EJERCICIOS DE CÁLCULO

Asignatura: Matemáticas

Curso: 1º de Grado en Farmacia

Eduardo López Ramírez (elopez@ceu.es)
José Rojo Montijano (jrojo.eps@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

Curso 2014-2015

CEU Universidad San Pablo

Índice

1. Cálculo diferencial en una variable

1. Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3$.

   b) $g(x) = \log_3(1+x)^2$.

   c) $h(x) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1+x}{1-x}$.

   d) $i(x) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1})$.

   Solución

   a) $\frac{df}{dx} = (1+\operatorname{tg}^2((1+x)^3))3(1+x)^2$ y $df = (1+\operatorname{tg}^2((1+x)^3))3(1+x)^2 dx$.

   b) $\frac{dg}{dx} = \frac{2(1+x)\log_3 e}{(1+x)^2}$ y $dg = \frac{2(1+x)\log_3 e}{(1+x)^2} dx$.

   c) $\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \frac{2}{(1-x)^2}$ y $dh = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \frac{2}{(1-x)^2} dx$.

   d) $\frac{di}{dx} = \frac{1}{x^2+2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $di = \frac{1}{x^2+2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

2. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto x_0 indicado.

   a) $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad x_0 = \pi/2$.

   b) $y = \log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \quad x_0 = 0$.

   Solución

   a) Tangente: $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2}$. Normal: $y - \frac{\pi}{2} = -x + \frac{\pi}{2}$.

   b) Tangente: $y = x$. Normal: $y = -x$.

★ 3. Dadas las funciones $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ y $g(x) = x^3 + 2$, ¿existe algún valor de x en el que la recta normal a f y la recta tangente a g en dicho punto sean paralelas?

   Solución

   $x = -1/6$.

4. Un balón relleno de aire tiene radio 10 cm cuando se empieza a introducir más aire, de manera que el radio se incrementa con una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad varía el volumen en ese instante? Nota: El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

   Solución

   800π cm^3/s.

5. Una pipeta cilíndrica de radio 5 mm almacena una solución. Si la pipeta empieza a vaciarse a razón de 0,5 ml por segundo, ¿a qué velocidad disminuye el nivel de la pipeta?

   Solución

   $-6{,}37$ mm/s.

6. La función que explica la desintegración radioactiva es

$$m(t) = m_0 e^{-kt},$$

donde $m(t)$ es la cantidad de materia en el instante t, m_0 es la cantidad inicial de materia, k es una constante conocidad como *constante de desintegración* y t es el tiempo. Calcular la velocidad de desintegración en cualquier instante t. Si para un material concreto $k = 0{,}002$, ¿cuál es el periodo de semidesintegración del material?
Nota: El *periodo de semidesintegración* de un material radioactivo es el tiempo que trasncurre hasta que la masa se reduce a la mitad de su valor incial.

Solución

Velocidad de desintegración: $-km_0e^{-kt}$.
Periodo de semidesintegración: 346.57 años.

---

7. La posición que ocupa un coche que se mueve en línea recta, puede expresarse en función del tiempo según la ecuación

$$e(t) = 4t^3 - 2t + 1.$$

Calcular su velocidad y aceleración en cualquier instante.
Nota: La aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad.

Solución

Velocidad $v(t) = 12t^2 - 2$ y aceleración $a(t) = 24t$.

---

8. El espacio recorrido por un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba, sin tener en cuenta la resistencia del aire, viene dado por la ecuación

$$e(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

donde v_0 es la velocidad inicial con que se lanza el objeto, $g = 9{,}81$ m/s^2 es la constante gravitatoria de la Tierra y t es el tiempo transcurrido desde que el objeto se lanza. Se pide:

a) Calcular la velocidad y la aceleración en cualquier instante.
b) Si el objeto se lanza inicialmente a 50 km/h, ¿cuál será la altura máxima que alcanzará el objeto? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?
c) ¿En qué instante volverá a tocar la tierra el objeto? ¿Con qué velocidad?

Solución

a) Velocidad $v(t) = v_0 - gt$ y aceleración $a(t) = -g$.
b) Alcanzará una altura máxima de 9,83 m a los 1,42 s. La velocidad en ese instante es nula.
c) Tocará tierra de nuevo a los 2,83 s con velocidad $-13{,}89$ m/s.

---

9. Un cilindro de 4 cm de radio (r) y 3 cm de altura (h) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que $\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = 1$ cm/s. Hallar de forma aproximada la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

Solución

$dV = 2\pi rhdt + \pi r^2 dt$ y en el instante inicial tenemos $dV = 40\pi dt$. A los 5 segundos la variación aproximada será $dV(5) = 40\pi 5 = 200\pi$ cm^3/s, y a los 10 segundos $dV(10) = 40\pi 10 = 400\pi$ cm^3/s.

---

10. Se desea medir la superficie de una célula esférica y para ello se ha medido el radio de una célula de 5 μ con un error de 0.2 μ. ¿Cuál será el error aproximado cometido en el cálculo de la superficie de la célula? En general, si al medir el radio se comete siempre un error relativo del 2 %? ¿Cómo afecta esto al error de la medida de la superficie de la célula?
Nota: La superficie de una esfera es $S = 4\pi r^2$. Utilizar la aproximación lineal, es decir, la recta tangente de esta función.

Solución

Para un error en el radio de 0,2 μ el error aproximado en la superficie es $8\pi\ \mu^2$, y para un error relativo del 2 % el error aproximado en la superficie es del 4 %.

---

11. La velocidad de la sangre que fluye por una arteria está dada por la ley de Poiseuille

$$v(r) = cr^2,$$

donde v es la velocidad de la sangre, r es el radio de la arteria y c es una constante. Si se puede medir el radio de la arteria con una precisión del 5 %, ¿qué precisión tendrá el cálculo de la velocidad?

Solución

10 %.

---

12. El pH de una solución mide la concentración de iones de hidrógeno (H^+) y se define como

$$\mathrm{pH} = -\log(\mathrm{H}^+).$$

Estudiar el crecimiento del pH en función de la concentración de H^+.

