos de masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa a través de una polea como la de la figura.



Si $m_1 \geq m_2$, la aceleración de m_1 viene dada por la ecuación

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g,$$

siendo g la aceleración de la gravedad. Demostrar que se cumple la ecuación

$$m_1\frac{\partial a}{\partial m_1} + m_2\frac{\partial a}{\partial m_2} = 0.$$

Resolución

★ 15. La relación que modeliza el potencial eléctrico V de un punto del plano en función de su distancia, es $V = \log D$, donde $D = \sqrt{x^2+y^2}$.

Se pide:

a) Calcular el gradiente de V.

b) Hallar la dirección de máxima variación del potencial eléctrico en el punto $(x,y) = (\sqrt{3},\sqrt{3})$.

c) Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de V en el punto anterior.

d) Si nos movemos a lo largo de la curva $y = x+1$, cuál será el mínimo potencial alcanzado?

Resolución

---

16. La ecuación unidimensional del calor es

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2},$$

donde c es una constante y $q(x,t)$ es la temperatura de una varilla en un punto que ocupa la posición x en el instante t. Demostrar que $q(x,t) = e^{ax+bt}$, con $a \neq 0$, satisface dicha ecuación para un valor apropiado de c.

★ 17. Suponiendo que la temperatura, T en °C, de una zona de la atmósfera es función de la densidad del aire, d, en g por cm^3, la altura, h, en kilómetros, y de la concentración de un determinado elemento, c, en mg por cm^3, viene dada por la expresión:

$$T(d,h,c) = \frac{\ln(dh)}{c} + c^2 3^{hd}$$

a) Suponiendo que la altura a la que medimos la temperatura es de un kilómetro, y que la temperatura medida es de 0 °C, dar la expresión de la concentración en función de la densidad.

b) Calcular el gradiente de la temperatura en el punto $(d_0, h_0, c_0) = (1,1,2)$.

c) Comprobar que se cumple que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial d \partial h} = \frac{\partial^2 T}{\partial h \partial d}$$

18. Sea $z(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$. Calcular todas sus derivadas parciales de primer y segundo orden.

Resolución

19. Dada la función $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(2,-1)$.

★ 20. Supongamos la función de varias variables $f(x,y,z) = x^3 + \sqrt{xyz}$ que da la presión en un recipiente en función de la posición (x,y,z). Suponiendo que en el recipiente hay un insecto y que se encuentra en el punto de coordenadas $(2,1,3)$, ¿en qué dirección debe moverse si busca ir lo más rápidamente posible hacia zonas de menor presión?

21. Dado el siguiente campo escalar expresado en coordenadas cartesianas:

$$f(x,y,z) = 3xy \ln\left(\frac{1}{z}\right)$$

Calcular:

a) Su vector gradiente.

b) Su matriz Hessiana.

★ 22. La definición del polinomio de Taylor de grado 2 de una función de dos variables, $f(x,y)$, centrado en el punto (x_0,y_0), es

$$\begin{aligned} P^2_{f,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) \end{aligned}$$

a) Utilizar la fórmula anterior para calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x,y) = e^{(x+2y)}$ centrado en $(x_0,y_0) = (0,0)$.

b) Utilizar el polinomio anterior para dar el valor aproximado de $e^{(0,1+2\cdot 0,1)}$.

★ 23. Suponiendo que el potencial eléctrico en un punto de coordenadas cartesianas (x, y, z) viene dado por:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{x\,e^y \ln z},$$

calcular en el punto $(1, 0, e)$:

a) El campo eléctrico (recordar que el campo eléctrico es el gradiente del potencial cambiado de signo: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$).

b) La divergencia del campo eléctrico.

★ 24. Para la función de 2 variables $f(x, y) = x^{y^2}$

a) Calcular su dirección y sentido de máximo crecimiento en el punto $(1, 1)$.

b) Calcular su matriz Hessiana.

★ 25. La Quimiotaxis es el movimiento de los organismos dirigido por un gradiente de concentración, es decir, en la dirección en la que la concentración aumenta con más rapidez. El moho del cieno Dictyoselium discoideum muestra este comportamiento. En esta caso, las amebas unicelulares de esta especie se mueven según el gradiente de concentración de una sustancia química denominada adenosina monofosfato (AMP cíclico). Si suponemos que la expresión que da la concentración de AMP cíclico en un punto de coordenadas (x, y, z) es:

$$C(x, y, z) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^4 + 1}}$$

y se sitúa una ameba de moho del cieno en el punto $(-1, 0, 1)$, ¿en qué dirección se moverá la ameba?

★ 26. Si suponemos que el rendimiento de una cosecha, R, depende de las concentraciones de nitrógeno, n, y fósforo, p, presentesen el suelo según la función:

$$R(n, p) = n \cdot p \cdot e^{-(n+p)}$$

a) Calcular todas las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función $R(n, p)$.

b) Teniendo en cuenta que una condición necesaria para que una función de varias variables presente un máximo en un punto es que todas las derivadas parciales de primer orden se anulen en dicho punto, ¿cuánto deben valer las concentraciones de nitrógeno y fósforo para que el rendimiento de la cosecha sea máximo?

★ 27. Supongamos que tenemos una superficie plana, y que la cantidad de una sustancia, C en g/cm^2, depositada sobre cada punto de coordenadas x e y, en metros, es función del punto y del tiempo t, en horas, y viene dada por la expresión:

$$C(x, y, t) = \sqrt{e^{-\frac{3ty}{x^2+1}}}$$

a) Calcular la dirección y sentido de máximo crecimiento de la función en el punto $(x_0, y_0, t_0) = (1, 0, 1)$.

b) Calcular: $\dfrac{\partial^2 C}{\partial y \partial x}$.

c) ¿En qué puntos se anulará el gradiente de C?

Resolución

Antes de nada conviene simplificar la función:

$$C(x, y, t) = \sqrt{e^{-\frac{3ty}{x^2+1}}} = \left(e^{-\frac{3ty}{x^2+1}}\right)^{1/2} = e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}}$$

a) La dirección y sentido de máximo crecimiento de una función de varias variables la da el vector gradiente, en este caso,

$$\nabla C(x,y,t) = \left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial t}\right)$$

Calulamos las tres derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} = e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3ty}{2x^2+2}\right) = e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{3ty\cdot 4x}{(2x^2+2)^2}\\
\frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} = e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3ty}{2x^2+2}\right) = e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{-3t}{2x^2+2}\\
\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} = e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{3ty}{2x^2+2}\right) = e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{-3y}{2x^2+2}
\end{aligned}$$

