EJERCICIOS DE ESTADÍSTICA

Asignatura: Estadística Aplicada a las Ciencias de la Salud

Curso: 1º de Grado en Fisioterapia

Santiago Angulo Díaz-Parreño (sangulo@ceu.es)
José Miguel Cárdenas Rebollo (cardenas@ceu.es)
Anselmo Romero Limón (arlimon@ceu.es)
Alfredo Sánchez Alberca (asalber@ceu.es)

Curso 2010-2011

CEU Universidad San Pablo

Índice

1. Estadística Descriptiva

★ 1. El número de lesiones padecidas durante una temporada por cada jugador de un equipo de fútbol fue el siguiente:

$$0-1-2-1-3-0-1-0-1-2-0-1$$
$$1-1-2-0-1-3-2-1-2-1-0-1$$

Se pide:

a) Construir la tabla de frecuencias.

b) Dibujar el polígono de frecuencias.

c) Calcular los cuartiles y el rango intercuartílico e interpretarlo.

d) Calcular el coeficiente de asimetría e interpretarlo.

Solución

c) $C_1 = 1$ lesión, $C_2 = 2$ lesiones y $C_3 = 3$ lesiones. $RI = 2$ lesiones, lo que indica que hay bastante dispersión central.

d) $\bar{x} = 1{,}125$ lesiones, $s^2 = 0{,}776$ lesiones^2, $s = 0{,}88$ lesiones y $g_1 = 0{,}49$ lo que indica que la distribución es un poco asimétrica a la derecha.

★ 2. El tiempo de recuperación, medido en días, de 10 pacientes con una determinada lesión de rodilla ha sido

$$46, 54, 48, 62, 51, 50, 54, 50, 49, 52.$$

Calcular el coeficiente de asimetría y de apuntamiento e interpretarlos.

Solución

$g_1 = 1{,}22$ (bastante asimétrica hacia la derecha) y $g_2 = 1{,}17$ (bastante leptocúrtica).

3. En un cuestionario se ha preguntado a un grupo de individuos por su nivel de estudios (SE: sin estudios, EB: estudios básicos, ES: estudios secundarios, EU: estudios universitarios, ED: estudios de doctorado) obteniendo los siguientes resultados:

EU, ES, ES, EU, EB, EB, ED, SE, EB, SE, EU, ES, ES, ES, EB,
EB, SE, ED, EB, ES, ES, SE, EU, EU, EB, ES, EU, ES, EB, ES

Se pide:

a) Construir la tabla de frecuencias y los diagramas asociados.

b) Dar una medida de representatividad.

c) Calcular los cuartiles y el percentil 90.

Solución

b) $Me =$ES y $Mo =$ES.

c) $C_1 =$EB, $C_2 =$ES, $C_3 =$EU y $P_{90} =$EU.

★ 4. Para obtener información acerca del número de consultas al médico, X, que los abonados de una compañía de seguro médico realizan cada mes, trabajando con una muestra de 200 abonados, la distribución de frecuencias fue:

x_i	n_i
0	83
1	51
2	26
3	15
4	9
5	6
6	5
7	3
8	1
9	1

Y se pide calcular:

a) Media, desviación típica y coeficiente de variación del número de visitas al médico. Interpretar el coeficiente de variación.

b) Coeficiente de asimetría de la distribución. Interpretarlo.

c) Percentiles 10 y 90. Interpretarlos.

Solución

a) $\bar{x} = 1{,}41$ consultas, $s^2 = 3{,}2919$ consultas^2, $s = 1{,}8144$ consultas y $cv = 1{,}29$, lo que indica que hay muchas dispersión y la media no es muy representativa.

b) $g_1 = 1{,}66$ lo cual indica que la distribución es bastante asimétrica hacia la derecha, pero no lo suficiente para considerarla anormal.

c) $P_{10} = 0$ lo que indica que el 10 % de las personas de la muestra que menos consultas realizaron, realizaron 0 consultas, y $P_{90} = 4$ lo que indica que el 10 % de las personas de la muestra que más consultas realizaron, realizaron 4 o más consultas.

★ 5. En un estudio sobre el crecimiento se tomaron dos muestras, una de niños recién nacidos y otra de niños con un año de edad. Las estaturas observadas en cada muestra fueron:

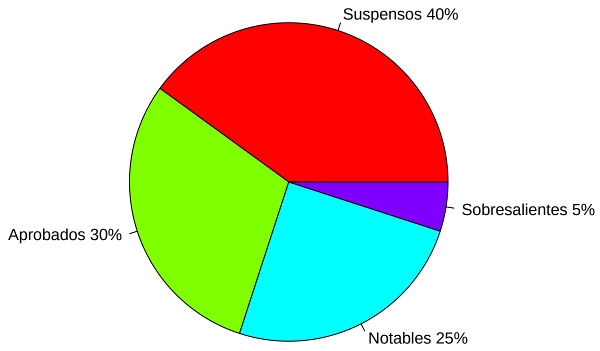
Recién nacidos: 51-50-51-53-49-50-53-50-47-50.
Niños de un año: 62-65-69-71-65-66-68-69.

¿Según el coeficiente de variación, en cuál de las dos muestras es más representativa la media?

Solución

Llamando X a las estaturas de los niños recién nacidos e Y a las estaturas de los niños de 1 año: $\bar{x} = 50{,}4$ cm, $s_x = 1{,}685$ cm, $cv_x = 0{,}034$, $\bar{y} = 66{,}875$ cm, $s_y = 2{,}713$ cm, $cv_y = 0{,}041$, lo que indica que ambas medias son muy representativas pero un poco más la de los niños recién nacidos.

★ 6. El siguiente diagrama refleja el porcentaje de calificaciones obtenidas en un examen realizado a 80 alumnos:



Se pide:

a) Construir la tabla de frecuencias para las calificaciones.

b) Dibujar el polígono de frecuencias acumuladas.

c) Calcular todos los estadísticos de tendencia central que sean posibles.

d) A partir de la variable calificación, construir la variable nota con los siguientes intervalos: Suspenso $[0, 5)$, Aprobado $[5, 7)$, Notable $[7, 9)$ y Sobresaliente $[9, 10]$, y calcular la nota media y estudiar su representatividad.

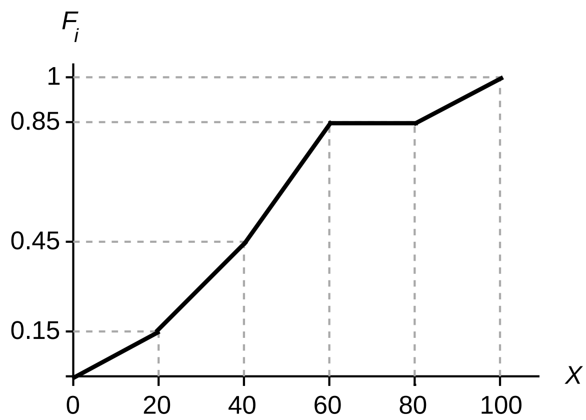
Nota: En los tres primeros apartados se debe trabajar con la variable calificación, mientras que en el último debe utilizarse la variable nota.

Solución

c) $Me =$ Aprobado y $Mo =$ Suspenso.

d) $\bar{x} = 5{,}275$ puntos, $s = 2{,}447$ puntos y $cv = 0{,}464$, de manera que la media es moderadamente representativa.

7. Dada la gráfica correspondiente a un polígono acumulativo de frecuencias relativas de una variable estadística agrupada en intervalos de una muestra de tamaño 20:



se pide:

a) Construir la tabla de frecuencias.

b) Dibujar el histograma correspondiente.

c) Calcular la mediana y la moda.

d) Calcular la media aritmética y la desviación típica.

Solución

c) $Med = 42{,}5$ y $Mod = (40, 60)$.

d) $\bar{x}$=44, $s^2 = 564$, $s = 23{,}75$.

★ 8. Sea la variable estadística agrupada en intervalos cuya distribución de frecuencias viene dada por la siguiente tabla:

Intervalos	n_i	f_i	N_i	F_i
$[0, 10)$	10	0.25		
$[10, 20)$			22	
$[20, 30)$		0.30		
$[30, 40)$				

a) Completar la tabla y hallar la desviación típica.

b) Calcular la mediana y el rango intercuartílico e interpretarlos.

Solución

a) $\bar{x} = 18{,}5$, $s^2 = 102{,}75$ y $s = 10{,}14$.

b) $Med = 18{,}33$, $C_1 = 10$, $C_3 = 26{,}27$ y $RI = 16{,}17$ lo que indica, teniendo en cuenta que el rango de toda la distribución es 40, que la dispersión es moderada.

★ 9. Como parte de un proyecto de investigación, los investigadores obtuvieron los siguientes datos respecto a los niveles de peróxido lípido (en nmol/ml) en el suero de 30 individuos adultos bajo tratamiento de Diabetes Mellitus:

3,09	6,06	7,34	5,32	4,29	5,36	6,01	7,84	3,87	5,23
4,67	7,89	5,16	6,32	6,45	3,21	5,98	6,45	7,12	4,13
5,16	3,04	4,56	5,67	5,98	6,23	7,34	5,32	4,21	7,13

Agrupar los datos en 5 clases de amplitud unidad, comenzando en 3, y sobre la distribución obtenida:

a) Calcular media, desviación típica y coeficiente de variación de los niveles de peróxido lípido. Interpretar el coeficiente de variación.

b) Calcular cuartiles de la distribución e interpretarlos.

c) Dibujar el diagrama de caja y bigotes y comprobar si hay o no datos atípicos.

Solución

a) $\bar{x} = 5{,}667$ nmol/ml, $s^2 = 1{,}668$ (nmol/ml)^2, $s = 1{,}292$ nmol/ml y $cv = 0{,}228$, lo que indica que hay poca dispersión y la media es bastante representativa.

b) $C_1 = 4{,}7$ nmol/ml, $C_2 = 5{,}667$ nmol/ml y $C_3 = 6{,}75$ nmol/ml.

c) Las vallas son $v_1 = 1{,}625$ y $v_2 = 9{,}825$. Todos los datos están entre las vallas y no hay datos atípicos. Los bigotes son $b_1 = 3{,}04$ nmol/ml y $b_2 = 7{,}89$ nmol/ml.

★ 10. A continuación figura la distribución de edades de una muestra de 65 individuos sujetos a rehabilitación tras un infarto de miocardio:

Edad	[40-50)	[50-60)	[60-70)	[70-80)	[80-90)
n_i	6	12	23	19	5

a) Sabemos que una distribución normal es simétrica y mesocúrtica. Por tanto, una primera idea de si los datos muestrales provienen de una distribución normal nos la puede dar ver si estos valores se encuentran en el intervalo [-2, 2]. ¿Podríamos suponer según esto que los datos provienen de una distribución normal?

b) ¿Calcular la edad, por encima de la cuál se encuentra el 15 % de los individuos sujetos a rehabilitación tras un infarto de miocardio, en esta muestra?

Solución

a) $\bar{x} = 65{,}769$ años, $s^2 = 114{,}823$ años, $s = 10{,}716$ años. $g_1 = -0{,}228$ y $g_2 = -0{,}55$, como tanto el coefiente de asimetría como el de apuntamiento están entre -2 y 2, podemos suponer que los datos provienen de una población normal.

b) $P_{85} = 77{,}5$ años.

11. Para determinar la eficacia de un nuevo método para la medición del hematocrito en sangre, se repitió la medida 8 veces sobre una misma muestra de sangre, obteniéndose los siguientes resultados (en porcentaje de hematocrito sobre volumen de plasma sanguíneo):

$$42{,}2 \quad 42{,}1 \quad 41{,}9 \quad 41{,}8 \quad 42 \quad 42{,}1 \quad 41{,}9 \quad 42.$$

¿Se puede afirmar que se trata de un buen método de medición?