Solución

El pH decrece a medida que aumenta la concentración de H^+.

---

13. La velocidad de crecimiento v de una planta depende de la cantidad de nitrógeno disponible n según la ecuación

$$v(n) = \frac{an}{k+n}, \quad n \geq 0,$$

donde a y k son constantes positivas. Estudiar el crecimiento de esta función e interpretarlo.

Solución

La velocidad de crecimiento aumenta a medida que aumenta n pero cada vez con menos fuerza, de manera que cuando $n \to \infty$ la vvelocidad de crecimiento sería nula.

---

14. Una partícula se mueve a lo largo de una curva $y = \cos(2x+1)$, siendo $x = t^2 + 1$ y t el tiempo. ¿Con qué velocidad está desplazándose respecto a las direcciones vertical y horizontal cuando $t = 2$?

Solución

Velocidad horizontal: $\frac{dx}{dt} = 2t$ y en el instante $t = 2$, $\frac{dx}{dt}(t = 2) = 4$.
Velocidad vertical: $\frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen}(2t^2 + 3)4t$ y en el instante $t = 2$, $\frac{dy}{dt} = -8 \operatorname{sen} 11$.

---

15. Un punto se mueve en el plano siguiendo una trayectoria

$$\begin{cases} x &= \operatorname{sen} t, \\ y &= t^2 - 1. \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar la derivada de la función $y(x)$ (es decir, $\dfrac{dy}{dx}$) para los puntos $t = 0$ y $t = 2$.

b) Hallar la tangente a la trayectoria en el punto (0,-1).

Solución

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{\cos t}$. $\frac{y}{dx}(t = 0) = 0$ y $\frac{dy}{dx}(t = 2) = 4/\cos 2$.

b) Tantenge: $y = -1$.

★ 16. Las coordenadas paramétricas de un punto material lanzado bajo un ángulo respecto al horizonte son

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

donde t es el tiempo contado a partir del instante en que el punto llega a la posición más alta, v_0 es la velocidad horizontal en el instante $t = 0$ y $g = 9{,}8$ m^2/s es la aceleración de la gravedad. ¿En qué instante la magnitud de la velocidad horizontal será igual a la de la velocidad vertical? ¿Cuánto debería valer v_0 para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente? Calcular la ecuación de la recta tangente en dicho instante con el valor de v_0 calculado.

Solución

Las velocidades serán iguales en el instante $t = \frac{v_0}{9{,}8}$. Para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente, la velocidad inicial debería ser $v_0 = 31{,}3$ m/s.

La ecuación de la recta tangente en dicho instante es $y = -x + 50{,}14$.

★ 17. Dada la función paramétrica

$$\left(x = \frac{(t-2)^2}{t^2+1}, \; y = \frac{2t}{t^2+1} \right)$$

Calcular los valores máximos y mínimos de x y de y. ¿En qué instante la tasa de crecimiento de y coincide con la de x?

Solución

$\frac{dx}{dt} = \frac{4t^2-6t-4}{(t^2+1)^2}$. Puntos críticos: $t = -1/2$ (máximo) y $t = 2$ (mínimo).
$\frac{dy}{dt} = \frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2}$. Puntos críticos: $t = -1$ (mínimo) y $t = 1$ (máximo).
$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ en los instantes $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

---

18. Hallar las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la curva C en el punto P en cada uno de los casos siguientes:

a) $C: y = x^2$, $P = (0,0)$

b) $C: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\operatorname{sen} t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$, $P = (0,2)$

c) $C: x^2 + y^2 = 1$, $P = (\sqrt{2}/2), \sqrt{2}/2)$

d) $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$, $P = (3,0)$

e) $C: x^2 - y^2 = 1$, $P = (1,0)$

f) $C: \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \operatorname{sen} t, \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $P = (1,0)$

19. Hallar al ecuación de la recta tangente y el plano normal a la línea

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = t, \end{cases}$$

en el punto $P = (1,0,0)$.

Solución

Recta tangenet: $(1,t,t)$. Plano normal: $y + z = 0$.

20. Una trayectoria pasa por el punto $(3,6,5)$ en el instante $t = 0$ con velocidad $\mathbf{i} - \mathbf{k}$. Hallar la ecuación del plano normal y de la recta tangente en ese instante.

Solución

Plano normal: $x - z + 2 = 0$. Recta tangente: $(3+t, 6, 5-5)$.

21. Una partícula sigue la trayectoria

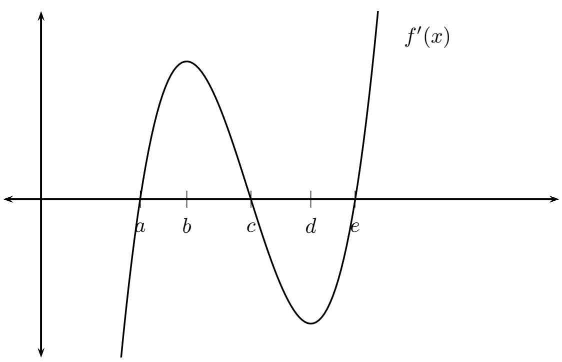
$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = \cos t, \end{cases}$$

hasta que se sale por la tangente en el instante $t = 0$. ¿Dónde estará en el instante $t = 3$?

Solución

Recta tangente: $(1+t, 1-t, 1)$. Posición en el instante $t = 3$: $(4,-2,1)$.

★ 22. La figura adjunta es la de la derivada de una función. Estudiar el comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y convexidad).



Solución

Crecimiento: Decreciente en $(-\infty, a)$ y (c, e), y creciente en (a, c) y (e, ∞).
Extremos: Mínimos en $x = a$ y $x = e$, y máximo en $x = c$.
Concavidad: Cóncava en $(-\infty, b)$ y (d, ∞), y convexa en (b, d).

23. Hallar a, b y c en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $x = 3$, pase por el punto $(1, 0)$ y alcance un máximo en $x = 1$.

Solución

$b = -9$, $c = 15$ y $d = -7$.