De modo que el vector gradiente es

$$\nabla C(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}}}{2x^2+2}\left(\frac{12tyx}{2x^2+2}, -3t, -3y\right),$$

y en el punto $(x_0, y_0, t_0) = (1,0,1)$ vale

$$\nabla C(1,0,1) = \frac{e^{-\frac{3\cdot 1\cdot 0}{2\cdot 1^2+2}}}{2\cdot 1^2+2}\left(\frac{12\cdot 1\cdot 0\cdot 1}{2\cdot 1^2+2}, -3\cdot 1, -3\cdot 0\right) = \frac{1}{4}(0,-3,0).$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial C}{\partial x} e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{12tyx}{(2x^2+2)^2}\right) =\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}}\right)\frac{12tyx}{(2x^2+2)^2} + e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{12tyx}{(2x^2+2)^2}\right) =\\
&= e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3ty}{2x^2+2}\right)\frac{3ty\cdot 4x}{(2x^2+2)^2} + e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{12tx}{(2x^2+2)^2} =\\
&= e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{-3t}{2x^2+2}\frac{3ty\cdot 4x}{(2x^2+2)^2} + e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}} \frac{12tx}{(2x^2+2)^2} =\\
&= \frac{e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}}}{(2x^2+2)^2}\left(\frac{-36t^2yx}{2x^2+2} + 12tx\right).
\end{aligned}$$

c)

$$\nabla C(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{3ty}{2x^2+2}}}{2x^2+2}\left(\frac{12tyx}{2x^2+2}, -3t, -3y\right) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 12txy = 0\\ -3t = 0\\ -3y = 0\end{cases}$$

de donde se deduce que $t = 0$, $y = 0$ y x puede tomar cualquier valor. Así pues, los puntos que anulan el gradiente son de la forma $(x,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

★ 28. Una barra de metal de un metro de largo se calienta de manera irregular y de forma tal que a x metros de su extremo izquierdo y en el instante t minutos, su temperatura en grados centígrados esta dada por $H(x,t) = 100e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi x t)$ con $0 \leq x \leq 1$.

a) Calcular $\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}2, 1)$ y $\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}8, 1)$. ¿Cuál es la interpretación práctica (en términos de temperatura) de estas derivadas parciales? Explicar por qué cada una tiene el signo que tiene.

b) Calcular la matriz hessiana de H.

Resolución

a) La derivada parcial de H con respecto a x es

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = 100e^{-0,1t}\cos(\pi x t)\pi t$$

y en los puntos que nos piden vale

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}2,\ 1) = 100e^{-0,1}\cos(0{,}2\pi)\pi = 229{,}9736$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}8,\ 1) = 100e^{-0,1}\cos(0{,}8\pi)\pi = -229{,}9736$$

La derivada parcial $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t_0)$ indica la variación instantánea que experimenta la temperatura con respecto a la variación de la distancia al extremo izquierdo en el punto. El signo de la derviada parcial indica si la variación de la temperatura es creciente (aumenta la temperatura) o decreciente (disminuye). Así en el punto (0,2, 1) la temperatura aumentará a razón de 229,9736 grados centígrados por cada metro que nos alejemos del extremo izquierdo de la barra de metal, mientras que en el (0,8, 1) la temperatura disminuirá a razón de 229,9736 grados centígrados por cada metro que nos alejemos del extremo izquierdo de la barra de metal.

b) Para calcular la matriz Hessiana necesitamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) &= 100\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi x t) + e^{-0,1t}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}(\pi x t)\right) = \\
&= 100\left(-0{,}1e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi x t) + e^{-0,1t}\cos(\pi x t)\pi x\right) = \\
&= 100e^{-0,1t}\left(-0{,}1\operatorname{sen}(\pi x t) + \pi x\cos(\pi x t)\right), \\
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(100e^{-0,1t}\pi t\cos(\pi x t)\right) = 100e^{-0,1t}\pi t(-\operatorname{sen}(\pi x t)\pi t) = \\
&= -100e^{-0,1t}\pi^2 t^2\operatorname{sen}(\pi x t), \\
\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial x}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(100e^{-0,1t}\pi t\cos(\pi x t)\right) = \\
&= 100\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-0,1t}\pi t\cos(\pi x t) + e^{-0,1t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\pi t)\cos(\pi x t) + \pi t\frac{\partial}{\partial t}\cos(\pi x t)\right)\right) = \\
&= 100\left(-0{,}1e^{-0,1t}\pi t\cos(\pi x t) + e^{-0,1t}\left(\pi\cos(\pi x t) - \pi t\operatorname{sen}(\pi x t)\pi x\right)\right) = \\
&= 100e^{-0,1t}\left(-0{,}1\pi t\cos(\pi x t) + \pi\cos(\pi x t) - \pi^2 x t\operatorname{sen}(\pi x t)\right) = \\
&= 100e^{-0,1t}\left((-0{,}1\pi t + \pi)\cos(\pi x t) - \pi^2 x t\operatorname{sen}(\pi x t)\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 H}{\partial t\partial x}(x,t) \quad \text{(igualdad de las derivadas cruzadas por el teorema de Schwartz)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(100e^{-0,1t}\left(-0{,}1\operatorname{sen}(\pi x t) + \pi x\cos(\pi x t)\right)\right) = \\
&= 100\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-0,1t}\left(-0{,}1\operatorname{sen}(\pi x t) + \pi x\cos(\pi x t)\right) + \right.\\
&\qquad \left. + e^{0,1t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(-0{,}1\operatorname{sen}(\pi x t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\pi x\cos(\pi x t)\right)\right)\right) = \\
&= 100\left(-0{,}1e^{-0,1t}\left(-0{,}1\operatorname{sen}(\pi x t) + \pi x\cos(\pi x t)\right) + \right.\\
&\qquad \left. + e^{0,1t}\left(-0{,}1\cos(\pi x t)\pi x - \pi x\cos(\pi x t)\pi x\right)\right) = \\
&= 100e^{-0,1t}\left(0{,}01\operatorname{sen}(\pi x t) - 0{,}1\pi x\cos(\pi x t) - 0{,}1\pi x\cos(\pi x t) - \pi^2 x^2\cos(\pi x t)\right) = \\
&= 100e^{-0,1t}\left(0{,}01\operatorname{sen}(\pi x t) - (0{,}2 + \pi^2 x^2)\cos(\pi x t)\right).
\end{aligned}$$

Así pues, la matriz Hessiana es

$$\begin{pmatrix} -100e^{-0,1t}\pi^2 t^2 \operatorname{sen}(\pi x t) & 100e^{-0,1t}\left((-0{,}1\pi t+\pi)\cos(\pi x t)-\pi^2 x t \operatorname{sen}(\pi x t)\right) \\ 100e^{-0,1t}\left((-0{,}1\pi t+\pi)\cos(\pi x t)-\pi^2 x t \operatorname{sen}(\pi x t)\right) & 100e^{-0,1t}\left(0{,}01 \operatorname{sen}(\pi x t)-(0{,}2+\pi^2 x^2)\cos(\pi x t)\right) \end{pmatrix}$$

★ 29. Dar la dirección de máximo crecimiento de la función

$$f(x,y,z)=\frac{\log(zx)}{z}-xe^{-zxy}$$

en el punto $(1,1,1)$.