Solución

$\bar{x} = 42\,\%$, $s^2 = 0{,}015\,\%^2$, $s = 0{,}1225\,\%$ y $cv = 0{,}003$ lo que indica que la variabilidad entre las mediciones es ínfima y por tanto se trata de un buen método de medición.

★ 12. Se desea realizar un estudio sobre los días necesarios para tratar una determinada lesión deportiva. Se utilizaron para ello dos tratamientos diferentes, y se observaron 50 pacientes con cada uno de los tratamientos, obteniendo los siguientes resultados:

Nº Sesiones	Tratamiento A	Tratamiento B
20-40	5	8
40-60	20	15
60-80	18	20
80-100	7	7

a) Calcular el número de sesiones por debajo del cual está el 86 % de los pacientes, en cada tratamiento.

b) ¿En cuál de los dos tratamientos es más representativa la media del número de sesiones necesarias? Justificar numéricamente la respuesta.

c) ¿Qué distribución presenta mayor asimetría? Justificar numéricamente la respuesta.

Solución

a) Tratamiento A: $P_{86} = 80$ sesiones. Tratamiento B: $P_{86} = 80$ sesiones.

b) $\bar{x}_A = 60{,}8$ sesiones, $s_A^2 = 291{,}36$ sesiones^2, $s_A = 17{,}0693$ sesiones y $cv_A = 0{,}28$.
$\bar{x}_B = 60{,}4$ sesiones, $s_B^2 = 339{,}84$ sesiones^2, $s_B = 18{,}4348$ sesiones y $cv_B = 0{,}31$.
Así pues, como $cv_A < cv_B$ la media es un poco más representativa para el tratamiento A.

c) $g_{1_A} = 0{,}068$ y $g_{1_B} = -0{,}14$ lo que indica que la distribución para el tratamiento A es ligeramente asimétrica hacia la derecha y la del tratamiento B ligeramente asimétrica hacia la izquierda, aunque ambas son casi simétricas.

---

13. En cuestionario sobre la dependencia de las personas mayores de 75 años se preguntaba sobre la necesidad de ayuda en el desarrollo normal de su vida. Las posibles respuestas eran:

a) Ninguna ayuda.

b) Ayuda al subir las escaleras.

c) Ayuda al subir las escaleras y al incorporarse de una posición sentada o tumbada.

d) Ayuda al subir las escaleras, al incorporarse, y al vestirse.

e) Ayuda para prácticamente todo.

El cuestionario lo respondieron 20 personas, y los resultado obtenidos fueron

b – d – a – b – c – c – b – c – d – e – a – b – c – e – a – b – c – d – b – b

Se pide:

a) Representar gráficamente la distribución de frecuencias.

b) Calcular las medidas de tendencia central.

c) Calcular los cuartiles y el decil 8.

d) ¿Qué se puede decir sobre la dispersión?

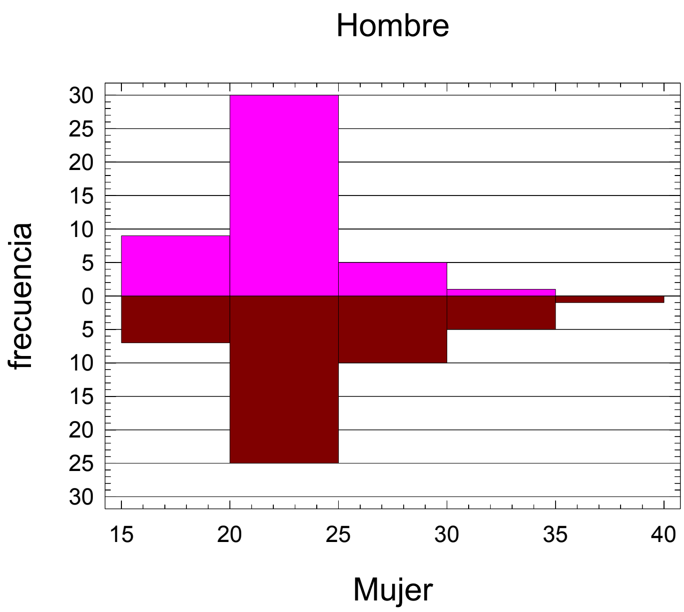
SOLUCIÓN

b) Me ente b y c y $Mo = b$.

c) C_1 =b, C_2 entre b y c, C_3 =d.

d) Suponiendo que hay la misma distancia entre categorías y asignando rangos a cada valor ($a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$), tenemos $\bar{x} = 2{,}7$, $s^2 = 1{,}41$, $s = 1{,}187$ y $cv = 0{,}44$, lo que indica una dispersión moderada.

★ 14. El siguiente histograma refleja la distribución del índice de masa corporal en una muestra de hombres y mujeres.



Se pide:

a) Construir la tabla de frecuencias para hombres y mujeres por separado.

b) Dibujar el diagrama de sectores para el sexo.

c) ¿En qué grupo es más representativa la media? Justificar la respuesta.

d) ¿Cómo calcularías la media de toda la muestra a partir de las medias de hombres y mujeres? ¿Cuánto vale?

e) Calcular el rango intercuartílico del índice de masa corporal en los hombres.

Solución

c) $\bar{m} = 24{,}17$ Kg/m^2, $s_m^2 = 21{,}1806$ (Kg/m^2)^2, $s_m = 4{,}6$ Kg/m^2 y $cv_m = 0{,}19$.
$\bar{h} = 22{,}18$ Kg/m^2, $s_m^2 = 9{,}9506$ (Kg/m^2)^2, $s_m = 3{,}15$ Kg/m^2 y $cv_h = 0{,}14$, luego es más representativa la media en los hombres.

d) $\bar{x} = 23{,}25$ Kg/m^2.

e) $RI = 3{,}75$ Kg/m^2.

15. En un grupo de operarios se ha medido porcentaje de tareas bien realizadas de dos tipos A y B, obteniendo los siguientes resultados:

% A	58	55	36	67	60	31	53	42
% B	76	81	82	84	80	75	87	79

Se pide:

a) Calcular las puntuaciones típicas de cada individuo en ambos tipos de tareas.

b) Teniendo en cuenta la distribuciones de puntuaciones de las tareas, ¿en qué tipo de tareas funciona mejor el primer individuo? ¿Y el último? Justificar la respuesta.

Solución

$\bar{x}_A = 50{,}25\,\%$, $\bar{x}_B = 80{,}5\,\%$, $s_A^2 = 138{,}44\,\%^2$, $s_B^2 = 13{,}75\,\%^2$, $s_A = 11{,}7\,\%$ y $s_B = 3{,}71\,\%$. Las puntuaciones típicas son

% A	0.66	0.4	-1.21	1.42	0.83	-1.64	0.23	-0.7
% B	-1.21	0.13	0.4	0.94	-0.13	-1.48	1.75	-0.4

2. Regresión y Correlación

★ 16. La artrosis reumatoide es una enfermedad reumática que aparece con frecuencia en las personas mayores. Uno de los índices más utilizados para ver el grado de actividad de la enfermedad es el RADAI (Rheumatoid Arthritis Disease Activity Index), que mide el grado de actividad en una escala de 0 (mínima actividad) a 3 (máxima actividad). Para ver de qué manera influye la edad en el grado de actividad de la enfermedad se ha seleccionado un grupo de personas mayores y se ha medido el índice RADAI en ellos, obteniendo la siguiente tabla de frecuencias:

RADAI\Edad	40-50	50-60	60-70	70-80
0-1	8	6	2	1
1-2	4	7	5	2
2-3	0	2	6	7

Se pide:

a) Estudiar si existe relación lineal entre la edad y el RADAI.

b) Calcular la recta de regresión del RADAI sobre la edad. Según la recta, ¿cuánto aumentaría el grado de actividad de la enfermedad por cada año que pasa?

c) Si se considera que los pacientes don un RADAI de 2 o superior necesitan ayuda en sus actividades diarias, ¿a qué edad se empezaría a necesitar esta ayuda?

Solución

Llamando X a la variable que mide la edad e Y a la que mide el RADAI.

a) $r = 0{,}59$ que indica una relación lineal moderada.

b) Recta de regresión de Y sobre X: $y = 0{,}0442x - 1{,}1575$. Cada año que pase la actividad de la enfermedad aumentará 0,0442 puntos en el RADAI.

c) A los 63,4 años.

★ 17. Al realizar un estudio sobre la dosificación de un cierto medicamento, se trataron 6 pacientes con dosis diarias de 2 mg, 7 pacientes con 3 mg y otros 7 pacientes con 4 mg. De los pacientes tratados con 2 mg, 2 curaron al cabo de 5 días, y 4 al cabo de 6 días. De los pacientes tratados con 3 mg diarios, 2 curaron al cabo de 3 días, 4 al cabo de 5 días y 1 al cabo de 6 días. Y de los pacientes tratados con 4 mg diarios, 5 curaron al cabo de 3 días y 2 al cabo de 5 días.

Se pide:

a) Dar el coeficiente de correlación e interpretación.

b) Determinar el tiempo esperado de curación para una dosis de 5 mg diarios.

Solución

Llamando X a la dosis e Y al tiempo de curación:

a) $\bar{x} = 3{,}05$ mg, $\bar{y} = 4{,}55$ días, $s_x^2 = 0{,}648$ mg^2, $s_y^2 = 1{,}448$ días^2, $s_x = 0{,}805$ mg, $s_y = 1{,}203$ días y $s_{xy} = -0{,}678$ mg·días.
$r = -0{,}7$, que quiere decir que hay buena relación lineal entre la dosis y el tiempo de curación, y además es decreciente (a mayor dosis, menor tiempo de curación).

b) Recta de regresión del tiempo de curación sobre la dosis: $y = -1{,}046x + 7{,}741$.
$y(5) = 2{,}511$ días.

---

18. Se determina la pérdida de actividad que experimenta un medicamento desde el momento de su fabricación a lo largo del tiempo, obteniéndose el siguiente resultado:

Tiempo (en años)	1	2	3	4	5
Actividad restante (%)	96	84	70	58	52

Se desea calcular:

a) La relación fundamental (recta de regresión) entre actividad y tiempo transcurrido.

b) El tiempo en meses que corresponde al 80 % de actividad.

c) ¿Cuándo será nula la actividad?

Solución

Llamando T al tiempo y A a la actividad del fármaco:

a) $\bar{t} = 3$ años, $\bar{a} = 72\,\%$, $s_t^2 = 2$ años^2, $s_a^2 = 264\,\%^2$, $s_{ta} = -22{,}8$ años$\cdot\,\%$.
Recta de regresión de actividad sobre tiempo: $a = -11{,}4t + 106{,}2$.

b) Recta de regresión de tiempo sobre actividad: $t = -0{,}086a + 9{,}2182$.
$t(80) = 2{,}3091$ años.

c) $t(0) = 9{,}2182$ años.

---

19. Para comprobar el efecto de la herencia genética sobre la inteligencia se desarrolló un estudio en el que se midió el coeficiente intelectual de varias parejas de gemelos, obteniendo los siguientes resultados:

$$(128, 132)\ (116, 112)\ (86, 98)\ (65, 81)\ (104, 96)\ (111, 111)\ (101, 105)\ (72, 75)$$

Calcular el coeficiente de determinación lineal e interpretarlo. ¿Tiene sentido calcular el coeficiente de correlación?