24. La sensibilidad de S de un organismo ante un fármaco depende de la dosis x suministrada según la relación
$$S(x) = x(C - x),$$
siendo C la cantidad máxima del fármaco que puede suministrarse, que depende de cada individuo. Hallar la dosis x para la que la sensibilidad es máxima.

Solución

$x = C/2$.

25. La velocidad v de una reacción irreversible $A + B \to AB$ es función de la concentración x del producto AB y puede expresarse según la ecuación
$$v(x) = 4(3 - x)(5 - x).$$
¿Qué valor de x maximiza la velocidad de reacción?

Solución

Ninguno.

26. La cantidad de trigo en una cosecha C depende del nivel de nitrógeno en el suelo n según la ecuación
$$C(n) = \frac{n}{1 + n^2}, \quad n \geq 0.$$
¿Para qué nivel de nitrógeno se obtendrá la mayor cosecha de trigo?

Solución

$n = 1$.

27. Se ha diseñado un envoltorio cilíndrico para unas cápsulas. Si el contenido de las cápsulas debe ser de 0,15 ml, hallar las dimensiones del cilindro para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

Solución

Radio 0,2879 cm y altura 0,5760 cm.

★ 28. Mediante simulación por ordenador se ha podido cuantificar la cantidad de agua almacenada en un acuífero en función del tiempo, $m(t)$, en millones de metros cúbicos, y el tiempo t en años transcurridos desde el instante en el que se ha hecho la simulación, teniendo en cuenta que la ecuación sólo tiene sentido para los t mayores que 0:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

a) En el límite, cuando t tiende a infinito, qué cantidad de agua almacenada habrá en el acuífero?

b) Mediante derivadas, calcular el valor del tiempo en el que el agua almacenada ser máxima y cuál es su cantidad de agua correspondiente en millones de metros cúbicos.

Solución

a) $\lim_{t\to\infty} m(t) = 10$.

b) $\frac{dm}{dt} = e^{-t}(\frac{1}{2}t^{-1/2} - t^{1/2})$. El instante en el que el agua almacenada será máxima es $t = 0{,}5$ años y en dicho instante habrá 10,429 millones de m^3.

★ 29. Sea $f(x)$ una función cuya derivada vale:

$$f'(x) = \frac{(2-x)e^{-\frac{x^2}{2}+2x-2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Se pide:

a) Estudiar el crecimiento de f.

b) Calcular los valores de x en los que f tiene extremos relativos.

c) Estudiar la concavidad de f.

d) Calcular los valores de x en los que f tiene puntos de inflexión.

Solución

a) Creciente en $x < 2$ y decreciente en $x > 2$.

b) Máximo relativo en $x = 2$.

c) Cóncava en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$. Convexa en $(1, 3)$.

d) Puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$.

30. Existen organismos que se reproducen una sóla vez en su vida como por ejemplo los salmones. En este tipo de especies, la velocidad de incremento per cápita v, que mide la capacidad reproductiva, depende de la edad x según la ecuación

$$v(x) = \frac{\log(p(x)h(x))}{x},$$

donde $p(x)$ es la probabilidad de sobrevivir hasta la edad x y $h(x)$ es el número de nacimientos de hembras a la edad x. Calcular la edad óptima de reproducción, es decir, el valor que maximice v, para $p(x) = e^{-0{,}1x}$ y $h(x) = 4x^{0{,}9}$.

Solución

$x = 0{,}58$ años.

2. Cálculo diferencial en varias variables

31. Calcular las siguientes derivadas parciales:

a) $\dfrac{\partial}{\partial x} \ln \dfrac{x}{y}$.

b) $\dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{nRT}{v}$.

Solución

a) $\frac{\partial}{\partial x} \log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x}$.

b) $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{n\,R\,T}{v}\right) = -\frac{n\,R\,T}{v^2}$.

32. La asimilación de CO_2 de una planta depende de la temperatura ambiente (t) y de la intensidad de la luz (l), según la función

$$f(t,l) = ctl^2,$$

donde c es una constante. Estudiar cómo evoluciona la asimilación de CO_2 para distintas intensidades de luz, cuando se mantiene la temperatura constante. Estudiar también cómo evoluciona para distintas temperaturas cuando se mantiene la intensidad de la luz constante.

Solución

$\frac{\partial f}{\partial l}(t,l) = 2ctl$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(t,l) = cl^2$.

33. La abundancia de una determinada especie de planta depende del nivel de nitrógeno en el suelo y del nivel de perturbaciones, de manera que un incremento del nivel de nitrógeno tiene un efecto negativo en la abundacia de esta especie, y un aumento de las perturbaciones también tiene un efecto negativo. Si en un momento dado comienta a aumentar el nivel de nitrógeno en el suelo y también las perturbaciones debidas al pastoreo, ¿cómo se verá afectada la abundancia de la especie?

Solución

La abundancia de la especie disminuirá.

34. La velocidad de crecimiento de un organismo depende de la disponibilidad de alimento y del número de competidores en busca de alimento. ¿Cómo se verá afectada la velocidad de crecimiento si la disponibilidad de alimento aumenta con el tiempo y el número de competidores disminuye?

Solución

La velocidad de crecimiento aumentará.

★ 35. Calcular el gradiente de la función

$$f(x,y,z) = \log \frac{\sqrt{x}}{yz} + \operatorname{arc\,sen}(xz).$$

Solución

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{z}{\sqrt{1-x^2z^2}} + \frac{1}{2x}, \frac{-1}{y}, \frac{x}{\sqrt{1-x^2\,z^2}} - \frac{1}{z}\right)$.

★ 36. Dada la función

$$f(x,y,z) = \log \sqrt{xy - \frac{z^2}{xy}}$$

a) Hallar el vector gradiente.

b) Hallar un punto en el que el vector gradiente sea paralelo a la bisectriz del plano XY, y calcular el vector gradiente en dicho punto.

