(1,1)

EJERCICIOS DE CÁLCULO

Asignatura: Matemáticas

Curso: 1º de Grado en Farmacia

Santiago Angulo Díaz-Parreño (sangulo@ceu.es)
José Rojo Montijano (jrojo.eps@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

Curso 2011-2012

CEU Universidad San Pablo

Índice

1. Derivadas y Diferenciales

1. Estudiar si es derivable la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $x = 1$.

Solución

La función no es derivable ya que $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \infty$.

2. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista.

   a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

   b) $g(x) = 2x + |x^2 - 2|$.

Solución

   a) La función es derivable en $x = 0$ ya que $f'^-(0) = f'^+(0) = 1$ y la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   b) La función no es derivable en $x = -\sqrt{2}$ ya que $g'^-(-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$ y $g'^+(-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$, y tampoco es derivable en $x = \sqrt{2}$ ya que $x = -\sqrt{2}$ ya que $g'^-(\sqrt{2}) = 2-2\sqrt{2}$ y $g'^+(\sqrt{2}) = 2+2\sqrt{2}$. En el resto de los puntos, la derivada vale

$$g'(x) = \begin{cases} 2+2x & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2-2x & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 2+2x & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

donde a y b son constantes.

   a) ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea continua en todo su dominio? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.

   b) ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea derivable en todo su dominio? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.

Solución

   a) La función es continua en todo el dominio si $a = -3$ y $b = -1$.

   b) No existe ningún valor de a y b con los que la función sea derivable en todo el dominio.

★ 4. Dada la función
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}^2 x & \text{si } x\le 0,\\ ax^2+b & \text{si } 0<x\le c,\\ \ln x & \text{si } c<x,\end{cases}$$
con a, b y c constantes, ¿existe algún valor de las constantes de manera que la función sea continua y derivable en todo su dominio?

Solución

$a=\frac{1}{2e}, b=0, c=e^{1/2}$.

5. Hallar la función derivada y el diferencial de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\operatorname{tg}(1+x)^3$.

b) $g(x)=\log_3(1+x)^2$.

c) $h(x)=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{1+x}{1-x}$.

d) $i(x)=\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1})$.

Solución

a) $\frac{df}{dx}=(1+\operatorname{tg}^2((1+x)^3))3(1+x)^2$ y $df=(1+\operatorname{tg}^2((1+x)^3))3(1+x)^2dx$.

b) $\frac{dg}{dx}=\frac{2(1+x)\log_3 e}{(1+x)^2}$ y $dg=\frac{2(1+x)\log_3 e}{(1+x)^2}dx$.

c) $\frac{dh}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}\frac{2}{(1-x)^2}$ y $dh=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}\frac{2}{(1-x)^2}dx$.

d) $\frac{di}{dx}=\frac{1}{x^2+2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $di=\frac{1}{x^2+2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

6. Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto x_0 indicado.

a) $y=x^{\operatorname{sen} x}$, $x_0=\pi/2$.

b) $y=(3-x^2)^4\sqrt[3]{5x-4}$, $x_0=1$.

c) $y=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $x_0=0$.

Solución

a) Tangente: $y-\frac{\pi}{2}=x-\frac{\pi}{2}$. Normal: $y-\frac{\pi}{2}=-x+\frac{\pi}{2}$.

b) Tangente: $y-2^4=-\frac{112}{3}(x-1)$. Normal: $y-2^4=\frac{3}{112}(x-1)$.

c) Tangente: $y=x$. Normal: $y=-x$.

★ 7. Dadas las funciones $f(x)=\log(\dfrac{x^2}{2})$ y $g(x)=+\sqrt{x^2+2}$, ¿existe algún valor de x en el que la recta normal a f y la recta tangente a g en dicho punto sean paralelas?

Solución

$x=-\sqrt{2}$, $x=0$ y $x=\sqrt{2}$.

8. Hallar la expresión de la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = a^x \log a$.

b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$.

c) $h(x) = \dfrac{9x^2 - 2x - 25}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$.

d) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solución

a) $f^{(n} = (\log a)^{n+1} a^x$.

b) $g^{(n} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2} & \text{si } x = 4k, \\ \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2} & \text{si } x = 4k+1, \\ \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x}{2} & \text{si } x = 4k+2, \\ \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{2} & \text{si } x = 4k+3. \end{cases}$

c) Descomponiendo en fracciones simples, $h^{(n}(x) = \frac{3(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$.

d) $j^{(n}(x) = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i-1}{2^n} (1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$.

★ 9. Calcular la derivada n-ésima de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}.$$

Apoyándose en el cálculo anterior, dar la expresión de la derivada de orden 20 de f.