Solución

Llamando X al coeficiente intelectual del primer hermano e Y al del segundo: $\bar{x} = 97{,}875$, $\bar{y} = 101{,}25$, $s_x^2 = 418{,}3594$, $s_y^2 = 288{,}4375$, $s_{xy} = 326{,}5313$ y $r^2 = 0{,}8836$, lo que indica que existe bastante relación lineal entre el coeficiente intelectual de los gemelos. No tiene sentido el coeficiente de correlación lineal porque es indiferente el orden en que tomemos a los gemelos.

---

20. Se consideran dos variables aleatorias X e Y tales que:

- La recta de regresión de Y sobre X viene dada por la ecuación: $y - x - 2 = 0$.
- La recta de regresión de X sobre Y viene dada por la ecuación: $y - 4x + 22 = 0$.

Calcular:

a) Valores de $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

b) Coeficiente de correlación lineal.

Solución

a) $\bar{x} = 8$ y $\bar{y} = 10$.
b) $r = 0{,}5$.

---

21. En el ajuste rectilíneo a una distribución bidimensional se sabe que $\overline{x} = 2$, $\overline{y} = 1$, y el coeficiente de correlación lineal es 0 ($r = 0$).

a) Si $x = 10$, ¿cuál será el valor interpolado para y?.
b) Si $y = 5$, ¿cuál será el valor interpolado para x?.
c) Dibuja las rectas de regresión de Y sobre$X$, y la de X sobre Y.

Solución

a) $y(10) = 1$.
b) $x(5) = 2$.

★ 22. En un centro dietético se está probando una nueva dieta de adelgazamiento en una muestra de 12 individuos. Para cada uno de ellos se ha medido el número de días que lleva con la dieta y el número de kilos perdidos desde entonces, obteniéndose los siguientes resultados:

(33 , 3.9), (51 , 5.9), (30 , 3.2), (55 , 6.0), (38 , 4.9), (62 , 6.2),
(35 , 4.5), (60 , 6.1), (44 , 5.6), (69 , 6.2), (47 , 5.8), (40 , 5.3)

Se pide:

a) Dibujar el diagrama de dispersión. Según la nube de puntos, ¿qué tipo de modelo explicaría mejor la relación entre los días de dieta y los kilos perdidos?
b) Dibujar el diagrama de dispersión tomando una escala logarítmica para los días de dieta.
c) Calcular el modelo lineal y el logarítmico de los kilos perdidos con respecto a los días de dieta. Nota: Utilizar los datos muestrales sin agrupar.
d) Utilizar el mejor de los modelos anteriores para predecir en número de kilos perdidos tras 40 días de dieta y tras 100 días. ¿Son fiables estas predicciones?

Solución

Llamando X a los días de dieta, Y a los Kg perdidos y $Z = \log X$.

c) $\bar{x} = 47$ días, $\bar{y} = 5{,}3$ Kg, $s_x^2 = 143{,}833$ días^2, $s_y^2 = 0{,}885$ Kg^2, $s_{xy} = 9{,}942$ días·Kg. Modelo lineal: $y = 0{,}069x + 2{,}051$.
$\bar{z} = 3{,}82$ logdías, $s_z^2 = 0{,}07$ $\log^2$días, $s_{yz} = 0{,}22$ logdías·Kg.
Modelo logarítmico: $y = 3{,}4 \log y - 7{,}67$.
d) Modelo lineal: $r^2 = 0{,}78$, modelo logarítmico: $r^2 = 0{,}86$.
Predicciones con el modelo logarítmico: $y(40) = 4{,}86$ Kg y $y(100) = 7{,}98$ Kg. Las predicciones son fiables ya que el coeficiente de determinación es alto.

★ 23. Se han medido dos variables S y T en 10 individuos, obteniéndose los siguientes resultados:

(-1.5 , 2.25), (0.8 , 0.64), (-0.2 , 0.04), (-0.8 , 0.64), (0.4 , 0.16),
(0.2 , 0.04), (-2.1 , 4.41), (-0.4 , 0.16), (1.5 , 2.25), (2.1 , 4.41).

Se pide:

a) Calcular la covarianza de S y T.

b) ¿Se puede afirmar que S y T son independientes? Justificar la respuesta.

c) ¿Qué valor predice la correspondiente recta de regresión para $t = 2$?

Solución

a) $\bar{s} = 0$, $\bar{t} = 1{,}5$ y $s_{st} = 0$.

b) No podemos afirmar que S y T son independientes, sólo se puede afirmar que no hay relación lineal.

c) $s(2) = 0$.

★ 24. En un equipo de baloncesto se ha introducido un programa de estiramientos para ver si se consigue reducir el número de lesiones. Durante toda una temporada cada jugador realizó ejercicios de estiramiento durante un número fijo de minutos en cada entrenamiento. Al finalizar la temporada se midió el número de lesiones y se obtuvieron los resultados de la siguiente tabla:

Minutos de estiramiento	0	30	10	15	5	25	35	40
Número de lesiones	4	1	2	2	3	1	0	1

Se pide:

a) Calcular la recta de regresión del número de lesiones con respecto al tiempo de estiramiento. ¿Cual es la disminución de lesiones esperada por cada minuto de estiramiento?

b) ¿Cuántos minutos de estiramientos debe realizar un jugador para no tener ninguna lesión? ¿Es fiable esta predicción?

Solución

Llamando X a la variable que mide el tiempo de estiramiento, e Y a la que mide el número de lesiones en cada jugador:

a) Recta de regresión de Y sobre X: $y-0{,}08x+3{,}35$. Por cada minuto más de estiramiento habrá 0,08 lesiones menos.

b) Para no tener ninguna lesión habrá que estirar al menos 38,26 minutos. $r = -0{,}91$, luego la predicción es bastante fiable.

★ 25. La concentración de un fármaco en sangre, C en mg/dl, es función del tiempo, t en horas, y viene dada por la siguiente tabla:

t	2	3	4	5	6	7	8
C	25	36	48	64	86	114	168

a) Según el modelo exponencial, ¿qué concentración de fármaco habría a las 4,8 horas? ¿Es fiable la predicción? Justificar adecuadamente la respuesta.

b) Según el modelo lineal, ¿qué tiempo tendría que transcurrir para que la concentración de fármaco fuese de 100 mg/dl? ¿Es fiable la predicción? Justificar adecuadamente la respuesta.

Solución

Llamando T al tiempo, C a la concentración y Z al logaritmo de la concentración:

a) $\bar{t} = 5$ horas, $\bar{z} = 4{,}1639$ log(mg/dl), $s_t^2 = 4$ horas^2, $s_z^2 = 0{,}3785$ log^2(mg/dl), $s_{tz} = 1{,}2291$ horas· log(mg/dl).
Modelo exponencial de C sobre T: $c = e^{0{,}3073x+2{,}6275}$.
$c(4{,}8) = 60{,}498$ mg/dl y es bastante fiable ya que $r^2 = 0{,}999$.

b) $\bar{c} = 77{,}2857$ mg/dl, $s_c^2 = 2160{,}7755$ (mg/dl)^2, $s_{tc} = 89$ horas(mg/dl).
Modelo lineal de T sobre C: $t = 0{,}0412c + 1{,}8167$.
$t(100) = 5{,}9356$ y también es fiable ya que $r^2 = 0{,}9165$.

---

26. Se han recogido por medio de unos cuestionarios los niveles de estrés y energía de 14 mujeres durante un año. A partir de las respuestas del cuestionario se han asignado puntuaciones a cada una de ellas de manera que a mayor puntuación mayor grado de estrés y energía. Los datos recogidos son:

Edad	21	31	19	21	30	20	22	23	45	24	26	19	25	21
Estrés	25	19	20	19	24	6	29	25	49	0	10	25	13	23
Energía	25	20	45	60	50	50	10	60	40	60	50	60	85	50

Se pide:

a) Dibujar un diagrama de dispersión que refleje la relación entre el estrés y la energía.

b) ¿Existe relación lineal entre el estrés y la energía? ¿Y entre el estrés y la edad? Justificar la respuesta.

c) ¿Qué efecto tendría sobre el coeficiente de correlación lineal de la edad y el estrés la eliminación del individuo de 45 años? Justificar la respuesta.

d) Calcular el coeficiente de correlación de Spearman entre estrés y energía e interpretarlo. ¿Coinciden las conclusiones con las que se deducen del coeficiente de correlación lineal?

Solución

Llamando X a la edad, Y al estrés y Z a la energía:

b) $r_{yz}^2 = 0{,}14$, lo que indica que casi no hay relación entre el estrés y la energía y $r_{xy}^2 = 0{,}31$ lo que indica que hay una ligera relación entre el estrés y la edad.

c) El coeficiente de correlación lineal disminuye hasta valer casi 0, lo que indica que la relación lineal entre el estrés y la edad del apartado anterior se debe a este dato atípico, así que, realmente no hay relación entre estrés y edad.

d) $r_s = -0{,}41$ lo que indica que hay una ligera relación decreciente entre energía y estrés.

---

27. Se ha realizado un estudio para averiguar la relación entre la edad y la fuerza física. Para ello se ha medido la edad de 16 participantes y el máximo peso (en Kg) que eran capaces de levantar. Los resultados obtenidos fueron:

Edad	10	12	15	18	21	23	24	26	28	30	31	34	36	38	41	44
Peso	12	25	36	46	54	60	61	60	59	56	54	52	50	50	48	46

Construir un modelo de regresión que explique la relación entre la fuerza física y el peso e interpretarlo.

Solución

Llamando X a la edad e Y al peso levantado, se construyen dos rectas de regresión, una para edades menores de 25 y otra para mayores:

- Menores de 25: $\bar{x} = 15{,}5714$ años, $\bar{y} = 42$ Kg, $s_x^2 = 25{,}3878$ años^2, $s_y^2 = 295{,}7143$ Kg^2, $s_{xy} = 85{,}7143$ años·Kg.
  Recta de regresión del peso sobre la edad: $y = 3{,}3762x - 17{,}3248$.
- Mayores de 25: $\bar{x} = 35{,}2222$ años, $\bar{y} = 52{,}7778$ Kg, $s_x^2 = 32{,}6173$ años^2, $s_y^2 = 20{,}8395$ Kg^2, $s_{xy} = -25{,}5062$ años·Kg.
  Recta de regresión del peso sobre la edad: $y = -0{,}7820x + 79{,}5390$.

★ 28. En un grupo de pacientes se analiza el efecto de una sustancia dopante en el tiempo de respuesta a un determinado estímulo. Para ello, se suministra en sucesivas dosis, de 0 a 70 mg, la misma cantidad de dopante a todos los miembros del grupo, y se anota el tiempo medio de respuesta al estímulo, expresado en centésimas de segundo.

X (mg)	0	10	20	30	40	50	60	70
Y (10^{-2}s)	28	46	62	81	100	132	195	302

a) Representar la nube de puntos. A la vista de la representación, ¿crees que el modelo lineal es el que mejor explica el tipo de relación entre las variables?

b) Calcular la recta de regresión del tiempo en función de la cantidad de dopante, y utilizarla para predecir el tiempo de reacción medio para una cantidad de dopante de 25 mg.

c) Hacer la misma predicción del apartado anterior con el modelo exponencial. ¿Qué predicción es mejor?

d) Si para el estímulo estudiado los tiempos de reacción superiores a un segundo se consideran peligrosos para la salud, ¿a partir de qué nivel debería regularse, e incluso prohibirse, la administración de la sustancia dopante?

Solución

b) Recta de regresión de Y sobre X: $y = 3{,}44x - 2{,}25$. $y(25) = 83{,}82$ centésimas de segundo.

c) Recta de regresión de X sobre Y: $x = 0{,}25y + 5{,}57$. $x(100) = 30{,}46$ mg.

