

Manual de Estadística

para Ciencias e Ingenierías



Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
<https://aprendeconalf.es>

Índice de contenidos

Prefacio	3
Licencia	3
1 Introducción a la Estadística	4
1.1 La estadística como herramienta científica	4
1.1.1 ¿Qué es la estadística?	4
1.1.2 La variabilidad de nuestro mundo	4
1.2 Población y muestra	5
1.2.1 Población estadística	5
1.2.2 Inconvenientes en el estudio de la población	5
1.2.3 Muestra estadística	6
1.2.4 Determinación del tamaño muestral	6
1.2.5 Tipos de razonamiento	7
1.3 Muestreo	10
1.3.1 Modalidades de muestreo	10
1.3.2 Muestreo aleatorio simple	12
1.3.3 Variables estadísticas	12
1.3.4 Tipos de estudios estadísticos	15
1.3.5 La tabla de datos	15
1.3.6 Fases del análisis estadístico	16
2 Estadística Descriptiva	18
2.1 Distribución de frecuencias	18
2.1.1 Clasificación de la muestra	18
2.1.2 Recuento de frecuencias	20
2.2 Frecuencias muestrales	20
2.2.1 Tabla de frecuencias	21
2.2.2 Construcción de clases	22
2.3 Representaciones gráficas	23
2.3.1 Diagrama de barras	23
2.3.2 Histograma	26
2.3.3 Diagrama de sectores	29
2.3.4 La distribución Normal	29
2.4 Datos atípicos	36
2.4.1 Tratamiento de los datos atípicos	36
2.5 Estadísticos muestrales	37

2.6	Estadísticos de posición	37
2.6.1	Media aritmética	38
2.6.2	Mediana	40
2.6.3	Moda	42
2.6.4	¿Qué estadístico de tendencia central usar?	44
2.6.5	Medidas de posición no centrales	45
2.7	Estadísticos de dispersión	48
2.7.1	Recorrido	48
2.7.2	Rango intercuartílico	49
2.7.3	Diagrama de caja y bigotes	49
2.7.4	Varianza y desviación típica	53
2.7.5	Coeficiente de variación	55
2.8	Estadísticos de forma	56
2.8.1	Coeficiente de asimetría	56
2.8.2	Coeficiente de apuntamiento o curtosis	60
2.8.3	Distribuciones no normales	63
2.9	Transformaciones de variables	64
2.9.1	Transformaciones lineales	66
2.9.2	Transformación de tipificación y puntuaciones típicas	67
2.9.3	Variables clasificadoras o factores	70
3	Regresión	73
3.1	Distribución de frecuencias conjunta	73
3.1.1	Frecuencias conjuntas	73
3.1.2	Distribución de frecuencias bidimensional	74
3.1.3	Diagrama de dispersión	75
3.1.4	Distribuciones marginales	77
3.2	Covarianza	77
3.3	Regresión	81
3.3.1	Modelos de regresión simple	81
3.3.2	Residuos o errores predictivos	81
3.3.3	Ajuste de mínimos cuadrados	82
3.3.4	Coeficiente de determinación	83
3.3.5	Coeficiente de correlación lineal	85
3.3.6	Distintos grados de correlación	86
3.3.7	Fiabilidad de las predicciones de un modelo de regresión	86
3.4	Regresión no lineal	87
3.4.1	Transformación de modelos de regresión no lineales	87
3.4.2	Relación exponencial	88
3.5	Riesgos de la regresión	92
3.5.1	La falta de ajuste no significa independencia	92
3.5.2	Datos atípicos en regresión	93
3.5.3	La paradoja de Simpson	96

4 Estimación de parámetros poblacionales	98
4.1 Distribuciones muestrales	98
4.1.1 Distribución de la media muestral para muestras grandes ($n \geq 30$)	101
4.1.2 Distribución de una proporción muestral para muestras grandes ($n \geq 30$)	103
4.2 Estimadores	103
4.3 Estimación puntual	105
4.4 Estimación por intervalos	109
4.4.1 Error de estimación	111
4.5 Intervalos de confianza para una población	112
4.5.1 Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida	113
4.5.2 Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida	116
4.5.3 Intervalo de confianza para la media de una población no normal	118
4.5.4 Intervalo de confianza para la varianza de una población normal	119
4.5.5 Intervalo de confianza para una proporción	121
4.6 Intervalos de confianza para la comparación dos poblaciones	124
4.6.1 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de poblaciones normales con varianzas conocidas	124
4.6.2 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales	125
4.6.3 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas y distintas	128
4.6.4 Intervalo de confianza para el cociente de varianzas	130
4.6.5 Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones	132
5 Contrastes de hipótesis paramétricos	135
5.1 Hipótesis estadística y tipos de contrastes	135
5.1.1 Contraste de hipótesis	135
5.1.2 Tipos de contrastes de hipótesis	136
5.1.3 Hipótesis nula e hipótesis alternativa	136
5.1.4 Contrastos de hipótesis paramétricos	137
5.2 Metodología para realizar un contraste de hipótesis	138
5.2.1 Estadístico del contraste	138
5.2.2 Regiones de aceptación y de rechazo	139
5.2.3 Errores en un contraste de hipótesis	140
5.2.4 Riesgos de los errores de un contraste de hipótesis	141
5.2.5 Determinación de las regiones de aceptación y de rechazo en función del riesgo α	141
5.2.6 Riesgo β y tamaño del efecto	144
5.2.7 Potencia de un contraste	144
5.2.8 Cálculo del riesgo β y de la potencia $1 - \beta$	145
5.2.9 Relación del riesgo β y el tamaño del efecto δ	145

5.2.10	Relación entre los riesgos α y β	147
5.2.11	Relación de los riesgos de error y el tamaño muestral	148
5.3	Curva de potencia	150
5.3.1	<i>p</i> -valor de un contraste de hipótesis	151
5.3.2	Regla de decisión de un contraste	152
5.3.3	Pasos para la realización de un contraste de hipótesis	152
5.4	Contrastes paramétricos más importantes	153
5.5	Contraste para la media de una población normal con varianza conocida	153
5.6	Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida	154
5.6.1	Determinación del tamaño muestral en un contraste para la media	155
5.7	Contraste para la media de una población con varianza desconocida y muestras grandes	156
5.8	Contraste para la varianza de una población normal	157
5.9	Contraste para proporción de una población	158
5.10	Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas	159
5.11	Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales	160
5.12	Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas	161
5.13	Contraste de comparación de varianzas de dos poblaciones normales	162
5.14	Contraste de comparación de proporciones de dos poblaciones	163
5.15	Realización de contrastes mediante intervalos de confianza	164

Prefacio

¡Bienvenida/os al manual de Estadística!

Este libro es una introducción a la Estadística básica y el cálculo de probabilidades para alumnos de grados de ciencias e ingenierías.

Este libro se complementa con los siguientes recursos:

- Colección de problemas resueltos
- Prácticas de Estadística con R

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento – No comercial – Compartir bajo la misma licencia 3.0 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>.

Con esta licencia eres libre de:

- Copiar, distribuir y mostrar este trabajo.
- Realizar modificaciones de este trabajo.

Bajo las siguientes condiciones:

- **Reconocimiento Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Compartir bajo la misma licencia Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

1 Introducción a la Estadística

1.1 La estadística como herramienta científica

1.1.1 ¿Qué es la estadística?

Definición 1.1 (Estadística). La *estadística* es una rama de las matemáticas que se encarga de la recogida, análisis e interpretación de datos.

El papel de la Estadística es extraer información de los datos para adquirir el conocimiento necesario para tomar decisiones.



Figura 1.1: Propósito de la Estadística

La estadística es imprescindible en cualquier disciplina científica o técnica donde se manejen datos, especialmente si son grandes volúmenes de datos, como por ejemplo en Física, Química, Medicina, Psicología, Economía o Ciencias Sociales.

Pero, *¿por qué es necesaria la Estadística?*

1.1.2 La variabilidad de nuestro mundo

El científico trata de estudiar el mundo que le rodea; un mundo que está lleno de variaciones que dificultan la determinación del comportamiento de las cosas.

La estadística actúa como disciplina puente entre la realidad del mundo y los modelos matemáticos que tratan de explicarla, proporcionando una metodología para evaluar las discrepancias entre la realidad y los modelos teóricos.

Esto la convierte en una herramienta indispensable en las ciencias aplicadas que requieran el análisis de datos y el diseño de experimentos.

1.2 Población y muestra

1.2.1 Población estadística

Definición 1.2 (Población). Una *población* es un conjunto de elementos definido por una o más características que tienen todos los elementos, y sólo ellos. Cada elemento de la población se llama *individuo*.

Definición 1.3 (Tamaño poblacional). El número de individuos de una población se conoce como *tamaño poblacional* y se representa como N .

Ejemplo 1.1. En unas elecciones generales a la presidencia del gobierno, la población serían todos los individuos del estado con derecho a voto. En el estudio de una enfermedad, la población sería todas las personas que tienen la enfermedad. Y en un proceso de control de calidad en la fabricación de un fármaco, la población estaría formada por todos los fármacos que se producen en la fábrica.

A veces, no todos los elementos de la población están accesibles para su estudio. Entonces se distingue entre:

- **Población Teórica:** Conjunto de elementos a los que se quiere extraer los resultados del estudio.
- **Población Estudiada:** Conjunto de elementos realmente accesibles en el estudio.

Ejemplo 1.2. En el caso del estudio de una enfermedad, la población teórica sería todas las personas que contraigan la enfermedad, incluso si aún no han nacido, mientras que la población estudiada se limitaría al número de personas enfermas que realmente podemos estudiar (obsérvese que incluso quedarían fuera las personas enfermas pero de las que no podemos conseguir información).

1.2.2 Inconvenientes en el estudio de la población

El científico estudia un determinado fenómeno en una población para comprenderlo, obtener conocimiento sobre el mismo, y así poder controlarlo. Pero, para tener un conocimiento completo de la población *es necesario estudiar todos los individuos de la misma*. Sin embargo, esto no siempre es posible por distintos motivos:

- El tamaño de la población es infinito, o bien es finito pero demasiado grande.
- Las pruebas a que se someten los individuos son destructivas.
- El coste, tanto de dinero como de tiempo, que supondría estudiar a todos los individuos es excesivo.

1.2.3 Muestra estadística

Cuando no es posible o conveniente estudiar todos los individuos de la población, se estudia sólo una parte de la misma.

Definición 1.4 (Muestra). Una *muestra* es un subconjunto de la población.

Definición 1.5 (Tamaño muestral). Al número de individuos que componen la muestra se le llama *tamaño muestral* y se representa por n .

Habitualmente, el estudio de una población se realiza a partir de muestras extraídas de dicha población.

Generalmente, el estudio de la muestra sólo aporta conocimiento aproximado de la población. Pero en muchos casos es *suficiente*.

1.2.4 Determinación del tamaño muestral

Una de las preguntas más interesantes que surge inmediatamente es: *¿cuántos individuos es necesario tomar en la muestra para tener un conocimiento aproximado pero suficiente de la población?*

La respuesta depende de varios factores, como la variabilidad de la población o la fiabilidad deseada para las extrapolaciones que se hagan hacia la población.

Por desgracia no se podrá responder hasta casi el final del curso, pero en general, cuantos más individuos haya en la muestra, más fiables serán las conclusiones sobre la población, pero también será más lento y costoso el estudio.

Ejemplo 1.3. Para entender a qué nos referimos cuando hablamos de un tamaño muestral suficiente para comprender lo que ocurre en la población, podemos utilizar el siguiente símil en que se trata de comprender el motivo que representa una fotografía.

Una fotografía digital está formada por multitud de pequeños puntitos llamados pixels que se dispone en una enorme tabla de filas y columnas (cuantas más filas y columnas haya se habla de que la foto tiene más resolución). Aquí la población estaría formada por todos y cada uno de los píxeles que forman la foto. Por otro lado cada pixel tiene un color y es la variedad de colores a lo largo de los pixels la que permite formar la imagen de la fotografía.

¿Cuántos píxeles debemos tomar en una muestra para averiguar la imagen de la foto?

La respuesta depende de la variabilidad de colores en la foto. Si todos los pixels de la foto son del mismo color, entonces un sólo pixel basta para desvelar la imagen. Pero, si la foto tiene mucha variabilidad de colores, necesitaremos muchos más pixels en la muestra para descubrir el motivo de la foto.

La imagen siguiente contiene una muestra pequeña de píxeles de una foto. ¿Puedes averiguar el motivo de la foto?

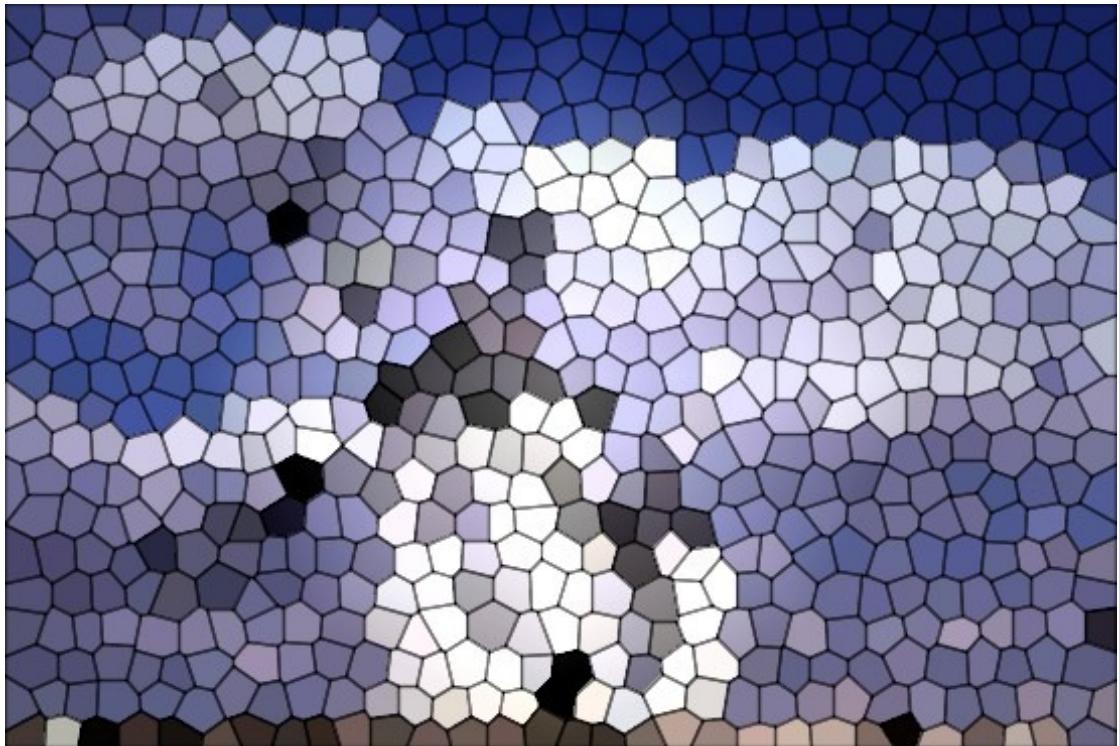


Figura 1.2: Muestra pequeña de píxeles de una foto.

¡Con una muestra pequeña es difícil averiguar el contenido de la imagen!

Seguramente no has podido averiguar el motivo de la fotografía, porque en este caso el número de píxeles que hemos tomado en la muestra es insuficiente para comprender toda la variabilidad de colores que hay en la foto.

La siguiente imagen contiene una muestra mayor de píxeles. ¿Eres capaz de adivinar el motivo de la foto ahora?

¡Con una muestra mayor es posible desvelar el motivo de la foto!

Y aquí está la población completa.

Lo importante es que *¡No es necesario conocer todos los píxeles para averiguar la imagen!*

1.2.5 Tipos de razonamiento

Así pues, habitualmente realizaremos el estudio de la población a partir de muestras y luego trataremos de extrapolar lo observado en la muestra al resto de la población. A

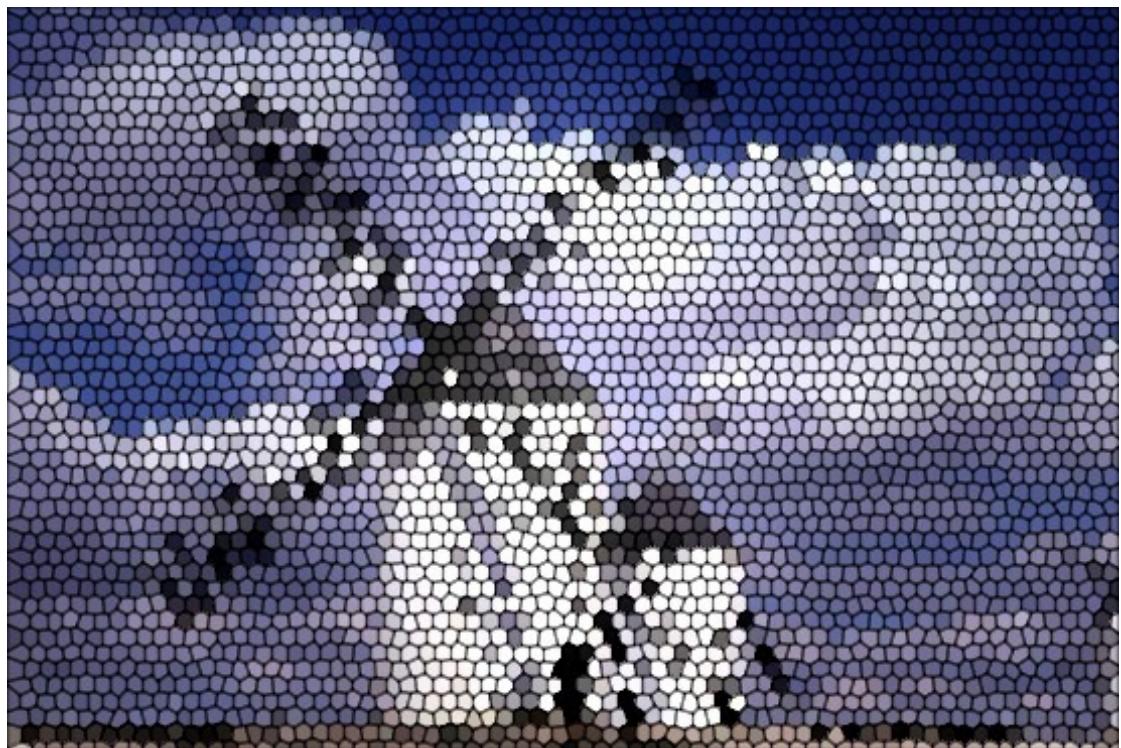


Figura 1.3: Muestra mayor de píxeles de una foto.



Figura 1.4: Población de píxeles de una foto.

este tipo de razonamiento que saca conclusiones desde la muestra hacia la población se le conoce como *razonamiento inductivo*.

- *Características de la deducción:* Si las premisas son ciertas, garantiza la certeza de las conclusiones (es decir, si algo se cumple en la población, también se cumple en la muestra). Sin embargo, *¡no aporta conocimiento nuevo!*
- *Características de la inducción:* No garantiza la certeza de las conclusiones (si algo se cumple en la muestra, puede que no se cumpla en la población, así que ¡cuidado con las extrapolaciones!), pero *¡es la única forma de generar conocimiento nuevo!*

La estadística se apoya fundamentalmente en el razonamiento inductivo ya que utiliza la información obtenida a partir de muestras para sacar conclusiones sobre las poblaciones. A diferencia del razonamiento deductivo que va de lo general a lo particular, o en nuestro caso de la población a la muestra, el razonamiento inductivo no garantiza la certeza de las conclusiones, por lo que debemos ser cuidadosos a la hora de generalizar sobre la población lo observado en al muestra, ya que si la muestra no es representativa de la población o contiene sesgos, las conclusiones pueden ser erróneas.

1.3 Muestreo

Definición 1.6 (Muestreo). El proceso de selección de los elementos que compondrán una muestra se conoce como *muestreo*.

](img/introduccion/muestreo.svg" alt="Muestreo" width="500px">>

Para que una muestra refleje información fidedigna sobre la población global debe ser representativa de la misma, lo que significa que debe reproducir a pequeña escala la variabilidad de la población.

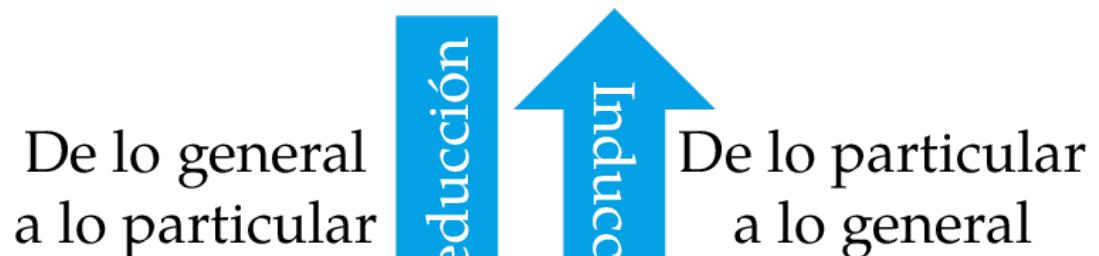
El objetivo es obtener una muestra representativa de la población.

1.3.1 Modalidades de muestreo

Existen muchas técnicas de muestreo pero se pueden agrupar en dos categorías:

- **Muestreo Aleatorio:** Elección aleatoria de los individuos de la muestra. Todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos (*equiprobabilidad*).
- **Muestreo No Aleatorio:** Los individuos se eligen de forma no aleatoria. Algunos individuos tienen más probabilidad de ser seleccionados que otros.

Población



Muestra

Figura 1.5: Tipos de razonamiento.

Sólo las técnicas aleatorias evitan el sesgo de selección, y por tanto, garantizan la representatividad de la muestra extraída, y en consecuencia la validez de las conclusiones.

Las técnicas no aleatorias no sirven para hacer generalizaciones, ya que no garantizan la representatividad de la muestra. Sin embargo, son menos costosas y pueden utilizarse en estudios exploratorios.

1.3.2 Muestreo aleatorio simple

Dentro de las modalidades de muestreo aleatorio, el tipo más conocido es el *muestreo aleatorio simple*, caracterizado por:

- Todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos para la muestra.
- La selección de individuos es con reemplazamiento, es decir, cada individuo seleccionado es devuelto a la población antes de seleccionar al siguiente (y por tanto no se altera la población de partida).
- Las sucesivas selecciones de un individuo son independientes.

La única forma de realizar un muestreo aleatorio es asignar un número a cada individuo de la población (*censo*) y realizar un sorteo aleatorio.

1.3.3 Variables estadísticas

Todo estudio estadístico comienza por la identificación de las características que interesa estudiar en la población y que se medirán en los individuos de la muestra.

Definición 1.7 (Variable estadística). Una *variable estadística* es una propiedad o característica medida en los individuos de la población.

Los *datos* son los valores observados en las variables estadísticas.

Estas características pueden ser de distintos tipos de acuerdo a su naturaleza y su escala:

- **Variables cualitativas o atributos:** Miden cualidades no numéricas. Pueden ser:
 - **Nominales:** No existe un orden entre las categorías.
Ejemplo: El color de pelo o el sexo.
 - **Ordinales:** Existe un orden entre las categorías. Ejemplo: El nivel de estudios o la gravedad de una enfermedad.
- **Variables cuantitativas:** Miden cantidades numéricas. Pueden ser:



Figura 1.6: Variables estadísticas.

- **Discretas:** Toman valores numéricos aislados (habitualmente números enteros).
Ejemplo: El número de hijos o el número de coches en una familia.
- **Continuas:** Pueden tomar cualquier valor en un intervalo real.
Ejemplo: El peso o la estatura.

Las variables cualitativas y discretas se conocen también con *variables categóricas* y sus valores *categorías*.

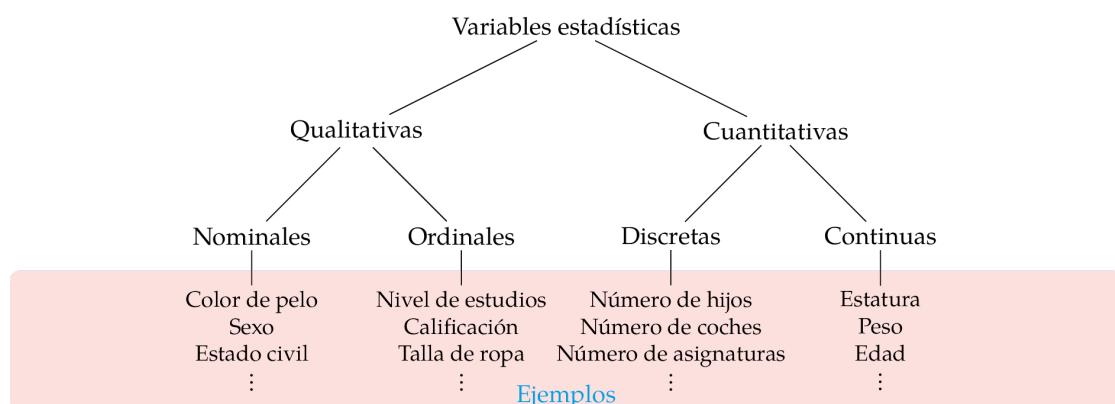


Figura 1.7: Tipos de variables estadísticas.

1.3.3.1 Elección del tipo de variable más apropiado

En ocasiones una característica puede medirse mediante variables de distinto tipo.

Ejemplo 1.4. Si una persona fuma o no podría medirse de diferentes formas:

- Fuma: si/no. (Nominal)
- Nivel de fumador: No fuma / ocasional / moderado / bastante / empedernido. (Ordinal)
- Número de cigarros diarios: 0,1,2,... (Discreta)

En estos casos es preferible usar variables cuantitativas a cualitativas. Dentro de las cuantitativas es preferible usar las continuas a las discretas y dentro de las cualitativas es preferible usar ordinales a nominales pues aportan más información.



Figura 1.8: Cantidad de información de los tipos de variables estadísticas.

De acuerdo al papel que juegan en el estudio las variables también pueden clasificarse como:

- **Variables independientes:** Variables que supuestamente no dependen de otras variables en el estudio. Habitualmente son las variables manipuladas en el experimento para ver su efecto en las variables dependientes. Se conocen también como *variables predictivas*.
- **Variables dependientes:** Variables que supuestamente dependen de otras variables en el estudio. No son manipuladas en el experimento y también se conocen como *variables respuesta*.