Solución

a) $\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{z^2+x^2y^2}{2xz^2-2x^3y^2}, -\frac{z^2+x^2y^2}{2yz^2-2x^2y^3}, \frac{z}{z^2-x^2y^2}\right)$.

b) El vector gradiente es paralelo a la bisectriz del plano XY en cualquier punto de la forma $(a,a,0)$ con $a \in \mathbb{R}$.
$\nabla f(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

37. Una nave espacial está en problemas cerca del sol. Se encuentra en la posición $(1,1,1)$ y la temperatura de la nave cuando está en la posición (x,y,z) viene dada por $T(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x^2-2y^2-3z^2}$ donde x, y, z se miden en metros. ¿En qué dirección debe moverse la nave para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible?

Solución

Debe moverse en la dirección $-\nabla f(1,1,1) = e^{-6}(2,4,6)$.

38. Un organismo se mueve sobre una superficie inclinada siguiendo la línea de máxima pendiente descendiente. Si la expresión de la superficie es

$$f(x,y) = x^2 - y^2,$$

calcule la dirección en la que se moverá el organismo en el punto $(2,3)$.

Solución

Se moverá en la dirección $-\nabla f(2,3) = (-4,6)$.

39. Obtener los puntos críticos de $z = f(x,y)$ para:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x,y) = x^2y + y^2x$.

c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.

Solución

a) $(0,0)$.

b) $(0,0)$.

c) $(0,0)$.

40. La superficie de una montaña tiene la forma

$$S : z = a - bx^2 - cy^2,$$

donde a, b y c son constantes, x es la coordenada Este-Oste e y la coordenada Norte-Sur en el mapa, y z la altura sobre el nivel del mar en metros. En el punto $P = (1,1)$ del mapa, ¿en qué dirección crece más rapidamente la altura?

Solución

$(-2b, -2c)$.

41. Hallar las direcciones de máximo y mínimo crecimiento de las siguientes funciones en el punto P:

   a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P = (-1,1)$.
   b) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\operatorname{sen} y$, $P = (1,0)$.
   c) $f(x,y,z) = \log(xy) + \log(yz) + \log(xz)$, $P = (1,1,1)$.
   d) $f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$, $P = (1,1,0)$.

Solución

   a) Máximo crecimiento en la dirección $(-1,1)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(1,-1)$.
   b) Máximo crecimiento en la dirección $(0,2)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(0,-2)$.
   c) Máximo crecimiento en la dirección $(2,2,2)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(-2,-2,-2)$.
   d) Máximo crecimiento en la dirección $(2,3,6)$ y máximo decrecimiento en la dirección $(-2,-3,-6)$.

42. Si $f(x,y,z) = x^3y^2z$ y $g(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, calcular $(f \circ g)'(t)$.

Solución

$(f \circ g)'(t) = e^{3t}(3\operatorname{sen} t \cos^2 t - 2\operatorname{sen}^2 t \cos t + \cos^3 t)$.

★ 43. La Quimiotaxis es el movimiento de los organismos dirigido por un gradiente de concentración, es decir, en la dirección en la que la concentración aumenta con más rapidez. El moho del cieno Dictyoselium discoideum muestra este comportamiento. En esta caso, las amebas unicelulares de esta especie se mueven según el gradiente de concentración de una sustancia química denominada adenosina monofosfato (AMP cíclico). Si suponemos que la expresión que da la concentración de AMP cíclico en un punto de coordenadas (x,y,z) es:

$$C(x,y,z) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^4 + 1}}$$

y se sitúa una ameba de moho del cieno en el punto $(-1,0,1)$, ¿en qué dirección se moverá la ameba?

★ 44. La presión en la posición (x,y,z) de un espacio es

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^3$$

y la trayectoria de un observador A es

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1/t \end{cases} \qquad t > 0.$$

Se pide:

   a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de A en el punto $(1,1,1)$.
   b) ¿Es la dirección de esta trayectoria al pasar por el punto $(1,1,1)$ aquella en la que el crecimiento de g es máximo? Justificar la respuesta.

Solución

a) $l : (1+t, 1, 1-t)$.

b) La dirección de la trayectoria A en $(1,1,1)$ es $(1,0,-1)$ y la dirección de máximo crecimiento de g en $(1,1,1)$ es $(2,2,-3)$, luego no coinciden.

★ 45. Obtener la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie

$$S : xyz = 8$$

en el punto $P = (4, -2, -1)$.

Solución

Recta normal $l : (4+2t, -2-4t, -1-8t)$. Plano tangente $\pi : 2x - 4y - 8z + 24 = 0$.

46. Derivar implícitamente las siguientes expresiones tomando y como función de x:

a) $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$.

b) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x^2+y^2}$.

Solución

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2+y^2}{-2xy+y^2}$.

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy+\cos(x+y)}{(x^2+y^2)+2y^2-\cos(x+y)}$.

★ 47. Dada la función $xy + e^x - \log y = 0$, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a ella en el punto $x = 0$.

Solución

Tangente: $y = (e^2+e)x + e$. Normal: $y = \frac{-x}{e^2+e} + e$.

★ 48. Suponiendo que la temperatura, T en grados centígrados, y el volumen, V en metros cúbicos, de un gas real encerrado en un contenedor de volumen variable están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$T^2\left(V^2 - \pi^2\right) - V\cos(TV) = 0$$

Se pide:

a) Calcular la derivada del volumen con respecto a la temperatura en el momento en el que el volumen es de π m^3 y la temperatura es medio grado centígrado.

b) ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que daría el volumen en función de la temperatura en el mismo punto del apartado anterior?

c) Suponiendo que tanto la temperatura como el volumen son, a su vez, funciones de la presión, qué ecuación ligaría la derivada de la temperatura con respecto a la presión con la derivada del volumen con respecto a la presión.

Solución

a) $\frac{dV}{dT} = \frac{-2T(V^2-\pi^2)-V^2\operatorname{sen}(TV)}{2T^2V-\cos(TV)+TV\operatorname{sen}(TV)}$ y $\frac{dV}{dT}(V=\pi, T=0{,}5) = -pi\ \mathrm{m}^3/^{\circ}\mathrm{C}$.

b) Tangente: $V = \pi(-T+1{,}5)$.

c) $2T\frac{dT}{dP}(V^2-\pi^2) + T^2(2V\frac{dV}{dT}) - \frac{dV}{dT}\cos(VT) - V(-\operatorname{sen}(TV)(\frac{dT}{dP}V + T\frac{dV}{dP})) = 0$.