---

29. Un estudio sobre 100 personas concluye que 26 personas son fumadores y bebedores habituales, 12 son bebedores pero no fumadores, 18 son fumadores pero no bebedores y 44 no beben ni fuman habitualmente. Según estos datos, ¿podemos decir que existe relación entre el tabaco y la bebida? Justificar la respuesta.

Solución

$\chi^2 = 14{,}83$ y $C = 0{,}36$ lo que indica que hay una relación moderada entre los hábitos de fumar y beber.

---

30. En un estudio en el que participaron las 8 universidades de una región se ha valorado la excelencia docente e investigadora, estableciendo los siguientes rankings (de mejor a peor):

Ranking docencia	3	4	8	5	2	1	6	7
Ranking investigación	6	5	4	3	7	8	1	2

¿Se puede decir que existe relación entre la excelencia docente e investigadora? Justificar la respuesta.

Solución

$r_s = -0{,}83$, lo que indica una fuerte relación inversa entre la excelencia docente y la excelencia investigadora.

---

3. Probabilidad

31. Se dispone de dos urnas, la primera con 10 bolas blancas y 6 bolas negras, y la segunda con 5 bolas rojas, 8 bolas azules y 3 bolas verdes. Construir el espacio muestral del experimento que consiste en sacar una bola de cada urna, y del experimento que consistiría en sacar dos bolas de cada urna.

32. Un experimento consiste en seleccionar a una pareja de personas y medir su grupo sanguineo y si son fumadores o no. Expresar el espacio muestral en forma de árbol.

33. En una estantería en la que hay 3 cajas de un medicamento A y 2 de un medicamento B, se eligen 3 al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan elegido 2 cajas del medicamento A y 1 del B?

Solución

36/60.

---

34. En un laboratorio hay 4 frascos de ácido sulfúrico y 2 de ácido nítrico, y en otro hay 1 frascos de ácido sulfúrico y 3 de ácido nítrico. Se saca al azar un frasco de cada laboratorio. Hallar la probabilidad de que:

   a) Los dos frascos sean de ácido sulfúrico.
   b) Los dos sean de ácido nítrico.
   c) Uno sea de ácido sulfúrico y otro de ácido nítrico.
   d) Calcular la probabilidad de estos mismos sucesos si el frasco elegido en el primer laboratorio se introduce en el segundo antes de sacar el frasco de este.

Solución

a) 4/24.
b) 6/24.
c) 14/24.
d) 8/30, 8/30 y 14/30 respectivamente.

---

35. Sean A y B sucesos de un mismo espacio muestral tales que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

   a) $P(A \cup B)$.
   b) $P(\overline{A})$ y $P(\overline{B})$.
   c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
   d) $P(A \cap \overline{B})$.
   e) $P(A/B)$.
   f) $P(A/\overline{B})$.

Solución

a) $P(A \cup B) = 5/8$.
b) $P(\overline{A}) = 5/8$ y $P(\overline{B}) = 1/2$.
c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 3/8$.
d) $P(A \cap \overline{B}) = 1/8$.
e) $P(A/B) = 1/2$.
f) $P(A/\overline{B}) = 1/4$.

---

36. La probabilidad de contraer hepatitis a partir de una unidad de sangre es 0'01. Un paciente recibe dos unidades de sangre durante su estancia en el hospital. ¿Cuál es la probabilidad de que contraiga hepatitis como consecuencia de ello?

Solución

0,0199.

---

37. Sean A y B sucesos de un mismo espacio muestral, tales que $P(A) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$. Calcular $P(B)$ si:

a) A y B son independientes.
b) A y B son incompatibles.

Solución

a) $P(B) = 0{,}75$.
b) $P(B) = 0{,}3$.

---

38. El tétanos es mortal en el 70 % de los casos. Si tres personas contraen el tétanos, ¿Cuál es la probabilidad de que mueran al menos dos de los tres?

Solución

0,784.

★ 39. En un estudio sobre el tabaco, se informa que el 40 % de los fumadores tiene un padre fumador, el 25 % tiene una madre fumadora, y el 52 % tiene al menos uno de los dos padres fumadores. Se elige una persona fumadora al azar. Calcular:

a) Probabilidad de que la madre sea fumadora si lo es el padre.
b) Probabilidad de que la madre sea fumadora si no lo es el padre.
c) ¿Son independientes el tener padre fumador y el tener madre fumadora?

Solución

Llamando PF al suceso que consiste en tener un padre fumador y MF a tener una madre fumadora:

a) $P(MF/PF) = 0{,}33$.
b) $P(MF/\overline{PF}) = 0{,}2$.
c) No son independientes.

★ 40. La probabilidad de que una lesión A se reproduzca es $4/5$, la de que se reproduzca otra lesión B es $1/2$, y la de que ambas se reproduzcan $1/3$. Hallar la probabilidad de que:

a) Sólo se reproduzca la lesión B.

b) Al menos una se reproduzca.

c) Se reproduzca la lesión B si se ha reproducido la A.

d) Se reproduzca la lesión B si no se reproduce la lesión A.

Solución

Llamando A y B a los sucesos consistentes en que se reproduzcan las respectivas lesiones, se tiene:

a) $P(B \cap \overline{A}) = 1/6$.

b) $P(A \cup B) = 29/30$.

c) $P(B/A) = 5/12$.

d) $P(B/\overline{A}) = 5/6$.

41. A partir de una investigación realizada, se sabe que el 10 % de las personas de 50 años sufren un tipo particular de artritis. Se ha desarrollado un procedimiento para detectar esta enfermedad, y por las pruebas realizadas se observa que si se aplica el procedimiento a individuos que padecen la enfermedad, da positivo en el 85 % de los casos, mientras que si se aplica a individuos sanos, da positivo en el 4 % de los casos. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que realizado el procedimiento a una persona, el resultado sea positivo.

b) Si el resultado de aplicar el procedimiento a una persona ha sido positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

★ 42. Un estudiante se somete a un examen de tipo test en el que cada pregunta tiene 3 respuestas posibles. El estudiante se sabe el 40 % de las preguntas, y el resto las contesta al azar. Se elige al azar una pregunta. ¿Qué probabilidad hay de que no la supiera si la contestó correctamente?

Solución

$1/3$.

★ 43. Se ha desarrollado un nuevo test diagnóstico para detectar el síndrome de Down en niños recién nacidos, con un sensibilidad del 80 % y una especificidad del 90 %. Si en una determinada población en la que hay un 1 % de recién nacidos con el síndrome, al aplicarle el test a un niño, da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el síndrome? ¿le diagnosticarías la enfermedad? ¿Cuál debería ser la especificidad mínima del test para diagnosticar el síndrome en el caso de dar positivo?

Nota: La *sensibilidad* de un test diagnóstico es la proporción de personas con la enfermedad que tienen un resultado positivo en el test, mientras que la *especificidad* del test es la proporción de personas sin la enfermedad que tienen un resultado negativo en el test.

Solución

Llamando S a tener el síndrome de Down y $+$ a que el test de positivo, $P(S/+) = 0{,}0748$ y $P(\overline{S}/+) = 0{,}9252$, de modo que no se diagnosticaría el síndrome al ser más probable que no lo tenga.
La especificidad mínima para que el test diagnostique el síndrome es $P(-/\overline{S}) = 0{,}9919$.

★ 44. En un estudio se han probado tres tipos de tratamientos A, B y C contra una determinada enfermedad. De los pacientes participantes en el estudio, el 50 % fueron tratados con el tratamiento A, el 30 % con el B y el 20 % con el C. Posteriormente se observaron los pacientes que sanaron y los que tuvieron algún efecto secundario, según se muestra en la siguiente tabla:

Tratamiento	Sanados	Con efectos secundarios
A	86 %	12 %
B	92 %	14 %
C	81 %	6 %

Se pide:

a) Si se selecciona un enfermo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya sanado? ¿Y de que haya tenido algún efecto secundario?

b) Si un enfermo ha sanado, ¿qué tratamiento es más probable que haya recibido? ¿Y si en vez de decirnos que ha sanado nos dicen que no ha tenido efectos secundarios?

c) Si en total hay un 8 % pacientes que no sanaron pero que tampoco tuvieron efectos secundarios, ¿cuál es la probabilidad de que un enfermo se haya curado sin tener efectos secundarios?

Solución

Llamado S a sanar y E a tener efectos secundarios:

a) $P(S) = 0{,}868$ y $P(E) = 0{,}114$.

b) $P(A/S) = 0{,}495$, $P(B/S) = 0{,}318$ y $P(C/S) = 0{,}187$.
$P(A/\overline{E}) = 0{,}497$, $P(B/\overline{E}) = 0{,}291$ y $P(C/\overline{E}) = 0{,}212$.
En ambos casos el tratamiento más probable es el A.

c) $P(S \cap \overline{E}) = 0{,}806$.

★ 45. En una población se ha vacunado a la tercera parte de los individuos contra la gripe. Trascurrido el invierno, se comprueba que la probabilidad de estar vacunado si se tiene la gripe es 0,2, y que el 10 % de los vacunados tuvieron gripe.

a) ¿Cuál fue la incidencia de la epidemia de gripe?
(Nota: La incidencia de una epidemia es la probabilidad de personas infectadas).

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no vacunada contraiga la gripe?

c) ¿Se puede afirmar que la vacuna tiene alguna eficacia?

Solución

Llamando G al suceso consistente en tener la gripe y V a estar vacunado:

a) $P(G) = 1/6$.

b) $P(G/\overline{V}) = 0{,}2$.

c) Si resulta eficaz, aunque poco.

46. Se sabe que los grupos sanguíneos en una determinada población se distribuyen con las siguientes frecuencias:

$$0 : 30\,\% \quad A : 45\,\% \quad B : 18\,\% \quad AB : 7\,\%$$

Por otro lado, también se sabe que la octava parte de los individuos del grupo 0 tienen RH negativo, así como la cuarta parte del grupo A, la mitad del grupo B, y la tercera parte del grupo AB.

Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un indiviudo elegido al azar sea del tipo A y tenga RH positivo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga RH negativo o sea del grupo universal?

c) Si un individuo elegido al azar tiene RH positivo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo B?

Solución

Llamando 0 a tener grupo 0, A a tener grupo A, B a tener grupo B, AB a tener grupo AB, $+$ a tener RH positivo y $-$ a tener RH negativo:

a) $P(A\cap +) = 0{,}34$.

b) $P(-\cup 0) = 0{,}53$.

c) $P(B/+) = 0{,}12$.

47. Los estudios epidemiológicos indican que el 20 % de las personas mayores sufren un deterioro neuropsicológico. También se sabe que la tomografía axial computerizada (TAC) puede detectar ese trastorno en el 90 % de los que lo padecen, pero que también puede diagnosticarlo en el 5 % de las personas que no lo tienen. Si se toma una persona al azar y el TAC da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente esté enfermo?

Solución

Llamando E a sufrir el deterioro neuropsicológico y $+$ a que el TAC de positivo: $P(E/+) = 0,82$.

★ 48. Un fisioterapeuta dispone de dos técnicas A y B para rehabilitar una determinada lesión. Se sabe que dicha lesión es 3 veces más frecuentes en personas mayores de 30 años que en personas jóvenes. También se sabe que en las personas jóvenes, la técnica A es efectiva en el 30 % de los casos y la técnica B en el 60 %, mientras que en personas mayores, la técnica A es efectiva en el 50 % de los casos y la técnica B en el 70 %. Si, independiente de la edad, aplica la técnica A el mismo número de veces que la técnica B, se pide:

a) ¿Cual es la probabilidad de que una persona joven elegida al azar se cure? ¿y la de que se cure una persona mayor?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cualquiera se cure?

c) Si una persona mayor no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que fuese tratado con la técnica A?