Ejemplo 1.5. En un estudio sobre el rendimiento de los alumnos de un curso, la inteligencia de los alumnos y el número de horas de estudio diarias serían variables independientes y la nota del curso sería una variable dependiente.

1.3.4 Tipos de estudios estadísticos

Dependiendo de si se manipulan las variables independientes existen dos tipos de estudios:

- **Experimentales:** Cuando las variables independientes son manipuladas para ver el efecto que producen en las variables dependientes.

Ejemplo 1.6. En un estudio sobre el rendimiento de los estudiantes en un test, el profesor manipula la metodología de estudio para crear dos o más grupos con metodologías de estudio distintas.

- **No experimentales:** Cuando las variables independientes no son manipuladas. Esto no significa que sea imposible hacerlo, sino que es difícil o poco ético hacerlo.

Ejemplo 1.7. En un estudio un investigador puede estar interesado en el efecto de fumar sobre el cáncer de pulmón. Aunque es posible, no sería ético pedirle a los pacientes que fumasen para ver el efecto que tiene sobre sus pulmones. En este caso, el investigador podría estudiar dos grupos de pacientes, uno con cáncer de pulmón y otro sin cáncer, y observar en cada grupo cuántos fuman o no.

Los estudios experimentales permiten identificar causas y efectos entre las variables del estudio, mientras que los no experimentales sólo permiten identificar relaciones de asociación entre las variables.

1.3.5 La tabla de datos

Las variables a estudiar se medirán en cada uno de los individuos de la muestra, obteniendo un conjunto de datos que suele organizarse en forma de matriz que se conoce como tabla de datos__.

En esta tabla cada columna contiene la información de una variable y cada fila la información de un individuo.

Ejemplo 1.8. La siguiente tabla contiene información de las variables Nombre, Edad, Sexo, Peso y Altura de una muestra de 6 personas.

Nombre	Edad	Sexo	Peso(Kg)	Altura(cm)
José Luis Martínez	18	H	85	179
Rosa Díaz	32	M	65	173
Javier García	24	H	71	181
Carmen López	35	M	65	170
Marisa López	46	M	51	158

Nombre	Edad	Sexo	Peso(Kg)	Altura(cm)
Antonio Ruiz	68	H	66	174

1.3.6 Fases del análisis estadístico

Normalmente un estudio estadístico pasa por las siguientes etapas:

1. El estudio comienza por el diseño previo del mismo en el que se establezcan los objetivos del mismo, la población, las variables que se medirán y el tamaño muestral requerido.
2. A continuación se seleccionará una muestra representativa del tamaño establecido y se medirán las variables en los individuos de la muestra obteniendo la tabla de datos. De esto se encarga el *Muestreo*.
3. El siguiente paso consiste en describir y resumir la información que contiene la muestra. De esto se encarga la *Estadística Descriptiva*.
4. La información obtenida es proyectada sobre un modelo matemático que intenta explicar el comportamiento de la población y el modelo se valida. De todo esto se encarga la *Estadística Inferencial*.
5. Finalmente, el modelo validado nos permite hacer predicciones y sacar conclusiones sobre la población de partida con cierta confianza.

1.3.6.1 El ciclo estadístico

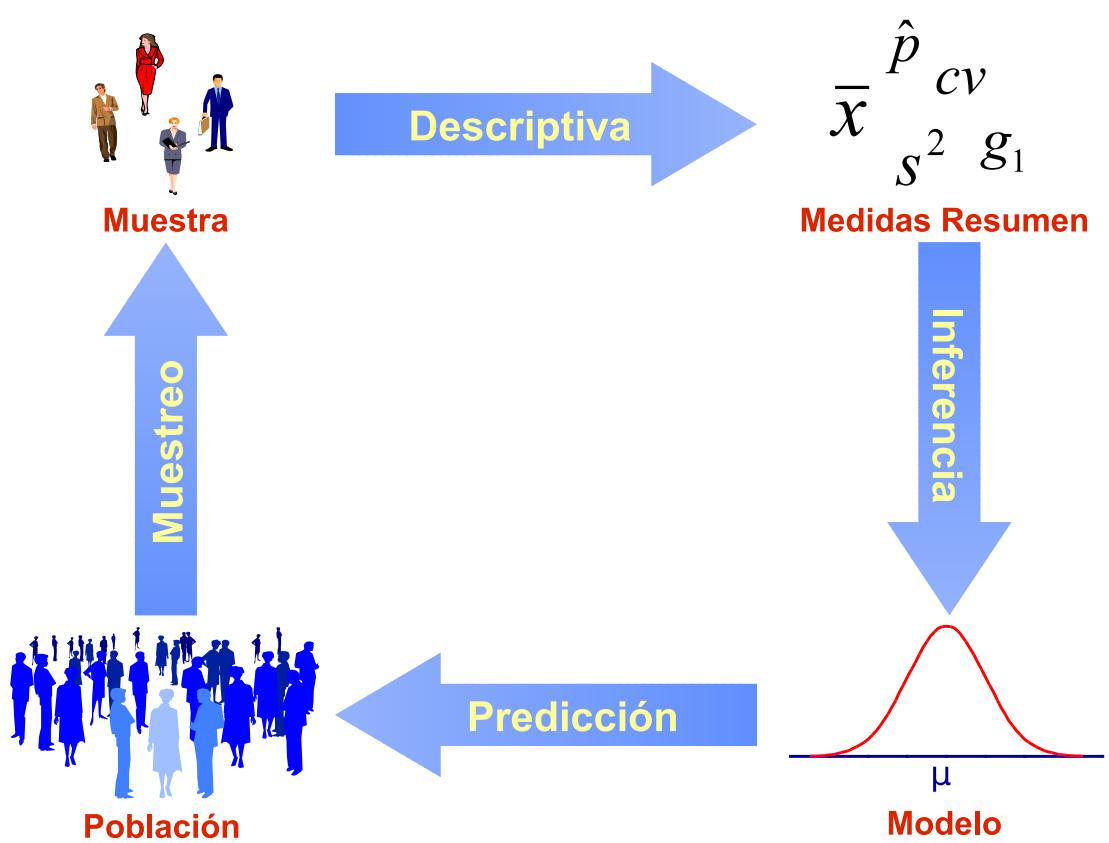


Figura 1.9: El ciclo estadístico.

2 Estadística Descriptiva

La estadística descriptiva es la parte de la estadística encargada de representar, analizar y resumir la información contenida en la muestra.

Tras el proceso de muestreo, es la siguiente etapa de todo estudio estadístico y suele consistir en:

1. Clasificar, agrupar y ordenar los datos de la muestra.
2. Tabular y representar gráficamente los datos de acuerdo a sus frecuencias.
3. Calcular medidas que resuman la información que contiene la muestra (*estadísticos muestrales*).

Interpretación

No tiene poder inferencial, por lo que nunca deben sacarse conclusiones sobre la población a partir de las medidas resumen que aporta la Estadística Descriptiva.

2.1 Distribución de frecuencias

El estudio de una variable estadística comienza por medir la variable en los individuos de la muestra y clasificar los valores obtenidos.

Existen dos formas de clasificar estos valores:

- **Sin agrupar:** Ordenar todos los valores obtenidos en la muestra de menor a mayor. Se utiliza con atributos y variables discretas con pocos valores diferentes.
- **Agrupados:** Agrupar los valores en clases (intervalos) y ordenar dichas clases de menor a mayor. Se utiliza con variables continuas y con variables discretas con muchos valores diferentes.

2.1.1 Clasificación de la muestra

Consiste colocar juntos los valores iguales y ordenarlos si existe un orden entre ellos.



Figura 2.1: Clasificación de la muestra.

2.1.2 Recuento de frecuencias



Figura 2.2: Recuento de frecuencias

2.2 Frecuencias muestrales

Definición 2.1 (Frecuencias muestrales). Dada una muestra de tamaño n de una variable X , para cada valor de la variable x_i observado en la muestra, se define

- **Frecuencia Absoluta n_i :** Es el número de veces que el valor x_i aparece en la muestra.

- **Frecuencia Relativa** f_i : Es la proporción de veces que el valor x_i aparece en la muestra.

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

- **Frecuencia Absoluta Acumulada** N_i : Es el número de valores en la muestra menores o iguales que x_i .

$$N_i = n_1 + \cdots + n_i = N_{i-1} + n_i$$

- **Frecuencia Relativa Acumulada** F_i : Es la proporción de valores en la muestra menores o iguales que x_i .

$$F_i = \frac{N_i}{n}$$

2.2.1 Tabla de frecuencias

Al conjunto de valores observados en la muestra junto a sus respectivas frecuencias se le denomina **distribución de frecuencias** y suele representarse mediante una **tabla de frecuencias**.

Valores de X	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Absoluta Acumulada	Frecuencia Relativa Acumulada
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_k	n_k	f_k	N_k	F_k

Ejemplo 2.1 (Variable cuantitativa y datos no agrupados). El número de hijos en 25 familias es:

1, 2, 4, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 2

La tabla de frecuencias del número de hijos en esta muestra es

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0.08	2	0.08
1	6	0.24	8	0.32
2	14	0.56	22	0.88
3	2	0.08	24	0.96
4	1	0.04	25	1
\sum	25	1		

Ejemplo 2.2 (Variable cuantitativa y datos agrupados). Se ha medido la estatura (en cm) de 30 universitarios obteniendo:

179, 173, 181, 170, 158, 174, 172, 166, 194, 185, 162, 187, 198, 177, 178, 165, 154, 188, 166, 171, 175, 182, 167, 169, 172, 186, 172, 176, 168, 187.

La tabla de frecuencias de la estatura en esta muestra es

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
(150, 160]	2	0.07	2	0.07
(160, 170]	8	0.27	10	0.34
(170, 180]	11	0.36	21	0.70
(180, 190]	7	0.23	28	0.93
(190, 200]	2	0.07	30	1
\sum	30	1		

2.2.2 Construcción de clases

Cada intervalo de agrupación de datos se denomina **clase** y el centro del intervalo se llama **marca de clase**.

A la hora de agrupar los datos en clases hay que tener en cuenta lo siguiente:

- El número de intervalos no debe ser muy grande ni muy pequeño. Una regla orientativa es tomar un número de intervalos próximo a \sqrt{n} o $\log_2(n)$.
- Los intervalos no deben solaparse y deben cubrir todo el rango de valores. Es indiferente si se abren por la izquierda y se cierran por la derecha o al revés.
- El valor más pequeño debe caer dentro del primer intervalo y el más grande dentro del último.

Ejemplo 2.3 (Variable cualitativa). Los grupos sanguíneos de una muestra de 30 personas son:

A, B, B, A, AB, 0, 0, A, B, B, A, A, A, AB, A, A, A, B, 0, B, B, B, A, A, A, 0, A, AB, 0.

La tabla de frecuencias del grupo sanguíneo en esta muestra es

x_i	n_i	f_i
0	5	0.16
A	14	0.47
B	8	0.27
AB	3	0.10
\sum	30	1

Advertencia

Obsérvese que en este caso las frecuencias acumuladas no tienen sentido al no existir un orden entre los valores de la variable.

2.3 Representaciones gráficas

La tabla de frecuencias también suele representarse gráficamente. Dependiendo del tipo de variable y de si se han agrupado o no los datos, se utilizan distintos tipos de gráficos:

- Diagrama de barras
- Histograma
- Diagrama de líneas o polígonos.
- Diagrama de sectores.

2.3.1 Diagrama de barras

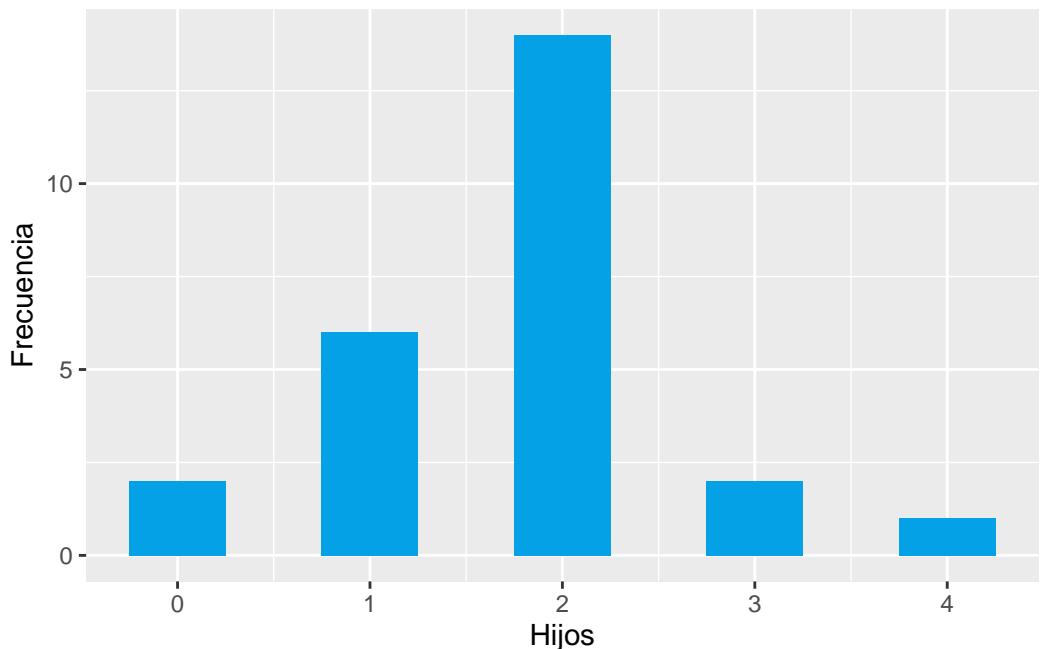
Un **diagrama de barras** consiste en un conjunto de barras, una para cada valor o categoría de la variable, dibujadas sobre unos ejes cartesianos.

Habitualmente los valores o categorías de la variable se representan en eje X , y las frecuencias en el eje Y . Para cada valor o categoría se dibuja una barra con la altura correspondiente a su frecuencia. La anchura de la barra no es importante pero las barras deben aparecer claramente separadas unas de otras.

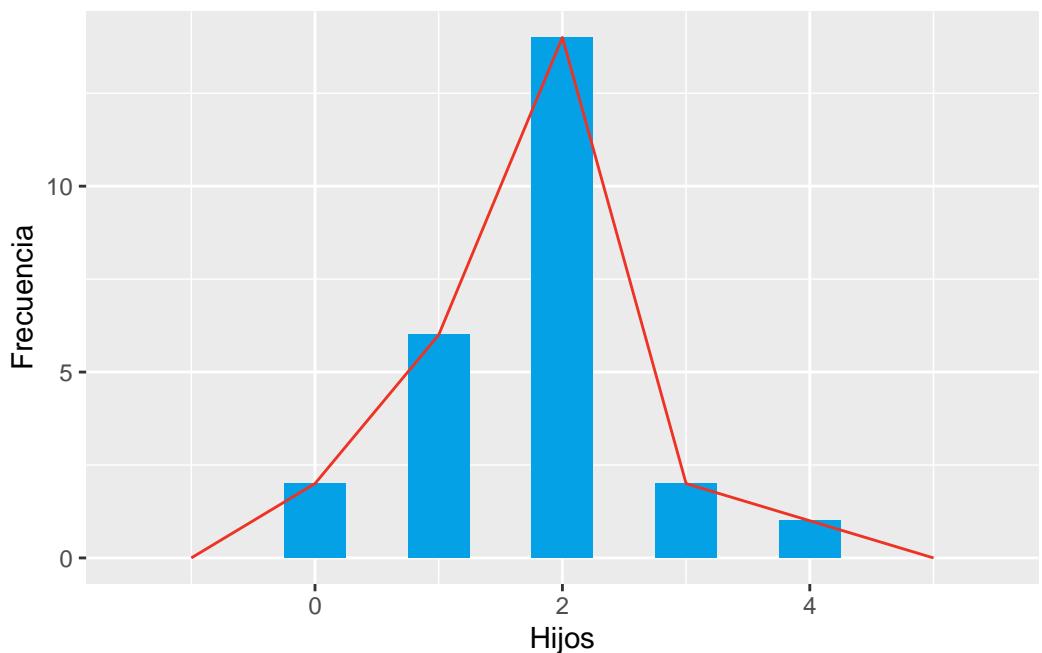
Dependiendo del tipo de frecuencia representada en el eje Y se tienen diferentes tipos de diagramas de barras.

En ocasiones se dibuja un polígono, conocido como **polígono de frecuencias**, uniendo mediante segmentos los puntos más altos de cada barra.

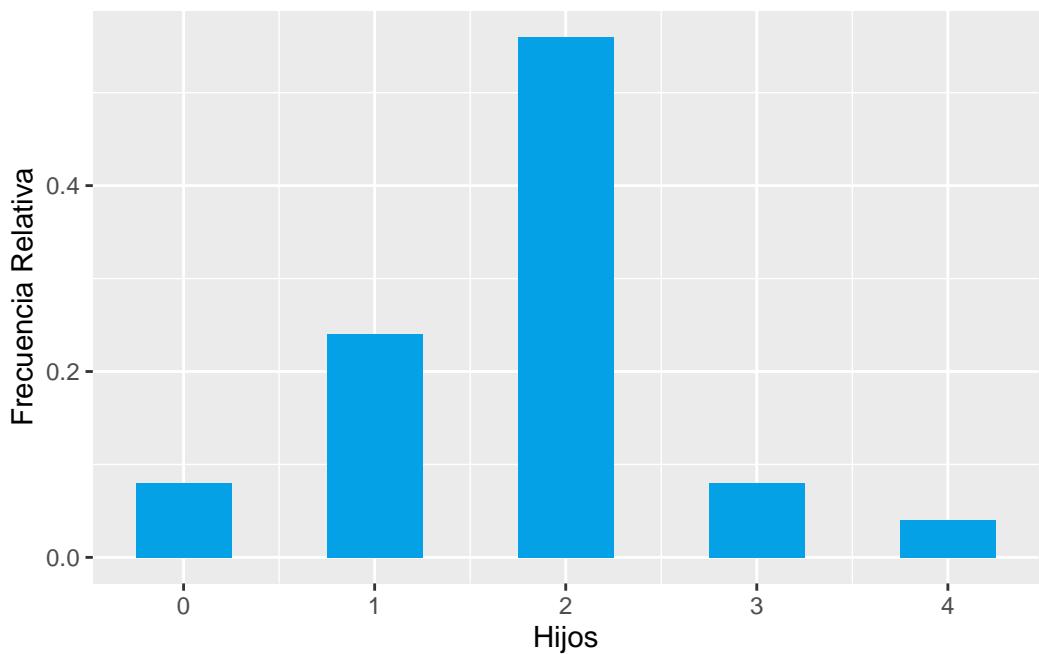
Ejemplo 2.4. El diagrama de barras que aparece a continuación muestra la distribución de frecuencias absolutas del número de hijos en la muestra anterior.



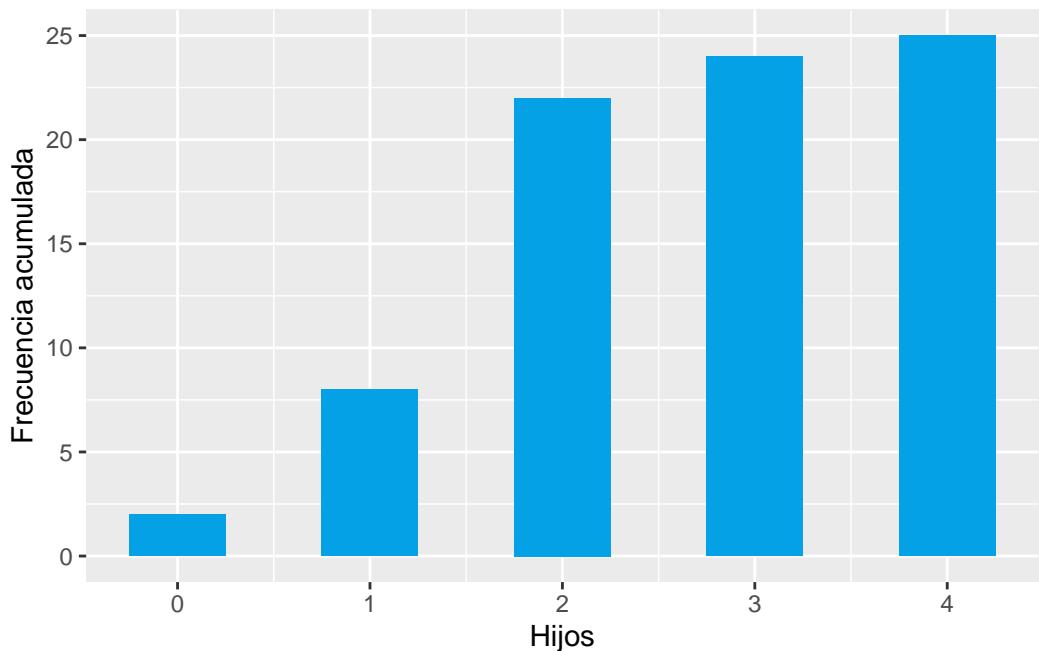
Y a continuación se muestra el polígono de frecuencias.



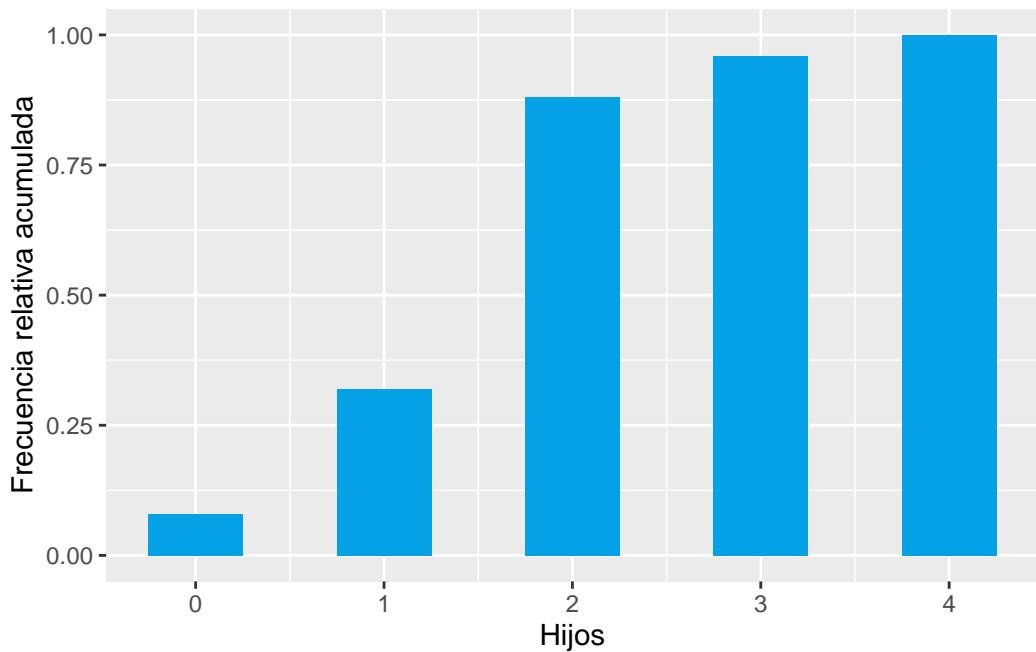
El diagrama de barras que aparece a continuación muestra la distribución de frecuencias relativas del número de hijos en la muestra anterior.



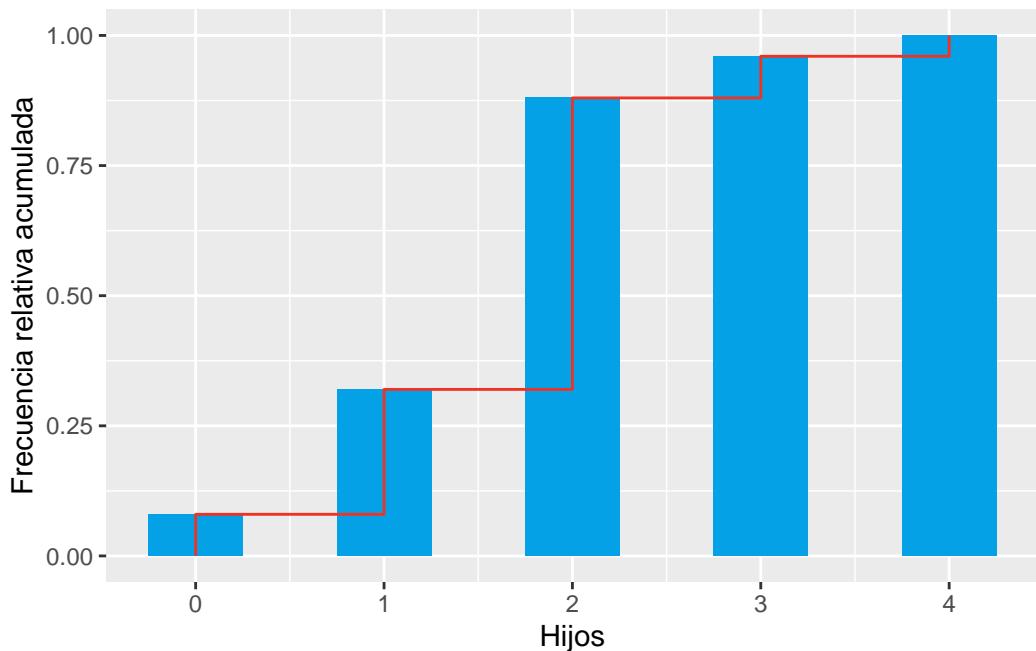
El diagrama de barras que aparece a continuación muestra la distribución de frecuencias absolutas acumuladas del número de hijos en la muestra anterior.



Y el diagrama de barras que aparece a continuación muestra la distribución de frecuencias relativas acumuladas del número de hijos en la muestra anterior.



Finalmente, el último diagrama muestra el polígono de frecuencias relativas acumuladas.