---

49. Hallar la recta tangente y la recta normal a la línea C en el punto P en cada uno de los casos siguientes:

a) $C : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1,\ P = (-3,0)$.

b) $C : x^3 - y^5 + xy^2 = 8,\ P = (2,0)$.

c) $C : x = y^2,\ P = (0,0)$.

d) $C : x^{2/3} + y^{2/3} = 1,\ P = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$.

Solución

a) Tangente $x = -3$ y normal $y = 0$.

b) Tangente $x = 2$ y normal $y = 0$.

c) Tangente $x = 0$ y normal $y = 0$.

d) Tangente $y = -x + \sqrt{2}/2$ y normal $y = x$.

---

50. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie S en el punto P en cada uno de los siguientes casos:

a) $S : x - y + z = 1,\ P = (0,0,1)$.

b) $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ P = (0,1,0)$.

c) $S : z = \log(x^2+y^2),\ P = (1,0,0)$.

d) $S : z = e^{-(x^2+y^2)},\ P = (0,0,1)$.

e) $S : z = e^{x+y}\operatorname{sen} x,\ P = (\pi,0,0)$.

Solución

a) Plano tangente $x - y + z - 1 = 0$ y recta normal $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

b) Plano tangente $y = 1$ y recta normal $(x = 0, y = 1+2t, z = 0)$.

c) Plano tangente $2x - z - 2 = 0$ y recta normal $(x = 1+2t, y = 0, z = -t)$.

d) Plano tangente $z = 1$ y recta normal $(x = 0, y = 0, z = 1+t)$.

e) Plano tangente $z = -e^{\pi}(x-\pi)$ y recta normal $(x = \pi - e^{\pi}t, y = 0, z = -t)$.

---

51. Suponiendo que z es función de x e y ($z = f(x,y)$), a partir de la ecuación $F(x,y,z) = 0$, deducir que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Aplicarlo para obtener $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)$, sabiendo que $x^2yz = 4$ y que $f(2,1) = 1$.

Solución

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -1.$

★ 52. La ecuación

$$x \log y + \frac{2e^{y^2+z}}{x} - \frac{x}{z^2} = -1$$

define a z como función de x e y alrededor del punto $(2,1,-1)$. Calcular el vector gradiente de z en ese punto e interpretarlo.

Solución

$\nabla z(2,1,-1) = (-1/2, 4/3).$

---

53. ¿En qué direcciones se anulará la derivada direccional de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

en el punto $P = (1,1)$?

Solución

En la dirección $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

---

54. ¿Existe alguna dirección en la que la derivada direccional en el punto $P = (1,2)$ de la función

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$$

valga 14?

Solución

No.

---

55. La derivada direccional de una función f en un punto P es máxima en la dirección del vector $(1,1,-1)$ y su valor es $2\sqrt{3}$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en P en la dirección del vector $(1,1,0)$?

Solución

$2\sqrt{2}$.

---

56. Dado el campo escalar

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + xyz^3 - zx$$

en el punto $P = (1,2,3)$, se pide:

a) Calcular la derivada direccional de f en P a lo largo del vector unitario $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.

b) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional de f en P? Obtener el valor de dicha derivada direccional.

Solución

a) $15\sqrt{2}$.

b) La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente $(53, 23, 53)$ y vale $\sqrt{6147}$.

---

57. Calcular el vector gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

a) $e^{x^2+y^2+z^2}$ *b*) $\operatorname{sen}((x^2-y^2)z)$

Solución

a) $\nabla e^{x^2+y^2+z^2} = \left(2\,x\,e^{z^2+y^2+x^2}, 2\,y\,e^{z^2+y^2+x^2}, 2\,z\,e^{z^2+y^2+x^2}\right)$,

$$He^{x^2+y^2+z^2} = \begin{pmatrix} (4x^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} & 4xye^{x^2+y^2+z^2} & 4xze^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xye^{x^2+y^2+z^2} & (4y^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xze^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} & (4z^2+2)e^{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

b) $\nabla \operatorname{sen}((x^2-y^2)z) = \left(2\,x\,z\,\cos\left(\left(x^2-y^2\right)\,z\right), -2\,y\,z\,\cos\left(\left(x^2-y^2\right)\,z\right), \left(x^2-y^2\right)\,\cos\left(\left(x^2-y^2\right)\,z\right)\right)$

$H\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) =$

$$\begin{pmatrix} 4x^2\operatorname{sen}((x^2-y^2)z)+2\cos((x^2-y^2)z) & 4xy\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & -2x(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) \\ 4xy\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & -4y^2\operatorname{sen}((x^2-y^2)z)-2\cos((x^2-y^2)z) & 2y(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) \\ -2x(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & 2y(x^2-y^2)\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) & -(x^2-y^2)^2\operatorname{sen}((x^2-y^2)z) \end{pmatrix}.$$

★ 58. La siguiente función determina la temperatura en cada punto del plano real:

$$f(x,y) = e^{x+2y}\cos(x^2+y^2).$$

Se pide:

a) Calcular el gradiente de f.

b) Si estamos situados en el origen de coordenadas, ¿en qué dirección aumentará más rápidamente la temperatura? ¿Y si estuviésemos en el punto $(0,1)$?

c) Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de f en el origen de coordenadas.

Solución

a) $\nabla f(x,y) = e^{x+2y}\left(\cos(x^2+y^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2), 2\cos(x^2+y^2) - 2y\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right)$.

b) $\nabla f(0,0) = (1,2)$ y $\nabla f(0,1) = (3{,}99\,,\,-4{,}45)$.

c) $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad |Hf(0,0)| = 0$.

★ 59. La relación que modeliza el potencial eléctrico V de un punto del plano en función de su distancia, es $V = \log D$, donde $D = \sqrt{x^2+y^2}$.