RESOLUCIÓN

La dirección de máximo crecimiento de una función de varias variables la da el vector gradiente:

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

Calculamos por tanto cada una de las derivadas parciales que aparecen en las componentes del vector:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\log(zx)}{z}-xe^{-zxy}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\log(zx)}{z}\Big)-\frac{\partial}{\partial x}(xe^{-zxy})=\\
&=\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial x}(\log(zx))-\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x)e^{-zxy}+x\frac{\partial}{\partial x}(e^{-zxy})\Big)=\\
&=\frac{1}{z}\frac{1}{zx}\frac{\partial}{\partial x}(zx)-\Big(e^{-zxy}+xe^{-zxy}\frac{\partial}{\partial x}(-zxy)\Big)=\\
&=\frac{1}{z}\frac{1}{zx}z-\big(e^{-zxy}+xe^{-zxy}(-zy)\big)=\frac{1}{zx}-e^{-zxy}(1-xyz),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\log(zx)}{z}-xe^{-zxy}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\log(zx)}{z}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}(xe^{-zxy})=\\
&=-x\frac{\partial}{\partial y}(e^{-zxy})=-xe^{-zxy}\frac{\partial}{\partial y}(-zxy)=x^2ze^{-zxy},\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\log(zx)}{z}-xe^{-zxy}\Big)=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\log(zx)}{z}\Big)-\frac{\partial}{\partial z}(xe^{-zxy})=\\
&=\frac{\frac{\partial}{\partial z}(\log(zx))z-\log(zx)\frac{\partial}{\partial z}(z)}{z^2}-x\frac{\partial}{\partial z}(e^{-zxy}))=\\
&=\frac{\frac{1}{zx}\frac{\partial}{\partial z}(zx)z-\log(zx)}{z^2}-xe^{-zxy}\frac{\partial}{\partial z}(-zxy))=\\
&=\frac{\frac{1}{zx}xz-\log(zx)}{z^2}-xe^{-zxy}-xy=\frac{1-\log(zx)}{z^2}+x^2ye^{-zxy}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector gradiente será:

$$\nabla f(x,y,z)=\Big(\frac{1}{zx}-e^{-zxy}(1-xyz),x^2ze^{-zxy},\frac{1-\log(zx)}{z^2}+x^2ye^{-zxy}\Big)$$

Finalmente, como nos pieden la dirección de máximo crecimiento en el punto $(1,1,1)$, tendremos que particularizar el vector gradiente en dicho punto, es decir:

$$\nabla f(1,1,1)=(1,e^{-1},1+e^{-1}).$$

★ 30. Calcular el gradiente de la función

$$f(x,y,z) = e^{\sqrt{x^2+2yz}} + \ln(\frac{xy}{z})$$

en el punto $(1,-2,-2)$.

Resolución

El gradiente de $f(x,y,z)$ se define como el vector $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$. Por tanto, tenemos que calcular las tres derivadas parciales siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{\sqrt{x^2+2yz}} + \ln(\frac{xy}{z})) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{\sqrt{x^2+2yz}}) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln(\frac{xy}{z})) = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+2yz}) + \frac{1}{xy/z}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{xy}{z}) = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2yz}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2yz) + \frac{z}{xy}\frac{y}{z} = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2yz}}2x + \frac{1}{x} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} + \frac{1}{x}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{\sqrt{x^2+2yz}} + \ln(\frac{xy}{z})) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{\sqrt{x^2+2yz}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\ln(\frac{xy}{z})) = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2+2yz}) + \frac{1}{xy/z}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{xy}{z}) = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2yz}}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2yz) + \frac{z}{xy}\frac{x}{z} = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2yz}}2z + \frac{1}{y} = \frac{ze^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} + \frac{1}{y}, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}(e^{\sqrt{x^2+2yz}} + \ln(\frac{xy}{z})) = \frac{\partial}{\partial z}(e^{\sqrt{x^2+2yz}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\ln(\frac{xy}{z})) = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{x^2+2yz}) + \frac{1}{xy/z}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{xy}{z}) = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2yz}}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+2yz) + \frac{z}{xy}\frac{-xy}{z^2} = \\
&= e^{\sqrt{x^2+2yz}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2yz}}2y - \frac{1}{z} = \frac{ye^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} - \frac{1}{z},
\end{aligned}$$

y, en consecuencia tenemos

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{xe^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} + \frac{1}{x}, \frac{ze^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} + \frac{1}{y}, \frac{ye^{\sqrt{x^2+2yz}}}{\sqrt{x^2+2yz}} - \frac{1}{z}\right).$$

Como nos piden el gradiente en el punto $(1,-2,-2)$, sustituimos x por 1, y por -2, y z por -2 en el vector anterior y obtenemos

$$\nabla f(1,-2,-2) = \left(\frac{e^3}{3} + 1, \frac{-2e^3}{3} - \frac{1}{2}, \frac{-2e^3}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

★ 31. Calcular el vector gradiente de la función

$$\log\left(\sqrt{x^2-z^2}\right) + 3^{\frac{x^2}{y}}$$

en el punto $(1, 1, 0)$.

Resolución

El gradiente de $f(x, y, z)$ se define como el vector $\nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z))$. Por tanto, tenemos que calcular las tres derivadas parciales siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}(\log\left(\sqrt{x^2 - z^2}\right) + 3^{\frac{x^2}{y}}) = \frac{\partial}{\partial x}(\log\left(\sqrt{x^2 - z^2}\right)) + \frac{\partial}{\partial x}(3^{\frac{x^2}{y}}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - z^2}} \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 - z^2}) + 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{y}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - z^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2 - z^2}} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - z^2) + 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{2x}{y} = \\
&= \frac{1}{2(x^2 - z^2)} 2x + 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{2x}{y} = \frac{x}{x^2 - z^2} + 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{2x}{y}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}(\log\left(\sqrt{x^2 - z^2}\right) + 3^{\frac{x^2}{y}}) = \frac{\partial}{\partial y}(\log\left(\sqrt{x^2 - z^2}\right)) + \frac{\partial}{\partial y}(3^{\frac{x^2}{y}}) = \\
&= 0 + 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^2}{y}) = 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{-x^2}{y^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z}(\log\left(\sqrt{x^2 - z^2}\right) + 3^{\frac{x^2}{y}}) = \frac{\partial}{\partial z}(\log\left(\sqrt{x^2 - z^2}\right)) + \frac{\partial}{\partial z}(3^{\frac{x^2}{y}}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - z^2}} \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 - z^2}) + 0 = \frac{1}{\sqrt{x^2 - z^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2 - z^2}} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - z^2) = \\
&= \frac{1}{2(x^2 - z^2)}(-2z) = -\frac{z}{x^2 - z^2}.
\end{aligned}$$

y, en consecuencia tenemos

$$\nabla f(x, y, z) = (\frac{x}{x^2 - z^2} + 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{2x}{y}, 3^{\frac{x^2}{y}} \log 3 \frac{-x^2}{y^2}, -\frac{z}{x^2 - z^2}).$$