Solución

Llamemos J al suceso consitente en que una persona con la lesión sea joven, C al suceso consistente en curarse, y A y B a los sucesos consistentes en aplicar las respectivas técnicas de rehabilitación:

a) $P(C/J) = 0{,}45$. y $P(C/\overline{J}) = 0{,}6$.

b) $P(C) = 0{,}5625$.

c) $P(A/\overline{J}\cap\overline{C}) = 0{,}625$.

4. Variables Aleatorias

49. Sea X una variable aleatoria discreta cuya ley de probabilidad es

X	4	5	6	7	8
$f(x)$	0,15	0,35	0,10	0,25	0,15

a) Calcular y representar gráficamente la función de distribución.

b) Obtener:

1) $P(X < 7{,}5)$.
2) $P(X > 8)$.
3) $P(4 \leq X \leq 6{,}5)$.
4) $P(5 < X < 6)$.

Solución

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4, \\ 0{,}15 & \text{si } 4 \leq x < 5, \\ 0{,}5 & \text{si } 5 \leq x < 6, \\ 0{,}6 & \text{si } 6 \leq x < 7, \\ 0{,}85 & \text{si } 7 \leq x < 8, \\ 1 & \text{si } 8 \leq x. \end{cases}$$

b) $P(X < 7{,}5) = 0{,}85$, $P(X > 8) = 0$, $P(4 \leq x \leq 6{,}5) = 0{,}6$ y $P(5 < X < 6) = 0$.

50. Sea la variable aleatoria X con la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1/5 & \text{si } 1 \leq x < 4, \\ 3/4 & \text{si } 4 \leq x < 6, \\ 1 & \text{si } 6 \leq x. \end{cases}$$

Se pide:

a) Distribución de probabilidad.

b) Obtener:

1) $P(X = 6)$.
2) $P(X = 5)$.
3) $P(2 < X < 5{,}5)$.
4) $P(0 \leq X < 4)$.

Solución

a)

X	1	4	6
$f(x)$	1/5	11/20	1/4

b) $P(X = 6) = 1/4$, $P(X = 5) = 0$, $P(2 < X < 5{,}5) = 11/20$ y $P(0 \leq X < 4) = 1/5$.

★ 51. Se realiza un experimento aleatorio consistente en inyectar un virus a tres tipos de ratas y observar si sobreviven o no. Se sabe que la probabilidad de que viva el primer tipo de rata es 0,5, la de que viva el segundo es 0,4 y la de que viva el tercero 0,3. Se pide:

a) Construir la variable aleatoria que mida el número de ratas vivas y su función de probabilidad.

b) Calcular la función de distribución.

c) Calcular $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$ y $P(X = 1{,}5)$.

d) Calcular la media y la desviación típica.

Solución

a)

X	0	1	2	3
$f(x)$	0,21	0,44	0,29	0,06

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 0{,}21 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0{,}65 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0{,}94 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } 3 \leq x. \end{cases}$$

c) $P(X \leq 1) = 0{,}65$, $P(X \geq 2) = 0{,}35$ y $P(X = 1{,}5) = 0$.

d) $\mu = 1{,}2$ ratas, $\sigma^2 = 0{,}7$ ratas^2 y $\sigma = 0{,}84$ ratas.

★ 52. En las siguientes tablas, indicar razonadamente, en los caso que sea posible, los valores de h que deben ponerse en cada tabla para que se tenga una distribución de probabilidad:

x	$f(x)$
−2	0,3
5	h
8	0,1

x	$f(x)$
1	−0,2
3	0,7
4	h

x	$f(x)$
2	h
3	0,5
4	0,6

En las tablas que constituyan una distribución de probabilidad:

a) Representar gráficamente la función de distribución.

b) Calcular media y desviación típica.

c) Calcular la mediana.

d) Si a los valores de x se multiplican por una constante $k < 0$, ¿cómo se ve afectada la media? ¿Y la desviación típica?

Solución

La única tabla que puede ser una distribución de probabilidad es la primera para $h = 0{,}6$.

b) $\mu = 3{,}2$ y $\sigma = 3{,}516$.

c) $Me = 5$.

d) $\mu_y = k\mu_x$ y $\sigma_y = |k|\sigma_x$.

53. La probabilidad de curación de un paciente al ser sometido a un determinado tratamiento es 0,85. Calcular la probabilidad de que en un grupo de 6 enfermos sometidos a tratamiento:

a) se curen la mitad.

b) se curen al menos 4.

Solución

Llamando X al número de pacientes curados de los 6 sometidos al tratamiento, se tiene que $X \sim B(6,\, 0{,}85)$.

a) $P(X = 3) = 0{,}041$.

b) $P(X \geq 4) = 0{,}9526$.

54. Se sabe que la probabilidad de que aparezca una bacteria en un mm^3 de cierta disolución es de 0,002. Si en cada mm^3 a los sumo puede aparecer una bacteria, determinar la probabilidad de que en un cm^3 haya como máximo 5 bacterias.

Solución

Llamando X al número de bacterias en 1 cm^3 de disolución, se tiene $X \sim B(1000,\, 0{,}002) \approx P(2)$. $P(X \leq 5) = 0{,}9834$.

55. El trastorno de pánico aparece en 1 de cada 75 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 100 personas aparezca alguna con trastorno de pánico? ¿Cuál es el número esperado de personas con trastorno de pánico en ese grupo?

Solución

Llamando X al número de personas que sufren trastorno del pánico en el grupo de 100 personas, se tiene que $X \sim B(100,\, 1/75)$ y $P(X \geq 1) = 0{,}7379$.

★ 56. El número medio de llamadas por minuto que llegan a una centralita telefónica es igual a 120. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes:

a) $A = \{$durante 2 segundos lleguen a la centralita menos de 4 llamadas$\}$.

b) $B = \{$durante 3 segundos lleguen a la centralita 3 llamadas como mínimo$\}$.

Solución

a) Si X es el número de llamadas en 2 segundos, entonces $X \sim P(4)$ y $P(X < 4) = 0{,}4335$.

b) Si Y es el número de llamadas en 3 segundos, entonces $Y \sim P(6)$ y $P(Y \geq 3) = 0{,}938$.

57. Un examen de tipo test consta de 10 preguntas con tres respuestas posibles para cada una de ellas. Se obtiene un punto por cada respuesta acertada y se pierde medio punto por cada pregunta fallada. Un alumno sabe tres de las preguntas del test y las contesta correctamente, pero no sabe las otras siete y las contesta al azar. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?

Solución

Llamando X al número de preguntas acertadas de las 7 contestadas al azar, se tiene $X \sim B(7,\, 1/3)$ y $P(X \geq 4) = 0{,}1733$.

★ 58. Un equipo de fútbol tiene 7 delanteros. Se sabe que por término medio, cada delantero se pierde 5 partidos por lesión en una temporada de 40 partidos. Suponiendo que todos los delanteros tienen la misma probabilidad de lesionarse, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un partido determinado tenga menos de 5 delanteros en condiciones de jugar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo largo de la temporada haya más de un partido en que tenga menos de 5 delanteros en condiciones de jugar?

★ 59. En un estudio sobre un determinado tipo de parásito que ataca el riñón de las ratas, se sabe que el número medio de parásitos en cada riñón es 3. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que una rata tenga más de 8 parásitos.
(Nota: se supone que una rata normal tiene dos riñones).

b) Si se tienen 10 ratas, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos 9 con parásitos?

Solución

a) Si X es el número de parásitos en una rata, $X \sim P(6)$ y $P(X > 8) = 0{,}1528$.

b) Si Y es el número de ratas con parásitos en un grupo de 10 ratas, entonces $Y \sim B(10, 0{,}9975)$ y $P(Y \geq 9) = 0{,}9997$.

★ 60. En un servicio de urgencias de cierto hospital se sabe que, en media, llegan 2 pacientes a la hora. Calcular:

a) Si los turnos en urgencias son de 8 horas, ¿cuál será la probabilidad de que en un turno lleguen más de 5 pacientes?

b) Si el servicio de urgencias tiene capacidad para atender adecuadamente como mucho a 4 pacientes a la hora, ¿cuál es la probabilidad de que a lo largo de un turno de 8 horas el servicio de urgencias se vea desbordado en alguna de las horas del turno?

Solución

a) Llamando X al número de pacientes en un turno, se tiene que $X \sim P(16)$ y $P(X > 5) = 0{,}9986$.

b) Llamando Y al número de horas en el que el servicio se vea desbordado porque lleguen más de 4 pacientes, se tiene que $Y \sim B(8, 0{,}0527)$ y $P(Y \geq 1) = 0{,}3515$.

★ 61. El síndrome de Turner es una anomalía genética que se caracteriza porque las mujeres tienen sólo un cromosoma X. Afecta aproximadamente a 1 de cada 2000 mujeres. Además, aproximadamente 1 de cada 10 mujeres con síndrome de Turner, como consecuencia, también sufren un estrechamiento anormal de la aorta. Se pide:

a) En un grupo de 4000 mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 3 afectadas por el síndrome de Turner? ¿Y de que haya alguna con estrechamiento de aorta como consecuencia de padecer el síndrome de Turner?

b) En un grupo de 20 chicas afectadas por el síndrome de Turner, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 3 sufran un estrechamiento anormal de la aorta?

Solución

a) Si X es el número de mujeres afectadas por el síndrome de Turner en el grupo de 4000 mujeres, entonces $X \sim B(4000, 1/2000) \approx P(2)$ y $P(X > 3) = 0{,}1429$.
Si Y es el número de mujeres con estrechamiento de la aorta en el grupo de 4000 mujeres, entonces $Y \sim B(4000, 1/20000) \approx P(0{,}2)$ y $P(Y > 0) = 0{,}1813$.

b) Si Z es el número de mujeres con estrechamiento de la aorta en el grupo de 20 mujeres con el síndrome de Turner, entonces $Z \sim B(20, 1/10)$ y $P(Z < 3) = 0{,}6769$.

---

62. Se sabe que 2 de cada 1000 pacientes son alérgicos a un fármaco A, y que 6 de cada 1000 lo son a un fármaco B. Además, el 30 % de los alérgicos a B, también lo son a A. Si se aplican los dos fármacos a 500 personas,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna con alergia a A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 con alergia a B?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 2 con las dos alergias?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya alguna con alergia?

SOLUCIÓN

a) Llamando X_A al número de personas alérgicas al fármaco A en el grupo de 500 personas, se tiene que $X_A \sim B(500, 0{,}002) \approx P(1)$ y $P(X_A = 0) = 0{,}3678$.

b) Llamando X_B al número de personas alérgicas al fármaco B en el grupo de 500 personas, se tiene que $X_B \sim B(500, 0{,}006) \approx P(3)$ y $P(X_B \geq 2) = 0{,}8009$.

c) Llamando $X_{A\cap B}$ al número de personas alérgicas a ambos fármacos $A \cap B$ en el grupo de 500 personas, se tiene que $X_A \sim B(500, 0{,}0018) \approx P(0{,}9)$ y $P(X_{A\cap B} < 2) = 0{,}7725$.

d) Llamando $X_{A\cup B}$ al número de personas alérgicas a alguno de los fármacos $A \cup B$ en el grupo de 500 personas, se tiene que $X_A \sim B(500, 0{,}0062) \approx P(3{,}1)$ y $P(X_{A\cup B} \geq 1) = 0{,}9550$.

---

63. En una clase hay 40 alumnos de los cuales el 35 % son fumadores. Si se toma una muestra aleatoria con reemplazamiento de 4 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos 1 fumador? ¿Cuál sería dicha probabilidad si la muestra se hubiese tomado sin reemplazamiento?