2.3.2 Histograma

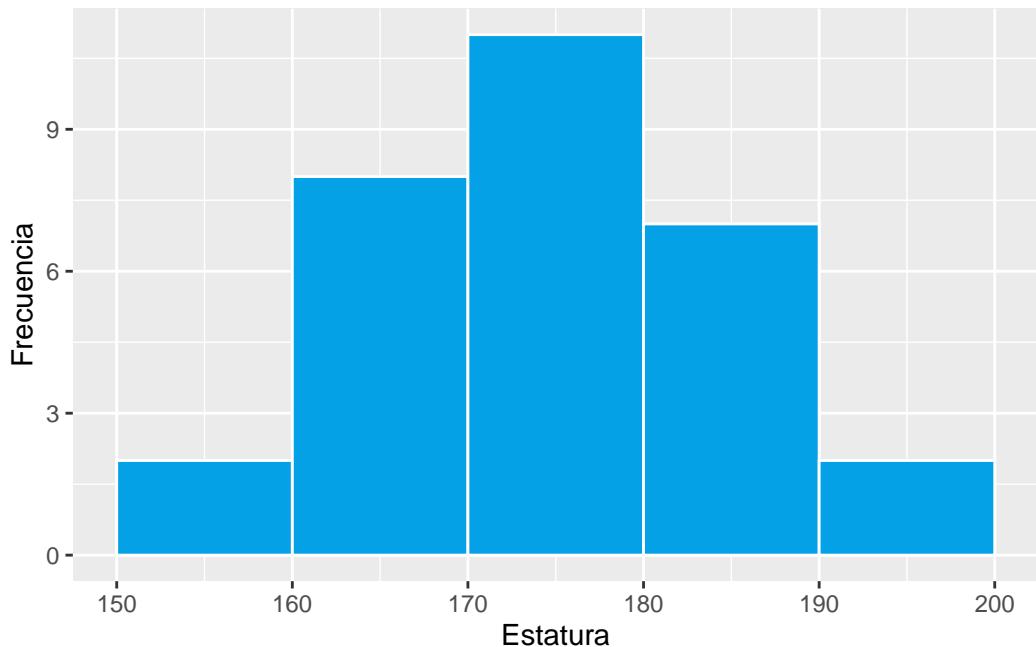
Un *histograma* es similar a un diagrama de barras pero para datos agrupados.

Habitualmente las clases o intervalos de agrupación se representan en el eje X , y las frecuencias en el eje Y . Para cada clase se dibuja una barra de altura la correspondiente frecuencia. A diferencia del diagrama de barras, la anchura del la barra coincide con la anchura de las clases y no hay separación entre dos barras consecutivas.

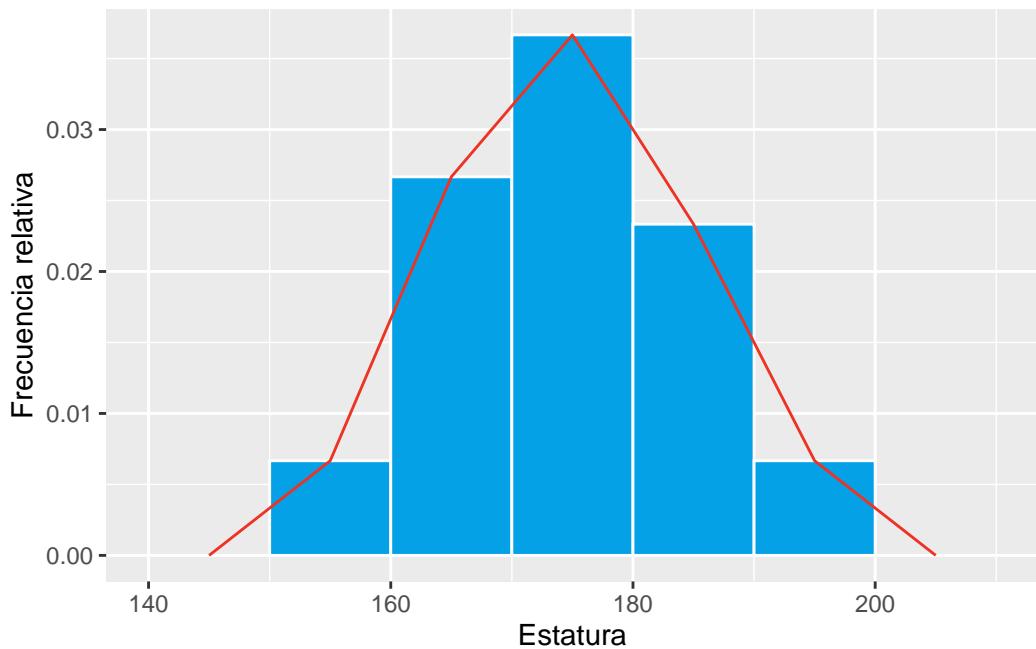
Dependiendo del tipo de frecuencia representada en el eje Y existen distintos tipos de histogramas.

Al igual que con el diagrama de barras, se puede dibujar un *polígono de frecuencias* uniendo los puntos centrales más altos de cada barra con segmentos.

Ejemplo 2.5. El siguiente histograma muestra la distribución de frecuencias absolutas de las estaturas.

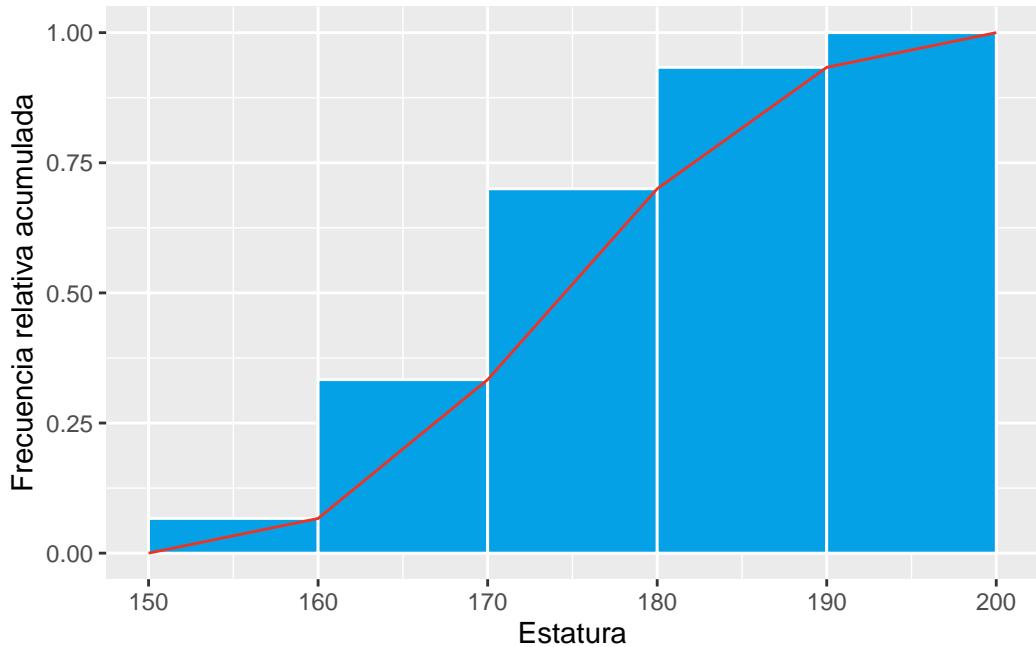


El siguiente histograma muestra la distribución de frecuencias relativas con el polígono de frecuencias.



El polígono de frecuencias acumuladas (absolutas o relativas) se conoce como **ojiva**.

Ejemplo 2.6. El histograma y la ojiva siguientes muestran la distribución de frecuencias relativas acumuladas de estaturas.



Obsérvese que en la ojiva se unen los vértices superiores derechos de cada barra con

segmentos, en lugar de los puntos centrales, ya que no se consigue alcanzar la frecuencia acumulada correspondiente a la clase hasta que no se alcanza el final del intervalo.

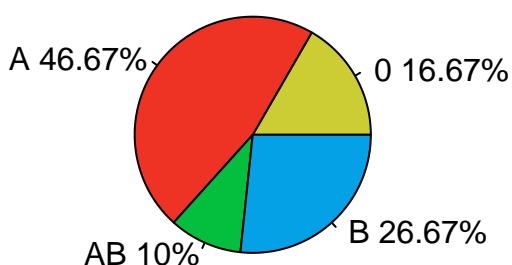
2.3.3 Diagrama de sectores

Un *diagrama de sectores* consiste en un círculo dividido en porciones, uno por cada valor o categoría de la variable. Cada porción se conoce como *sector* y su ángulo o área es proporcional a la correspondiente frecuencia del valor o categoría.

Los diagramas de sectores pueden representar frecuencias absolutas o relativas, pero no pueden representar frecuencias acumuladas, y se utilizan sobre todo con atributos nominales. Para atributos ordinales o variables cuantitativas es mejor utilizar diagramas de barras, ya es más fácil percibir las diferencias en una dimensión (altura de las barras) que en dos dimensiones (áreas de los sectores).

Ejemplo 2.7. El diagrama de sectores siguiente muestra la distribución de frecuencias relativas de los grupos sanguíneos.

Distribución de los grupos sanguíneos

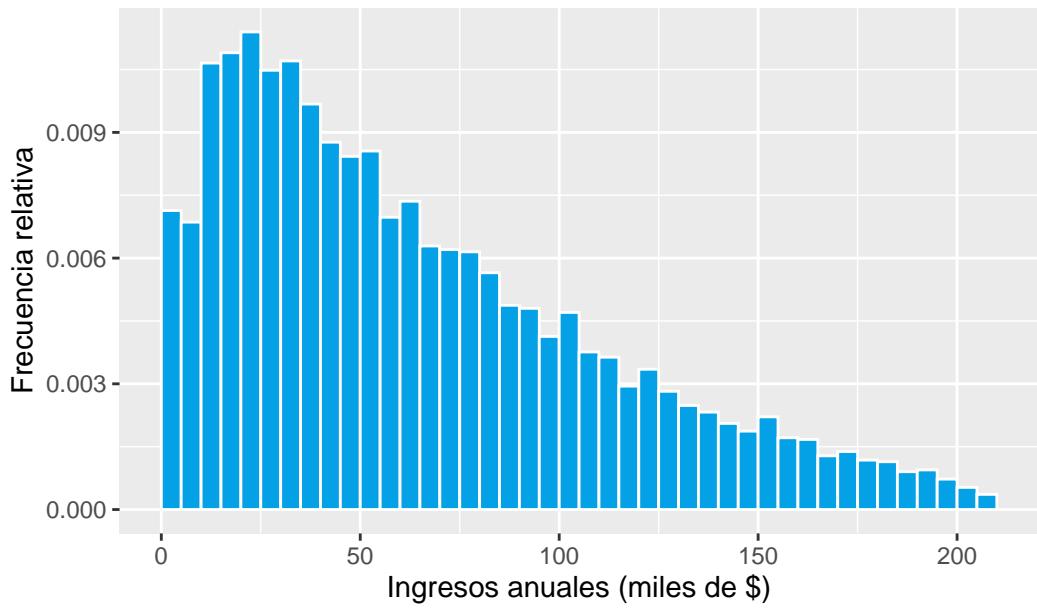


2.3.4 La distribución Normal

Las distribuciones con diferentes propiedades presentan formas distintas.

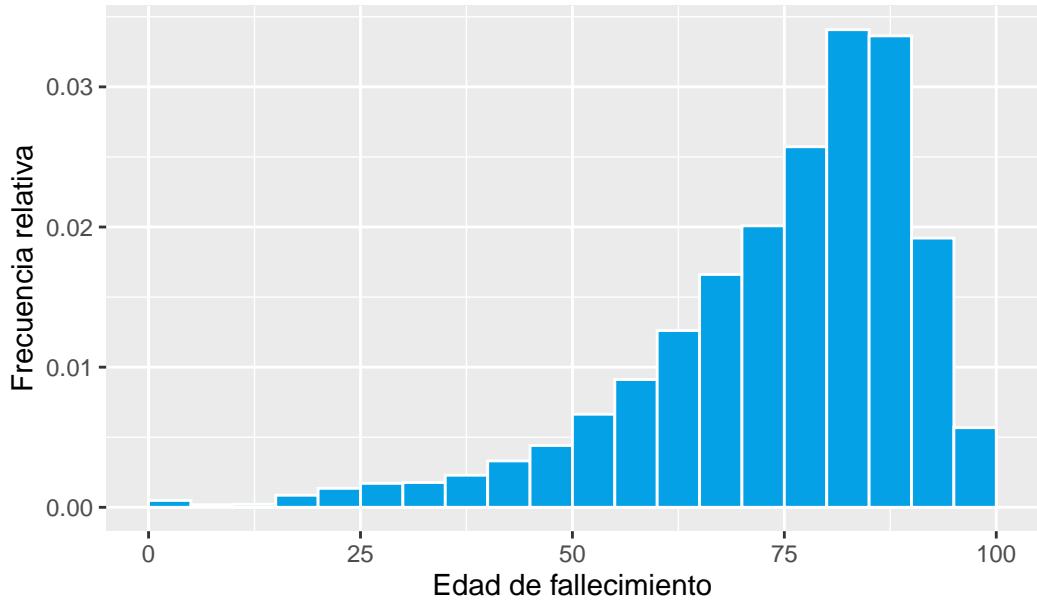
Ejemplo 2.8 (Distribución de los ingresos familiares).

Distribución de ingresos familiares en USA



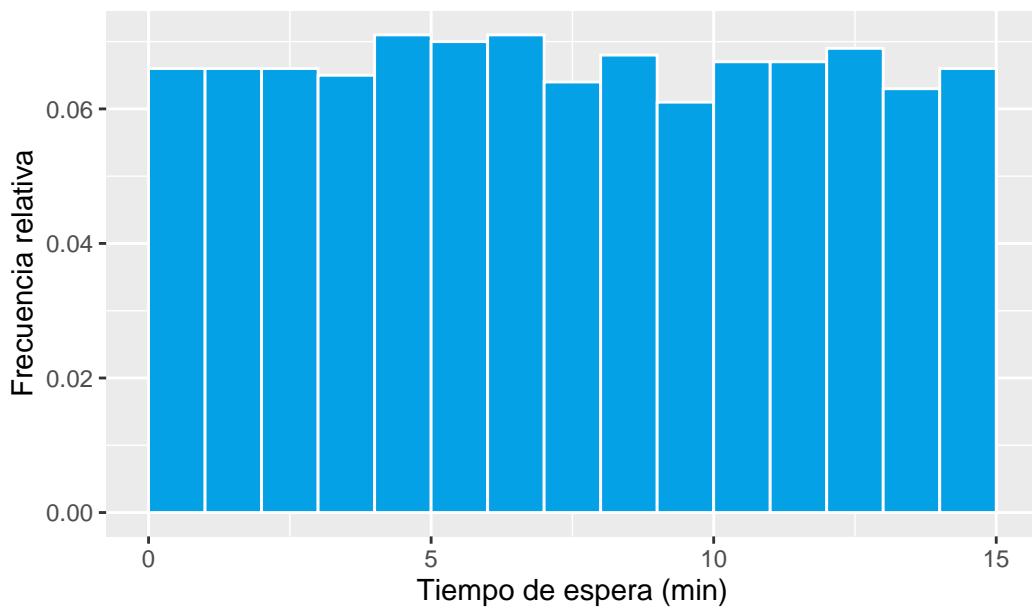
Ejemplo 2.9 (Distribución de la edad de fallecimiento).

Distribución de la edad de fallecimiento de hombres australianos



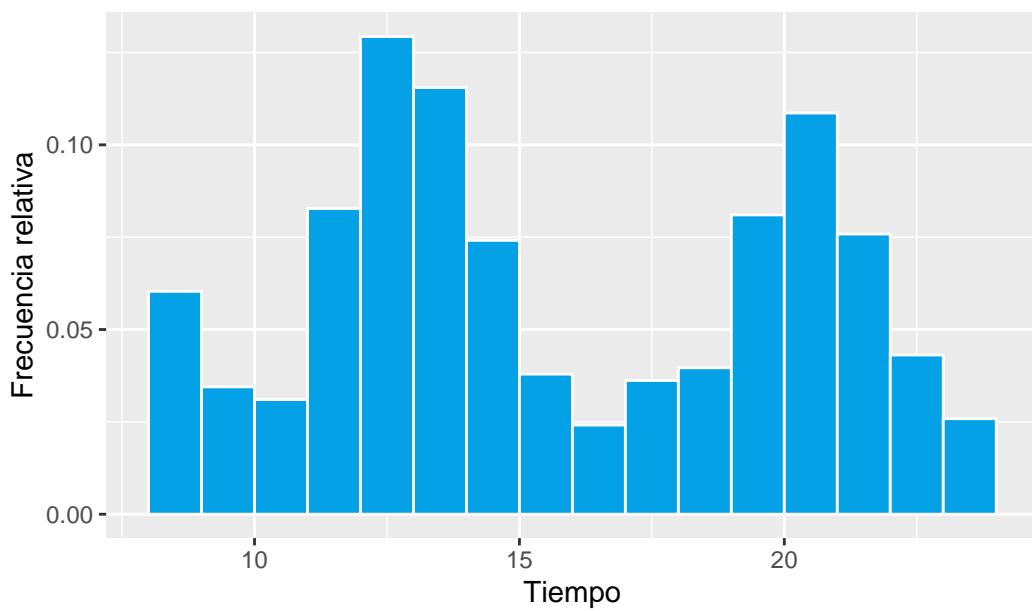
Ejemplo 2.10 (Distribución del tiempo de espera del metro).

Distribución del tiempo de espera del metro.



Ejemplo 2.11 (Distribución del tiempo de llegada de clientes a un restaurante).

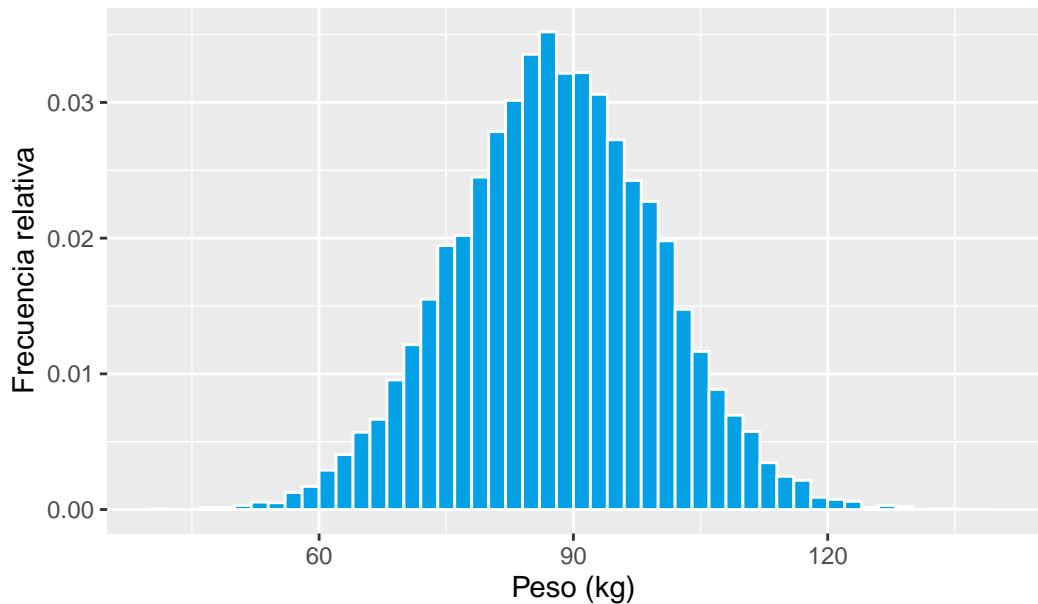
Distribución del tiempo de llegada de clientes a un restaurante



Las distribuciones con forma de campana se presentan muy a menudo en las variables biológicas.

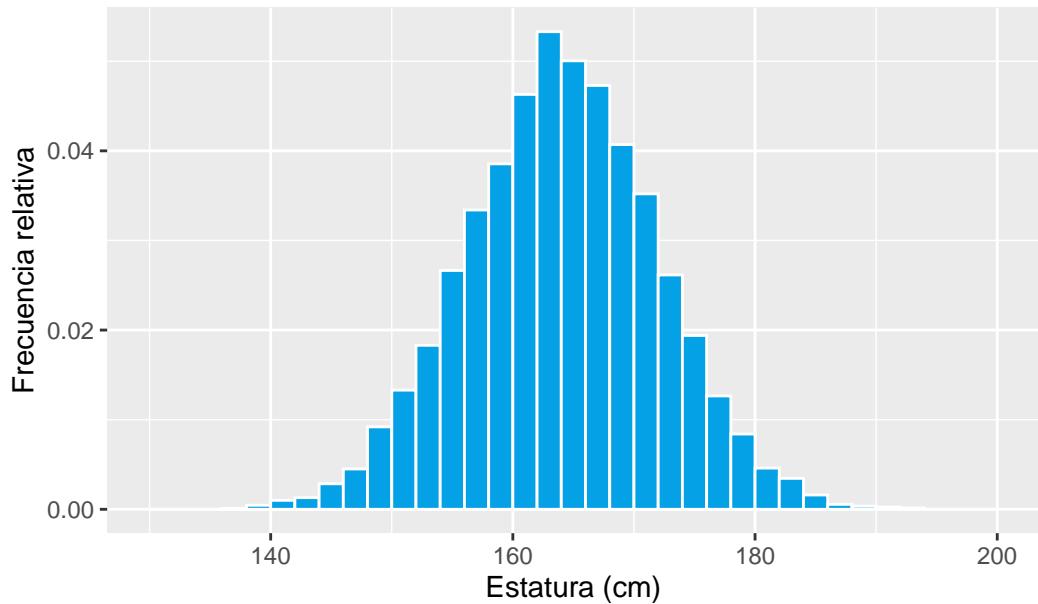
Ejemplo 2.12 (Distribución del peso de los hombres).

Distribución del peso de los hombres



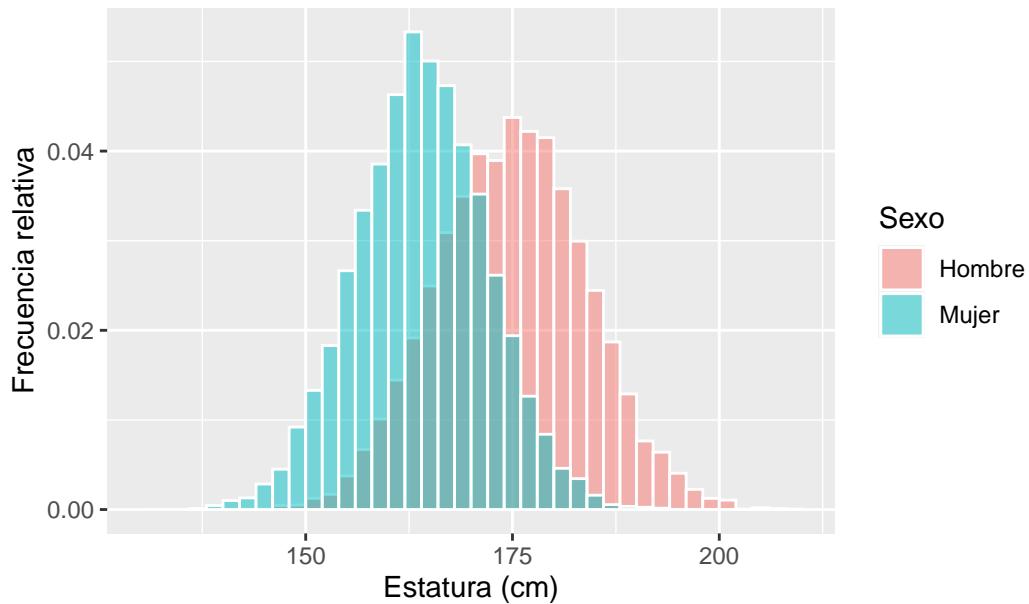
Ejemplo 2.13 (Distribución de la estatura de las mujeres).

Distribución de la estatura de las mujeres



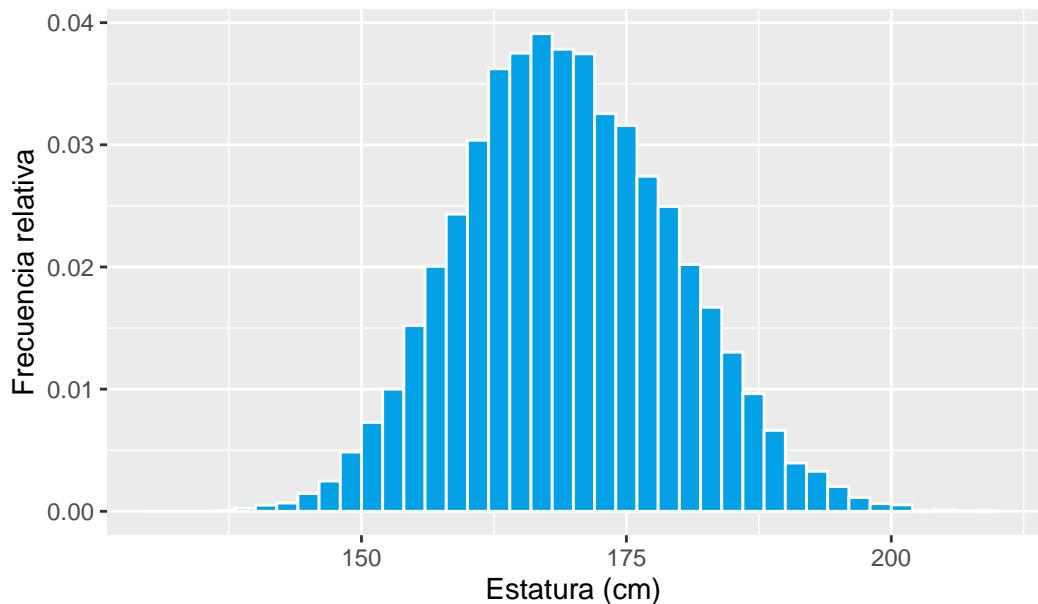
Ejemplo 2.14 (Distribución de la estatura según el sexo).