Como nos piden el gradiente en el punto $(1, 1, 0)$, sustituimos x por 1, y por 1, y z por 0 en el vector anterior y obtenemos

$$\nabla f(1, -2, -2) = (1 + 6 \log 3, -3 \log 3, 0).$$

12. Integrales

1. Calcular por cambio de variable las integrales indefinidas siguientes:

   a) $\displaystyle\int e^{4x}\, dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{2 + x^8}\, dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x}\, dx$

2. Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

   a) $\displaystyle\frac{x + 3}{(x^2 + 6x)^{1/3}}$

   b) $\displaystyle\frac{\operatorname{arc\,sen} x + x}{\sqrt{1 - x^2}}$

3. Calcular las siguientes integrales por partes:

a) $\int x^5 \log x \, dx$

b) $\int e^x \cos x \, dx$

4. Calcular las integrales:

a) $\int x \operatorname{sen} 3x \, dx$

b) $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

5. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

a) $\int \frac{x+1}{x^2-4x+8} \, dx$

b) $\int \frac{x^4}{x^4-1} \, dx$

c) $\int \frac{x}{x^6-1} \, dx$

Nota: Para el apartado (c) hacer previamente la sustitución $x^2 = t$.

6. Calcular las integrales trigonométricas siguientes:

a) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x} \, dx$

b) $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$

c) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x} \, dx$

7. Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

b) $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$

c) $h(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$

d) $i(x) = \operatorname{tg} x$

e) $j(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $k(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

g) $l(x) = (x^2 - 2x + 5)e^{-x}$

h) $m(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$

i) $n(x) = 3^x \cos x$

j) $o(x) = \operatorname{sen}(\log x)$

k) $p(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x + 2}$

l) $q(x) = \frac{1}{x^3+1}$

8. La función e^{-x^2} no tiene una primitiva conocida. Calcular de manera aproximada $\int_{-1/2}^{1/2} e^{-x^2} \, dx$ mediante aproximaciones de Taylor.

★ 9. Dada la función

$$f(x) = \ln x \left(x^3 + 2x + 1\right)$$

Calcular $\int_1^2 f(x) \, dx$.

13. Integrales Impropias

1. Calcular las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_2^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

2. Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(xe^{-x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

★ 3. Calcular la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\pi}^{\infty} e^{-2x}\cos(3x)\,dx.$$

4. Calcular la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty}(x+1)e^{-\frac{1}{2}x}dx.$$

5. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}2^x & \text{si } x\le -1,\\ e^{-x} & \text{si } x>-1\end{cases}$$

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$

14. Aplicaciones de las integrales

1. Calcular el área comprendida entre la curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje de abscisas.
2. Calcular el área comprendida entre la parábola $y^2=4x$ y la recta $y=2x-4$.
3. Calcular el área comprendida entre las parábolas $y=6x-x^2$ e $y=x^2-2x$.

★ 4. Dibujar aproximadamente el recinto limitado por $f(x)=\cos x$, $g(x)=|x^2-1|$, $x=-1$ y $x=1$, y calcular el área de dicho recinto.

★ 5. Calcular el área del recinto limitado por las parábolas:

$$\begin{cases} y_1=x^2+2x+2,\\ y_2=-x^2+2x+4.\end{cases}$$

★ 6. Calcular el área del recinto limitado por las funciones $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=x^2-4x+1$ y la recta $x=2$.

7. Dibujar aproximadamente el recinto limitado por la función $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ y la recta $y=3$. Calcular el área de dicho recinto.

8. Calcular el área encerrada entre $y=e^{-|x|}$ y su asíntota.

★ 9. Dada la función

$$f(x)=\frac{x}{(1+2x^2)^6}$$

Calcular:

a) El área del recinto limitado por $f(x)$ y el eje de abscisas desde $x=1$ hasta $x=2$.

b) El área del recinto limitado por $f(x)$ y el eje de abscisas desde $x=0$ has el infinito.

10. Calcular el área entre las funciones siguientes y el eje de abscisas en el intervalo $[1,3]$:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \sin x^2$

d) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

★ 11. Si la cantidad de dióxido de carbono, en toneladas/hora, que arroja a la atmósfera una empresa viene dada en función del tiempo, en horas, por la expresión:

$$c(t) = 20te^{-t}$$

a) ¿Cuál es la cantidad total de monóxido de carbono arrojada a la atmósfera por la empresa desde $t = 0$ hasta transcurridas 2 horas?

b) ¿Hacia dónde tiende dicha cantidad cuando el tiempo tiende a infinito?

★ 12. Dadas las funciones: $f(t) = t$ y $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+3t}}$

a) Calcular el área del recinto limitado por la funciones entre $t = 0$ y $t = 1$.

b) Si $f(t)$ es el volumen de agua por unidad de tiempo, en m^3/s, que llega a un depósito, y $g(t)$ la que sale del mismo, también en m^3/s, ¿qué volumen de agua habrá ganado, o perdido, dicho depósito entre $t = 0$ y $t = 1/2$?

★ 13. Supongamos que el caudal de agua de una fuente natural (en metros cúbicos/día) viene dado por la expresión:

$$C(t) = \frac{t}{(2 + 0,01t^2)^3}$$

donde t es el tiempo, expresado en días, desde que hemos comenzado a medir el caudal.

a) ¿Qué cantidad de metros cúbicos de agua podemos recoger en esa fuente desde el momento en el que hemos comenzado a medir hasta transcurridos 10 días?

b) ¿Y desde el momento en el que hemos comenzado a medir hasta transcurrido un tiempo muy grande?

★ 14. Suponiendo que el caudal de agua, C en metros $\mathrm{m}^3/\text{día}$, que un arroyo vierte en un río, viene dado en función del tiempo, t en días, por la expresión:

$$C(t) = t^2 \cdot \sqrt{t^2 + 9}$$

a) Calcular el total de agua que el arroyo ha vertido en el río desde $t = 0$ hasta transcurridos 10 días.

b) Teniendo en cuenta que se define el caudal medio como el total del agua vertida dividida entre el total del tiempo transcurrido, ¿cuál ha sido el caudal medio del arroyo en los dos primeros días?

15. Calcular el área delimitada por las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

16. Calcular el área encerrada entre las funciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 4 - x^2$ entre sus puntos de corte.

17. Calcular el área que queda entre las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $\pi/4$ y $5\pi/4$.

15. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Variables Separables

1. Integrar las siguientes ecuaciones de variables separables:

   a) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,y' = 0$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

   b) $(1 + e^x)yy' = e^y$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

   c) $\mathrm{e}^y(1 + x^2)y' - 2x(1 + \mathrm{e}^y) = 0$.

d) $y - xy' = a(1 + x^2y')$.

Resolución

2. La desintegración radioactiva está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial x}{\partial y} + ax = 0,$$

donde x es la masa, t el tiempo y a es una constante positiva. La vida media T es el tiempo durante el cual la masa se desintegra a la mitad de su valor inicial. Expresar T en función de a y evaluar a para el isótopo de uranio U^{238}, para el cual $T = 4'5 \cdot 10^9$ años.

