Ejercicios de Cálculo

Temas: Derivadas implícitas y polinomios de Taylor
Titulaciones: Todas

Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU Universidad San Pablo

Tres variables se hallan relacionadas mediante la expresión $e^{x^2y-z} + 2xyz = 3$. Suponiendo esta relación define a z como función de x e y ($z = f(x,y)$) en el entorno del punto $(1,1,1)$. Se pide:

1. ¿En qué dirección se produce la máxima variación de z a partir del punto $(1,1)$?
2. ¿Cómo varía z en el punto $(1,1)$ si x tiene a variar el doble que y?
3. Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $F(x,y,z) = e^{x^2y-z} + 2xyz$ en el punto $(1,1,1)$.

1. ¿En qué dirección se produce la máxima variación de z a partir del punto $(1,1)$?

Datos

$e^{x^2y-z} + 2xyz = 3$

$z = f(x,y)$

$F(x,y,z) = e^{x^2y-z} + 2xyz - 3 = 0$

$\nabla z = \left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$ $\qquad \nabla z(1,1) = \underline{(-4,-3)}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{-dF/dx}{dF/dz}$ $\qquad \frac{dz}{dx}(1,1) = \frac{-4}{1} = -4$

$\frac{dz}{dy} = \frac{-dF/dy}{dF/dz}$ $\qquad \frac{dz}{dy}(1,1) = \frac{-3}{1} = -3$

$\frac{dF}{dx} = e^{x^2y-z}\,2xy + 2yz$ $\qquad \frac{dF}{dx}(1,1,1) = \cancel{e^{1^2\cdot 1-1}}\,2\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot1 = 4$

$\frac{dF}{dy} = e^{x^2y-z}\,x^2 + 2xz$ $\qquad \frac{dF}{dy}(1,1,1) = \cancel{e^{1^2\cdot1-1}}\,1^2 + 2\cdot1\cdot1 = 3$

$\frac{dF}{dz} = -e^{x^2y-z} + 2xy$ $\qquad \frac{dF}{dz}(1,1,1) = -e^{1^2\cdot1-1} + 2\cdot1\cdot1 = 1$

2 ¿Cómo varía z en el punto $(1,1)$ si x tiene a variar el doble que y?

Datos
$e^{x^2y-z}+2xyz=3$
$z=f(x,y)$
$\nabla z(1,1)=(-4,-3)$

$v=(2,1)$

$$z'_v(1,1)=\nabla z(1,1)\cdot\frac{v}{|v|}=(-4,-3)\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}}=$$

$$=(-4,-3)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{-8}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{-11}{\sqrt{5}}$$

3 Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de la función F en el punto $(1,1,1)$.

Datos

$F(x,y,z) = e^{x^2y-z} + 2xyz$

Punto $(1,1,1)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{x^2y-z}2xy + 2yz$

$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = 4$

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{x^2y-z}x^2 + 2xz$

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 3$

$\frac{\partial F}{\partial z} = -e^{x^2y-z} + 2xy$

$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 1$

$$P^2_{F,(1,1,1)}(x,y,z) = F(1,1,1) + \nabla F(1,1,1)\,(x-1,\, y-1,\, z-1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big((x-1,y-1,z-1)\,\nabla^2 F(1,1,1)\,(x-1,\,y-1,\,z-1)\Big)$$

$$F(1,1,1) = e^{1^2\cdot 1-1} + 2\cdot 1\cdot 1 = 3$$

$$\nabla F(1,1,1) = (4,\,3,\,1)$$

$$\nabla^2 F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x^2y-z}2xy\,2xy + e^{x^2y-z}\cdot 2y & e^{x^2y-z}x^2\,2xy + e^{x^2y-z}2x + 2z & -e^{x^2y-z}2xy + 2y \\ e^{x^2y-z}x^2\,2xy + e^{x^2y-z}2x + 2z & e^{x^2y-z}x^2x^2 & -e^{x^2y-z} + 2x \\ -e^{x^2y-z}2xy + 2y & -e^{x^2y-z} + 2x & +e^{x^2y-z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 F(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2 & -1\cdot 2 + 2 \\ 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2 & 1\cdot 1\cdot 1 & -1 + 2 \\ -1\cdot 2 + 2 & -1 + 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de la función F en el punto $(1,1,1)$.

$$P(x,y,z) = F(1,1,1) + \nabla F(1,1,1)(x-1,y-1,z-1) +$$
$$+\frac{1}{2}((x-1,y-1,z-1)\nabla^2 F(1,1,1)(x-1,y-1,z-1))$$

Datos

$F(x,y,z) = e^{x^2y-z} + 2xyz$

Punto $(1,1,1)$

$F(1,1,1) = 3$

$\nabla F(1,1,1) = (4,3,1)$

$\nabla^2 F(1,1,1) =$
$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z) = 3 + (4,3,1)(x-1,y-1,z-1) +$$
$$+\frac{1}{2}\left((x-1,y-1,z-1)\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= 3 + 4x - 4 + 3y - 3 + z - 1 + \frac{1}{2}((x-1,y-1,z-1)(6x-6+6y-6,\ 6x-6+y-1+z-1,\ y-1+z-1)) =$$
$$= -5 + 4x + 3y + z + \frac{1}{2}((x-1,y-1,z-1)(6x+6y-12,\ 6x+y+z-8,\ y+z-2)) =$$
$$= -5 + 4x + 3y + z + \frac{1}{2}(6x^2 + 6xy - 12x - 6x - 6y + 12 + 6xy + y^2 + yz - 8y - 6x - y - z + 8 + yz + z^2 - 2z - y - z + 2) =$$
$$= -5 + 4x + 3y + z + 3x^2 + 6xy - 12x + \frac{y^2}{2} + yz - 8y + \frac{z^2}{2} - 2z + 11 =$$
$$= 3x^2 + 6xy + \frac{y^2}{2} + yz + \frac{z^2}{2} - 8x - 5y - z + 6$$