Ejercicios de Cálculo

Temas: Derivadas en n variables: Extremos, Polinomios de Taylor
Titulaciones: Todas

Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

CEU Universidad San Pablo

Dado el campo escalar

$$h(x,y) = xy + \frac{xy^2}{2} - 2x^2,$$

se pide:

1. Determinar sus extremos relativos y sus puntos de silla.
2. Obtener el polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $(1,2)$ y utilizarlo para dar una aproximación de $h(1{,}04,\ 1{,}98)$.

1. Determinar sus extremos relativos y sus puntos de silla.

Datos

$$h(x,y) = xy + \frac{xy^2}{2} - 2x^2$$

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(y + \frac{y^2}{2} - 4x,\ x + \frac{x\cancel{2}y}{\cancel{2}}\right) = \left(y + \frac{y^2}{2} - 4x,\ x(1+y)\right) = (0,0)$$

$$x(1+y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 + y = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$y + \frac{y^2}{2} - 4x = 0 \underset{x=0}{\Rightarrow} y + \frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2y + y^2}{2} = 0 \Rightarrow 2y + y^2 = 0 \Rightarrow y(2+y) = 0 \begin{cases} \underline{y = 0} \\ \underline{y = -2} \end{cases}$$

$$y + \frac{y^2}{2} - 4x = 0 \underset{y=-1}{\Rightarrow} -1 + \frac{(-1)^2}{2} - 4x = 0 \Rightarrow 4x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$$

$\underline{(0,0)}$, $\underline{(0,-2)}$, $\underline{\left(-\frac{1}{8}, -1\right)}$ Puntos críticos

1. Determinar sus extremos relativos y sus puntos de silla.

Datos

$$h(x,y) = xy + \frac{xy^2}{2} - 2x^2$$

$$\nabla h(x,y) = \left(\underline{\frac{y^2}{2} - 4x + y}, \underline{x(1+y)} \right)$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-2)$, $(-\frac{1}{8},-1)$

Silla Silla máximo

$$\nabla^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{d^2h}{dx^2} & \frac{d^2h}{dx\,dy} \\ \frac{d^2h}{dy\,dx} & \frac{d^2h}{dy^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 1+y \\ \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}}+1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & y+1 \\ y+1 & x \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 h(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0+1 \\ 0+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Hh(0,0) = -1 < 0 \text{ Punto silla}$$

$$\nabla^2 h(0,-2) = \begin{pmatrix} -4 & -2+1 \\ -2+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Hh(0,-2) = -1 < 0 \text{ Punto silla}$$

$$\nabla^2 h(-\tfrac{1}{8},-1) = \begin{pmatrix} -4 & -1+1 \\ -1+1 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow Hh(-\tfrac{1}{8},-1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \quad \frac{d^2h}{dx^2}(-\tfrac{1}{8},-1) = -4 < 0$$

Punto máximo

2. Obtener el polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $(1,2)$ y utilizarlo para dar una aproximación de $h(1{,}04,\ 1{,}98)$.

Datos

$$h(x,y) = xy + \frac{xy^2}{2} - 2x^2$$

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{y^2}{2} - 4x + y,\ x(1+y)\right)$$

$$\nabla^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 1+y \\ 1+y & x \end{pmatrix}$$

$$P^2_{h,(1,2)}(x,y) = h(1,2) + \nabla h(1,2)(x-1,y-2) +$$

$$+ \frac{1}{2}(x-1,y-2)\,\nabla^2 h(1,2)\,(x-1,y-2)^t =$$

$$= h(1,2) + \cancel{\frac{\partial h}{\partial x}(1,2)(x-1)} + \frac{\partial h}{\partial y}(1,2)(y-2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right)$$

$$= 2 + 3(y-2) + \frac{1}{2}\left(-4(x-1)^2 + 2\cdot 3(x-1)(y-2) + (y-2)^2\right) =$$

$$= 2 + 3y - 6 + \frac{1}{2}\left(-4(x^2-2x+1) + 6(xy-2x-y+2) + (y^2-4y+4)\right) =$$

$$= 2 + 3y - 6 - 2x^2 + 4x - 2 + 3xy - 6x - 3y + 6 + \frac{y^2}{2} - 2y + 2 =$$

$$= -2x^2 + \frac{y^2}{2} + 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$h(1,2) = 1\cdot 2 + \frac{1\cdot 2^2}{2} - 2\cdot 1^2 = 2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,2) = \frac{2^2}{2} - 4\cdot 1 + 2 = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,2) = 1\,(1+2) = 3$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,2) = -4$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}(1,2) = 1+2 = 3$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1,2) = 1$$

$$P^2_{h,(1,2)}(1'04,\ 1'98) = -2\cdot 1'04^2 + \frac{1'98^2}{2} + 3\cdot 1'04\cdot 1'98 - 2\cdot 1'04 - 2\cdot 1'98 + 2 = 1'9346$$