Resolución

3. El azúcar se disuelve en el agua con una velocidad proporcional a la cantidad que queda por disolver. Si inicialmente había 13.6 kg de azúcar y al cabo de 4 horas quedan sin disolver 4.5 kg, ¿cuánto tardará en disolverse el 95 % del azúcar contando desde el instante inicial?

Resolución

★ 4. Una reacción química sigue la siguiente ecuación diferencial

$$y' - 2y = 4,$$

donde $y = f(t)$ es la concentración de oxígeno en el instante t (medido en segundos). Si la concentración de oxígeno al comienzo de la reacción era nula, ¿cuál será la concentración (mg/lt) a los 3 segundos? ¿En qué instante la concentración de oxígeno será de 200 mg/lt?

Resolución

5. La sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de $5°C$. Mientras se encontraba realizando la autopsia de una víctima de asesinato, el forense es asesinado y el cuerpo de la víctima robado. A las 10 de la mañana el ayudante el forense descubre su cadáver a una temperatura de $23°C$ y llama a la policía. A medio día llega ésta y comprueba que la temperatura del cadáver es de $18'5°C$. Supuesto que el forense tenía en vida una temperatura normal de $37°C$, ¿a qué hora fue asesinado?

Resolución

★ 6. Sea la siguiente ecuación diferencial que relaciona la temperatura y el tiempo en un determinado sistema físico: $x't^2 - x't + x' - 2xt + x = 0$, siendo x la temperatura expresada en Kelvins y t el tiempo en segundos.

Sabiendo que la temperatura en el instante inicial del experimento es 100 K, calcular la temperatura en función del tiempo, y dar la temperatura del sistema físico tres segundos después de comenzar el experimento.

Resolución

En primer lugar, intentamos separar las variables para ver si se trata de una ecuación de variables separables:

$$x't^2 - x't + x' - 2xt + x = 0 \Leftrightarrow x'(t^2 - t + 1) + x(-2t + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt}(t^2 - t + 1) = x(2t - 1) \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt$$

Así pues, se trata de una ecuación diferencial ordinaria de variables separables. Integándo en ambos lados de la ecuación tenemos

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt \Leftrightarrow \log|x| = \log|t^2 - t + 1| + C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exp(\log|x|) = \exp(\log|t^2 - t + 1| + C) \Leftrightarrow x = (t^2 - t + 1)e^C,$$

Y renombrando e^C como una constante C, llegamos a la solución general de la ecuación

$$x(t) = C(t^2 - t + 1).$$

Imponiendo ahora la condición inicial $x(0) = 100K$, tenemos

$$x(0) = C(0^2 - 0 + 1) = C = 100,$$

de manera que la solución particular es

$$x(t) = 100(t^2 - t + 1).$$

Por último, la temperatura del sistema a los 3 segundos de comenzar el experimento será

$$x(3) = 100(3^2 - 3 + 1) = 700 \text{ K}.$$

★ 7. Se tiene un medicamento en un frigorífico a 2ºC, y se debe administrar a 15ºC. A las 9 h se saca el medicamento del frigorífico y se coloca en una habitación que se encuentra a 22ºC. A las 10 h se observa que el medicamento está a 10ºC. Suponiendo que la velocidad de calentamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medicamento y la del ambiente, ¿en qué hora se deberá administrar dicho medicamento?

Resolución

La ecuación diferencial que rige el enfriamiento de los cuerpos es

$$\frac{dT}{dt}k(T - T_a),$$

donde T es la temperatura del cuerpo, t es el tiempo, T_a es la temperatura del medio que se supone constante y en este caso es 22ºC, y k es una constante de proporcionalidad.

Como se trata de una ecuación de variables separables, procedemos a separar las variables:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22) \Leftrightarrow \frac{dT}{T-22} = kdt,$$

e integrar:

$$\int \frac{dT}{T-22} = \int kdt \Leftrightarrow \log|T - 22| = kt + C \Leftrightarrow T - 22 = e^{kt+C} = e^{kt}e^C$$

y reescribiendo e^C como una constante C llegamos a la solución general:

$$T(t) = Ce^{kt} + 22.$$

Imponemos ahora las condiciones iniciales para llegar a la solución particular. En primer lugar, sabemos que en el instante en que se saca el fármaco del frigorífico la temperatura del mismo era de 2ºC. Fijaremos dicho instante como el instante inicial $t = 0$ (que en realidad son las 9 h). Así pues, se tiene:

$$T(0) = 2 \Leftrightarrow Ce^{k\cdot 0} + 22 = 2 \Leftrightarrow C = -20$$

En segundo lugar, transcurrida una hora del instante inicial ($t = 1$), la temperatura del fármaco era de 10ºC, de manera que se tiene:

$$T(1) = 10 \Leftrightarrow -20e^{k\cdot 1} + 22 = 10 \Leftrightarrow -20e^{k} = -12 \Leftrightarrow e^{k} = 12/20 \Leftrightarrow k = \log(12/20) = -0{,}51.$$

Por consiguiente, llegamos a la solución particular

$$T(t) = 22 - 20e^{-0{,}51t}$$

Para terminar calculamos el tiempo que debe transcurrir hasta que el medicamento alcance los 15ºC a que debe administrarse:

$$T(t) = 15 \Leftrightarrow 22 - 20e^{-0{,}51t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0{,}51t} = \frac{22-15}{20} \Leftrightarrow t = \frac{\log(7/20)}{-0{,}51} = 2{,}06 \text{ h.}$$

Por tanto, debe administrarse unas 2,06 horas después del instante inicial, aproximadamente a las 11,06 h.

★ 8. Una cámara de 500 l está llena de aire en condiciones normales cuando comienza a entrar oxígeno puro a razón de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo se extrae la misma cantidad de la mezcla uniforme. ¿Qué concentración de oxígeno habrá a los 10 minutos? Suponiendo que una concentración de oxígeno en el aire superior a 0.5 gr/l puede ser perjudicial, ¿cuándo será peligroso respirar el aire de la cámara?

Nota: La concentración de oxígeno en el aire en condiciones normales es de 0,15 gr/l, mientras que en el oxígeno puro es de 0,71 gr/l. La ecuación diferencial que explica el fenómeno es

$$\frac{dx}{dt} = c_e v_e - c_s v_s$$

donde x es la cantidad de oxígeno en la cámara en el instante t, c_e y c_s son las concentraciones de oxígeno en el aire que entra y sale respectivamente, y v_e y v_s son las velocidades de entrada y salida del aire.

Resolución

★ 9. Sabiendo que el núcleo del Polonio 210 es radiactivo y que su tiempo de semidesintegración (tiempo necesario para que la cantidad inicial se reduzca a la mitad) es de 138 días:

a) ¿Qué cantidad inicial de Polonio 210 teníamos si al cabo de 100 días nos quedan 20 gramos?

b) ¿Qué tiempo tendrá que transcurrir para que se desintegre un 10 % de la masa inicial?