Se pide:

a) Calcular el gradiente de V.

b) Hallar la dirección de máxima variación del potencial eléctrico en el punto $(x,y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

c) Calcular la matriz Hessiana y el Hessiano de V en el punto anterior.

d) Si nos movemos a lo largo de la curva $y = x+1$, cuál será el mínimo potencial alcanzado?

Solución

a) $\nabla V(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

b) $\nabla V(\sqrt{3},\sqrt{3}) = \sqrt{3}/6(1,1)$.

c) $HV(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} \\ \frac{-2xy}{y^4+2x^2y^2+x^4} & \frac{x^2-y^2}{y^4+2x^2y^2+x^4} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/6 & 0 \end{pmatrix}$, y $|H(\sqrt{3},\sqrt{3})| = -1/36$.

d) El potencial máximo se alcanza en $(x=-1/2, y=1/2)$ y vale $V(-1/2,1/2) = -\dfrac{\log 2}{2}$.

★ 60. Una barra de metal de un metro de largo se calienta de manera irregular y de forma tal que a x metros de su extremo izquierdo y en el instante t minutos, su temperatura en grados centígrados esta dada por $H(x,t) = 100e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi xt)$ con $0 \leq x \leq 1$.

a) Calcular $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0{,}2,1)$ y $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0{,}8,1)$. ¿Cuál es la interpretación práctica (en términos de temperatura) de estas derivadas parciales? Explicar por qué cada una tiene el signo que tiene.

b) Calcular la matriz hessiana de H.

Solución

a) $\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}2,\ 1) = 100e^{-0{,}1}\cos(0{,}2\pi)\pi = 229{,}9736$
$\frac{\partial H}{\partial x}(0{,}8,\ 1) = 100e^{-0{,}1}\cos(0{,}8\pi)\pi = -229{,}9736$.

b) $\begin{pmatrix} -100e^{-0{,}1t}\pi^2t^2\operatorname{sen}(\pi xt) & 100e^{-0{,}1t}\left((-0{,}1\pi t+\pi)\cos(\pi xt) - \pi^2 xt\operatorname{sen}(\pi xt)\right) \\ 100e^{-0{,}1t}\left((-0{,}1\pi t+\pi)\cos(\pi xt) - \pi^2 xt\operatorname{sen}(\pi xt)\right) & 100e^{-0{,}1t}\left(0{,}01\operatorname{sen}(\pi xt) - (0{,}2+\pi^2x^2)\cos(\pi xt)\right) \end{pmatrix}$

---

61. En el ajuste de regresión de una recta $y = a + bx$, se suele utilizar la técnica de mínimos cuadrados que consisten en buscar los valores de a y b que hacen mínima la función

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2,$$

donde el sumatorio abarca a todos los pares de la muestra (x_i, y_i) para $i = 1,\ldots,n$, siendo n el tamaño de la muestra.

Demostrar que esta función alcanza el mínimo en los puntos

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{y } b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

62. Obtener el desarrollo de Taylor de segundo orden de f alrededor del punto P en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$, $P = (0,0)$.

b) $f(x,y) = e^x\cos y$, $P(0,0)$.

c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $P(1,\pi/2)$.

Solución

a) $P^2_{f,P}(x,y) = x + 2y$.

b) $P^2_{f,P}(x,y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2}$.

c) $P^2_{f,P}(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 - \pi(x-1)(y-\pi/2) - (y-\pi/2)^2\right)$.

63. Dada la función
$$f(x, y, z) = e^x \sqrt{y} z,$$
estimar el valor de $f(0{,}01, 24{,}8, 1{,}02)$ mediante un desarrollo de Taylor lineal alrededor del punto $P = (0, 25, 1)$.

Solución

5,08.

64. Hallar las aproximaciones lineal y cuadrática de la expresión
$$\frac{(3{,}98 - 1)^2}{(5{,}97 - 3)^2}$$
usando desarrollos de Taylor. Comparar el resultado con el valor exacto.

Solución

La aproximación lineal es 1,00666666 y la cuadrática 1,006744438.

★ 65. Dada la función $f(x, y) = \sqrt{xy}$, se pide:

a) Calcular el polinomio de Taylor de primer grado centrado en el punto $(4, 9)$.
b) Calcular el valor aproximado de $f(4{,}01,\ 8{,}99)$ a partir del polinomio anterior.

Solución

a) $P(x, y) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y$.
b) $f(4{,}01,\ 8{,}99) \approx 6{,}00416667$.

★ 66. Si suponemos que el rendimiento de una cosecha, R, depende de las concentraciones de nitrógeno, n, y fósforo, p, presentesen el suelo según la función:
$$R(n, p) = n \cdot p \cdot e^{-(n+p)}$$

a) Calcular todas las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función $R(n, p)$.
b) Teniendo en cuenta que una condición necesaria para que una función de varias variables presente un máximo en un punto es que todas las derivadas parciales de primer orden se anulen en dicho punto, ¿cuánto deben valer las concentraciones de nitrógeno y fósforo para que el rendimiento de la cosecha sea máximo?

Solución

El rendimiento de la cosecha será máximo para $n = p = 1$.

67. Estudiar los extremos y los puntos de silla de f en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$.
c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.
d) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$.

Solución

a) Mínimo en $(0,0)$.
b) Punto de silla en $(0,0)$.
c) No se puede saber con el hessiano.
d) Mínimo en $(0,0)$.

68. La función

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x - \left(\frac{y^3}{3} - y\right)$$

tiene un máximo, un mínimo y dos puntos de silla. Encontrarlos.

Solución

Máximo en $(-1,1)$, mínimo en $(1,-1)$ y puntos de silla en $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

★ 69. Hallar los extremos relativos y los puntos de silla de la función:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2),$$

con $a \neq 0$.

Solución

No tiene máximos relativos. Mínimos relativos en $(-a,0)$ y $(a,0)$. Punto de silla en $(0,0)$.

★ 70. Dado el campo escalar

$$h(x,y) = xy + \frac{xy^2}{2} - 2x^2,$$

determinar sus extremos relativos y sus puntos de silla.