Distribución de estaturas según sexo



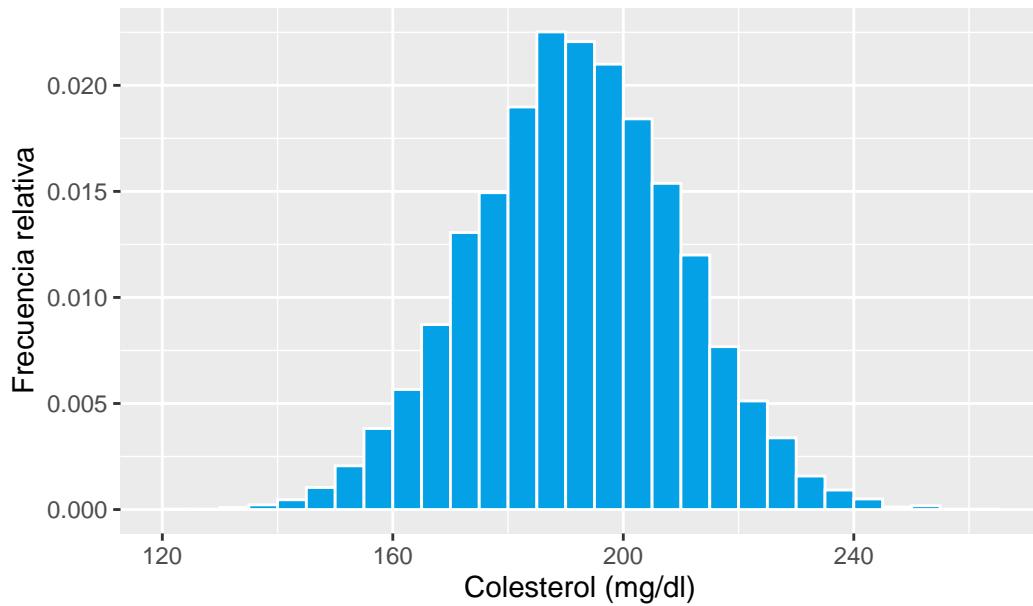
Ejemplo 2.15 (Distribución de la estatura de hombres y mujeres).

Distribución de estaturas de hombres y mujeres



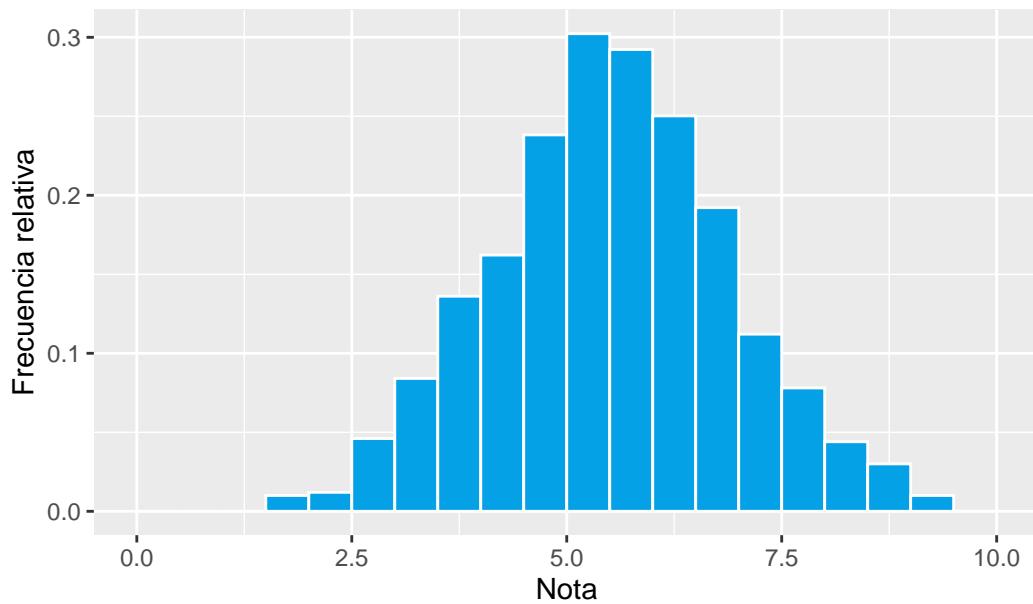
Ejemplo 2.16 (Distribución del colesterol).

Distribución del colesterol



Ejemplo 2.17 (Distribución de notas).

Distribución de notas de Estadística



La distribución con forma de campana aparece tan a menudo en la Naturaleza que se conoce como *distribución normal* o *distribución gaussiana*.

Gauss bell

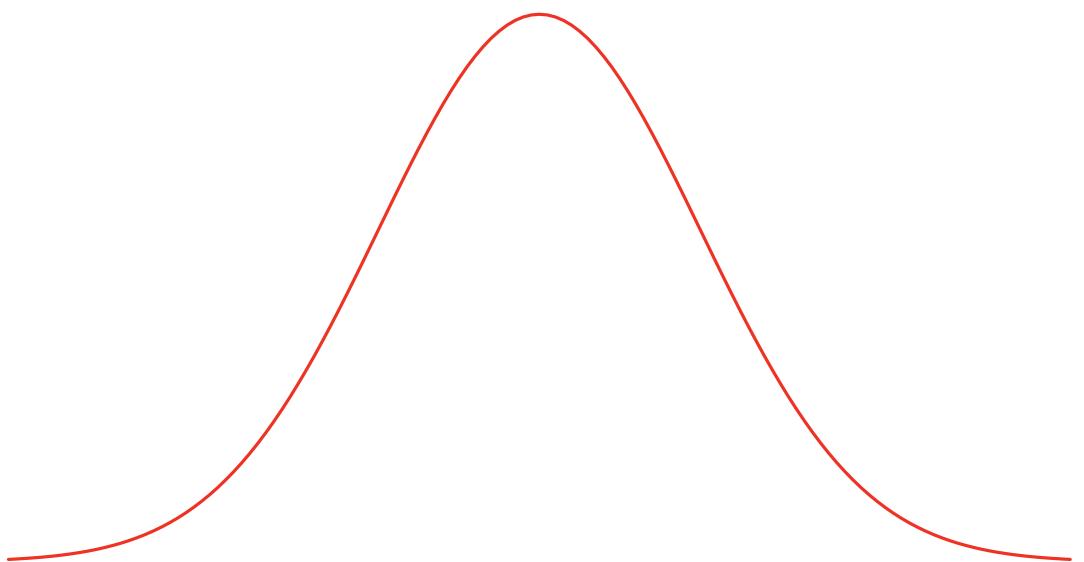


Figura 2.3: Campana de Gauss.

2.4 Datos atípicos

Uno de los principales problemas de las muestras son los **datos atípicos**, que son valores de la variable que se diferencian mucho del resto de los valores en la muestra.



Figura 2.4: Dato atípico.

Es muy importante detectar los datos atípicos antes de realizar cualquier análisis de los datos, pues suelen distorsionar los resultados.

Aparecen siempre en los extremos de la distribución, y pueden detectarse con un diagrama de caja y bigotes (tal y como veremos más adelante).

2.4.1 Tratamiento de los datos atípicos

Cuando trabajemos con muestras grandes, los datos atípicos tienen menor influencia y pueden dejarse en la muestra.

Cuando trabajemos con muestras pequeñas tenemos varias opciones:

- Eliminar el dato atípico si se trata de un error.
- Sustituir el dato atípico por el menor o el mayor valor de la distribución que no es atípico si no se trata de un error y el dato atípico no concuerda con la distribución teórica.
- Dejar el dato atípico si no es un error, y cambiar el modelo de distribución teórico para adecuarlo a los datos atípicos.

2.5 Estadísticos muestrales

La tabla de frecuencias sintetiza la información de la distribución de valores de la variable estudiada en la muestra, pero en muchas ocasiones es insuficiente para describir determinados aspectos de la distribución, como por ejemplo, cuáles son los valores más representativos de la muestra, cómo es la variabilidad de los datos, qué datos pueden considerarse atípicos, o cómo es la simetría de la distribución.

Para describir esos aspectos de la distribución muestral se utilizan unas medidas resumen llamadas **estadísticos muestrales**.

De acuerdo al aspecto de las distribución que miden, existen diferentes tipos de estadísticos:

Estadísticos de Posición: Miden los valores en torno a los que se agrupan los datos o que dividen la distribución en partes iguales.

Estadísticos de Dispersion: Miden la heterogeneidad de los datos.

Estadísticos de Forma: Miden aspectos de la forma que tiene la distribución de los datos, como la simetría o el apuntamiento.

2.6 Estadísticos de posición

Pueden ser de dos tipos:

Estadísticos de Tendencia Central: Determinan valores alrededor de los cuales se concentran los datos, habitualmente en el centro de la distribución. Estas medidas suelen utilizarse como valores representativos de la muestra. Las más importantes son:

- Media aritmética
- Mediana
- Moda

Estadísticos de Posición no centrales: Dividen la distribución en partes con el mismo número de datos. Las más importantes son:

- Cuartiles.
- Deciles.
- Percentiles.

2.6.1 Media aritmética

Definición 2.2 (Media aritmética muestral \bar{x}). La *media aritmética muestral* de una variable X es la suma de los valores observados en la muestra dividida por el tamaño muestral

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

A partir de la tabla de frecuencias puede calcularse con la fórmula

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \sum x_i f_i$$

En la mayoría de los casos, la media aritmética es la medida que mejor representa a la muestra.

 Advertencia

No puede calcularse para variables cualitativas.

Ejemplo 2.18 (Datos no agrupados). Utilizando los datos de la muestra del número de hijos en las familias, la media aritmética es

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 0 + 2 + 2}{25} + \\ &+ \frac{0 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2}{25} = \frac{44}{25} = 1.76 \text{ hijos.}\end{aligned}$$

o bien, desde la tabla de frecuencias

x_i	n_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i f_i$
0	2	0.08	0	0
1	6	0.24	6	0.24
2	14	0.56	28	1.12
3	2	0.08	6	0.24
4	1	0.04	4	0.16
\sum	25	1	44	1.76

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{44}{25} = 1.76 \text{ hijos} \quad \bar{x} = \sum x_i f_i = 1.76 \text{ hijos.}$$

Esto significa que el valor que mejor representa el número de hijos en las familias de la muestra es 1.76 hijos.

Ejemplo 2.19 (Datos agrupados). Utilizando los datos de la muestra de estaturas, la media es

$$\bar{x} = \frac{179 + 173 + \dots + 187}{30} = 175.07 \text{ cm.}$$

o bien, desde la tabla de frecuencias utilizando las marcas de clase x_i :

X	x_i	n_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i f_i$
(150, 160]	155	2	0.07	310	10.33
(160, 170]	165	8	0.27	1320	44.00
(170, 180]	175	11	0.36	1925	64.17
(180, 190]	185	7	0.23	1295	43.17
(190, 200]	195	2	0.07	390	13
\sum		30	1	5240	174.67

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{5240}{30} = 174.67 \text{ cm} \quad \bar{x} = \sum x_i f_i = 174.67 \text{ cm.}$$

Obsérvese que al calcular la media desde la tabla de frecuencias el resultado difiere ligeramente del valor real obtenido directamente desde la muestra, ya que los valores usados en los cálculos no son los datos reales sino las marcas de clase.

2.6.1.1 Media ponderada

En algunos casos, los valores de la muestra no tienen la misma importancia. En este caso la importancia o *peso* de cada valor de la muestra debe tenerse en cuenta al calcular la media.

Definición 2.3 (Media ponderada muestral \bar{x}_p). Dada una muestra de valores x_1, \dots, x_n donde cada valor x_i tiene asociado un peso p_i , la *media ponderada muestral* de la variable X es la suma de los productos de cada valor observado en la muestra por su peso, dividida por la suma de todos los pesos

$$\bar{x}_p = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$$

A partir de la tabla de frecuencias puede calcularse con la fórmula

$$\bar{x}_p = \frac{\sum x_i p_i n_i}{\sum p_i}$$

Ejemplo 2.20. Supóngase que un estudiante quiere calcular una medida que represente su rendimiento en el curso. La nota obtenida en cada asignatura y sus créditos son

Asignatura	Créditos	Nota
Matemáticas	6	5
Economía	4	3
Química	8	6

La media aritmética vale

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5 + 3 + 6}{3} = 4.67 \text{ puntos.}$$

Sin embargo, esta nota no representa bien el rendimiento académico del alumno ya que no todas las asignaturas tienen la misma importancia ni requieren el mismo esfuerzo para aprobar. Las asignaturas con más créditos requieren más trabajo y deben tener más peso en el cálculo de la media.

Es más lógico usar la media ponderada como medida del rendimiento del estudiante, tomando como pesos los créditos de cada asignatura

$$\bar{x}_p = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} = \frac{5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 8}{6 + 4 + 8} = \frac{90}{18} = 5 \text{ puntos.}$$

2.6.2 Mediana

Definición 2.4 (Mediana muestral M_e). La *mediana muestral* de una variable X es el valor de la variable que está en el medio de la muestra ordenada.

La mediana divide la distribución de la muestra en dos partes iguales, es decir, hay el mismo número de valores por debajo y por encima de la mediana. Por tanto, tiene frecuencias acumuladas $N_{Me} = n/2$ y $F_{Me} = 0.5$.

⚠️ Advertencia

No puede calcularse para variables nominales.

Con datos no agrupados pueden darse varios casos:

- Tamaño muestral impar: La mediana es el valor que ocupa la posición $\frac{n+1}{2}$.
- Tamaño muestral par: La mediana es la media de los valores que ocupan las posiciones $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$.



Figura 2.5: Cálculo de la mediana con datos no agrupados.

:::{#exm-mediana-datos-no-agrupados} Utilizando los datos del número de hijos de las familias, el tamaño muestral es 25, que es impar, y la mediana es el valor que ocupa la posición $\frac{25+1}{2} = 13$ de la muestra ordenada.

$$0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, [2], 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4$$

y la mediana es 2 hijos.

Si se trabaja con la tabla de frecuencias, la mediana es el valor más pequeño con una frecuencia acumulada mayor o igual a 13, o con una frecuencia relativa acumulada mayor o igual que 0.5.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0.08	2	0.08
1	6	0.24	8	0.32
2	14	0.56	22	0.88
3	2	0.08	24	0.96
4	1	0.04	25	1
\sum	25	1		

2.6.2.1 Cálculo de la mediana con datos agrupados

Con datos agrupados la mediana se calcula interpolando en el polígono de frecuencias relativas acumuladas para el valor 0.5.

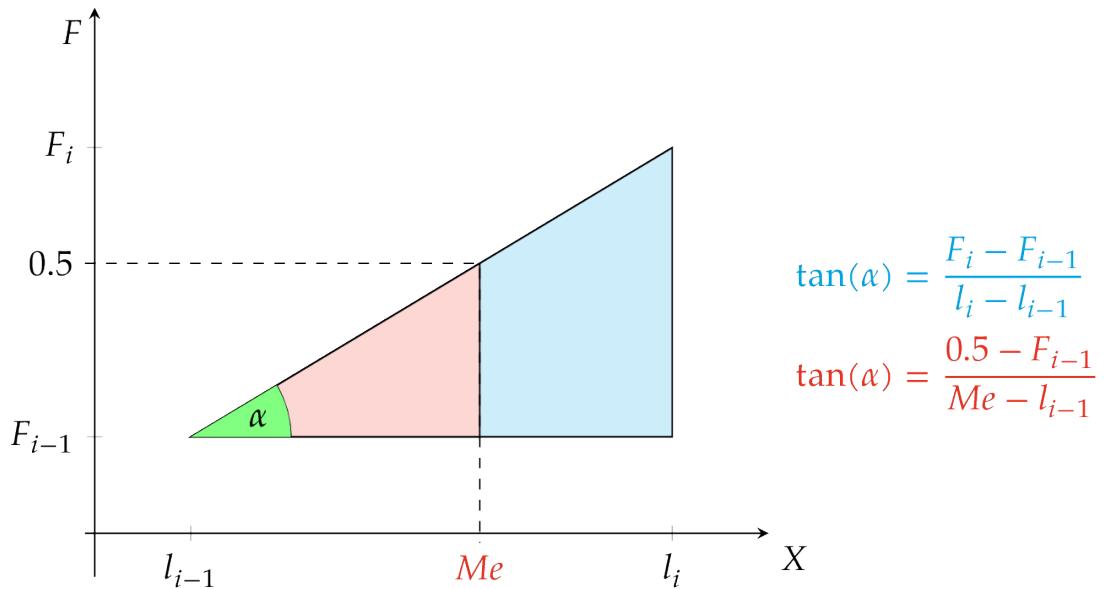


Figura 2.6: Cálculo de la mediana con datos agrupados.

Ambas expresiones son iguales ya que el ángulo α es el mismo, y resolviendo la ecuación se tiene la siguiente fórmula para calcular la mediana

$$Me = l_i + \frac{0.5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}(l_i - l_{i-1}) = l_i + \frac{0.5 - F_{i-1}}{f_i}a_i$$

Ejemplo 2.21 (Datos agrupados). Utilizando los datos de la muestra de las estaturas de estudiantes, la mediana cae en la clase (170,180].

Interpolando en el intervalo (170,180] se tiene

Igualando ambas expresiones y resolviendo la ecuación se obtiene

$$Me = 170 + \frac{0.5 - 0.34}{0.7 - 0.34}(180 - 170) = 170 + \frac{0.16}{0.36}10 = 174.54 \text{ cm.}$$

Esto significa que la mitad de los estudiantes tienen estaturas menores o iguales que 174.54 cm y la otra mitad mayores o iguales.

2.6.3 Moda

Definición 2.5 (Moda muestral Mo). La *moda muestral* de una variable X es el valor de la variable más frecuente en la muestra.

Distribución de frecuencias relativas acumuladas de la Estatura

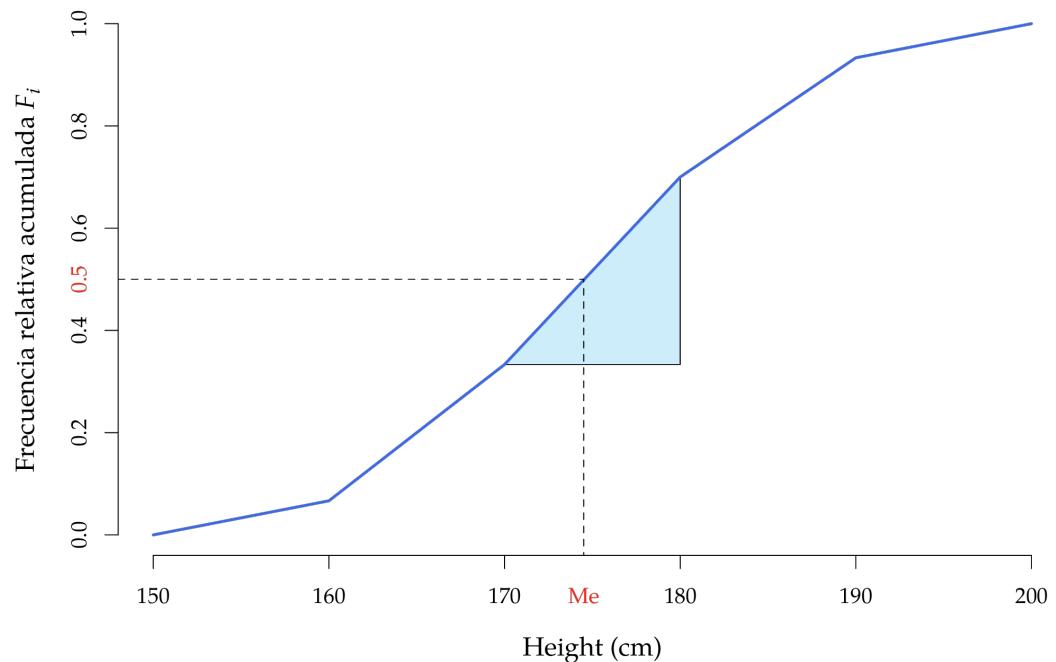


Figura 2.7: Ejemplo de cálculo de la mediana con datos agrupados.

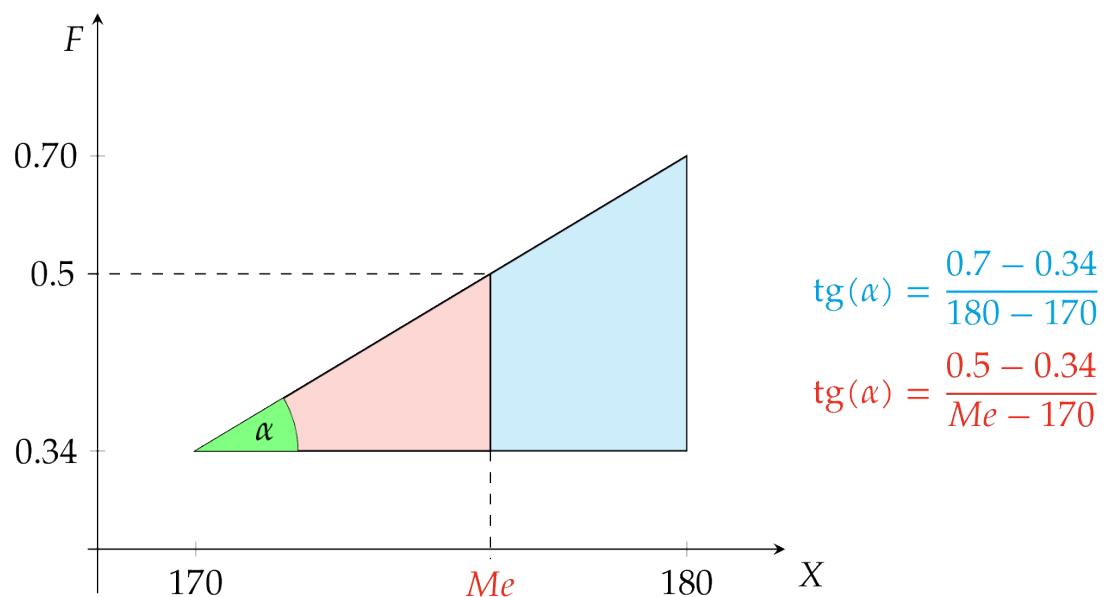


Figura 2.8: Ejemplo de cálculo de la mediana con datos agrupados.

Con datos agrupados la *clase modal* es la clase con mayor frecuencia en la muestra.

Puede calcularse para todos los tipos de variables (cuantitativas y cualitativas).

Las distribuciones pueden tener más de una moda.



Figura 2.9: Cálculo de la moda.

Ejemplo 2.22. Utilizando los datos de la muestra del número de hijos en las familias, el valor con mayor frecuencia es 2, y por tanto la moda es $Mo = 2$.

x_i	n_i
0	2
1	6
2	14
3	2
4	1

Ejemplo 2.23. Utilizando los datos de la muestra de estaturas de estudiantes, la clase con la mayor frecuencia es $(170, 180]$, que es la clase modal $Mo = (170, 180]$.

X	n_i
$(150, 160]$	2
$(160, 170]$	8
$(170, 180]$	11
$(180, 190]$	7
$(190, 200]$	2

2.6.4 ¿Qué estadístico de tendencia central usar?

En general, siempre que puedan calcularse los estadísticos de tendencia central, es recomendable utilizarlos como valores representativos en el siguiente orden:

1. Media. La media utiliza más información que el resto ya que para calcularla se tiene en cuenta la magnitud de los datos.
2. Mediana. La mediana utiliza menos información que la media, pero más que la moda, ya que para calcularla se tiene en cuenta el orden de los datos.
3. Moda. La moda es la que menos información utiliza ya que para calcularla sólo se tienen en cuenta las frecuencias absolutas.

 Advertencia

Hay que tener cuidado con los datos atípicos, ya que la media puede distorsionarse cuando hay datos atípicos. En tal caso es mejor utilizar la mediana como valor más representativo.

Ejemplo 2.24. Si una muestra de número de hijos de 7 familias es

0, 0, 1, 1, 2, 2, 15,

entonces, $\bar{x} = 3$ hijos y $Me = 1$ hijo.

¿Qué medida representa mejor el número de hijos en la muestra?

2.6.5 Medidas de posición no centrales

Las medidas de posición no centrales o *cuantiles* dividen la distribución en partes iguales.

Los más utilizados son:

Cuartiles: Dividen la distribución en 4 partes iguales. Hay 3 cuartiles: C_1 (25% acumulado), C_2 (50% acumulado), C_3 (75% acumulado).

Deciles: Dividen la distribución en 10 partes iguales. Hay 9 deciles: D_1 (10% acumulado), ..., D_9 (90% acumulado).

Percentiles: Dividen la distribución en 100 partes iguales. Hay 99 percentiles: P_1 (1% acumulado), ..., P_{99} (99% acumulado).

Obsérvese que hay una correspondencia entre los cuartiles, los deciles y los percentiles. Por ejemplo, el primer cuartil coincide con el percentil 25, y el cuarto decil coincide con el percentil 40.

Los cuantiles se calculan de forma similar a la mediana. La única diferencia es la frecuencia relativa acumulada que corresponde a cada cuantil.

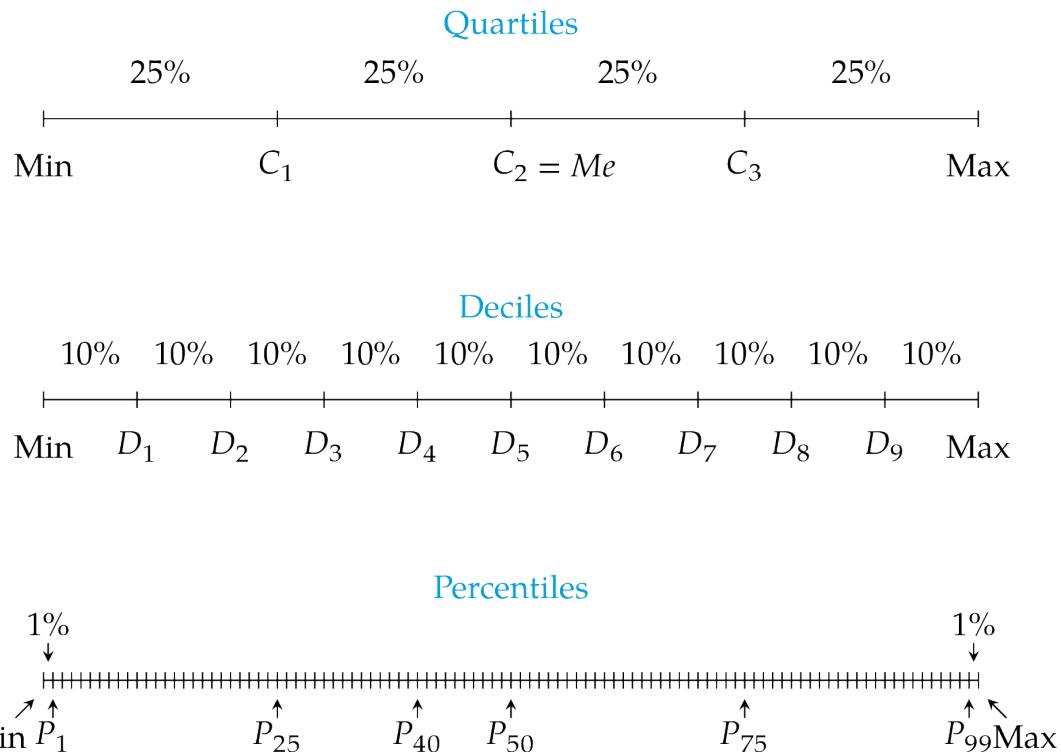


Figura 2.10: Cuartiles, deciles y percentiles.