SOLUCIÓN

Si X es el número de fumadores en una muestra aleatoria con reemplazamiento de tamaño 4, entonces $X \sim B(4, 0{,}35)$ y $P(X \geq 1) = 0{,}8215$.
Si la muestra es sin reemplazamiento $P(X \geq 1) = 0{,}8364$.

★ 64. Suponiendo una facultad en la que hay un 60 % de chicas y un 40 % de chicos:

a) Si un año van 6 alumnos a hacer prácticas en un hospital, ¿qué probabilidad hay de que vayan más chicos que chicas?

b) En un período de 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que más de 1 año no haya ido ningún chico?

SOLUCIÓN

a) Si X es el número de chicos, $X \sim B(6, 0{,}4)$ y $P(X \geq 4) = 0{,}1792$.

b) Si Y es el número de años que no ha ido ningún chico, $Y \sim B(5, 0{,}0467)$ y $P(Y > 1) = 0{,}0199$.

★ 65. ¿Cuánto habría que restar a cada pregunta errada en un examen de tipo test de 5 preguntas con cuatro opciones y sólo una correcta, para que un individuo que responda al azar tenga una puntuación esperada de 0?

Solución

1/3.

66. Se sabe que el 6,8 % las personas presentan a lo largo de su adolescencia un trastorno de hiperactividad, de los cuales tres cuartas partes son mujeres. Si en la población hay el mismo número de hombres y mujeres, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que en una muestra de tres hombres, haya alguno que haya tenido hiperactividad en su adolescencia.

b) Calcular la probabilidad de que en una muestra de 2 hombres y 2 mujeres, haya alguno que haya tenido hiperactividad en su adolescencia.

Solución

a) Si llamamos X al número de hombres que han tenido hiperactividad en su adolescencia en una muestra de 3 hombres, se tiene que $X \sim B(3,\ 0{,}034)$ y $P(X \geq 1) = 0{,}0986$.

b) Si llamamos X_H al número de hombres que han tenido hiperactividad en su adolescencia en una muestra de 2 hombres y X_M al número de mujeres que han tenido hiperactividad en su adolescencia en una muestra de 2 mujeres, entonces $X_H \sim B(2,\ 0{,}034)$ y $X_M(2,\ 0{,}102)$. Entonces $P(X_H \geq 1 \cup X_M \geq 1) = 0{,}2475$.

67. Un empleado suele acudir al trabajo en cualquier instante entre las 6 y las 7 con igual probabilidad. Se pide:

a) Calcular la función de densidad de la variable que mide el instante en que acude a trabajar y dibujarla.

b) Calcular la función de distribución y dibujarla.

c) Calcular la probabilidad de que llegue entre las 6 y cuarto y las 6 y media.

d) Calcular la hora media a la que se espera que llegue.

Solución

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 6, \\ 1 & \text{si } 6 \leq x \leq 7, \\ 0 & \text{si } 7 < x. \end{cases}$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 6, \\ x - 6 & \text{si } 6 \leq x \leq 7, \\ 1 & \text{si } 7 < x. \end{cases}$$

c) $P(6{,}25 < X < 6{,}5) = 0{,}25$.

d) $\mu = 6{,}5$, es decir, a las 6 horas y media.

68. Sea Z una variable aleatoria que sigue una distribución $N(0,1)$. Determinar el valor de t en cada uno de los siguientes casos:

   a) El área entre 0 y t es 0,4783.
   b) El área a la izquierda de t es 0,6406.
   c) El área entre $-1{,}5$ y t es 0,2313.

Solución

a) $t = 2{,}02$.
b) $t = 0{,}36$.
c) $t = -0{,}53$.

69. Entre los diabéticos, el nivel de glucosa en la sangre en ayunas, puede suponerse de distribución aproximadamente normal, con media 106 mg/100 ml y desviación típica 8 mg/100 ml.

   a) Hallar $P(X \leq 120$ mg/100 ml).
   b) ¿Qué porcentaje de diabéticos tendrá niveles entre 90 y 120 mg/100 ml?
   c) Encontrar un valor que tenga la propiedad de que el 25 % de los diabéticos tenga un nivel de glucosa X por debajo de dicho valor.

Solución

a) $P(X \leq 120) = 0{,}9599$.
b) $P(90 < X < 120) = 0{,}9371$, es decir, un 93,71 %.
c) 100,64 mg/100 ml.

★ 70. En un examen, el 63 % de los alumnos ha obtenido una nota superior a 5, y el 44 % entre 5 y 7. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal:

   a) Calcular la media y la desviación típica de las notas.
   b) Calcular el porcentaje de alumnos con nota superior a 8.
   c) ¿Cuál es la nota por encima de la cual está el 5 % de los alumnos?

Solución

Llamando X a la nota obtenida en el examen, se tiene que $X \sim N(\mu, \sigma)$.

a) $\mu = 5{,}55$ puntos y $\sigma = 1{,}65$ puntos.
b) $P(X > 8) = 0{,}0648$, es decir, el 6,48 % de los alumnos han tenido una nota superior a 8.
c) 8,21 puntos.

★ 71. Se supone que la tensión arterial de los habitantes de una población de 20000 habitantes sigue una distribución normal, cuya media es 13 y su rango intercuartílico 4. Se pide:

   a) ¿Cuántas personas tienen una tensión por encima de 16?
   b) ¿Cuánto tendrá que disminuir la tensión de una persona que tiene 16 para situarse en el 40 % de la población con tensión más baja?

Solución

a) $P(X > 16) = 0{,}1587$ y el número de personas con tensión por encima de 16 mmHg es $0{,}1587 \cdot 20000 = 3174$.

b) Debe disminuir 3,75 mmHg.

★ 72. En una población de 30000 individuos se está interesado en medir el volumen sanguíneo de sus individuos. Se sabe que la desviación típica de la población es 0,4 litros y que el 50 % de los individuos tienen un volumen superior a 4,8 litros. ¿Cuántos individuos presentarán un volumen menor de 4,3 litros?

Solución

El número de individuos con menos de 4,3 litros de sangre es 3168.

---

73. Se consideran las variables aleatorias X_1 y X_2. La variable X_1 sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, mientras que la variable X_2 sigue también una distribución normal de media $\mu + 1$ y desviación típica σ. Si la probabilidad de que X_1 tome valores superiores a 14,2 es 0,5636, y la de que X_2 tome valores inferiores a 17,4 es 0,6103, se pide:

a) Hallar los valores de μ y σ.

b) Si se rechazan los individuos que están fuera del intervalo $(12, 18)$, hallar los porcentajes de rechazo correspondientes a X_1 y X_2.

c) Si se desea seleccionar el 20 % de individuos que tengan los valores más altos de X_1, ¿cuál será el valor de X_1 a partir del cuál se seleccionarán?

Solución

a) $\mu = 15$ y $\sigma = 5$.

b) $P(12 < X_1 < 18) = 0{,}4515$, luego el porcentaje de rechazos es $100\,\% - 45{,}15\,\% = 54{,}85\,\%$.
$P(12 < X_2 < 18) = 0{,}4436$, luego el porcentaje de rechazos es $100\,\% - 44{,}36\,\% = 55{,}64\,\%$.

c) 19,21.

★ 74. El peso de los recién nacidos no prematuros en una ciudad sigue una distribución normal de media y desviación típica desconocidas. Teniendo en cuenta que, de un total de 200 recién nacidos no prematuros, 15 han pesado más de 4 kg y 25 menos de $2,5$ kg:

a) ¿Cuáles son la media y la desviación típica del peso?

b) ¿Cuántos niños no prematuros habrán nacido con un peso entre 3 y 3,5 kg?

c) Si los médicos consideran peligrosos los pesos por debajo del percentil 10, ¿cuál será dicho peso?, ¿cuántos niños habrán nacido con un peso por debajo de dicho percentil?

Solución

Llamando X al peso de los recién nacidos no prematuros, se tiene que $X \sim N(\mu, \sigma)$.

a) $\mu = 3{,}17$ kg y $\sigma = 0{,}58$ kg.

b) 66 niños.

c) $P_{10} = 2{,}43$ kg y habrán nacido 20 niños por debajo de este peso.

75. El coeficiente intelectual es una puntuación derivada de los test de inteligencia que tiene media 100 puntos y desviación típica 15. Si se considera que una persona por encima de 145 es una superdotada, ¿qué porcentaje de superdotados habrá en la población? Si se considera que el 1 % de las personas con menor coeficiente intelectual son deficientes, ¿por debajo de qué coeficiente estarán dichas personas?

Solución

Llamando X al coeficiente intelectual, se tiene que $X \sim N(100, 15)$.
$P(X > 145) = 0{,}0013$, luego el 0,13 % de las personas son superdotadas.
$P_1 = 65{,}10$, por debajo de este coeficiente las personas son deficientes.

★ 76. Según el teorema central del límite, se sabe que para muestras grandes ($n \geq 30$) la media muestral $\bar{x}$ sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, donde μ es la media de la población y σ su desviación típica.

Se sabe que en una población la elongación del triceps sural tiene una media de 60 cm y una desviación típica de 15 cm. Si se toma una muestra de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de obtener una media muestral mayor de 62? Si se considera que una muestra es atípica si su media muestral está por debajo del percentil 5 de su distribución, ¿se puede considerar atípica una muestra de 60 individuos con $\bar{x} = 57$?

Solución

a) Llamando $\bar{X}$ a la variable que mide la elongación media del triceps sural en muestras de tamaño 30, $P(\bar{X} > 62) = 0{,}2327$.
b) Llamando $\bar{Y}$ a la variable que mide la elongación media del triceps sural en muestras de tamaño 60, $P_5 = 56{,}8$ cm, luego la muestra no es atípica.

5. Estimación de parámetros

77. Las notas en Estadística de una muestra de 10 alumnos han sido:

6,3, 5,4, 4,1, 5,0, 8,2, 7,6, 6,4, 5,6, 4,3, 5,2

Dar una estimación puntual de la nota media, de la varianza y del porcentaje de aprobados en la clase.

Solución

$\bar{x} = 5{,}81$ puntos, $\hat{s}^2 = 1{,}7721$ puntos^2 y $\hat{p} = 0{,}8$.

78. Una muestra aleatoria de tamaño 81 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 64$, tiene una $\overline{x} = 78$. Calcular el intervalo de confianza del 95 % para μ.

Solución

$\mu \in 79 \pm 1{,}742 = (76{,}258,\ 79{,}742)$.

79. Se obtuvieron cinco determinaciones del pH de una solución con los siguientes resultados:

$$7{,}90, 7{,}85, 7{,}89, 7{,}86, 7{,}87.$$

Hallar unos límites de confianza de la media de todas las determinaciones del pH de la misma solución, al nivel de significación $\alpha = 0{,}01$.

Solución

$\mu \in 7{,}874 \pm 0{,}0426 = (7{,}8314,\ 7{,}9166)$.

80. El tiempo que tarda en hacer efecto un analgésico sigue una distribución aproximadamente normal. En una muestra de 20 pacientes se obtuvo una media de 25,4 minutos y una desviación típica de 5,8 minutos. Calcular el intervalo de confianza del 90 % e interpretarlo. ¿Cuántos pacientes habría que tomar para poder estimar la media con una precisión de ± 1 minuto?

Solución

Intervalo de confianza del 90 % para μ: (23,0992, 27,7008).
Tamaño muestral para una precisión de ± 1 minuto: $n = 96$.