Solución

Máximo relativo en $(-1/8,-1)$. No tiene mínimos relativos. Puntos de silla en $(0,0)$ y $(0,-2)$. $(0,0)$.

3. Ecuaciones Diferenciales

71. Integrar las siguientes ecuaciones de variables separables:

a) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$ con la condición inicial $y(0) = 1$.
b) $(1+e^x)yy' = e^y$ con la condición inicial $y(0) = 0$.
c) $\mathrm{e}^y(1+x^2)y' - 2x(1+\mathrm{e}^y) = 0$.
d) $y - xy' = a(1 + x^2y')$.

Solución

a) $-\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2} - 1$.
b) $e^{-y}(y+1) = \log(1+e^x) - x - \log 2 + 1$.
c) $y = \log(C(1+x^2) - 1)$.
d) $y = C\frac{x}{ax+1} + a$.

---

72. La desintegración radioactiva está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial x}{\partial t} + ax = 0,$$

donde x es la masa, t el tiempo y a es una constante positiva. La vida media T es el tiempo durante el cual la masa se desintegra a la mitad de su valor inicial. Expresar T en función de a y evaluar a para el isótopo de uranio U^{238}, para el cual $T = 4'5 \cdot 10^9$ años.

Solución

$T = \frac{\log 2}{a}$ y $a = 1{,}54 \cdot 10^{-10}$ años^{-1}.

---

73. El azúcar se disuelve en el agua con una velocidad proporcional a la cantidad que queda por disolver. Si inicialmente había 13.6 kg de azúcar y al cabo de 4 horas quedan sin disolver 4.5 kg, ¿cuánto tardará en disolverse el 95 % del azúcar contando desde el instante inicial?

Solución

$C(t) = 13{,}6e^{-0{,}276t}$ y el instante en que se habrá disuelto el 95 % del azúcar es $t_0 = 10{,}854$ horas.

★ 74. Una reacción química sigue la siguiente ecuación diferencial

$$y' - 2y = 4,$$

donde $y = f(t)$ es la concentración de oxígeno en el instante t (medido en segundos). Si la concentración de oxígeno al comienzo de la reacción era nula, ¿cuál será la concentración (mg/lt) a los 3 segundos? ¿En qué instante la concentración de oxígeno será de 200 mg/lt?

Solución

$y(t) = 2e^{2t} - 2$. La concentración a los tres segundos será $y(3) = 804$ mg/lt y el instante en que la concentración de oxígeno será de 200 mg/lt es $t_0 = 2{,}3076$ s.

---

75. Un depósito contiene 5 kg de sal disueltos en 500 litros de agua en el instante en que comienza entrar una solución salina con 0.4 kg de sal por litro a razón de 10 litros por minuto. Si la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación y sale la misma cantidad de litros que entra, ¿cuánta sal quedará en el depósito después de 5 minutos? ¿y después de 1 hora?

Nota: La tasa de variación de la cantidad de sal en el tanque es la diferencia entre la cantidad de sal que entra y la que sale del tanque en cada instante.

Solución

$C(t) = -195e^{-t/50} + 200$. La cantidad de sal a los 5 minutos será $C(5) = 23{,}557$ kg y a la hora $C(60) = 141{,}267$ kg.

★ 76. Sea la siguiente ecuación diferencial que relaciona la temperatura y el tiempo en un determinado sistema físico: $x't^2 - x't + x' - 2xt + x = 0$, siendo x la temperatura expresada en Kelvins y t el tiempo en segundos.

Sabiendo que la temperatura en el instante inicial del experimento es 100 K, calcular la temperatura en función del tiempo, y dar la temperatura del sistema físico tres segundos después de comenzar el experimento.

SOLUCIÓN

$x(t) = 100(t^2 - t + 1)$ y la temperatura del sistema a los tres segundos de comenzar el experimento es $x(3) = 700$ K.

★ 77. Se tiene un medicamento en un frigorífico a 2°C, y se debe administrar a 15°C. A las 9 h se saca el medicamento del frigorífico y se coloca en una habitación que se encuentra a 22°C. A las 10 h se observa que el medicamento está a 10°C. Suponiendo que la velocidad de calentamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medicamento y la del ambiente, ¿en qué hora se deberá administrar dicho medicamento?

SOLUCIÓN

A las 11,06 horas.

★ 78. La cantidad de masa de un determinado reactivo de una reacción química, M, en gramos, es función del tiempo, en segundo, y se rige mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$M' - (a + b)M = 0$$

donde a y b son constantes. Si inicialmente tenemos 20 gramos de reactivo, al cabo de 10 segundos tenemos 40 gramos, calcular:

a) La cantidad de reactivo para todo tiempo t.

b) La cantidad de reactivo al cabo de medio minuto.

c) ¿Cuando será la cantidad de reactivo 100 g?

SOLUCIÓN

a) $M(t) = 20\, e^{\frac{\ln 2}{10} t}$.

b) $M(30) = 160$ gr.

c) $t_0 = 23{,}22$ s.

★ 79. En una reacción química, un compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional al cuadrado de la cantidad no transformada. Si había inicialmente 20 gr de la sustancia original y tras 1 hora queda la mitad, ¿en qué momento se habrá transformado el 75 % de dicho compuesto?

SOLUCIÓN

$C(t) = \frac{20}{t+1}$ y el instante en que se habrá transformado el 75 % de la cantidad inicial es $t_0 = 3$ horas.

★ 80. La cantidad de masa, M, expresada en Kg, de sustancias contaminantes en un depósito de aguas residuales, cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{dM}{dt} = -0{,}5M + 1000$$

donde k es una constante y t es el tiempo expresado en días (podemos imaginar que el depósito está conectado a una depuradora que elimina sustancia contaminante con un ritmo proporcional a la propia cantidad de contaminante, lo cual explicaría el sumando $-0{,}5M$, y que también hay un aporte constante de contaminante de 1000 kg/día, que puede provenir de un desagüe, lo cual explicaría el sumando constante $+1000$).