Solución

$f^{(n}(x) = (-1)^n 3n!(x+2)^{-n+1}-$ y $f^{(20}(x) = 3 \cdot 20!(x+2)^{-21}$.

10. Un cilindro de 4 cm de radio (r) y 3 cm de altura (h) se somete a un proceso de calentamiento con el que varían sus dimensiones de tal forma que $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dh}{dt} = 1$ cm/s. Hallar la variación de su volumen a los 5 segundos y a los 10 segundos.

Solución

$dV = 2\pi rh dt + \pi r^2 dt$ y en el instante inicial tenemos $dV = 40\pi dt$. A los 5 segundos la variación aproximada será $dV(5) = 40\pi 5 = 200\pi$ cm^3/s, y a los 10 segundos $dV(10) = 40\pi 10 = 400\pi$ cm^3/s.

★ 11. La ecuación de los gases perfectos es $PV = CT$ donde C es constante. Si en un cierto instante el volumen es 0.3 m^3, la presión es 90 Pa, la temperatura 290 K, y comenzamos a aumentar el volumen a razón de 0.01 m^3/s:

a) Hallar la variación de la presión en dicho instante si la temperatura se mantiene constante.

b) Hallar la variación de la temperatura en dicho instante si la presión se mantiene constante.

Solución

a) $dP = \frac{-CT}{V^2} dV$ y en el instante indicado vale $dP = -3$ Pa/s.

b) $dT = \frac{P}{C} dV$ y en el instante indicado vale $dT = 9{,}67$ K/s.

12. Derivar implícitamente las siguientes expresiones tomando y como función de x:

a) $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$.

b) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x^2+y^2}$.

Solución

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2+y^2}{-2xy+y^2}$.

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy+\cos(x+y)}{(x^2+y^2)+2y^2-\cos(x+y)}$.

13. Caldular dy/dx y dx/dy para las siguientes funciones implícitas:

a) $2x^2 + 3y^3 - x^y = 2$

b) $3x^2y^2 = x^2 + 3y^3$

c) $\operatorname{sen}(xy^2) = \cos(x^2y)$

d) $x\ln(x^2+3y) = y^3e^{2xy^2}$

Solución

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-yx^{y-1}}{-9y^2+x^y\log_x e}$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{-9y^2+x^y\log_x e}{4x-yx^{y-1}}$.

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{6xy^2-2x}{9y^2-6x^2y}$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{9y^2-6x^2y}{6xy^2-2x}$.

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2\cos(xy^2)+2xy\operatorname{sen}(x^2y)}{-2xy\cos(xy^2)-x^2\operatorname{sen}(x^2y)}$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{-2xy\cos(xy^2)-x^2\operatorname{sen}(x^2y)}{y^2\cos(xy^2)+2xy\operatorname{sen}(x^2y)}$.

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(x^2+3y)+\frac{2x^2}{x^2+3y}-2y^5e^{2xy^2}}{-\frac{3x}{x^2+3y}3y^2e^{2xy^2}+4xy^4e^{2xy^2}}$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{3x}{x^2+3y}3y^2e^{2xy^2}+4xy^4e^{2xy^2}}{\ln(x^2+3y)+\frac{2x^2}{x^2+3y}-2y^5e^{2xy^2}}$.

★ 14. Dada la función $xy + e^x - \log y = 0$, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a ella en el punto $x = 0$.

Solución

Tangente: $y = (e^2 - e)x + e$. Normal: $y = \frac{-1}{e^2-e}x + e$.

★ 15. Suponiendo que la temperatura, T en grados centígrados, y el volumen, V en metros cúbicos, de un gas real encerrado en un contenedor de volumen variable están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$T^2\left(V^2 - \pi^2\right) - V\cos(TV) = 0$$

Se pide:

a) Calcular la derivada del volumen con respecto a la temperatura en el momento en el que el volumen es de π m^3 y la temperatura es medio grado centígrado.

b) ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función que daría el volumen en función de la temperatura en el mismo punto del apartado anterior?

c) Suponiendo que tanto la temperatura como el volumen son, a su vez, funciones de la presión, qué ecuación ligaría la derivada de la temperatura con respecto a la presión con la derivada del volumen con respecto a la presión.

Solución

a) $\frac{dV}{dT} = \frac{-2T(V^2-\pi^2)-V^2\operatorname{sen}(TV)}{2T^2V-\cos(TV)+TV\operatorname{sen}(TV)}$ y $\frac{dV}{dT}(V=\pi, T=0{,}5) = -pi$ m^3/$^{\text{o}}$C.

b) Tangente: $V = \pi(-T + 1{,}5)$.

c) $2T\frac{dT}{dP}(V^2 - \pi^2) + T^2(2V\frac{dV}{dT}) - \frac{dV}{dT}\cos(VT) - V(-\operatorname{sen}(TV)(\frac{dT}{dP}V + T\frac{dV}{dP})) = 0$.