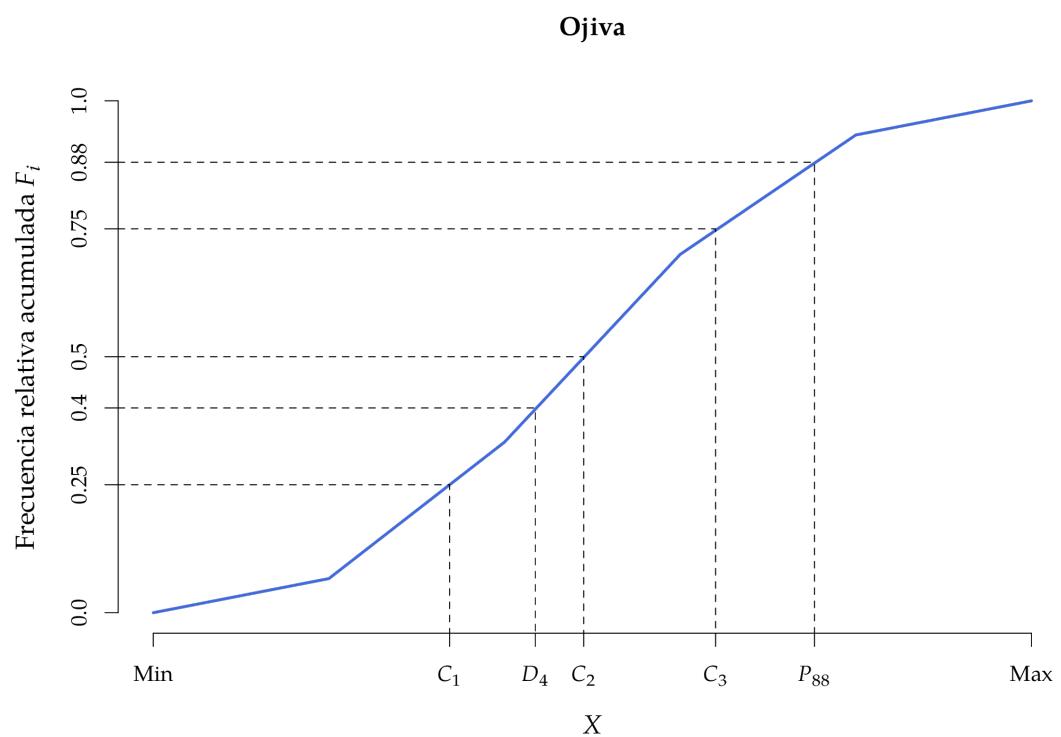


Figura 2.11: Cálculo de cuartiles, deciles y percentiles.

Ejemplo 2.25. Utilizando los datos de la muestra del número de hijos de las familias, la frecuencia relativa acumulada era

x_i	F_i
0	0.08
1	0.32
2	0.88
3	0.96
4	1

$$F_{C_1} = 0.25 \Rightarrow Q_1 = 1 \text{ hijos},$$

$$F_{C_2} = 0.5 \Rightarrow Q_2 = 2 \text{ hijos},$$

$$F_{C_3} = 0.75 \Rightarrow Q_3 = 2 \text{ hijos},$$

$$F_{D_4} = 0.4 \Rightarrow D_4 = 2 \text{ hijos},$$

$$F_{P_{92}} = 0.92 \Rightarrow P_{92} = 3 \text{ hijos}.$$

2.7 Estadísticos de dispersión

La *dispersión* se refiere a la heterogeneidad o variabilidad de los datos. Así pues, los estadísticos de dispersión mide la variabilidad global de los datos, o con respecto a una medida de tendencia central.

Para las variables cuantitativas, las más empleadas son:

- Recorrido.
- Rango Intercuartílico.
- Varianza.
- Desviación Típica.
- Coeficiente de Variación.

2.7.1 Recorrido

Definición 2.6 (Recorrido muestral Re). El *recorrido muestral* o *rango muestral* de una variable X se define como la diferencia entre el máximo y el mínimo de los valores en la muestra.

$$Re = \max_{x_i} - \min_{x_i}$$

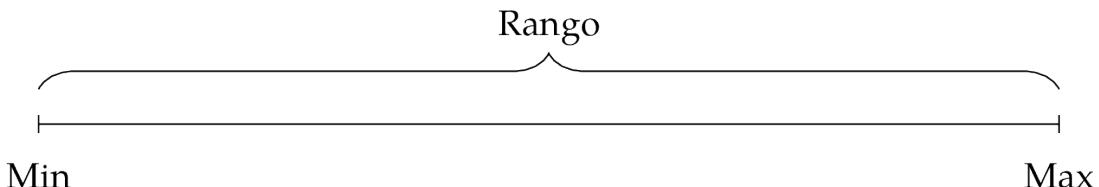


Figura 2.12: Rango muestral.

El recorrido mide la máxima variación que hay entre los datos muestrales. No obstante, es muy sensible a datos atípicos ya que suelen aparecer justo en los extremos de la distribución, por lo que no se suele utilizar mucho.

2.7.2 Rango intercuartílico

Para evitar el problema de los datos atípicos en el recorrido, se puede utilizar el primer y tercer cuartil en lugar del mínimo y el máximo.

Definición 2.7 (Rango intercuartílico muestral RI). El *rango intercuartílico muestral* de una variable X se define como la diferencia entre el tercer y el primer cuartil de la muestra.

$$RI = C_3 - C_1$$

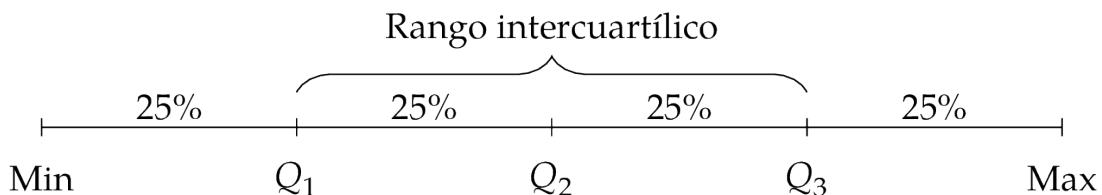


Figura 2.13: Rango intercuartílico.

El rango intercuartílico mide la dispersión del 50% de los datos centrales.

2.7.3 Diagrama de caja y bigotes

La dispersión de una variable suele representarse gráficamente mediante un *diagrama de caja y bigotes*, que representa cinco estadísticos descriptivos (mínimo, cuartiles y máximo) conocidos como los *cinco números*. Consiste en una caja, dibujada desde el primer al tercer cuartil, que representa el rango intercuartílico, y dos segmentos, conocidos como *bigotes* inferior y superior. A menudo la caja se divide en dos por la mediana.

Este diagrama es muy útil y se utiliza para muchos propósitos:

- Sirve para medir la dispersión de los datos ya que representa el rango y el rango intercuartílico.
- Sirve para detectar datos atípicos, que son los valores que quedan fuera del intervalo definido por los bigotes.
- Sirve para medir la simetría de la distribución, comparando la longitud de las cajas y de los bigotes por encima y por debajo de la mediana.

:::{#exm-diagrama-caja} El diagrama siguiente muestra el diagrama de caja y bigotes del peso de una muestra de recién nacidos.

Diagrama de caja y bigotes del peso de recién nacidos

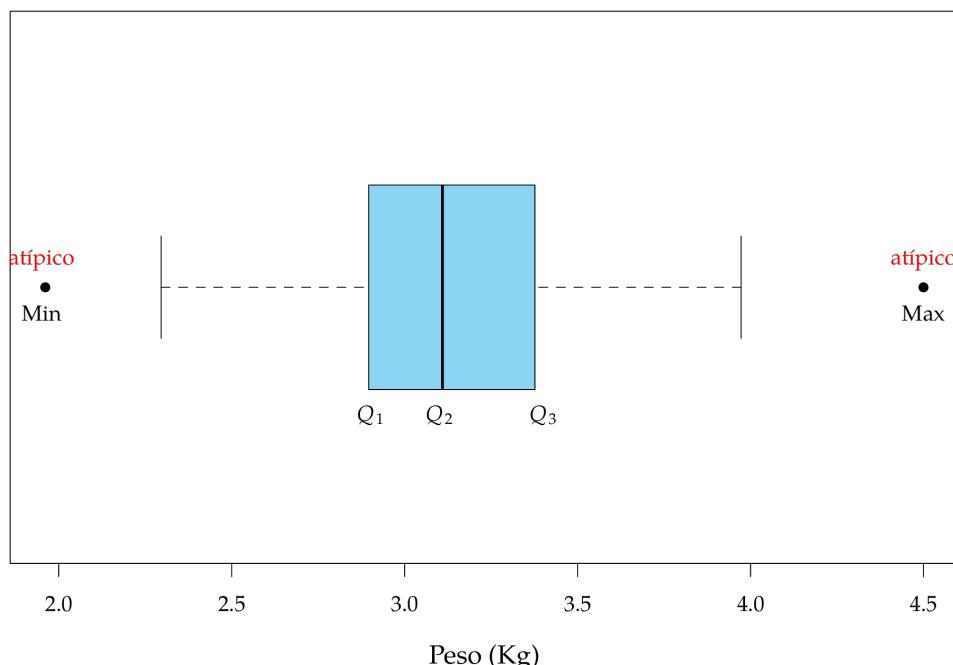


Figura 2.14: Diagrama de caja y bigotes del peso de recién nacidos.

Para construir el diagrama de caja y bigotes hay que seguir los siguientes pasos:

1. Calcular los cuartiles.
2. Dibujar una caja de manera que el extremo inferior caiga sobre el primer cuartil y el extremo superior sobre el tercer cuartil.
3. Dividir la caja con una línea que caiga sobre el segundo cuartil.

- Para los bigotes inicialmente se calculan dos valores llamados *vallas* v_1 y v_2 . La valla inferior es el primer cuartil menos una vez y media el rango intercuartílico, y la valla superior es el tercer cuartil más una vez y media el rango intercuartílico.

$$v_1 = Q_1 - 1.5 \text{ IQR}$$

$$v_2 = Q_3 + 1.5 \text{ IQR}$$

Las vallas definen el intervalo donde los datos se consideran normales. Cualquier valor fuera de ese intervalo se considera un dato atípico.

El bigote superior se dibuja desde el borde inferior de la caja hasta el menor valor de la muestra que es mayor o igual a la valla inferior, y el bigote superior se dibuja desde el borde superior de la caja hasta el mayor valor de la muestra que es menor o igual a la valla superior.

⚠️ Advertencia

Los bigotes no son las vallas.

- Finalmente, si en la muestra hay algún dato atípico, se dibuja un punto para cada uno de ellos.

Ejemplo 2.26. El diagrama de caja y bigotes de la muestra del número de hijos de las familias se muestra a continuación.

2.7.3.1 Desviaciones respecto de la media

Otra forma de medir la variabilidad de una variable es estudiar la concentración de los valores en torno a algún estadístico de tendencia central como por ejemplo la media.

Para ello se suele medir la distancia de cada valor a la media. A ese valor se le llama **desviación de la media**.

Si las desviaciones son grandes la media no será tan representativa como cuando las desviaciones sean pequeñas.

Ejemplo 2.27. La siguiente tabla contiene las notas de 3 estudiantes en un curso con las asignaturas A , B y C .

A	B	C	\bar{x}
0	5	10	5
4	5	6	5
5	5	5	5

Diagrama de caja y bigotes del número de hijos

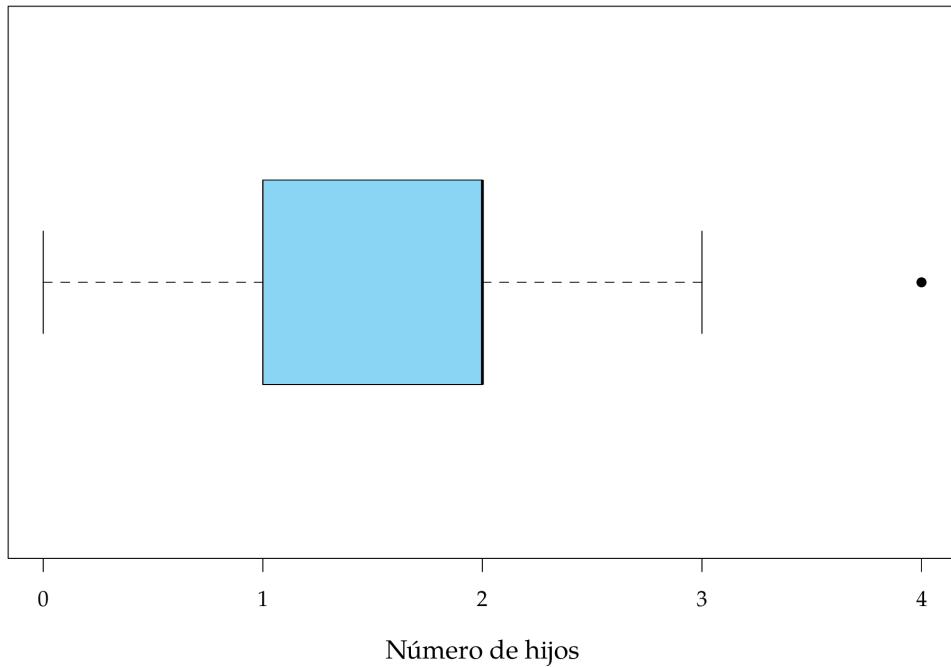


Figura 2.15: Diagrama de caja y bigotes del número de hijos.

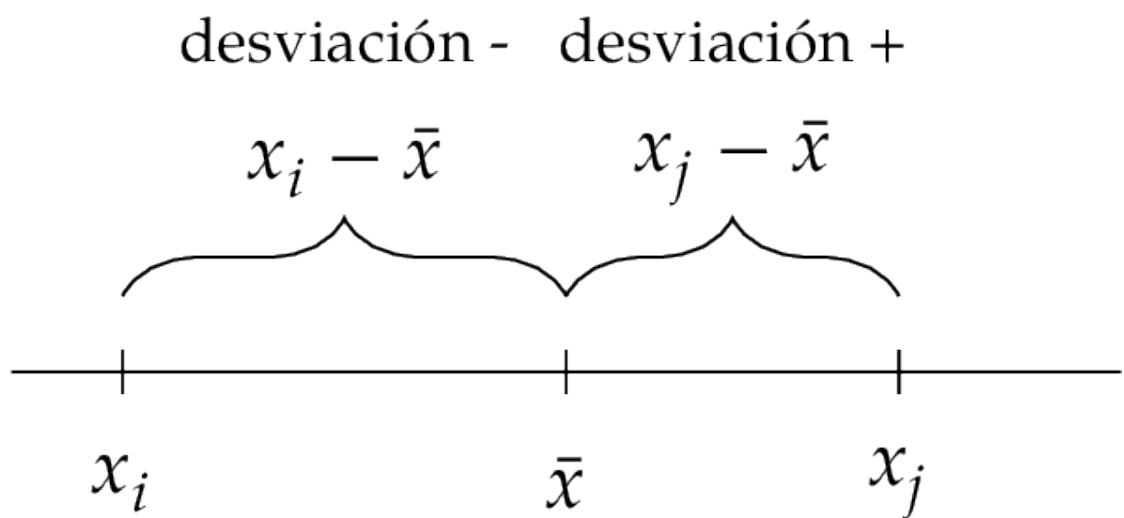


Figura 2.16: Desviaciones con respecto a la media.

Todos los estudiantes tienen la misma media, pero, en qué caso la media representa mejor el rendimiento en el curso?

2.7.4 Varianza y desviación típica

Definición 2.8 (Varianza s^2). La *varianza muestral* de una variable X se define como el promedio del cuadrado de las desviaciones de los valores de la muestra respecto de la media muestral.

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \sum(x_i - \bar{x})^2 f_i$$

También puede calcularse de manera más sencilla mediante la fórmula

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \sum x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

La varianza tiene las unidades de la variable al cuadrado, por lo que para facilitar su interpretación se suele utilizar su raíz cuadrada.

Definición 2.9 (Desviación típica s). La *desviación típica muestral* de una variable X se define como la raíz cuadrada positiva de su varianza muestral.

$$s = +\sqrt{s^2}$$

💡 Tip

Tanto la varianza como la desviación típica sirven para cuantificar la dispersión de los datos en torno a la media. Cuando la varianza o la desviación típica son pequeñas, los datos de la muestra están concentrados en torno a la media, y la media es una buena medida de representatividad. Por contra, cuando la varianza o la desviación típica son grandes, los datos de la muestra están alejados de la media, y la media ya no representa tan bien.

Desviación típica pequeña	⇒	Media representativa
Desviación típica grande	⇒	Media no representativa

Ejemplo 2.28. Las siguientes muestras contienen las notas de dos estudiantes en dos asignaturas.

¿Qué media es más representativa?

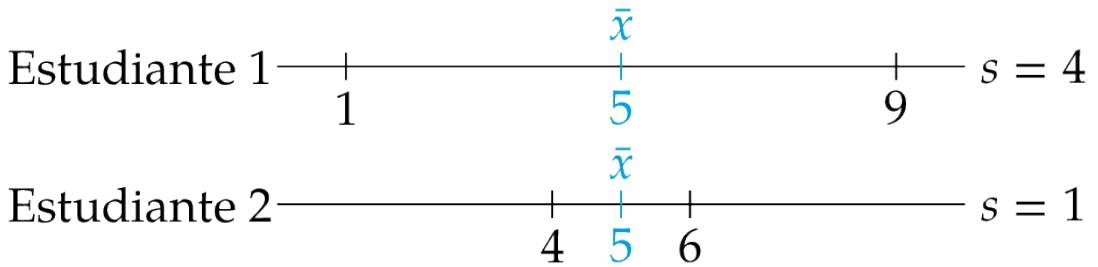


Figura 2.17: Interpretación de la desviación típica.

Ejemplo 2.29 (Datos no agrupados). Utilizando los datos de la muestra del número de hijos de las familias, con una media $\bar{x} = 1.76$ hijos, y añadiendo una nueva columna a la tabla de frecuencias con los cuadrados de los valores,

x_i	n_i	$x_i^2 n_i$
0	2	0
1	6	6
2	14	56
3	2	18
4	1	16
\sum	25	96

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{96}{25} - 1.76^2 = 0.7424 \text{ hijos}^2.$$

y la desviación típica es $s = \sqrt{0.7424} = 0.8616$ hijos.

Comparado este valor con el recorrido, que va de 0 a 4 hijos se observa que no es demasiado grande por lo que se puede concluir que no hay mucha dispersión y en consecuencia la media de 1.76 hijos representa bien el número de hijos de las familias de la muestra.

Ejemplo 2.30 (Datos agrupados). Utilizando los datos de la muestra de estaturas de los estudiantes y agrupando las estaturas en clases, se obtenía una media $\bar{x} = 174.67$ cm. El cálculo de la varianza se realiza igual que antes pero tomando como valores de la variable las marcas de clase.

X	x_i	n_i	$x_i^2 n_i$
(150, 160]	155	2	48050
(160, 170]	165	8	217800
(170, 180]	175	11	336875
(180, 190]	185	7	239575
(190, 200]	195	2	76050
\sum		30	918350

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{918350}{30} - 174.67^2 = 102.06 \text{ cm}^2,$$

y la desviación típica es $s = \sqrt{102.06} = 10.1 \text{ cm}$.

Este valor es bastante pequeño, comparado con el recorrido de la variable, que va de 150 a 200 cm, por lo que la variable tiene poca dispersión y en consecuencia su media es muy representativa.

2.7.5 Coeficiente de variación

Tanto la varianza como la desviación típica tienen unidades y eso dificulta a veces su interpretación, especialmente cuando se compara la dispersión de variables con diferentes unidades.

Por este motivo, es también común utilizar la siguiente medida de dispersión que no tiene unidades.

Definición 2.10 (Coeficiente de variación muestral cv). El *coeficiente de variación muestral* de una variable X se define como el cociente entre su desviación típica muestral y el valor absoluto de su media muestral.

$$cv = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

💡 Tip

El coeficiente de variación muestral mide la dispersión relativa de los valores de la muestra en torno a la media muestral.

Como no tiene unidades, es muy sencillo de interpretar: Cuanto mayor sea, mayor será la dispersión relativa con respecto a la media y menos representativa será la media.

El coeficiente de variación es muy útil para comparar la dispersión de distribuciones de variables diferentes, incluso si las variables tienen unidades diferentes.

Ejemplo 2.31. En la muestra del número de hijos, donde la media era $\bar{x} = 1.76$ hijos y la desviación típica $s = 0.8616$ hijos, el coeficiente de variación vale

$$cv = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{0.8616}{|1.76|} = 0.49.$$

En la muestra de las estaturas, donde la media era $\bar{x} = 174.67$ cm y la desviación típica $s = 10.1$ cm, el coeficiente de variación vale

$$cv = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{10.1}{|174.67|} = 0.06.$$

Esto significa que la dispersión relativa en la muestra de estaturas es mucho menor que en la del número de hijos, por lo que la media de las estaturas será más representativa que la media del número de hijos.

2.8 Estadísticos de forma

Son medidas que describen la forma de la distribución.

Los aspectos más relevantes son:

Simetría Mide la simetría de la distribución de frecuencias en torno a la media. El estadístico más utilizado es el *Coeficiente de Asimetría de Fisher*.

Apuntamiento Mide el apuntamiento o el grado de concentración de valores en torno a la media de la distribución de frecuencias. El estadístico más utilizado es el *Coeficiente de Apuntamiento o Curtosis*.

2.8.1 Coeficiente de asimetría

Definición 2.11 (Coeficiente de asimetría muestral g_1). El *coeficiente de asimetría muestral* de una variable X es el promedio de las desviaciones de los valores de la muestra respecto de la media muestral, elevadas al cubo, dividido por la desviación típica al cubo.

$$g_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3 n_i / n}{s^3} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3 f_i}{s^3}$$

💡 Tip

Mide el grado de simetría de los valores de la muestra con respecto a la media muestra, es decir, cuantos valores de la muestra están por encima o por debajo de la media y cómo de alejados de esta.

- $g_1 = 0$ indica que hay el mismo número de valores por encima y por debajo de la media e igualmente alejados de ella (simétrica).

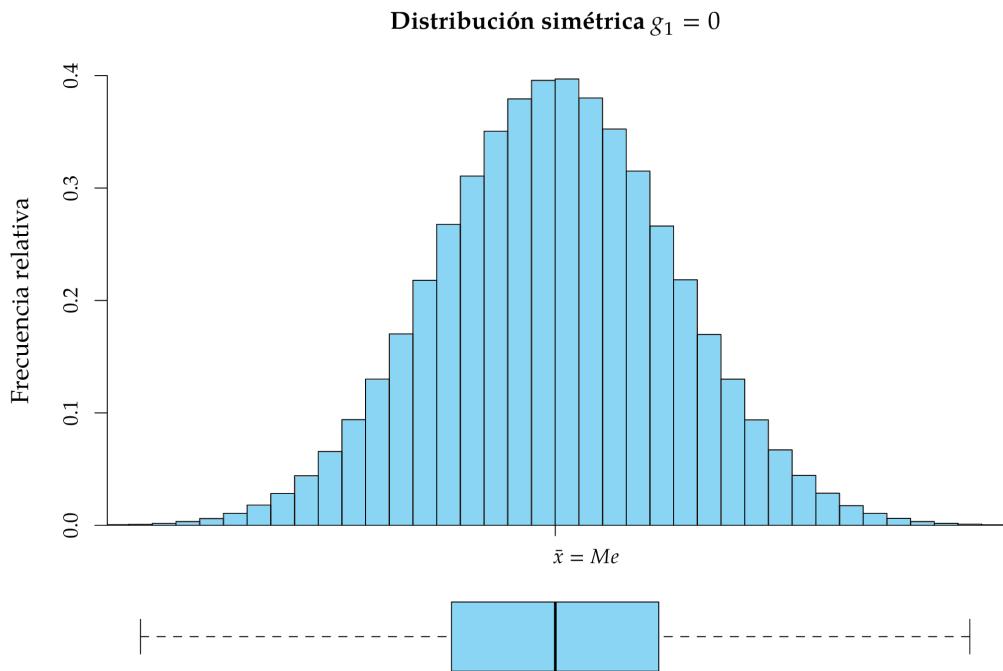


Figura 2.18: Distribución simétrica.

- $g_1 < 0$ indica que la mayoría de los valores son mayores que la media, pero los valores menores están más alejados de ella (asimétrica a la izquierda).

Distribución asimétrica a la izquierda $g_1 < 0$

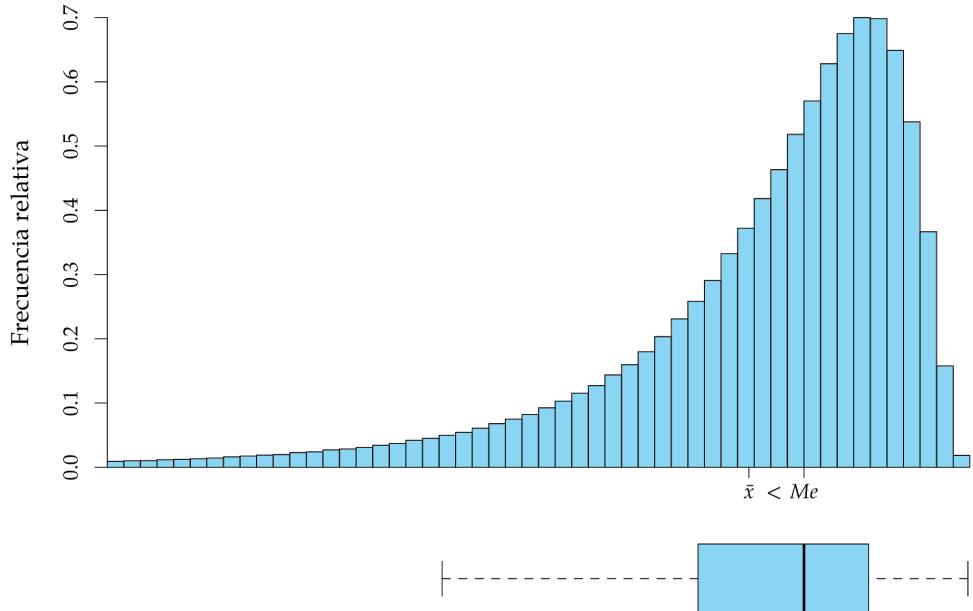


Figura 2.19: Distribución asimétrica hacia la izquierda.