Si la cantidad inicial de contaminante es de 10000 Kg:

a) ¿Cuál será la cantidad de contaminante para todo tiempo t?

b) ¿Cuál será la cantidad de contaminante al cabo de una semana?

Solución

a) $M(t) = 8000e^{-0{,}5t} + 2000$.

b) $M(7) = 2241{,}579$ kg.

81. El plasma sanguíneo se conserva a 4ºC. Para poder utilizarse en una transfusión el plasma tiene que alcanzar la temperatura del cuerpo (37ºC). Sabemos que se tardan 45 minutos en alcanzar dicha temperatura en un horno a 50ºC. ¿Cuánto se tardará si aumentamos la temperatura del horno a 60º?

Solución

Con el horno a 50ºC se tiene $T(t) = -46e^{-0{,}02808t} + 50$, con el horno a 60ºC se tiene $T(t) = -56e^{-0{,}02808t} + 60$ y en este horno tardará 31,69 min.

82. Hallar las curvas tales que en cada punto (x, y) la pendiente de la recta tangente sea igual al cubo de la abscisa en dicho punto. ¿Cuál de estas curvas pasa por el origen?

Solución

$y = x^4/4$.

★ 83. Obtener la ecuación de la curva que pasa por el punto $P = (1, 1)$, tal que la pendiente de la tangente en cada punto coincida con el cuadrado de su ordenada.

Solución

$y = \frac{-1}{x-2}$.

84. Al introducir glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio de concentración global de glucosa con respecto al tiempo $c(t)$ se explica mediante la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc,$$

donde G es la velocidad constante a la que se suministra la glucosa, V es el volumen total de la sangre en el cuerpo y k es una constante positiva que depende del paciente. Se pide calcular $c(t)$.

Solución

$c(t) = De^{kt} + \frac{G}{100Vk}$

85. La temperatura T de una habitación en un día de invierno varía con el tiempo de acuerdo a la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = \begin{cases} 40 - T, & \text{si la calefacción está encendida;} \\ -T, & \text{si la calefacción está apagada.} \end{cases}$$

Suponiendo que la temperatura del aula es de 5ºC a las 9:00 de la mañana, y que a esa hora se enciende la calefacción, pero que debido a una avería la calefacción permanece apagada de 11:00 a 12:00, ¿qué temperatura habrá en la habitación a las 13:00?

Solución

De 9 a 11 la temperatura es $T(t) = -35e^{-t} + 40$ y la temperatura a las 11 será de 35,263ºC.
De 11 a 12 la temperatura es $T(t) = 35{,}263e^{-t}$ y la temperatura a las 12 será de 12,973ºC.
De 12 a 13 la temperatura es $T(t) = -27{,}027e^{-t} + 40$ y la temperatura a las 13 será de 30,057ºC.

★ 86. Dos figuras de cerámicas del mismo material se ponen en un horno para su cocción a 1000°C. Si en el instante en que se meten al horno la primera está a 40°C y la segunda a 5°C, y al minuto la temperatura de la primera ha aumentado hasta los 200°C, ¿cuales serán sus temperaturas a los 5 minutos?

★ 87. El carbono contenido en la materia viva incluye una ínfima proporción del isótopo radioactivo C^{14}, que proviene de los rayos cósmicos de la parte superior de la atmósfera. Gracias a un proceso de intercambio complejo, la materia viva mantiene una proporción constante de C^{14} en su carbono total (esencialmente constituido por el isótopo estable C^{12}). Después de morir, ese intercambio cesa y la cantidad de carbono radioactivo disminuye: pierde 1/8000 de su masa al año. Estos datos permiten determinar el año en que murió un individuo. Se pide:

a) Si el análisis de los fragmentos de un esqueleto de un hombre de Neandertal mostró que la proporción de C^{14} era de 6,24 % de la que hubiera tenido al estar vivo. ¿Cuándo murió el individuo?

b) Calcular la vida media del carbono C^{14}, es decir, el tiempo a partir del cual se ha desintegrado la mitad del carbono inicial.

88. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $y' - 2y = 4$.

b) $y' - 6xy = x$.

c) $\frac{dz}{dt} + \frac{3z}{10+3t} = 6$ con la condición inical $z(2) = 100$.

d) $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

Solución

a) $y = Ce^{2x} - 2$.

b) $y = Ce^{3x^2} - \frac{1}{6}$.

c) $z = \dfrac{9t^2 + 60t + 1444}{3t + 10}$.

d) $y = 2e^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$.

89. Un tanque de 50 litros contiene inicialmente 10 litros de agua. En el instante inicial se vierte al tanque una disolución salina que contiene 100 gr de sal por cada litro de agua, a razón de 4 litros por minuto, mientras que la mezcla bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 2 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que se llene el depósito? En dicho instante, ¿qué cantidad de sal habrá en el depósito?

Solución

El depósito se llenará a los 20 minutos y contendrá 4,8 kg de sal.

90. Una colonia de salmones vive tranquilamente en una zona costera. La tasa de natalidad es del 2 % por día y la de mortalidad del 1 % por día. En el instante inicial, la colonia tiene 1000 salmones y ese día llega un tiburón a esa zona costera que se come 15 salmones todos los días. ¿Cuánto tiempo tarda el tiburón en hacer desaparecer a la colonia de salmones?

Solución

Aproximadamente 110 días.

★ 91.

a) En una reacción química, una sustancia A se transforma en otra B con una velocidad del doble de la cantidad de sustancia A. Si en el instante inicial la cantidad de A es de 5 gr/dl, ¿qué cantidad de sustancia A habrá a los 2 segundos?

b) Si en esa misma reacción, la sustancia B, a su vez, se transforma en otra C a una velocidad del triple de la cantidad de B, sabiendo que al comienzo de la reacción la cantidad de sustancia B era nula, ¿qué cantidad de B habrá a los 2 segundos?

Solución

a) Cantidad de sustancia A a los 2 segundos: 0,0916 gr/dl.

b) Cantidad de sustancia B a los 2 segundos: 0,1584 gr/dl.

Nota: Los problemas marcados con una estrella (★) son problemas de exámenes de otros años.