Resolución

★ 10. Estudios científicos han demostrado que la longitud en función del tiempo de muchas especies, entre ellas las de gran variedad de peces, viene dada por la ecuación de Bertalanffy:

$$\frac{dL}{dt} = k\left(L_f - L(t)\right)$$

donde L_f es la longitud de la especie al final del periodo de crecimiento, y k es una constante. Suponiendo que la longitud de una especie de peces al final de su periodo de crecimiento es de un metro, y que con uno y dos meses mide, respectivamente, 20 y 40 cm:

a) ¿Cuál será la longitud de esa especie para todo tiempo t?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir desde su nacimiento hasta que la longitud sea de 95 cm?

Resolución

★ 11. La cantidad de masa de un determinado reactivo de una reacción química, M, en gramos, es función del tiempo, en segundo, y se rige mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$M' - (a+b)M = 0$$

donde a y b son constantes. Si inicialmente tenemos 20 gramos de reactivo, al cabo de 10 segundos tenemos 40 gramos, calcular:

a) La cantidad de reactivo para todo tiempo t.

b) La cantidad de reactivo al cabo de medio minuto.

c) ¿Cuando será la cantidad de reactivo 100 g?

Resolución

a) Para calcular la masa M para todo tiempo t debemos resolver la ecuación diferencial separable del enunciado. Procediendo a su separación obtenemos:

$$M' - (a+b)M = 0 \Leftrightarrow \frac{dM}{dt} = (a+b)M \Leftrightarrow \frac{dM}{M} = (a+b)dt$$

e integrando la ecuación separada:

$$\int \frac{dM}{M} = \int (a+b)dt \Leftrightarrow \ln M = (a+b)t + C_0$$

donde C_0 es una constante de integración.
Por último, tomando exponenciales en ambos miembros de la ecuación integrada, y teniendo en cuenta que la exponencial de una constante es una nueva constante a la que llamamos C, nos queda:

$$M(t) = e^{(a+b)t+C_0} = e^{(a+b)t}e^{C_0} = Ce^{(a+b)t}$$

Como, además, tenemos 2 datos iniciales, podemos calcular los valores tanto de C como de la suma $a+b$:

$$M(0) = 20 = Ce^{(a+b)0} = C$$

$$M(10) = 40 = Ce^{(a+b)10} = 20e^{(a+b)10} \Leftrightarrow e^{(a+b)10} = 2 \Leftrightarrow a+b = \frac{\ln 2}{10}$$

Por lo tanto, la masa M para todo tiempo t vale:

$$M(t) = 20\, e^{\frac{\ln 2}{10}t}$$

b) Una vez que tenemos la masa para todo tiempo t, a los 30 s tendremos:

$$M(30) = 20\, e^{\frac{\ln 2}{10}30} = 20e^{3\ln 2} = 160$$

donde la cantidad viene dada en gramos.

c) Para calcular el tiempo t_0 que debe transcurrir hasta que tengamos 100 g de masa, sustituimos de nuevo en la solución general:

$$M(t_0) = 100 = 20\, e^{\frac{\ln 2}{10} t_0} \Leftrightarrow \ln 5 = \frac{\ln 2}{10} t_0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{10 \ln 5}{\ln 2} = 23{,}22$$

donde el tiempo viene dado en segundos.

★ 12. Se sabe que en una reacción química una sustancia se transforma en otra a una velocidad proporcional a la cantidad sin transformar. Si a las 2 horas del comienzo de la reacción había 20 gr. de la sustancia original y a las 3 horas quedaban 10 gr., ¿qué cantidad es sustancia había al comienzo de la reacción? ¿Cuándo se habrá transformado el 90 % de la sustancia?

Resolución

Llamemos $x(t)$ a la función que mide la cantidad de sustancia original en el instante t. Según el enunciado, la transformación química responde a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Se trata de una ecuación diferencial de variables separables, así que, para resolverla separamos las variables e integramos:

$$\frac{dx}{dt} = kx \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = kdt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int k\, dt \Leftrightarrow \log|x| = kt + C \Leftrightarrow x(t) = Ce^{kt},$$

que es la solución general de la ecuación.

Para determinar las constantes imponemos las condiciones inicales:

$$x(2) = 20 \Leftrightarrow Ce^{2k} = 20 \Leftrightarrow e^{2k} = 20/C \Leftrightarrow 2k = \log(20/C) \Leftrightarrow k = \log(20/C)/2,$$

$$x(3) = 10 \Leftrightarrow Ce^{3k} = 10 \Leftrightarrow Ce^{\frac{3}{2}\log(20/C)} = Ce^{\log(20/C)^{3/2}} = C\left(\frac{20}{C}\right)^{3/2} = 10 \Leftrightarrow C^{1/2} = \frac{20^{3/2}}{10} \Leftrightarrow C = 80.$$

de donde se deduce $k = \log(20/80)/2 = -\log 2$, y en consecuencia, la solución particular de la ecuación es

$$x(t) = 80e^{-\log 2 \cdot t}.$$

Según esta ecuación, la cantidad original de sustancia en el instante inicial ($t = 0$) era

$$x(0) = 80e^{-\log 2 \cdot 0} = 80 \text{ gr},$$

y el tiempo necesario para que se transforme el 90 % de la sustancia, es decir, que quede el 10 % será

$$x(t_0) = 80 * 0{,}1 = 8 \Leftrightarrow 80e^{-\log 2 \cdot t_0} = 8 \Leftrightarrow e^{-\log 2 \cdot t_0} = 8/80 = 0{,}1 \Leftrightarrow t_0 = -\frac{\log 0{,}1}{\log 2} = 3{,}32 \text{ horas}.$$

---

13. Un depósito contiene 5 kg de sal disueltos en 500 litros de agua en el instante en que comienza entrar una solución salina con 0.4 kg de sal por litro a razón de 10 litros por minuto. Si la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación y sale la misma cantidad de litros que entra, ¿cuánta sal quedará en el depósito después de 5 minutos? ¿y después de 1 hora?

Nota: La tasa de variación de la cantidad de sal en el tanque es la diferencia entre la cantidad de sal que entra y la que sale del tanque en cada instante.

Resolución

★ 14. En una reacción química, un compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional al cuadrado de la cantidad no transformada. Si había inicialmente 20 gr de la sustancia original y tras 1 hora queda la mitad, ¿en qué momento se habrá transformado el 75 % de dicho compuesto?

Resolución

15. Cuando el movimiento se produce en un medio en el que hay cierta resistencia, como en el aire, aparece una fuerza proporcional a la velocidad que se opone al mismo. En este caso, las leyes de Newton conducen a la siguiente ecuación diferencial para la velocidad de caída en el medio:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg$$

donde v es la velocidad, m es la masa, g es la gravedad, y k es la constante de proporcionalidad.

Si se dispara un móvil directamente hacia arriba al nivel del suelo, con velocidad inicial 100 m/s, una masa de 0,05 kg, una constante k de $0,002$ kg/s y g de 10 m/s^2, ¿cuál será la máxima altura del móvil y cuándo la alcanzará? ¿Cuándo y con qué velocidad golpeará el móvil en el suelo?