- $g_1 > 0$ indica que la mayoría de los valores son menores que la media, pero los valores mayores están más alejados de ella (asimétrica a la derecha).

Distribución asimétrica a la derecha $g_1 > 0$

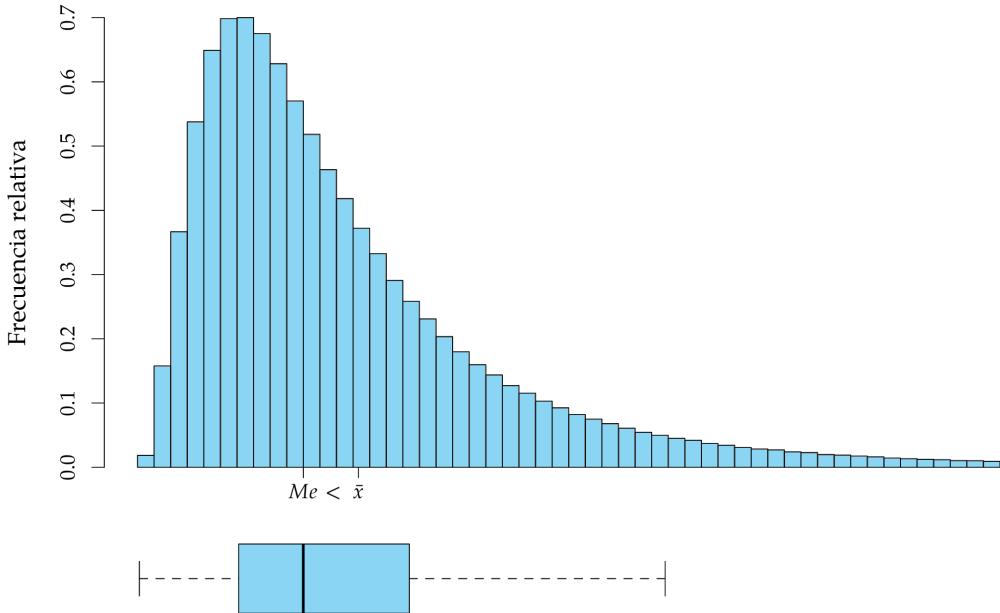


Figura 2.20: Distribución asimétrica hacia la derecha.

Ejemplo 2.32 (Datos agrupados). Utilizando la tabla de frecuencias de la muestra de estaturas y añadiendo una nueva columna con las desviaciones de la media $\bar{x} = 174.67$ cm al cubo, se tiene

X	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^3 n_i$
(150, 160]	155	2	-19.67	-15221.00
(160, 170]	165	8	-9.67	-7233.85
(170, 180]	175	11	0.33	0.40
(180, 190]	185	7	10.33	7716.12
(190, 200]	195	2	20.33	16805.14
\sum		30		2066.81

$$g_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 n_i / n}{s^3} = \frac{2066.81 / 30}{10.1^3} = 0.07.$$

Como está cerca de 0, eso significa que la distribución de las estaturas es casi simétrica.

2.8.2 Coeficiente de apuntamiento o curtosis

Definición 2.12 (Coeficiente de apuntamiento muestral g_2). El *coeficiente de apuntamiento muestral* de una variable X es el promedio de las desviaciones de los valores de la muestra respecto de la media muestral, elevadas a la cuarta, dividido por la desviación típica a la cuarta y al resultado se le resta 3.

$$g_2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^4 n_i / n}{s^4} - 3 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^4 f_i}{s^4} - 3$$

💡 Tip

El coeficiente de apuntamiento mide la concentración de valores en torno a la media y la longitud de las colas de la distribución. Se toma como referencia la distribución normal (campana de Gauss).

- $g_2 = 0$ indica que la distribución tienen un apuntamiento normal, es decir, la concentración de valores en torno a la media es similar al de una campana de Gauss (*mesocúrtica*).

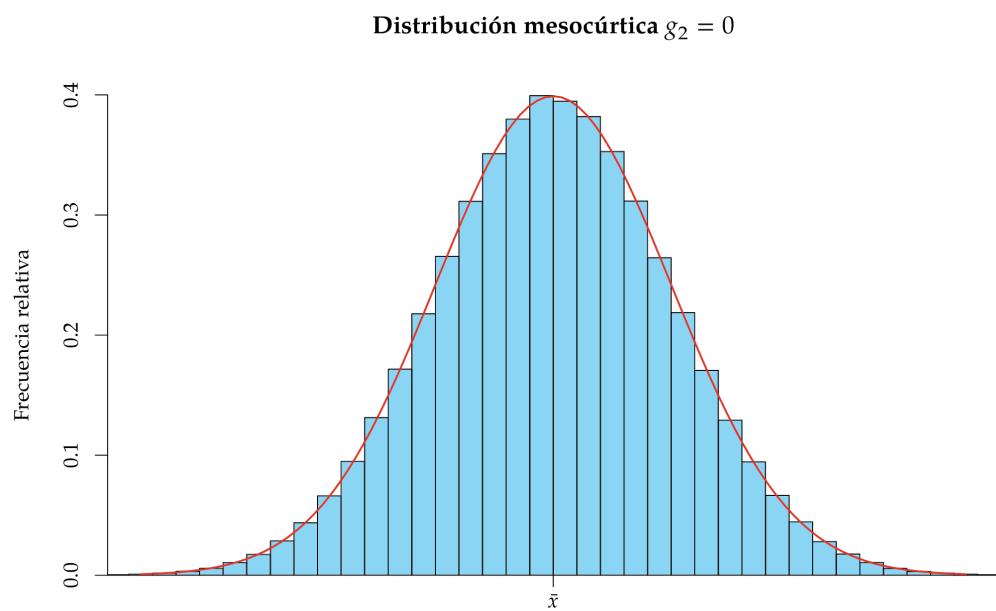


Figura 2.21: Distribución mesocúrtica.

- $g_2 < 0$ indica que la distribución tiene menos apuntamiento de lo normal, es decir, la concentración de valores en torno a la media es menor que en una campana de Gauss (*platicúrtica*).

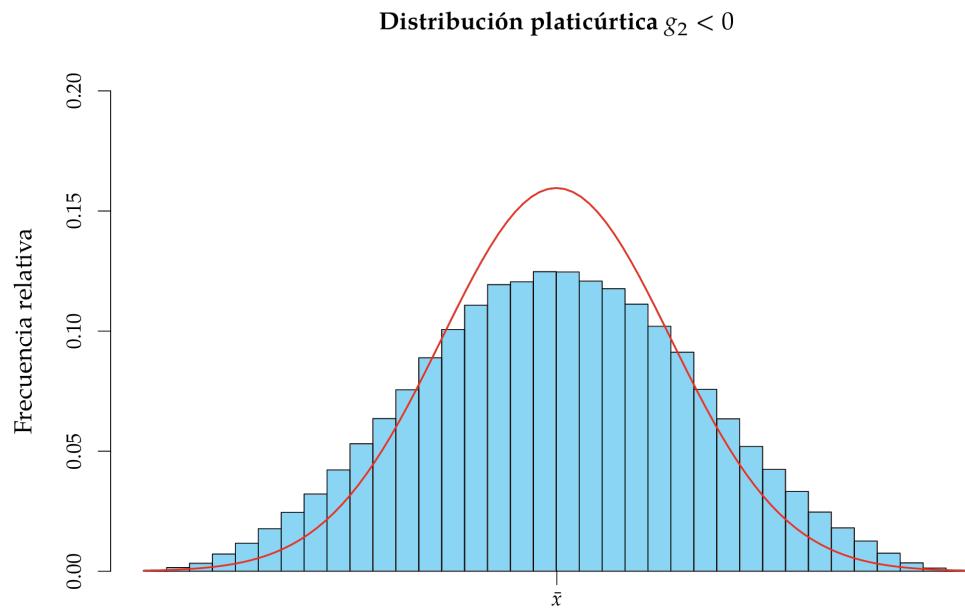


Figura 2.22: Distribución platicúrtica.

- $g_2 > 0$ indica que la distribución tiene más apuntamiento de lo normal, es decir, la concentración de valores en torno a la media es menor que en una campana de Gauss (*leptocúrtica*).

Distribución leptocúrtica $g_2 > 0$

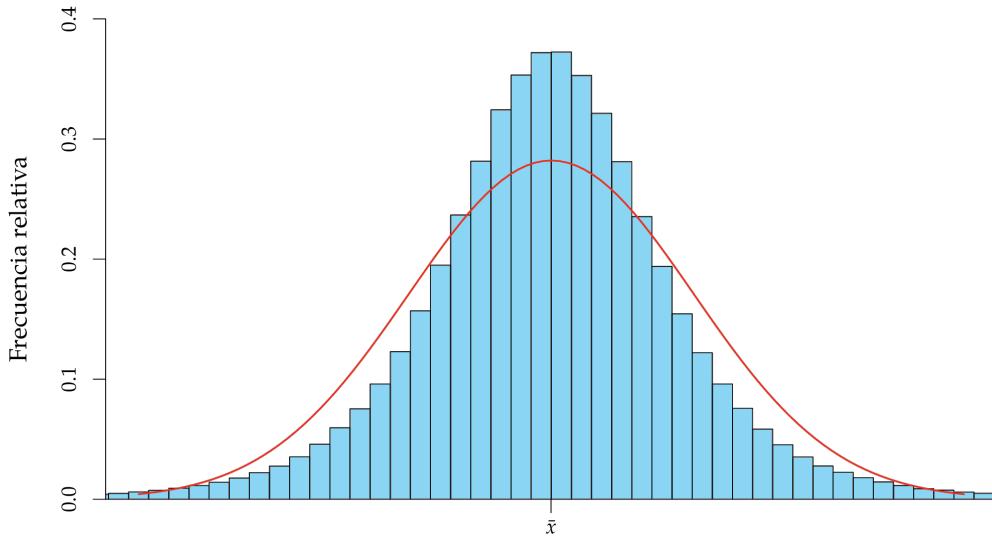


Figura 2.23: Distribución leptocúrtica.

:::{#exm-coeficiente-apuntamiento} ## Datos agrupados Utilizando la tabla de frecuencias de la muestra de estaturas y añadiendo una nueva columna con las desviaciones de la media $\bar{x} = 174.67$ cm a la cuarta, se tiene

X	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^4 n_i$
(150, 160]	155	2	-19.67	299396.99
(160, 170]	165	8	-9.67	69951.31
(170, 180]	175	11	0.33	0.13
(180, 190]	185	7	10.33	79707.53
(190, 200]	195	2	20.33	341648.49
\sum		30		790704.45

$$g_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 n_i / n}{s^4} - 3 = \frac{790704.45 / 30}{10.1^4} - 3 = -0.47.$$

Como se trata de un valor negativo, aunque cercano a 0, podemos decir que la distribución es ligeramente platicúrtica.

Como se verá más adelante en la parte de inferencia, muchas de las pruebas estadísticas solo pueden aplicarse a poblaciones normales.

Las poblaciones normales se caracterizan por ser simétricas y mesocúrticas, de manera que, tanto el coeficiente de asimetría como el de apuntamiento pueden utilizarse para contrastar si los datos de la muestra provienen de una población normal.

💡 Tip

En general, se suele rechazar la hipótesis de normalidad de la población cuando g_1 o g_2 estén fuera del intervalo $[-2, 2]$.

En tal caso, lo habitual es aplicar alguna transformación a la variable para corregir la anormalidad.

2.8.3 Distribuciones no normales

2.8.3.1 Distribución asimétrica a la derecha no normal

Un ejemplo de distribución asimétrica a la derecha es el ingreso de las familias.

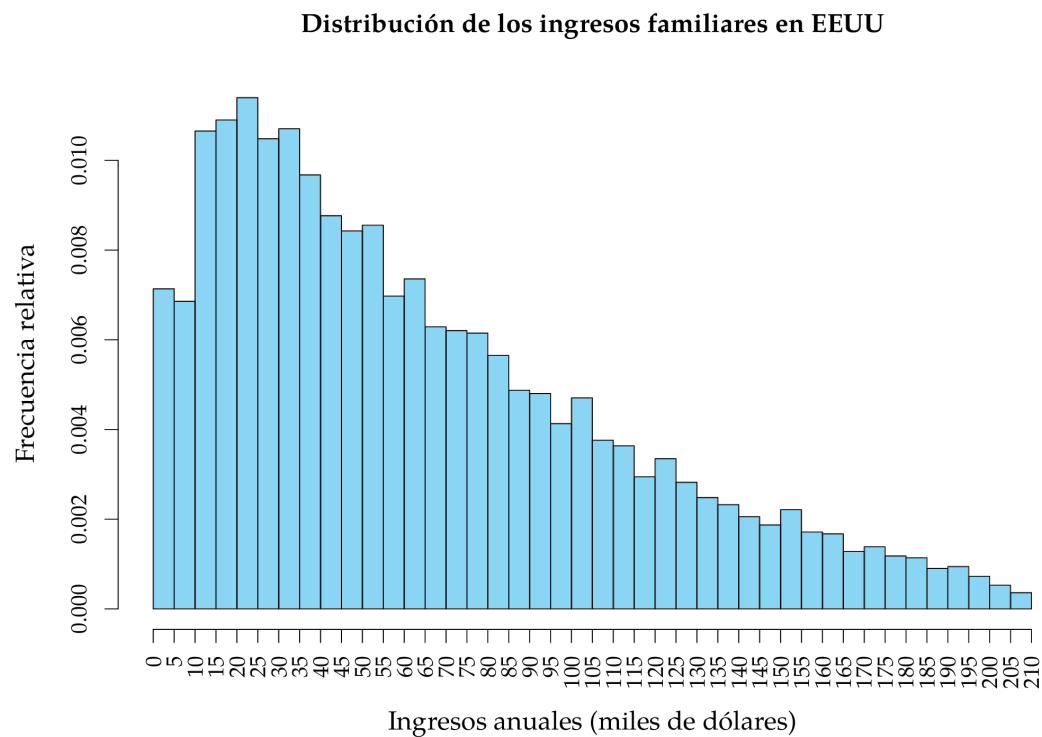


Figura 2.24: Distribucion de los ingresos familiares de EEUU.

2.8.3.2 Distribución asimétrica a la izquierda no normal

Un ejemplo de distribución asimétrica a la izquierda es la edad de fallecimiento.

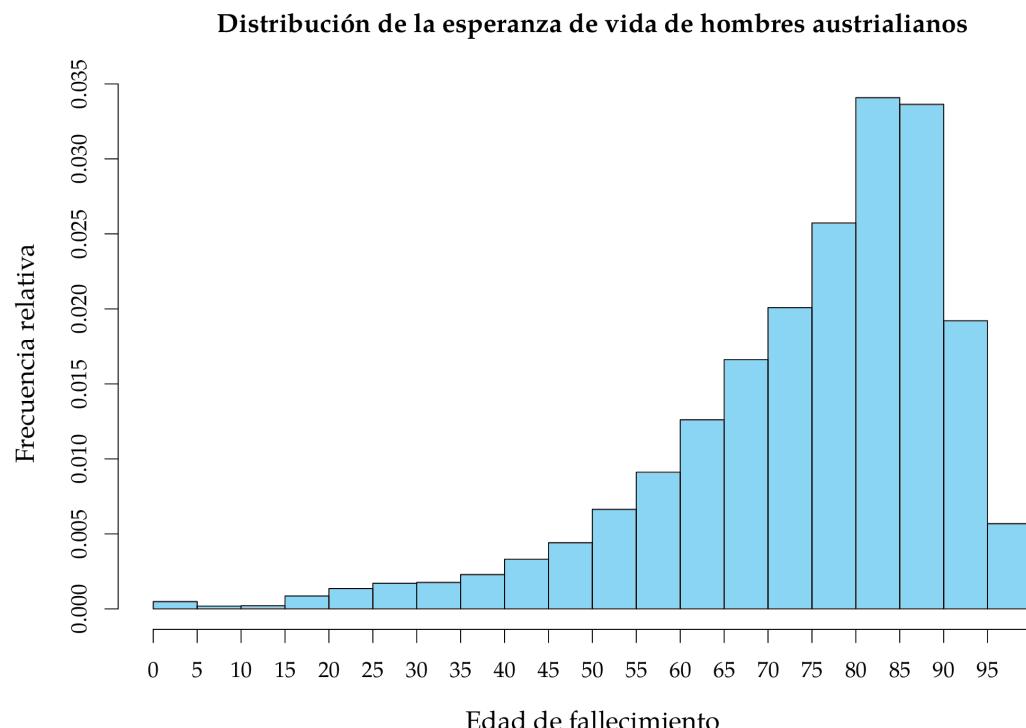


Figura 2.25: Distribucion de la edad de fallecimiento.

2.8.3.3 Distribución bimodal no normal

Un ejemplo de distribución bimodal es la hora de llegada de los clientes de un restaurante.

2.9 Transformaciones de variables

En muchas ocasiones se suelen transformar los datos brutos para corregir alguna anormalidad de la distribución o simplemente para trabajar con unas unidades más cómodas.

Por ejemplo, si estamos trabajando con estaturas medidas en metros y tenemos los siguientes valores:

Distribución de la hora de llegada de los clientes de un restaurante

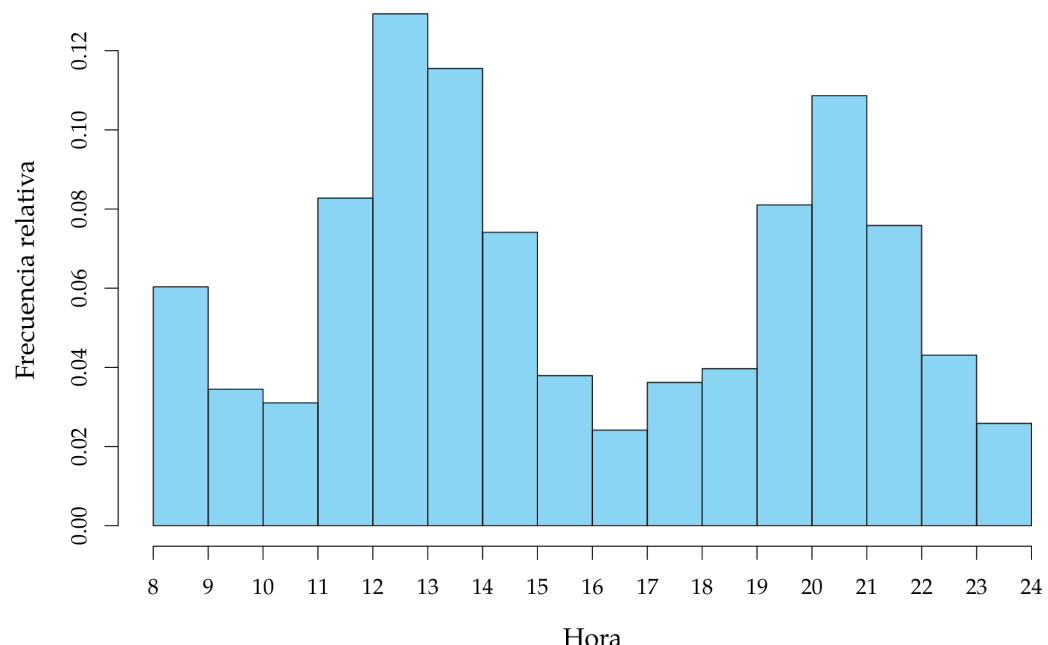


Figura 2.26: Distribucion de la hora de llegada de los clientes de un restaurante.

1.75 m, 1.65 m, 1.80 m,

podemos evitar los decimales multiplicando por 100, es decir, pasando de metros a centímetros:

175 cm, 165 cm, 180 cm,

Y si queremos reducir la magnitud de los datos podemos restarles a todos el menor de ellos, en este caso, 165cm:

10cm, 0cm, 15cm,

Está claro que este conjunto de datos es mucho más sencillo que el original. En el fondo lo que se ha hecho es aplicar a los datos la transformación:

$$Y = 100X - 165$$

2.9.1 Transformaciones lineales

Una de las transformaciones más habituales es la *transformación lineal*:

$$Y = a + bX.$$

Teorema 2.1. *Dada una variable muestral X , si Y es la variable muestral que resulta de aplicar a X la transformación lineal $Y = a + bX$, entonces*

$$\begin{aligned}\bar{y} &= a + b\bar{x}, \\ s_y &= |b|s_x\end{aligned}$$

Además, el coeficiente de curtosis no se altera y el de asimetría sólo cambia de signo si b es negativo.

Demostración

Se deja como ejercicio.

2.9.2 Transformación de tipificación y puntuaciones típicas

Una de las transformaciones lineales más habituales es la *tipificación*:

Definición 2.13 (Variable tipificada). La *variable tipificada* de una variable estadística X es la variable que resulta de restarle su media y dividir por su desviación típica.

$$Z = \frac{X - \bar{x}}{s_x}$$

Para cada valor x_i de la muestra, la *puntuación típica* es el valor que resulta de aplicarle la transformación de tipificación

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}.$$

💡 Tip

La puntuación típica es el número de desviaciones típicas que un valor está por encima o por debajo de la media, y es útil para evitar la dependencia de una variable respecto de las unidades de medida empleadas. Esto es útil, por ejemplo, para comparar valores de variables o muestras distintas.

Dada una variable muestral X , si Z es la variable tipificada de X , entonces

$$\bar{z} = 0 \quad s_z = 1.$$

💡 Demostración

Se deja como ejercicio.

Ejemplo 2.33. Las notas de 5 alumnos en dos asignaturas X e Y son

Alumno:	1	2	3	4	5		
$X :$	2	5	4	8	6	$\bar{x} = 5$	$s_x = 2$
$Y :$	1	9	8	5	2	$\bar{y} = 5$	$s_y = 3.16$

¿Ha tenido el mismo rendimiento el cuarto alumno en la asignatura X que el tercero en la asignatura Y ?

Podría parecer que ambos alumnos han tenido el mismo rendimiento puesto que tienen la misma nota, pero si queremos ver el rendimiento relativo al resto del grupo, tendríamos que tener en cuenta la dispersión de cada muestra y medir sus puntuaciones típicas:

Alumno:	1	2	3	4	5
$X :$	-1.50	0.00	-0.50	1.50	0.50
$Y :$	-1.26	1.26	0.95	0.00	-0.95

Es decir, el alumno que tiene un 8 en X está 1.5 veces la desviación típica por encima de la media de X , mientras que el alumno que tiene un 8 en Y sólo está 0.95 desviaciones típicas por encima de la media de Y . Así pues, el primer alumno tuvo un rendimiento superior al segundo.

Siguiendo con el ejemplo anterior y considerando ambas asignaturas, *¿cuál es el mejor alumno?*

Si simplemente se suman las puntuaciones de cada asignatura se tiene:

Alumno:	1	2	3	4	5
$X :$	2	5	4	8	6
$Y :$	1	9	8	5	2
\sum	3	14	12	13	8

El mejor alumno sería el segundo.

Pero si se considera el rendimiento relativo tomando las puntuaciones típicas se tiene

Alumno:	1	2	3	4	5
$X :$	-1.50	0.00	-0.50	1.50	0.50
$Y :$	-1.26	1.26	0.95	0.00	-0.95
\sum	-2.76	1.26	0.45	1.5	-0.45

Y el mejor alumno sería el cuarto.

2.9.2.1 Transformaciones no lineales

Las transformaciones no lineales son también habituales para corregir la anormalidad de las distribuciones.

La transformación $Y = X^2$ comprime la escala para valores pequeños y la expande para valores altos, de manera que es muy útil para corregir asimetrías hacia la izquierda.

Las transformaciones $Y = \sqrt{x}$, $Y = \log X$ y $Y = 1/X$ comprimen la escala para valores altos y la expanden para valores pequeños, de manera que son útiles para corregir asimetrías hacia la derecha.

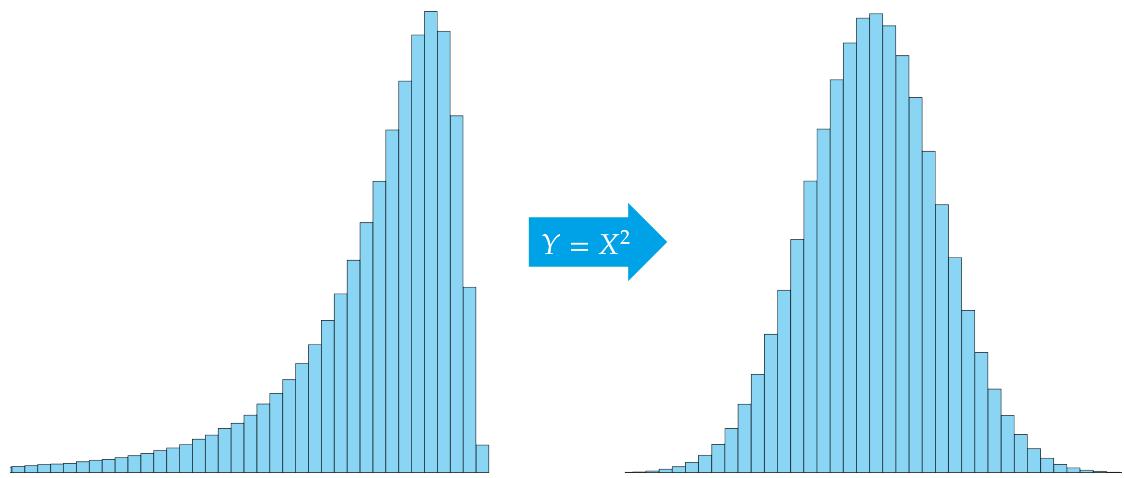


Figura 2.27: Transformación cuadrática.