81. Para realizar una determinada tarea se necesitan personas con un cierto nivel de pericia. Una empresa está interesada en contratar a un grupo de personas que tengan la pericia necesaria para realizar la tarea, pero que además sean bastante homogéneas en cuanto a la pericia, es decir, que su rendimiento sea parecido. Para ver si un grupo de alumnos que se han formado en dicha tarea cumplen los requisitos, se ha tomado una muestra y se les ha sometido una prueba para ver cuántas tareas son capaces de realizar con éxito en una hora. Los resultados obtenidos fueron:

16 - 12 - 14 - 21 - 11 - 15 - 17 - 15 - 18 - 24 - 10 - 14 - 17 - 14

Se pide:

a) Si la empresa busca un grupo de empleados capaces de realizar una media de al menos 12 tareas por hora, ¿se puede afirmar con una confianza del 95 % que el grupo lo cumple?

b) Si la empresa busca que entre los trabajadores haya una dispersión media de $\sigma < 3$ tareas, ¿se puede afirmar con una confianza del 95 % que el grupo lo cumple?

Solución

- Lo cumple ya que $\mu \in (13{,}4026,\ 17{,}7403)$ con un 95 % de confianza.
- No lo cumple ya que $\sigma \in (2{,}7232,\ 6,0516)$ con un 95 % de confianza.

82. En un estudio para el estado de la salud oral de una ciudad, se tomó una muestra elegida al azar de 280 varones entre 35 y 44 años y se contó el número de piezas dentarias en la boca. Tras la revisión pertinente, los dentistas informaron que había 70 individuos con 28 o más dientes. Se desea realizar una estimación por intervalo de confianza de la proporción de individuos de esta ciudad con 28 dientes o más, con un nivel de confianza 0,95.

Solución

$p \in 0{,}25 \pm 0{,}0507 = (0{,}1993,\ 0{,}3007)$.

83. En una muestra de 250 estudiantes de una universidad, 146 hablaban inglés. ¿Entre qué valores estará el porcentaje de individuos de la universidad que hablan inglés, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución

$p \in (0{,}5327,\ 0{,}6353)$ con un 90 % de confianza.

84. Si el porcentaje de indivudos daltónicos de una muestra aleatoria es 18 %, ¿cuál será el mínimo tamaño muestral necesario para conseguir una estimación del porcentaje de daltónicos con una confianza del 95 % y un error menor del 3 %?

Solución

$n = 2520$.

★ 85. Un país está siendo afectado por una epidemia de un virus. Para valorar la gravedad de la situación se tomaron 40 personas al azar y se comprobó que 12 de ellas tenían el virus. Determinar el intervalo de confianza para el porcentaje de infectados con un nivel de significación 0,05.

Solución

$p \in (0{,}1580,\ 0{,}4420)$ con un 95 % de confianza.

86. Se ha realizado un estudio para investigar el efecto del ejercicio físico en el nivel de colesterol en la sangre. En el estudio participaron once personas, a las que se les midió el nivel de colesterol antes y después de desarrollar un programa de ejercicios. Los resultados obtenidos fueron los siguientes

Persona	Nivel previo	Nivel posterior
1	182	198
2	232	210
3	191	194
4	200	220
5	148	138
6	249	220
7	276	219
8	213	161
9	241	210
10	280	213
11	262	226

Hallar un intervalo de confianza del 90 % para la diferencia del nivel medio de colesterol antes y después del ejercicio.

Solución

$\mu_{x_1-x_2} \in 24{,}0909 \pm 19{,}4766$ mg/dl $= (4{,}6143\text{mg},\ 43{,}5675\text{mg/dl})$.

87. Se está ensayando un nuevo procedimiento de rehabilitación para una cierta lesión. Para ello se trataron nueve pacientes con el procedimiento tradicional y otros nueve con el nuevo, y se midieron los días que tardaron en recuperase, obteniéndose los siguientes resultados:

Método tradicional:	32-37-35-28-41-44-35-31-34
Método nuevo:	35-31-29-25-34-40-27-32-31

Se desea obtener un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia de las medias del tiempo de recuperación obtenido con ambos procedimientos. Se supone que los tiempos de recuperación siguen una distribución normal, y que las varianzas son aproximadamente iguales para los dos procedimientos.

Solución

$\mu_1 - \mu_2 \in 3{,}667 \pm 4{,}712$ días $= (-1{,}045$ días, $8{,}379$ días$)$.

88. Para estudiar si la estación del año influye en el estado de ánimo de la gente, se ha tomado una muestra 12 personas y se ha medido su nivel de depresión en verano e invierno mediante un cuestionario con puntuaciones de 0 a 100 (a mayor puntuación mayor depresión). Los resultados obtenidos fueron:

Invierno	65	72	84	31	80	61	75	52	73	79	85	71
Verano	60	51	81	45	62	53	70	52	64	51	67	62

¿Se puede afirmar que la estación del año influye en el estado de ánimo de la gente con un 99 % de confianza? ¿Cómo influye?

Solución

No se puede afirmar que la estación influya en el estado de ánimo ya que la media de la diferencia está en $(-0{,}7498,\ 19{,}0831)$ con un 99 % de confianza.

89. Un psicólogo está estudiando la concentración de una encima en la saliba como un posible indicador de la ansiedad crónica. En un experimento se tomó una muestra de 12 neuróticos por ansiedad y otra de 10 personas con bajos niveles de ansiedad. En ambas muestras se midió la concentración de la encima, obteniendo los siguientes resultados:

Con ansiedad:	2,60	2,90	2,60	2,70	3,91	3,15	3,94	2,46	2,91	3,88	3,55	3,96
Sin ansiedad:	2,37	1,10	2,55	2,64	2,20	2,12	2,47	2,90	1,66	2,72		

¿Se puede concluir a partir de estos datos que la población de neuróticos con ansiedad y la población de personas sin ansiedad son diferentes en el nivel medio de concentración de encimas? Justificar la respuesta.

Solución

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in (0{,}3383,\ 4{,}7486)$ con un nivel de confianza del 95 %, luego se puede suponer que las varianzas son iguales.
$\mu_1 - \mu_2 \in (0{,}4296,\ 1{,}4510)$ con un 95 % de confianza, luego se puede concluir que hay diferencias entre las medias.

★ 90. Para comparar la eficacia de dos tratamientos A y B en la prevención de repeticiones de infarto de miocardio, se aplicó el tratamiento A a 80 pacientes y el B a 60. Al cabo de dos años se observó que habían sufrido un nuevo infarto 14 pacientes de los sometidos al tratamiento A y 15 de los del B. Se pide:

a) Construir un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia entre las proporciones de personas sometidas a los tratamientos A y B que no vuelven a sufrir un infarto.

b) A la vista del resultado obtenido, razonar si con ese nivel de confianza puede afirmarse que uno de los tratamientos es más eficaz que el otro.

Solución

- $p_A - p_B \in (-0{,}2126,\ 0{,}0626)$ con un nivel de confianza del 95 %.
- No puede afirmarse que un tratamiento sea más eficaz que otro pues la diferencia de medias podría ser positiva, negativa o cero.

★ 91. En un análisis de obesidad dependiendo del hábitat en niños menores de 5 años, se obtienen los siguientes resultados:

	Casos analizados	Casos con sobrepeso
Hábitat rural	1150	480
Hábitat urbano	1460	660

Se pide:

a) Construir un intervalo de confianza, con un nivel de significación 0,01, para la proporción de niños menores de 5 años con sobrepeso en el hábitat rural. Igualmente para el hábitat urbano.

b) Construir un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95 %, para la diferencia de proporciones de niños menores de 5 años con sobrepeso entre el hábitat rural y el urbano. A la vista del resultado obtenido, ¿se puede concluir, con un 95 % de confianza, que la proporción de niños menores de 5 años con sobrepeso depende del hábitat?

Solución

- $p_R \in (0{,}3799,\ 0{,}4548)$ y $p_U \in (0{,}4185,\ 0{,}4856)$ con un 99 % de confianza.
- $p_R - p_U \in (-0{,}0729,\ 0{,}0036)$ con un nivel de confianza del 95 %, luego no se puede afirmar que haya diferencias en las proporciones de niños menores de 5 años con sobrepeso.

★ 92. Para analizar la eficacia de un determinado fármaco para aumentar las horas de sueño se realiza un estudio con 8 pacientes a los que se les controla durante todo un mes, en el que no toman el medicamento y se cuantifica la media de las horas de sueño para cada uno de ellos. El mismo proceso se lleva a cabo durante todo un mes en el que sí que toman el fármaco. Los resultados (en horas de sueño) aparecen en la siguiente tabla:

Paciente	Sin el fármaco	Con el fármaco
1	8,3	9,0
2	6,9	8,1
3	7,2	9,2
4	9,1	9,5
5	8,2	8,5
6	7,5	9,0
7	6,1	8,0
8	7,4	7,9

¿Se puede concluir con un nivel de confianza del 99 % que el fármaco ha sido eficaz para aumentar las horas de sueño?

Solución

El intervalo de confianza de 99 % para la media de la diferencia entre las horas de sueño sin el fármaco y con el fármaco es $(-1{,}9067\,,\ -0{,}2183)$, luego si se puede concluir que el fármaco ha sido eficaz para aumentar las horas de sueño.

6. Contraste de hipótesis

93. Se sabe que una vacuna que se está utilizando al cabo de dos años sólo protege al 60 % de las personas a las que se administró. Se desarrolla una nueva vacuna, y se quiere saber si al cabo de dos años protege a más personas que la primera. Para ello se seleccionan 10 personas al azar y se les inyecta la nueva vacuna. Establecemos que si más de 8 de los vacunados conservan la protección al cabo de dos años, entonces consideraremos la nueva vacuna mejor que la antigua. Se pide:

    a) Calcular la probabilidad de cometer un error de tipo I.

    b) Si la nueva vacuna protegiera a un 80 % de las personas vacunadas al cabo de 2 años, ¿Cuál será la probabilidad de cometer un error de tipo II?

    Repetir los cálculos si se toma una muestra de 100 personas y se establece que la vacuna es mejor si más de 75 de los vacunados conservan la protección al cabo de 2 años.

    Nota: Aproximar la distribución binomial mediante una distribución normal.

    Solución

    Contraste: $H_0 : p = 0{,}6$, $H_1 : p > 0{,}6$. Muestra de tamaño 10:

    - $P(\text{Rechazar } H_0/H_0) = 0{,}0464$.
    - $P(\text{Aceptar } H_0/H_1) = 0{,}6242$.

    Muestra de tamaño 100:

    - $P(\text{Rechazar } H_0/H_0) = 0{,}0011$.
    - $P(\text{Aceptar } H_0/H_1) = 0{,}1056$.

94. Se sabe que el tiempo de reacción ante un estímulo sigue una distribución normal de media 30 ms y desviación típica 10 ms. Se cree que la alcoholemia aumenta el tiempo de reacción de los sujetos, y para comprobar esta hipótesis se ha tomado una muestra aleatoria de 40 individuos a los que se les ha inducido una alcoholemia de 0,8 g/l y en los que se ha apreciado un tiempo medio de respuesta de 35 ms y una desviación típica de 12 ms. ¿Se puede afirmar que una alcoholemia de 0,8 gm/l influye en el tiempo medio de respuesta con un riesgo $\alpha = 0{,}05$? ¿Y con un riesgo $\alpha = 0{,}01$?

    ¿Cuál será la potencia del contraste para detectar una difererencia en la media del tiempo de reacción de 4 ms? ¿Cuál debería ser el tamaño muestral para aumentar la potencia hasta un 90 %?