Resolución

★ 16. La cantidad de masa, M, expresada en Kg, de sustancias contaminantes en un depósito de aguas residuales, cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{dM}{dt} = -0{,}5M + 1000$$

donde k es una constante y t es el tiempo expresado en días (podemos imaginar que el depósito está conectado a una depuradora que elimina sustancia contaminante con un ritmo proporcional a la propia cantidad de contaminante, lo cual explicaría el sumando $-0{,}5M$, y que también hay un aporte constante de contaminante de 1000 kg/día, que puede provenir de un desagüe, lo cual explicaría el sumando constante $+1000$).

Si la cantidad inicial de contaminante es de 10000 Kg:

a) ¿Cuál será la cantidad de contaminante para todo tiempo t?

b) ¿Cuál será la cantidad de contaminante al cabo de una semana?

Resolución

17. Si tenemos en cuenta que cualquier onda sonora que atraviesa un medio sufre un proceso de amortiguamiento, y que su Intensidad I (cantidad de energía por unidad de área y tiempo que atravesaría una superficie colocada de forma perpendicular a la dirección de desplazamiento de la onda, en w/m^2) viene dada por la ley de Lamber-Beer:

$$\frac{dI}{dx} = -\alpha I$$

donde α es el coeficiente de absorción, y suponemos una onda sonora que llega a una pared con una intensidad de 1 w/m^2, y atraviesa 10 cm de pared con un coeficiente de absorción del material de la pared de $0,1$ cm$^{-}1$. En estas condiciones:

a) ¿Cuál es la intensidad que llega al otro lado de la pared?

b) Teniendo en cuenta que en ondas sonoras más que la intensidad misma se utiliza el nivel de intensidad β, cuya unidad es el decibelio, que viene dado por:

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es una intensidad de referencia asociada con la intensidad más débil que se puede oír e igual a 10^{-12} W/m^2, calcular cuál es el nivel de intensidad de la onda entrante en la pared, y cuál el de la saliente.

Resolución

18. El plasma sanguíneo se conserva a 4ºC. Para poder utilizarse en una transfusión el plasma tiene que alcanzar la temperatura del cuerpo (37ºC). Sabemos que se tardan 45 minutos en alcanzar dicha temperatura en un horno a 50ºC. ¿Cuánto se tardará si aumentamos la temperatura del horno a 60º?

Resolución

19. Hallar las curvas tales que en cada punto (x, y) la pendiente de la recta tangente sea igual al cubo de la abscisa en dicho punto. ¿Cuál de estas curvas pasa por el origen?

Resolución

20. Al introducir glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio de concentración global de glucosa con respecto al tiempo $c(t)$ se explica mediante la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc,$$

donde G es la velocidad constante a la que se suministra la glucosa, V es el volumen total de la sangre en el cuerpo y k es una constante positiva que depende del paciente. Se pide calcular $c(t)$.

Resolución

21. La temperatura T de una habitación en un día de invierno varía con el tiempo de acuerdo a la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = \begin{cases} 40 - T, & \text{si la calefacción está encendida;} \\ -T, & \text{si la calefacción está apagada.} \end{cases}$$

Suponiendo que la temperatura del aula es de 5ºC a las 9:00 de la mañana, y que a esa hora se enciende la calefacción, pero que debido a una avería la calefacción permanece apagada de 11:00 a 12:00, ¿qué temperatura habrá en la habitación a las 13:00?

Resolución

22. Se considera que la población de una determinada ciudad, $P(t)$, con índices constantes de natalidad y mortalidad, β y γ respectivamente, pero en la que también ingresan por inmigración I personas al año, sigue la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \gamma)\, P + I$$

Suponiendo que dicha población tenía $1,5$ millones de habitantes en 1980, que la diferencia entre los índices de natalidad y mortalidad es de 0,01 (es decir, crece un 1 % anual), y también que absorbe 40000 inmigrantes al año, ¿cuál será la población en el año 2005?

Resolución

---

23. Una reacción química se comporta según la siguiente ecuación diferencial:

$$y\sqrt{2x}\,dy - 2y^2\,dx = 0$$

donde y es la energía liberada (en Kj) y x es la cantidad de una determinada sustancia (en gr). Sabiendo que para 2 gr la energía liberada es de 50 Kj, ¿cuánta cantidad habrá que utilizar para obtener 1000 Kj?

Resolución

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de variables separables, así que, para resolverla primero separamos las variables

$$y\sqrt{2x}\,dy - 2y^2\,dx = 0 \Leftrightarrow y\sqrt{2x}\,dy = 2y^2\,dx \Leftrightarrow \frac{y}{y^2}dy = \frac{2}{\sqrt{2x}}dx \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{2}{\sqrt{2x}}dx$$

y ahora integramos ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{1}{y}dy = \ln y + C,$$
$$\int \frac{2}{\sqrt{2x}}dx = 2\sqrt{2x} + C.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$\ln y = 2\sqrt{2x} + C \Leftrightarrow y(x) = e^{2\sqrt{2x}+C} = e^{2\sqrt{2x}}e^C = Ce^{2\sqrt{2x}},$$

renonbrando e^C como una constante C.

Para llegar a una solución particular, imponemos la condición inicial que nos dan, que es $y(2) = 50$.

$$y(2) = Ce^{2\sqrt{2\cdot 2}} = Ce^4 = 50 \Leftrightarrow C = \frac{50}{e^4}$$

Así pues, la solución particular es

$$y(t) = \frac{50}{e^4}e^{2\sqrt{2x}} = 50e^{2\sqrt{2x}-4}.$$

Por último, para ver la masa x_0 necesaria para generar 1000 Kj, sustituimos en la solución particular

$$y(x_0) = 50e^{2\sqrt{2x_0}-4} = 1000 \Leftrightarrow e^{2\sqrt{2x_0}-4} = \frac{1000}{50} = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x_0} - 4 = \ln 20 = 2{,}9957 \Leftrightarrow \sqrt{2x_0} = \frac{2,9957+4}{2} = 3{,}4979 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3,4979^2}{2} = 6{,}12 \text{ gr.}$$

★ 24. Resolver el problema del valor inicial

$$\begin{cases} y\sqrt{2x}dy - 2y^2dx = 0 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

¿Para qué valor de x, se obtiene $y = 1000$?