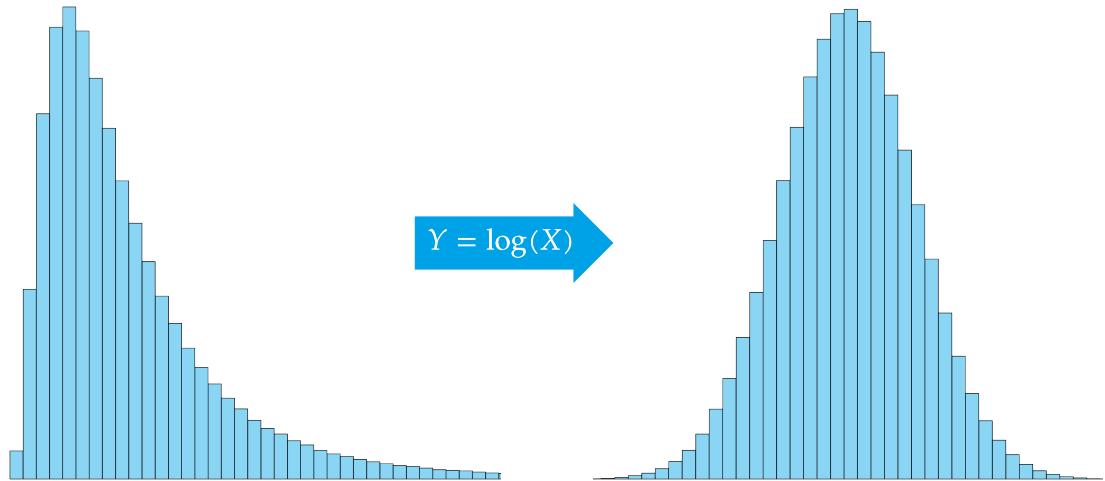


Figura 2.28: Transformación logarítmica.

2.9.3 Variables clasificadoras o factores

En ocasiones interesa describir el comportamiento de una variable, no para toda la muestra, sino para distintos grupos de individuos correspondientes a las categorías de otra variable conocida como **variable clasificadora o factor**.

Ejemplo 2.34. Dividiendo la muestra de estaturas según el sexo se obtienen dos submuestras:

Mujeres	173, 158, 174, 166, 162, 177, 165, 154, 166, 182, 169, 172, 170, 168.
Hombres	179, 181, 172, 194, 185, 187, 198, 178, 188, 171, 175, 167, 186, 172, 176, 187.

Habitualmente los factores se usan para comparar la distribución de la variable principal para cada categoría del factor.

Ejemplo 2.35. Los siguientes diagramas permiten comparar la distribución de estaturas según el sexo.

Histograma de estaturas según el sexo

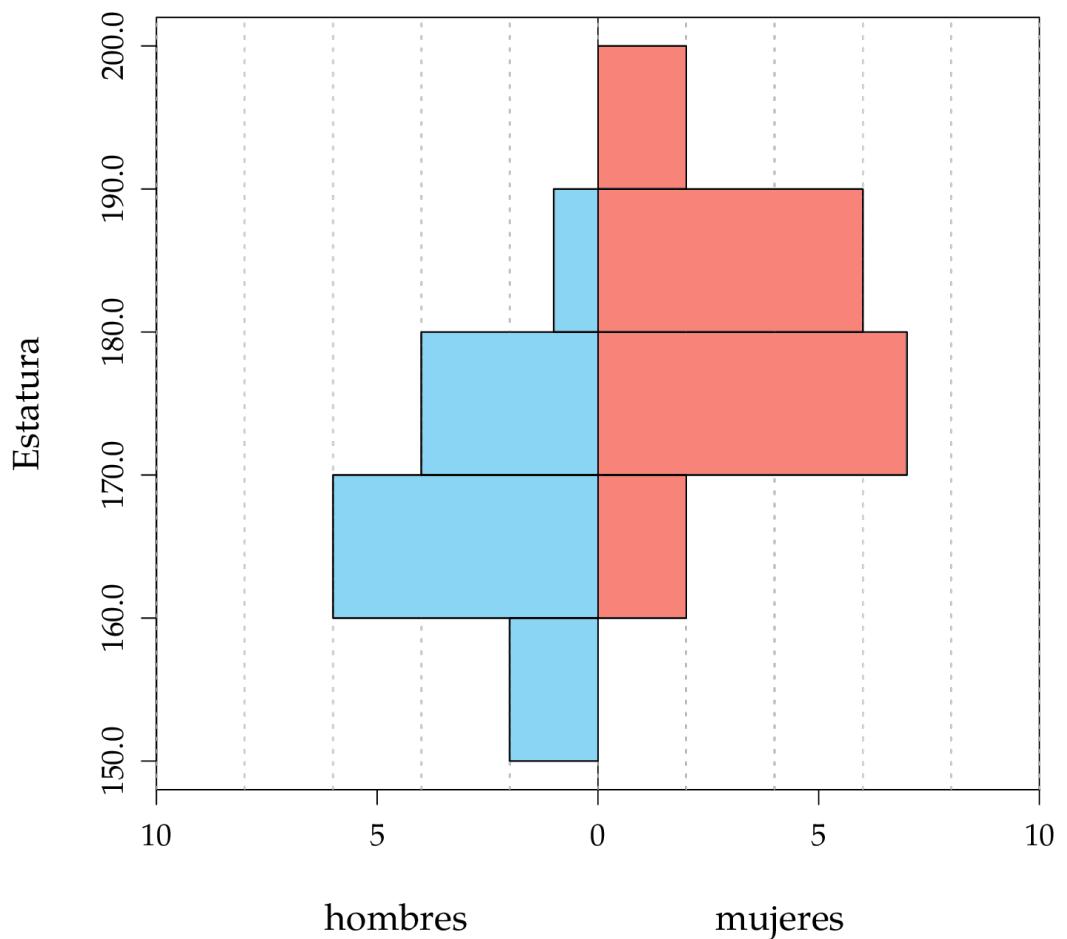


Figura 2.29: Histograma de estaturas por sexo.

Diagrama de cajas de la Estatura según el Sexo

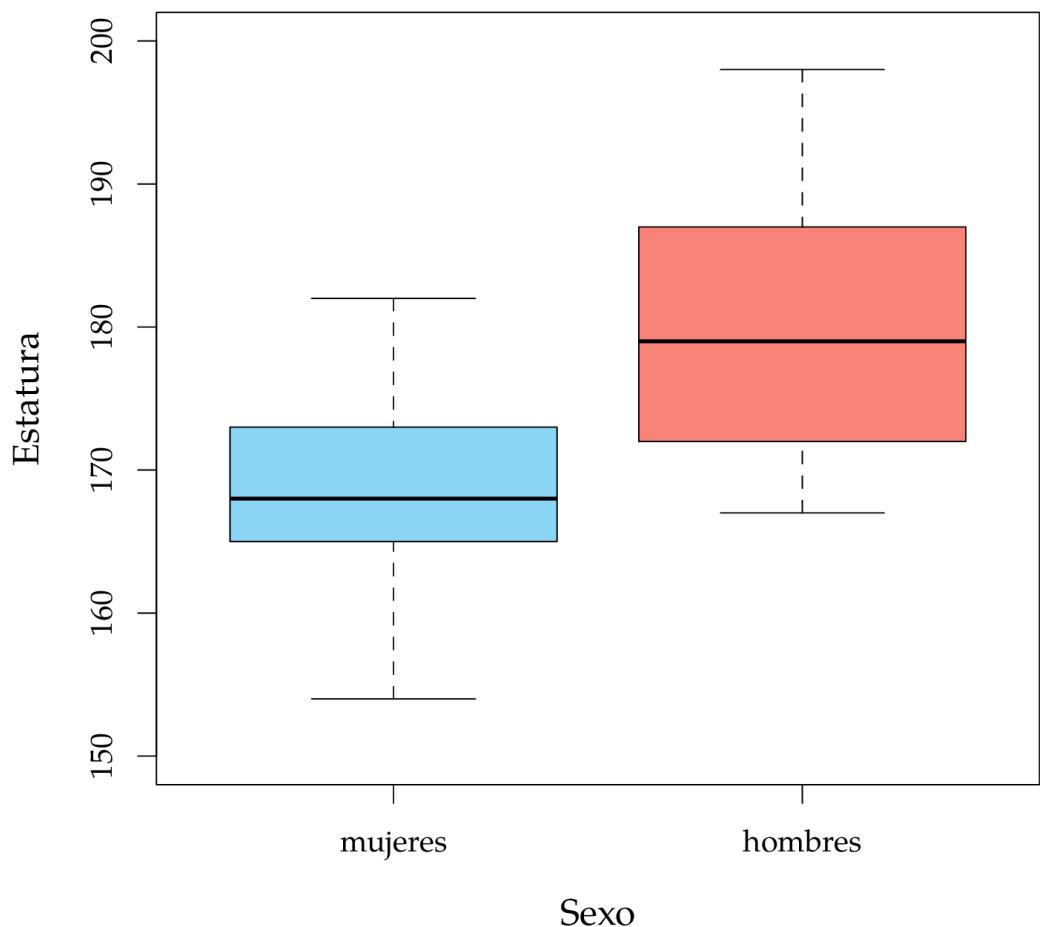


Figura 2.30: Diagramas de cajas de estaturas por sexo.

3 Regresión

Hasta ahora se ha visto como describir el comportamiento de una variable, pero en los fenómenos naturales normalmente aparecen más de una variable que suelen estar relacionadas. Por ejemplo, en un estudio sobre el peso de las personas, deberíamos incluir todas las variables con las que podría tener relación: altura, edad, sexo, dieta, tabaco, ejercicio físico, etc.

Para comprender el fenómeno no basta con estudiar cada variable por separado y es preciso un estudio conjunto de todas las variables para ver cómo interactúan y qué relaciones se dan entre ellas. El objetivo de la estadística en este caso es dar medidas del grado y del tipo de relación entre dichas variables.

Generalmente, en un *estudio de dependencia* se considera una **variable dependiente** Y que se supone relacionada con otras variables X_1, \dots, X_n llamadas **variables independientes**.

El caso más simple es el de una sola variable independiente, y en tal caso se habla de *estudio de dependencia simple*. Para más de una variable independiente se habla de *estudio de dependencia múltiple*.

En este capítulo se verán los estudios de dependencia simple que son más sencillos.

3.1 Distribución de frecuencias conjunta

3.1.1 Frecuencias conjuntas

Al estudiar la dependencia simple entre dos variables X e Y , no se pueden estudiar sus distribuciones por separado, sino que hay que estudiar la distribución conjunta de la **variable bidimensional** (X, Y) , cuyos valores son los pares (x_i, y_j) donde el primer elemento es un valor X y el segundo uno de Y .

Definición 3.1 (Frecuencias muestrales conjuntas). Dada una muestra de tamaño n de una variable bidimensional (X, Y) , para cada valor de la variable (x_i, y_j) observado en la muestra se define

- **Frecuencia absoluta** n_{ij} : Es el número de veces que el par (x_i, y_j) aparece en la muestra.

- **Frecuencia relativa** f_{ij} : Es la proporción de veces que el par (x_i, y_j) aparece en la muestra.

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$

 Advertencia

Para las variables bidimensionales no tienen sentido las frecuencias acumuladas.

3.1.2 Distribución de frecuencias bidimensional

Al conjunto de valores de la variable bidimensional y sus respectivas frecuencias muestrales se le denomina **distribución de frecuencias bidimensional**, y se representa mediante una **tabla de frecuencias bidimensional**.

$X \setminus Y$	y_1	\cdots	y_j	\cdots	y_q
x_1	n_{11}	\cdots	n_{1j}	\cdots	n_{1q}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	n_{i1}	\cdots	n_{ij}	\cdots	n_{iq}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_p	n_{p1}	\cdots	n_{pj}	\cdots	n_{pq}

Ejemplo 3.1. La estatura (en cm) y el peso (en Kg) de una muestra de 30 estudiantes es:

(179,85), (173,65), (181,71), (170,65), (158,51), (174,66), (172,62), (166,60), (194,90), (185,75), (162,55), (187,78), (198,109), (177,61), (178,70), (165,58), (154,50), (183,93), (166,51), (171,65), (175,70), (182,60), (167,59), (169,62), (172,70), (186,71), (172,54), (176,68), (168,67), (187,80).

La tabla de frecuencias bidimensional es

X/Y	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)	[100, 110)
(150, 160]	2	0	0	0	0	0
(160, 170]	4	4	0	0	0	0
(170, 180]	1	6	3	1	0	0
(180, 190]	0	1	4	1	1	0
(190, 200]	0	0	0	0	1	1

3.1.3 Diagrama de dispersión

La distribución de frecuencias conjunta de una variable bidimensional puede representarse gráficamente mediante un **diagrama de dispersión**, donde los datos se representan como una colección de puntos en un plano cartesiano.

Habitualmente la variable independiente se representa en el eje X y la variable dependiente en el eje Y . Por cada par de valores (x_i, y_j) en la muestra se dibuja un punto en el plano con esas coordenadas.

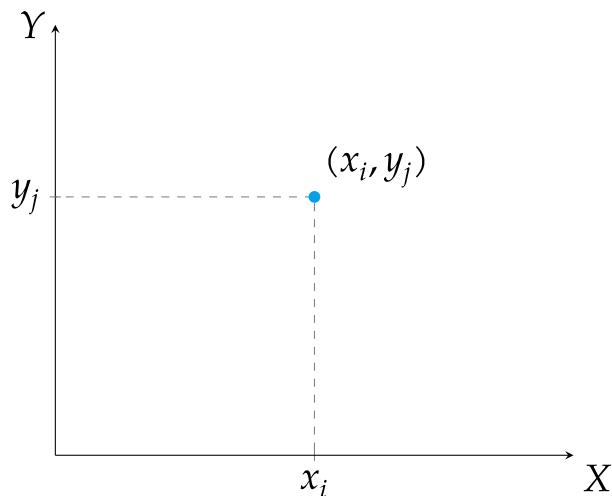


Figura 3.1: Diagrama de dispersión.

El resultado es un conjunto de puntos que se conoce como *nube de puntos*.

Ejemplo 3.2. El siguiente diagrama de dispersión representa la distribución conjunta de estaturas y pesos de la muestra anterior.

i Interpretación

El diagrama de dispersión da información visual sobre el tipo de relación entre las variables.

Diagrama de dispersión de estaturas y pesos

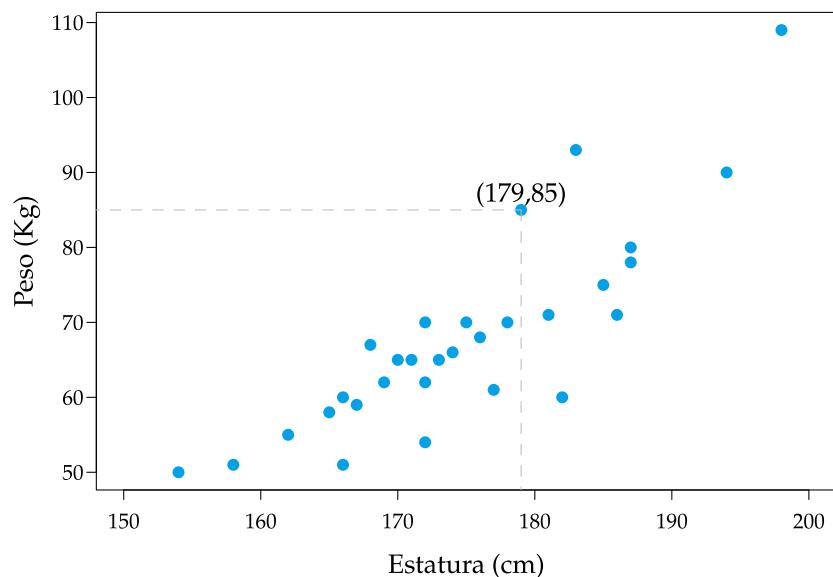


Figura 3.2: Diagrama de dispersión de estaturas y pesos.

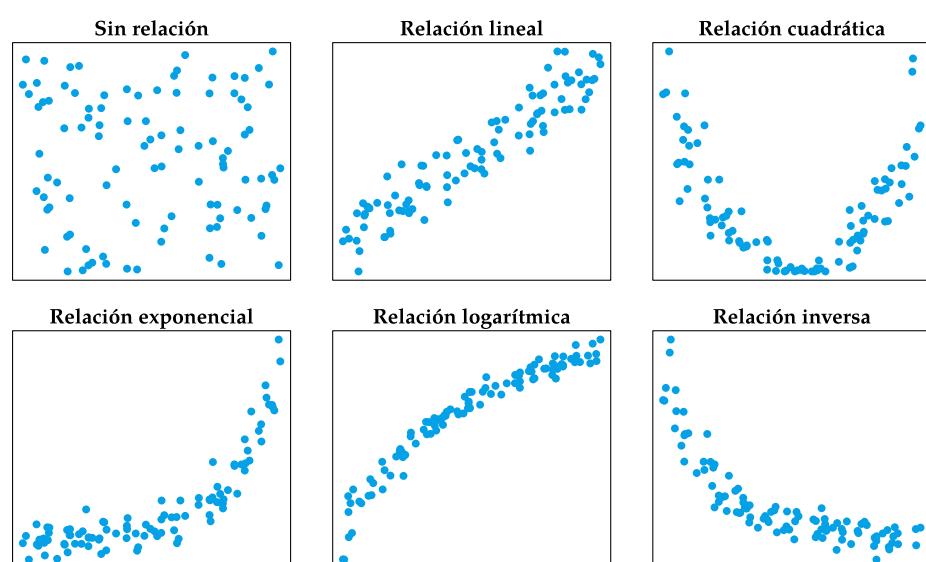


Figura 3.3: Diagramas de dispersión de diferentes tipos de relaciones.

3.1.4 Distribuciones marginales

A cada una de las distribuciones de las variables que conforman la variable bidimensional se les llama .

Las distribuciones marginales se pueden obtener a partir de la tabla de frecuencias bidimensional, sumando las frecuencias por filas y columnas.

$X \setminus Y$	y_1	...	y_j	...	y_q	n_x
x_1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1q}	n_{x_1}
\vdots	\vdots	\vdots	$\downarrow +$	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	n_{i1}	$\xrightarrow{+}$	n_{ij}	$\xrightarrow{+}$	n_{iq}	n_{x_i}
\vdots	\vdots	\vdots	$\downarrow +$	\vdots	\vdots	\vdots
x_p	n_{p1}	...	n_{pj}	...	n_{pq}	n_{x_p}
n_y	n_{y_1}	...	n_{y_j}	...	n_{y_q}	n

Ejemplo 3.3. En el ejemplo anterior de las estaturas y los pesos, las distribuciones marginales son

X/Y	[50, 60]	[60, 70]	[70, 80]	[80, 90]	[90, 100]	[100, 110]	n_x
(150, 160]	2	0	0	0	0	0	2
(160, 170]	4	4	0	0	0	0	8
(170, 180]	1	6	3	1	0	0	11
(180, 190]	0	1	4	1	1	0	7
(190, 200]	0	0	0	0	1	1	2
n_y	7	11	7	2	2	1	30

y los estadísticos correspondientes son

$$\bar{x} = 174.67 \text{ cm} \quad s_x^2 = 102.06 \text{ cm}^2 \quad s_x = 10.1 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 69.67 \text{ Kg} \quad s_y^2 = 164.42 \text{ Kg}^2 \quad s_y = 12.82 \text{ Kg}$$

3.2 Covarianza

Para analizar la relación entre dos variables cuantitativas es importante hacer un estudio conjunto de las desviaciones respecto de la media de cada variable.

Si dividimos la nube de puntos del diagrama de dispersión en 4 cuadrantes centrados en el punto de medias (\bar{x}, \bar{y}) , el signo de las desviaciones será:

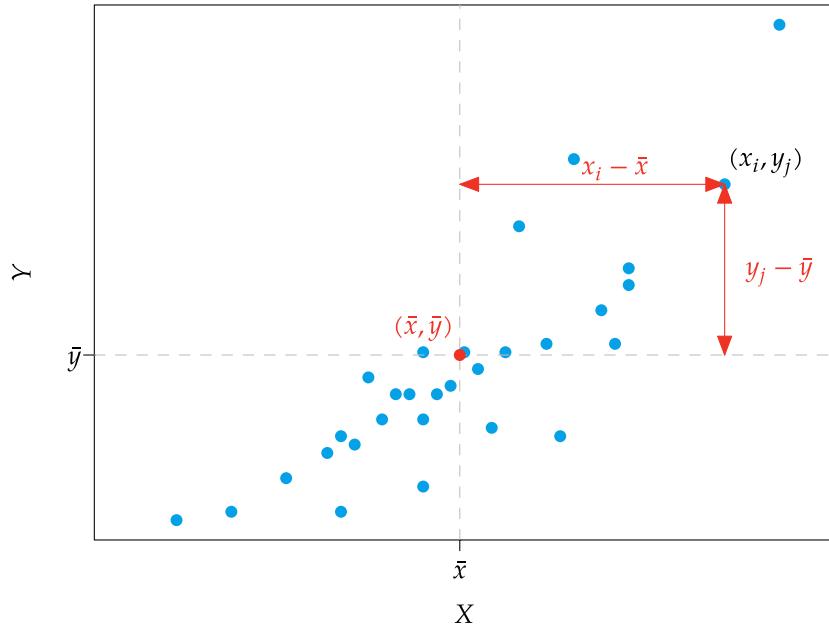


Figura 3.4: Desviaciones de las medias en un diagrama de dispersión.

Cuadrante	$(x_i - \bar{x})$	$(y_j - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$
1	+	+	+
2	-	+	-
3	-	-	+
4	+	-	-

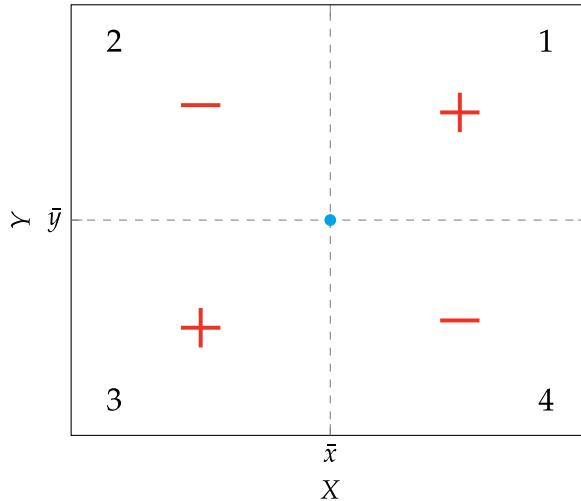


Figura 3.5: Cuadrantes de un diagrama de dispersión.

Si la relación entre las variables es *lineal y creciente*, entonces la mayor parte de los puntos estarán en los cuadrantes 1 y 3 y la suma de los productos de desviaciones será positiva.

$$\sum(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) > 0$$

Si la relación entre las variables es *lineal y decreciente*, entonces la mayor parte de los puntos estarán en los cuadrantes 2 y 4 y la suma de los productos de desviaciones será negativa.

$$\sum(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = -$$

Relación lineal creciente

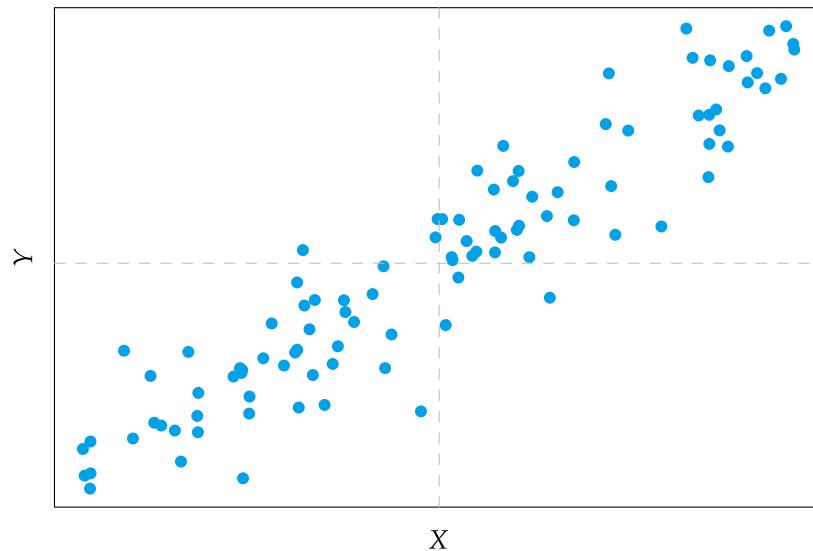


Figura 3.6: Diagrama de dispersión de una relación lineal creciente.

Relación lineal decreciente

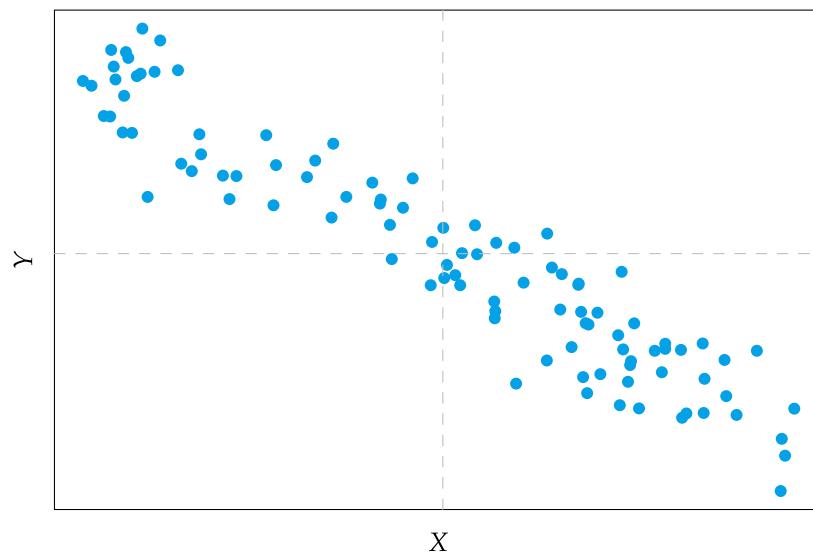


Figura 3.7: Diagrama de dispersión de una relación lineal decreciente.

$$s_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})n_{ij}}{n}$$

También puede calcularse de manera más sencilla mediante la fórmula

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x}\bar{y}.$$

i Interpretación

La covarianza sirve para estudiar la relación lineal entre dos variables:

- Si $s_{xy} > 0$ existe una relación lineal creciente.
- Si $s_{xy} < 0$ existe una relación lineal decreciente.
- Si $s_{xy} = 0$ no existe relación lineal.

Ejemplo 3.4. Utilizando la tabla de frecuencias bidimensional de la muestra de estaturas y pesos

X/Y	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)	[100, 110)	n_x
(150, 160]	2	0	0	0	0	0	2
(160, 170]	4	4	0	0	0	0	8
(170, 180]	1	6	3	1	0	0	11
(180, 190]	0	1	4	1	1	0	7
(190, 200]	0	0	0	0	1	1	2
n_y	7	11	7	2	2	1	30

$$\bar{x} = 174.67 \text{ cm} \quad \bar{y} = 69.67 \text{ Kg}$$

la covarianza vale

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{\sum x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{155 \cdot 55 \cdot 2 + 165 \cdot 55 \cdot 4 + \dots + 195 \cdot 105 \cdot 1}{30} - 174.67 \cdot 69.67 = \\ &= \frac{368200}{30} - 12169.26 = 104.07 \text{ cm} \cdot \text{Kg}. \end{aligned}$$

Esto indica que existe una relación lineal creciente entre la estatura y el peso.