★ 16. Un cuerpo se mueve en el plano a través de los puntos de coordenadas (x, y) relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$2e^{xy}\operatorname{sen} x + y\cos x = 2$$

Se pide:

a) Calcular su posición cuando $x = \pi/2$

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuando $x = 0$.

Solución

a) $x_0 = \pi/2$, $y_0 = 0$.

b) $y = -2x + 2$.

★ 17. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $x^2 + y^2 = 3xy - 1$ en los puntos en que $x = 1$. Calcular también los extremos relativos y decir si son máximos o mínimos.

Solución

Recta tangente en el punto $(1, 1)$: $y = 2 - x$. Recta normal en el punto $(1, 1)$: $y = x$.

Recta tangente en el punto $(1, 2)$: $y = 4x - 2$. Recta normal en el punto $(1, 2)$: $y = \frac{9-x}{4}$.

Hay un mínimo relativo en el punto $(3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y un máximo relativo en $(-3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

★ 18. La concentración de un fármaco en sangre, C en mg/dl, y el tiempo, t en s, están relacionados mediante la expresión:

$$e^{tC} - t^2C^3 - \ln C = 0$$

Suponiendo que la ecuación anterior define a C como función implícita de t, y que, por lo tanto, también puede definir a t como función implícita de C, calcular:

a) La derivada de C con respecto a t.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de C en función de t cuando $t = 0$.

c) La ecuación de la recta normal a la gráfica de t en función de C cuando $C = e$.

Solución

a) $\dfrac{dC}{dt} = \dfrac{2tC^4 - e^{tC}C^2}{e^{tC}tC - 3t^2C^3 - 1}$.

b) $C = e + e^2t$.

c) $t = -e^2(C - e)$.

---

19. Una partícula se mueve a lo largo de una curva $y = \cos(2x+1)$, siendo $x = t^2+1$ y t el tiempo. ¿Con qué velocidad está desplazándose respecto a las direcciones vertical y horizontal cuando $t = 2$?

SOLUCIÓN

Velocidad horizontal: $\frac{dx}{dt} = 2t$ y en el instante $t = 2$, $\frac{dx}{dt}(t=2) = 4$.
Velocidad vertical: $\frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen}(2t^2+3)4t$ y en el instante $t = 2$, $\frac{dy}{dt} = -8\operatorname{sen} 11$.

20. Un punto se mueve en el plano siguiendo una trayectoria

$$\begin{cases} x &= \operatorname{sen} t, \\ y &= t^2 - 1. \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar la derivada de la función $y(x)$ (es decir, $\dfrac{dy}{dx}$) para los puntos $t = 0$ y $t = 2$.

b) Hallar la tangente a la trayectoria en el punto (0,-1).

SOLUCIÓN

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{\cos t}$. $\frac{y}{dx}(t=0) = 2$ y $\frac{dy}{dx}(t=2) = 4/\cos 2$.

b) Tantenge: $y = 2x - 1$.

★ 21. Las coordenadas paramétricas de un punto material lanzado bajo un ángulo respecto al horizonte son

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

donde t es el tiempo contado a partir del instante en que el punto llega a la posición más alta, v_0 es la velocidad horizontal en el instante $t = 0$ y $g = 9{,}8$ m^2/s es la aceleración de la gravedad. ¿En qué instante la magnitud de la velocidad horizontal será igual a la de la velocidad vertical? ¿Cuánto debería valer v_0 para que en dicho instante el punto haya recorrido 100 m horizontalmente? Calcular la ecuación de la recta tangente en dicho instante con el valor de v_0 calculado.

SOLUCIÓN

Las velocidades serán iguales en el instante $t = \frac{v_0}{9{,}8}$. Para que en dicho instante el punto haya recorrido 10 m horizontalmente, la velocidad inicial debería ser $v_0 = 31{,}3$ m/s.

La ecuación de la recta tangente en dicho instante es $y = -x + 50{,}14$.

★ 22. Dada la función paramétrica

$$\left(x = \frac{(t-2)^2}{t^2+1}, \; y = \frac{2t}{t^2+1} \right)$$

Calcular los valores máximos y mínimos de x y de y. ¿En qué instante la tasa de crecimiento de y coincide con la de x?

SOLUCIÓN

$\frac{dx}{dt} = \frac{4t^2-6t-4}{(t^2+1)^2}$. Puntos críticos: $t = -1/2$ (máximo) y $t = 2$ (mínimo).
$\frac{dy}{dt} = \frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2}$. Puntos críticos: $t = -1$ (mínimo) y $t = 1$ (máximo).
$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ en los puntos $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.