Resolución

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de variables separables, por lo que, para resolverla primero debemos separar las variables

$$y\sqrt{2x}dy - 2y^2dx = 0 \Leftrightarrow y\sqrt{2x}dy = 2y^2dx \Leftrightarrow \frac{y}{y^2}dy = \frac{2}{\sqrt{2x}}dx \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = \sqrt{2}x^{-1/2}dx$$

Una vez separadas las variables integramos ambos lados de la ecuación

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \sqrt{2}x^{-1/2}dx \Leftrightarrow \log y = 2\sqrt{2x} + C$$

y despejando y obtenemos la solución general de la ecuación

$$y(x) = e^{2\sqrt{2x}+C} = Ce^{2\sqrt{2x}}.$$

Para obtener la solución particular imponemos la condición inicial $y(0) = 5$,

$$y(0) = Ce^{2\sqrt{2\cdot 0}} = 5 \Leftrightarrow Ce^0 = 5 \Leftrightarrow C = 5,$$

de modo que la solución del problema del valor inicial es

$$y(x) = 5e^{2\sqrt{2x}}.$$

Finalmente, calculamos el valor x para el que $y = 1000$:

$$y(x) = 5e^{2\sqrt{2x}} = 1000 \Leftrightarrow e^{2\sqrt{2x}} = \frac{1000}{5} = 200 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x} = \log 200 \Leftrightarrow x = \frac{(\log 200/2)^2}{2} = 3{,}509.$$

★ 25. La velocidad de aumento del número de bacterias en un cultivo es proporcional al número de bacterias presentes, siguiendo la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

siendo x el número de bacterias presentes y t el tiempo.

a) ¿Por cuánto se habrá multiplicado el número de bacterias al cabo de 5 horas, si se duplicó al cabo de 3 horas?

b) Si al cabo de 4 horas hay 10000 bacterias, ¿cuántas había al principio?

Resolución

Antes de contestar a los apartados resolvemos la ecuación diferencial que plantea el problema. Se trata de una ecuación diferencial de variables separadas que se resuelve fácilmente:

$$\frac{dx}{dt} = ax \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = a\,dt \Longleftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int a\,dt \Longleftrightarrow \ln x = at + C \Longleftrightarrow e^{\ln x} = e^{at+C},$$

y, aplicando la función exponencial a ambos lados de la última igualdad para simplificar, obtenemos la solución general

$$e^{\ln x} = e^{at+C} \Longleftrightarrow x = e^{at}e^C \Longleftrightarrow x = Ce^{at}.$$

donde, para simplificar, hemos reescrito $C = e^C$ al ser una constante.

a) Para resolver el primer apartado, llamamos $x(0)$ al número inicial de bacterias en el cultivo. Como al cabo de 3 horas se había duplicado el número de bacterias en el cultivo, tenemos la ecuación $x(3) = 2x(0)$, que al revolverla nos lleva a

$$x(3) = 2x(0) \iff Ce^{3a} = 2Ce^{0a} = 2C \iff e^{3a} = 2 \iff 3a = \ln 2 \iff a = \frac{\ln 2}{3}.$$

Para saber por cuanto se habrá multiplicado el número de bacterias al cabo de 5 horas, planteamos igual que antes la ecuación $x(5) = kx(0)$, donde k es el factor de multiplicación. Al resolver esta ecuación obtenemos

$$x(5) = kx(0) \iff Ce^{5\frac{\ln 2}{3}} = kCe^{0\frac{\ln 2}{3}} = kC \iff e^{5\frac{\ln 2}{3}} = k \iff k = 3{,}17.$$

Luego al cabo de 5 horas habrá aproximadamente tres veces más bacterias que al comienzo

b) El número de inicial de bacterias es

$$x(0) = Ce^{0\frac{\ln 2}{3}} = C.$$

Ahora bien, como al cabo de 4 horas había 1000 bacterias, planteamos la ecuación $x(4) = 10000$, que al resolverla, nos proporciona el valor de C.

$$x(4) = Ce^{4\frac{\ln 2}{3}} = 10000 \iff C = \frac{10000}{e^{4\frac{\ln 2}{3}}} = 3968{,}5.$$

16. Medida y Error

1. Si al medir el volumen de un objeto se obtiene como valor más probable 23618,87543 cm^3 con un error de 302,432 cm^3, ¿cuál será la expresión correcta del resultado de dicha medida?

Resolución

Redondeando el error por exceso a la segunda cifra significativa tenemos 310 cm^3, y redondeando la medida a la primera cifra afectada por el error, es decir a las decenas, tenemos 23620 cm^3, luego la expresión se la medida será 23620 ± 310 cm^3.

2. Se ha medido el tiempo de caída de una esfera en un líquido cuatro veces, obteniéndose los valores: 30,5; 29,6; 30,1; 30,8. ¿Cuál será el resultado del experimento?

Resolución

3. En el análisis de la orina de una atleta, en un control antidopaje, se detectan $16{,}5 \pm 0{,}8$ μg de cafeína por cada cm^3 de orina. El resultado del contra-análisis es igual a $13{,}5 \pm 0{,}5$ μg de cafeína por cm^3. ¿Son ambos resultados coincidentes o necesariamente ha existido algún fallo en uno de ellos? Sabiendo que el límite máximo permitido es de 12 μg de cafeína por cm^3, ¿ha dado o no positivo dicho atleta?

Resolución

4. Mediante una cinta métrica dividida en milímetros se ha obtenido que la longitud de una mesa es 1,5250 m y que tiene una anchura de 82,00 cm. ¿Cuál es el área de dicha mesa?

Resolución

5. Supongamos que nos piden calcular la densidad de una pieza homogénea de forma cónica sabiendo que su masa es $m = 300{,}23 \pm 0{,}05$ g, su altura $h = 12{,}3 \pm 0{,}1$ cm, y el radio de la base $r = 7{,}44 \pm 0{,}01$ cm. Teniendo en cuenta que el volumen de un cono es igual $\pi r^2 h/3$, calcular cuánto vale la densidad de la pieza cónica.

Resolución

6. Si suponemos dos cilindros concéntricos, cuyos radios son r el interno y R el externo, y los dos con altura h, y consideramos el volumen de la pieza que queda entre los dos cilindros, calcular el volumen de dicha pieza estimando correctamente el error cometido teniendo en cuenta que se han realizado 6 medidas diferentes de r, R y h:

Medida	R (mm)	r (mm)	h(cm)
1	48,51	43,42	29,12
2	47,39	42,94	29,14
3	48,81	42,59	28,99
4	47,52	43,11	29,13
5	47,93	42,45	29,13
6	47,88	42,11	29,06

Resolución

7. En una fuente se ha llenado completamente de agua un recipiente de base cuadrada de lado l y altura h en un tiempo t, y se quiere medir el caudal de agua q que mana de la fuente ($q = (l^2 h)/t$). Además, el experimento lo han realizado consecutivamente 4 alumnos obteniendo:

Alumno	l	h	t
1	$220{,}4 \pm 0,1$ mm	$535{,}3 \pm 0{,}1$ mm	$314{,}6 \pm 0{,}1$ s
2	$220{,}6 \pm 0{,}1$ mm	$535{,}2 \pm 0{,}1$ mm	$313{,}9 \pm 0{,}1$ s
3	$220{,}8 \pm 0{,}1$ mm	$535{,}9 \pm 0{,}1$ mm	$314{,}2 \pm 0{,}1$ s
4	$221{,}0 \pm 0{,}1$ mm	$535{,}6 \pm 0{,}1$ mm	$314{,}8 \pm 0{,}1$ s

Resolución

Nota: Los problemas marcados con una estrella (★) son problemas de exámenes de otros años.