    Solución

    Contraste para la media: $H_0 : \mu = 30$, $H_1 : \mu > 30$.
    Región de aceptación para $\alpha = 0{,}01$: $z < 2{,}3263$.
    Estadístico del contraste: $z = 2{,}6020$. Como cae fuera de la región de aceptación, se rechaza la hipótesis nula tanto para $\alpha = 0{,}01$ y con mayor motivo para $\alpha = 0{,}05$, de manera que se concluye que la alcoholemia influye en el tiempo de respuesta.
    Potencia del contraste para $\delta = 4$: $1 - \beta = 1 - 0{,}5966 = 0{,}4034$.
    El tamaño muestral para, $\alpha = 0{,}05$, $\delta = 4$ y una potencia del 90 % es $n = 80$.

95. Un fisioterapeuta afirma que con un nuevo procedimiento de rehabilitación que él aplica, determinada lesión tiene un tiempo de recuperación medio no mayor de 15 días. Se seleccionan al azar 36 personas que sufren dicho tipo de lesión para verificar su afirmación, y se obtiene un tiempo medio de recuperación de 13 días y una cuasivarianza de 9. ¿Contradice lo observado en la muestra la afirmación del fisioterapeuta para un $\alpha = 0{,}05$?

    Solución

Contraste para la media: $H_0 : \mu = 15$, $H_1 : \mu < 15$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}05$: $-1{,}6444 < z$.
Estadístico del contraste: $z = -4$. Como cae fuera de la región de aceptación se rechaza la hipótesis nula y se confirma confirma la afirmación del fisioterapeuta.

---

96. Se cree que el nivel medio de protrombina en plasma de una población normal tiene una media de 19mg/100ml y una desviación típica de 4mg/100ml. Para contrastar estas hipótesis se tomó una muestra de 8 individuos en los que se obtuvieron los siguientes niveles de protrombina en plasma:

$$16{,}3 - 18{,}4 - 20{,}0 - 17{,}6 - 15{,}4 - 23{,}7 - 17{,}8 - 19{,}5$$

¿Se pueden aceptar ambas hipótesis con un riesgo $\alpha = 0{,}1$?

Solución

Contraste para la media: $H_0 : \mu = 19$, $H_1 : \mu \neq 19$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}1$: $-1{,}8946 < t < 1{,}8946$.
Estadístico del contraste: $t = -0{,}4552$. Como cae dentro de la región de aceptación, se mantiene la hipótesis de que la media es 19mg/100ml.
Contraste para la varianza: $H_0 : \sigma = 4$, $H_1 : \sigma \neq 4$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}1$: $2{,}1673 < j < 14{,}0671$.
Estadístico del contraste: $j = 2{,}8743$. Como cae dentro de la región de aceptación, también se mantiene la hipótesis de que la desviación típica es de 4mg/100ml.

---

97. Se decide retirar una cierta vacuna si produce más de un 10 % de reacciones alérgicas. Se consideran 100 pacientes sometidos a la vacuna y se observan 15 reacciones alérgicas. ¿Debe retirarse la vacuna? (Utilizar un $\alpha = 0{,}01$).

Solución

Contraste para la proporción: $H_0 : p = 0{,}1$, $H_1 : p > 0{,}1$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}01$: $z > 2{,}3263$.
Estadístico del contraste: $z = 1{,}6667$. Como cae dentro de la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula y se concluye que no hay pruebas suficientes para retirar la vacuna.

---

98. Un fabricante de baterías para automóvil asegura que la duración de sus baterías tiene una distribución aproximadamente normal con desviación típica no superior a 0,9 años. Si una muestra aleatoria de 10 de estas baterías tiene una cuasidesviación típica de 0,7 años, ¿qué se puede concluir sobre la afirmación del fabricante?

Solución

Contraste para la desviación típica: $H_0 : \sigma = 0{,}9$, $H_1 : \sigma < 0{,}9$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}05$: $3{,}3251 < j$.
Estadístico del contraste: $j = 4$. Como cade dentro de la región de aceptación, no se puede rechazar la hipótesis nula y se concluye que no hay pruebas significativas de que sea cierta la afirmación del fabricante.

---

99. Un estudio afirma que el 70 % de los habitantes de la capital lee diariamente algún periódico. ¿Estaríamos de acuerdo con las conclusiones de dicho estudio si al preguntar a 15 personas elegidas aleatoriamente, 8 leen diariamente algún periódico?

Solución

Contraste para la proporción: $H_0 : p = 0{,}7$, $H_1 : p \neq 0{,}7$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}05$: $-1{,}96 < z < 1{,}96$.
Estadístico del contraste: $z = -1{,}408590$. Como cae dentro de la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula y se estaría de acuerdo con las afirmación del estudio.

---

100. Se realizó en dos hospitales una encuesta entre los pacientes sobre la satisfacción con la atención recibida, calificándola de 0 a 100. En el hospital A rellenaron la encuesta 12 pacientes, obteniéndose una media de 85 y una cuasivarianza de 16, mientras que en el hospital B rellenaron la encuesta 10 pacientes, obteniéndose una media de 81 y una cuasivarianza de 25. ¿Puede concluirse que el nivel de satisfacción en el hospital A es mayor que en el B?

    Nota: Hacer previamente un contraste de igualdad de varianzas.

    Solución

    Contraste de comparación de varianzas: $H_0 : \sigma_A = \sigma_B$, $H_1 : \sigma_A \neq \sigma_B$.
    Región de aceptación para $\alpha = 0{,}05$: $0{,}2787 < f < 3{,}9121$.
    Estadístico del contraste: $f = 0{,}64$. Como cae dentro de la región de aceptación, se acepta la hipótesis de que las varianzas son iguales.
    Contraste de comparación de medias: $H_0 : \mu_A = \mu_B$, $H_1 : \mu_A > \mu_B$.
    Región de aceptación para $\alpha = 0{,}05$: $t > 1{,}7247$ Estadístico del contraste: $t = 2{,}0863$. Como cae fuera de la región de aceptación, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay pruebas significativas de que el nivel de satisfación en el hospital A es mayor que en el B.

---

101. Un fabricante de equipos de medida afirma que sus equipos pueden realizar al menos 12 mediciones más que los de la competencia sin necesidad de un nuevo ajuste. Para probar esta afirmación se realizan mediciones con 50 equipos de este fabricante y 50 de la competencia. En los suyos el número de mediciones hasta necesitar un nuevo ajuste tuvo de media 86,7 y cuasidesviación típica 6,28, mientras que en los de la competencia estos valores fueron 77,8 y 5,61 respectivamente. Verificar la afirmación del fabricante con $\alpha = 0{,}05$.

    Solución

    Contraste de comparación de medias: $H_0 : \mu_1 < \mu_2 + 12$, $H_1 : \mu_1 \geq \mu_2 12$.
    Intervalo de confianza para la diferencia de medias: $\mu_1 - \mu_2 \in (6{,}5659, 11{,}2341)$ con un 95 % de confianza, luego hay diferencias significativas entre el número medio de mediciones, pero no se puede afirmar que sean mayores de 12 mediciones.

---

102. En una investigación para ver la efectividad de una nueva droga antidepresiva, se ha tomado un muestra de 15 pacientes depresivos que han completado un cuestionario para detectar el nivel depresivo, antes y después de recibir la droga. En la puntuación del cuestionario los valores menores indican una mayor depresión. Los resultados obtenidos han sido:

Antes:	18	21	16	19	14	23	16	14	21	18	17	14	16	14	20
Después:	23	20	17	20	16	22	18	18	21	16	19	20	15	15	21

    Realizar un constraste para averiguar si la droga tiene un efecto positivo sobre la depresión. ¿Qué tamaño muestral sería necesario para detectar una diferencia en la puntuación como la que hay entre las medias de las muestras?

    Solución

    Contraste para la media de la diferencia entre antes y después: $H_0 : \mu = 0$, $H_1 : \mu < 0$.
    Región de aceptación par $\alpha = 0{,}05$: $-1{,}7613 < t$.
    Estadístico del contraste: $t = -2{,}2563$. Como cae fuera de la región de aceptación, se rechaza la

hipótesis nula y se puede afirmar que la droga reduce la depresión.
El tamaño muestral para detectar una diferencia de $\delta = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 17{,}4 - 18{,}7333 = -1{,}3333$ con una potencia del 90 % es $n = 26$ individuos.

---

103. Se utiliza un grupo de 150 pacientes para comprobar la teoría de que la vitamina C tiene alguna influencia en el tratamiento del cáncer. Los 150 pacientes fueron divididos en dos grupos de 75. Un grupo recibió 10 gramos de vitamina C y el otro un placebo cada día, además de la medicación habitual. De los que recibieron la vitamina C, 47 presentaban alguna mejoría al cabo de cuatro semanas, mientras que de los que recibieron el placebo, 43 experimentaron mejoría. Contrastar esta hipótesis.

Solución

Contraste para la comparación de proporciones: $H_0 : p_1 = p_2$, $H_1 : p_1 \neq p_2$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}05$: $-1{,}96 < z < 1{,}96$.
Estadístico del contraste $z = 0{,}6677$. Como cae dentro de la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula y no se pude concluir que la vitamina C tenga influencia en el tratamiento del cáncer.

---

104. En un estudio sobre el consumo de alcohol entre los jóvenes durante los fines de semana, se preguntó a 100 chicos y a 125 chicas, de los que 63 chicos y 59 chicas contestaron que consumían. En vista de estos datos, ¿existe alguna diferencia significativa entre las respuestas de chicos y chicas? Utilizar $\alpha = 0{,}10$.

Solución

Contraste de comparación de proporciones: $H_0 : p_1 = p_2$, $H_1 : p_1 \neq p_2$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}01$: $-1{,}6449 < z < 1{,}6449$.
Estadístico del contraste: $z = 2{,}4026$. Como cae fuera de la región de aceptación, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay diferencias significativas entre el consumo de alcohol de chicos y chicas.

★105. Para ver si la ley antitabaco está influyendo en el número de cigarros que se fuman mientras se está en los bares se seleccionó una muestra en la que se midió el número de cigarros fumados por hora mientras se estaba en un bar antes de la entrada en vigor de la ley y otra muestra distinta en la que también se midió el número de cigarros fumados por hora después de la entrada en vigor de la ley (se entiende que con la ley en vigor los cigarros se fuman en el exterior de los bares). Los resultados aparecen en la siguientes tablas:

Antes

Cigarros	Personas
0-1	12
1-2	21
2-3	20
3-4	8

Después

Cigarros	Personas
0-1	22
1-2	18
2-3	8
3-4	4

Se pide:

a) Calcular el intervalo de confianza del 99 % para el número medio de cigarros fumados por hora en los bares antes de la entrada en vigor de la ley. ¿Cuántos individuos serían necesarios para poder estimar dicha media con un margen de error no mayor de $\pm 0{,}1$ cigarros por hora?

b) Contrastar si la nueva ley ha reducido significativamente el consumo medio de tabaco en los bares. ¿Cuánto vale el p-valor del contraste?

Solución

a) El intervalo de confianza del 99 % para el número medio de cigarros fumados por hora en los bares antes de la entrada en vigor de la ley es (1,5789, 2,2079). El tamaño muestral necesario para estimar la media con un margend e error no mayor de ±0,1 cigarros es $n = 603$ individuos.

b) Contraste para de comparación de medias: $H_0 : \mu_x = \mu_y$, $H_1 : \mu_x > \mu_y$.
Región de aceptación para $\alpha = 0{,}05$: $Z \leq z_\alpha = 1{,}6449$.
Estadístico del contraste: $z = 2{,}8447$. Como cae dentro fuera de la región de aceptación, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la ley ha reducido el consumo medio de cigarros por hora.
El p-valor del contraste vale 0,0022.

Nota: Los problemas marcados con una estrella (★) son problemas de exámenes de otros años.