3.3 Regresión

En muchos casos el objetivo de un estudio no es solo detectar una relación entre dos variables, sino explicarla mediante alguna función matemática

$$y = f(x)$$

que permita predecir la variable dependiente para cada valor de la independiente.

La **regresión** es la parte de la Estadística encargada de construir esta función, que se conoce como **función de regresión o modelo de regresión**.

3.3.1 Modelos de regresión simple

Dependiendo de la forma de función de regresión, existen muchos tipos de regresión simple. Los más habituales son los que aparecen en la siguiente tabla:

Modelo	Ecuación
Lineal	$y = a + bx$
Cuadrático	$y = a + bx + cx^2$
Cúbico	$y = a + bx + cx^2 + dx^3$
Potencial	$y = a \cdot x^b$
Exponencial	$y = e^{a+bx}$
Logarítmico	$y = a + b \log x$
Inverso	$y = a + \frac{b}{x}$
Sigmoidal	$y = e^{a+\frac{b}{x}}$

La elección de un tipo u otro depende de la forma que tenga la nube de puntos del diagrama de dispersión.

3.3.2 Residuos o errores predictivos

Una vez elegida la familia de curvas que mejor se adapta a la nube de puntos, se determina, dentro de dicha familia, la curva que mejor se ajusta a la distribución, es decir, la función que mejor predice la variable dependiente.

El objetivo es encontrar la función de regresión que haga mínimas las distancias entre los valores de la variable dependiente observados en la muestra, y los predichos por la función de regresión. Estas distancias se conocen como *residuos* o *errores predictivos*.

Definición 3.3 (Residuos o errores predictivos). Dado el modelo de regresión $y = f(x)$ para una variable bidimensional (X, Y) , el *residuo* o *error predictivo* de un valor (x_i, y_j) observado en la muestra, es la diferencia entre el valor observado de la variable dependiente y_j y el predicho por la función de regresión para x_i ,

$$e_{ij} = y_j - f(x_i).$$

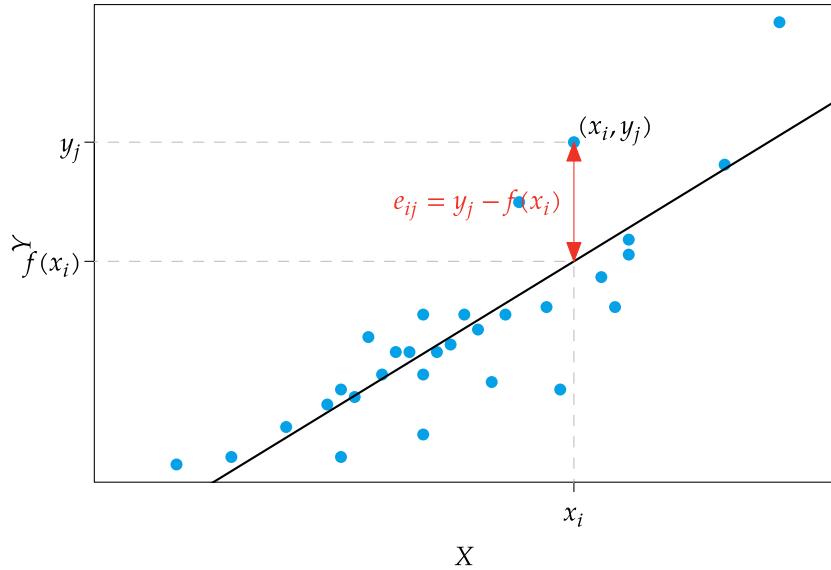


Figura 3.8: Residuos de un modelo de regresión.

3.3.3 Ajuste de mínimos cuadrados

Una forma posible de obtener la función de regresión es mediante el método de *mínimos cuadrados* que consiste en calcular la función que haga mínima la suma de los cuadrados de los residuos

$$\sum e_{ij}^2.$$

En el caso de un modelo de regresión lineal $f(x) = a + bx$, como la recta depende de dos parámetros (el término independiente a y la pendiente b), la suma también dependerá de estos parámetros

$$\theta(a, b) = \sum e_{ij}^2 = \sum (y_j - f(x_i))^2 = \sum (y_j - a - bx_i)^2.$$

Así pues, todo se reduce a buscar los valores a y b que hacen mínima esta suma.

Considerando la suma de los cuadrados de los residuos como una función de dos variables $\theta(a, b)$, se pueden calcular los valores de los parámetros del modelo que hacen mínima esta suma derivando e igualando a 0 las derivadas con respecto a a y b .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta(a, b)}{\partial a} &= \frac{\partial \sum(y_j - a - bx_i)^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \theta(a, b)}{\partial b} &= \frac{\partial \sum(y_j - a - bx_i)^2}{\partial b} = 0\end{aligned}$$

Tras resolver el sistema se obtienen los valores

$$a = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{x} \quad b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

Estos valores hacen mínimos los residuos en Y y por tanto dan la recta de regresión óptima.

3.3.4 Coeficiente de determinación

A partir de la varianza residual se puede definir otro estadístico más sencillo de interpretar.

Definición 3.4 (Coeficiente de determinación muestral r^2). Dado un modelo de regresión simple $y = f(x)$ de una variable bidimensional (X, Y) , su *coeficiente de determinación muestral* es

$$r^2 = 1 - \frac{s_{ry}^2}{s_y^2}$$

⚠️ Advertencia

Como la varianza residual puede tomar valores entre 0 y s_y^2 , se tiene que

$$0 \leq r^2 \leq 1$$

ℹ️ Interpretación

Cuanto mayor sea r^2 , mejor explicará el modelo de regresión la relación entre las variables, en particular:

- Si $r^2 = 0$ entonces no existe relación del tipo planteado por el modelo.
- Si $r^2 = 1$ entonces la relación que plantea el modelo es perfecta.

Advertencia

En el caso de las rectas de regresión, el coeficiente de determinación puede calcularse con esta fórmula

$$r^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}.$$

Demostración

Prueba. Cuando el modelo ajustado es la recta de regresión la varianza residual vale

$$\begin{aligned} s_{ry}^2 &= \sum e_{ij}^2 f_{ij} = \sum (y_j - f(x_i))^2 f_{ij} = \sum \left(y_j - \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x_i - \bar{x}) \right)^2 f_{ij} = \\ &= \sum \left((y_j - \bar{y})^2 + \frac{s_{xy}^2}{s_x^4} (x_i - \bar{x})^2 - 2 \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \right) f_{ij} = \\ &= \sum (y_j - \bar{y})^2 f_{ij} + \frac{s_{xy}^2}{s_x^4} \sum (x_i - \bar{x})^2 f_{ij} - 2 \frac{s_{xy}}{s_x^2} \sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) f_{ij} = \\ &= s_y^2 + \frac{s_{xy}^2}{s_x^4} s_x^2 - 2 \frac{s_{xy}}{s_x^2} s_{xy} = s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}. \end{aligned}$$

y, por tanto, el coeficiente de determinación lineal vale

$$r^2 = 1 - \frac{s_{ry}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}}{s_y^2} = 1 - 1 + \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}.$$

□

Ejemplo 3.5. En el ejemplo de las estaturas y pesos se tenía

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 174.67 \text{ cm} & s_x^2 &= 102.06 \text{ cm}^2 \\ \bar{y} &= 69.67 \text{ Kg} & s_y^2 &= 164.42 \text{ Kg}^2 \\ s_{xy} &= 104.07 \text{ cm} \cdot \text{Kg} \end{aligned}$$

De modo que el coeficiente de determinación lineal vale

$$r^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} = \frac{(104.07 \text{ cm} \cdot \text{Kg})^2}{102.06 \text{ cm}^2 \cdot 164.42 \text{ Kg}^2} = 0.65.$$

Esto indica que la recta de regresión del peso sobre la estatura explica el 65% de la variabilidad del peso, y de igual modo, la recta de regresión de la estatura sobre el peso explica el 65% de la variabilidad de la estatura.

3.3.5 Coeficiente de correlación lineal

Definición 3.5 (Coeficiente de correlación lineal muestral). Dada una variable bidimensional (X, Y), el *coeficiente de correlación lineal muestral* es la raíz cuadrada de su coeficiente de determinación lineal, con signo el de la covarianza

$$r = \sqrt{r^2} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

 Advertencia

Como r^2 toma valores entre 0 y 1, r tomará valores entre -1 y 1,

$$-1 \leq r \leq 1$$

 Interpretación

El coeficiente de correlación lineal no sólo mide el grado de dependencia lineal sino también su dirección (creciente o decreciente):

- Si $r = 0$ entonces no existe relación lineal.
- Si $r = 1$ entonces existe una relación lineal creciente perfecta.
- Si $r = -1$ entonces existe una relación lineal decreciente perfecta.

:::{#exm-coeficiente-correlacion} En el ejemplo de las estaturas y los pesos se tenía

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 174.67 \text{ cm} & s_x^2 &= 102.06 \text{ cm}^2 \\ \bar{y} &= 69.67 \text{ Kg} & s_y^2 &= 164.42 \text{ Kg}^2 \\ s_{xy} &= 104.07 \text{ cm} \cdot \text{Kg}\end{aligned}$$

De manera que el coeficiente de correlación lineal es

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{104.07 \text{ cm} \cdot \text{Kg}}{10.1 \text{ cm} \cdot 12.82 \text{ Kg}} = +0.8.$$

Esto indica que la relación lineal entre el peso y la estatura es fuerte, y además creciente.

3.3.6 Distintos grados de correlación

Los siguientes diagramas de dispersión muestran modelos de regresión lineales con diferentes grados de correlación.

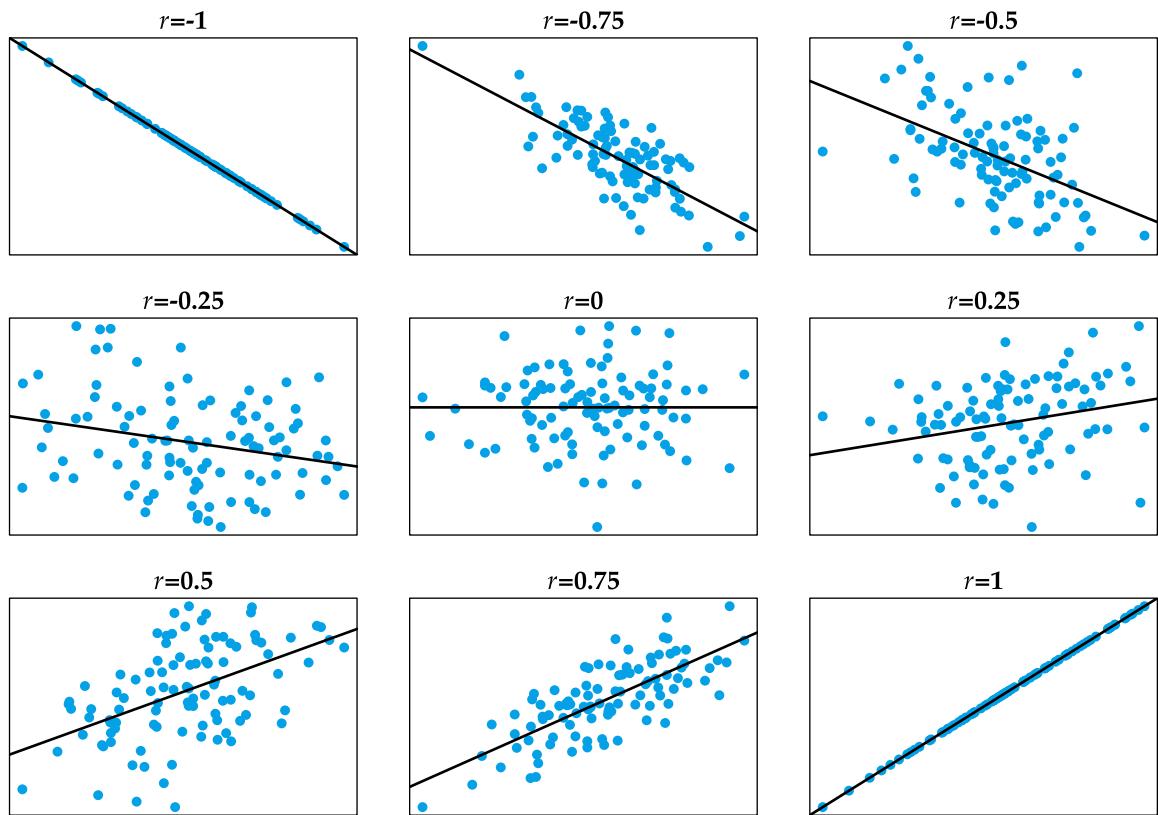


Figura 3.9: Modelos de regresión lineales con diferentes grados de correlación.

3.3.7 Fiabilidad de las predicciones de un modelo de regresión

Aunque el coeficiente de determinación o el de correlación determinan la bondad de ajuste de un modelo de regresión, existen otros factores que influyen en la fiabilidad de las predicciones de un modelo de regresión:

- El coeficiente de determinación: Cuanto mayor sea, menores serán los errores predictivos y mayor la fiabilidad de las predicciones.

- La variabilidad de la población: Cuanto más variable es una población, más difícil es predecir y por tanto menos fiables serán las predicciones.
- El tamaño muestral: Cuanto mayor sea, más información tendremos y, en consecuencia, más fiables serán las predicciones.

 Advertencia

Además, hay que tener en cuenta que un modelo de regresión es válido únicamente para el rango de valores observados en la muestra. Fuera de ese rango no hay información del tipo de relación entre las variables, por lo que no deben hacerse predicciones para valores lejos de los observados en la muestra.

3.4 Regresión no lineal

El ajuste de un modelo de regresión no lineal es similar al del modelo lineal y también puede realizarse mediante la técnica de mínimos cuadrados.

No obstante, en determinados casos un ajuste no lineal puede convertirse en un ajuste lineal mediante una sencilla transformación de alguna de las variables del modelo.

3.4.1 Transformación de modelos de regresión no lineales

- **Logarítmico:** Un modelo logarítmico $y = a + b \log x$ se convierte en un modelo lineal haciendo el cambio $t = \log x$:

$$y = a + b \log x = a + bt.$$

- **Exponencial:** Un modelo exponencial $y = ae^{bx}$ se convierte en un modelo lineal haciendo el cambio $z = \log y$:

$$z = \log y = \log(ae^{bx}) = \log a + \log e^{bx} = a' + bx.$$

- **Potencial:** Un modelo potencial $y = ax^b$ se convierte en un modelo lineal haciendo los cambios $t = \log x$ y $z = \log y$:

$$z = \log y = \log(ax^b) = \log a + b \log x = a' + bt.$$

- **Inverso:** Un modelo inverso $y = a + b/x$ se convierte en un modelo lineal haciendo el cambio $t = 1/x$:

$$y = a + b(1/x) = a + bt.$$

- **Sigmoidal:** Un modelo curva S $y = e^{a+b/x}$ se convierte en un modelo lineal haciendo los cambios $t = 1/x$ y $z = \log y$:

$$z = \log y = \log(e^{a+b/x}) = a + b(1/x) = a + bt.$$

3.4.2 Relación exponencial

:::{#exm-regresion-exponencial} El número de bacterias de un cultivo evoluciona con el tiempo según la siguiente tabla:

Horas	Bacterias
0	25
1	28
2	47
3	65
4	86
5	121
6	190
7	290
8	362

El diagrama de dispersión asociado es

Si realizamos un ajuste lineal, obtenemos la siguiente recta de regresión

$$\text{Bacterias} = -30.18 + 41.27 \text{ Horas, with } r^2 = 0.85.$$

¿Es un buen modelo?

Aunque el modelo lineal no es malo, de acuerdo al diagrama de dispersión es más lógico construir un modelo exponencial o cuadrático.

Para construir el modelo exponencial $y = ae^{bx}$ hay que realizar la transformación $z = \log y$, es decir, aplicar el logaritmo a la variable dependiente.

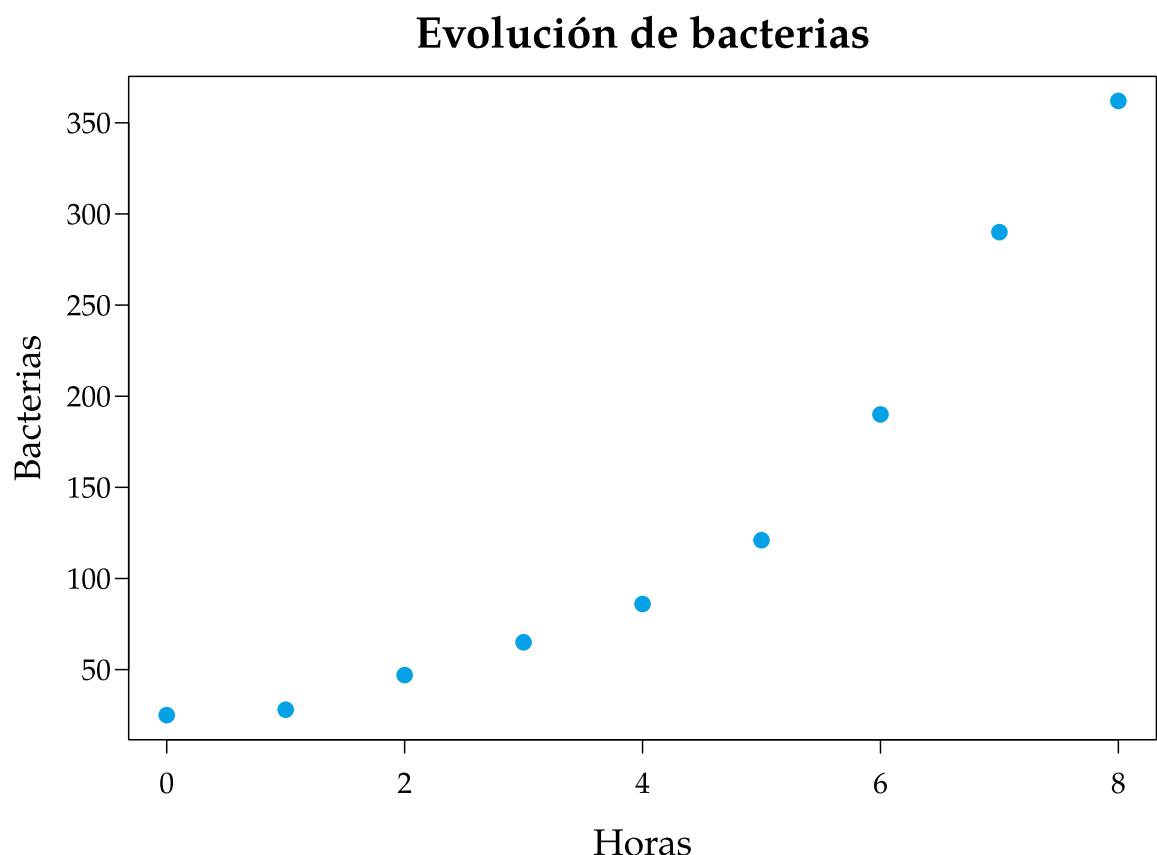


Figura 3.10: Diagrama de dispersión de la evolución de bacterias.

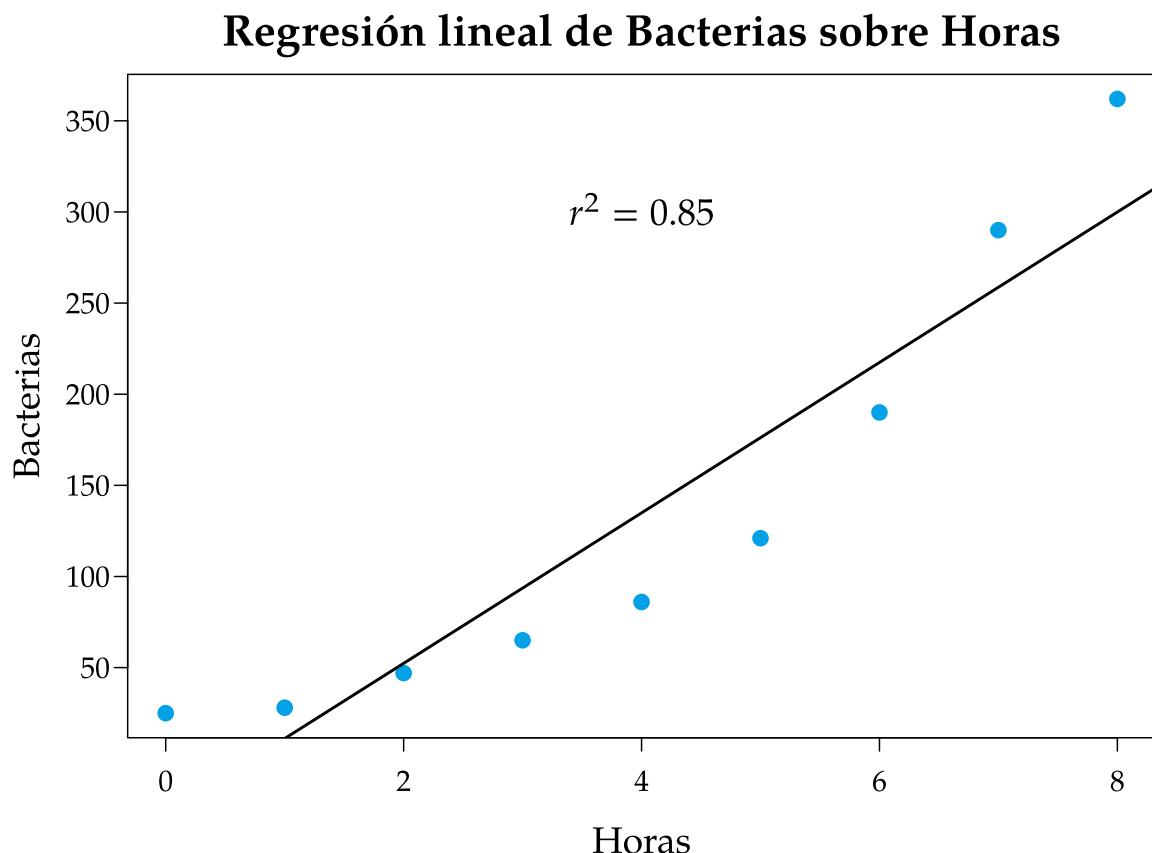


Figura 3.11: Regresión lineal de la evolución de un cultivo de bacterias.

Horas	Bacterias	$\log(\text{Bacterias})$
0	25	3.22
1	28	3.33
2	47	3.85
3	65	4.17
4	86	4.45
5	121	4.80
6	190	5.25
7	290	5.67
8	362	5.89

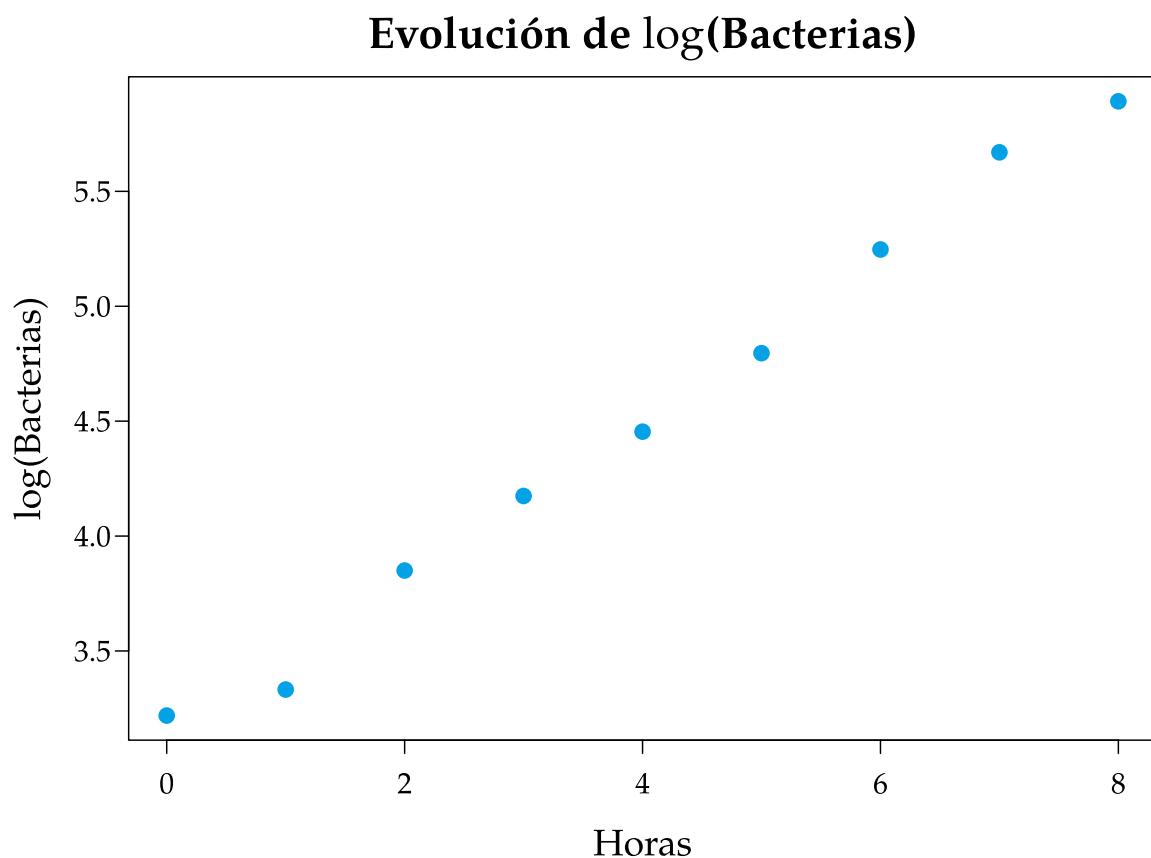


Figura 3.12: Diagrama de dispersión de la evolución del logaritmo de las bacterias de un cultivo.

Ahora sólo queda calcular la recta de regresión del logaritmo de Bacterias sobre Horas

$$\text{Log Bacterias} = 3.107 + 0.352 \text{ Horas.}$$

Y, deshaciendo el cambio de variable, se obtiene el modelo exponencial

$$\text{Bacterias} = e^{3.107+0.352 \text{ Horas}}, \text{ con } r^2 = 0.99.$$

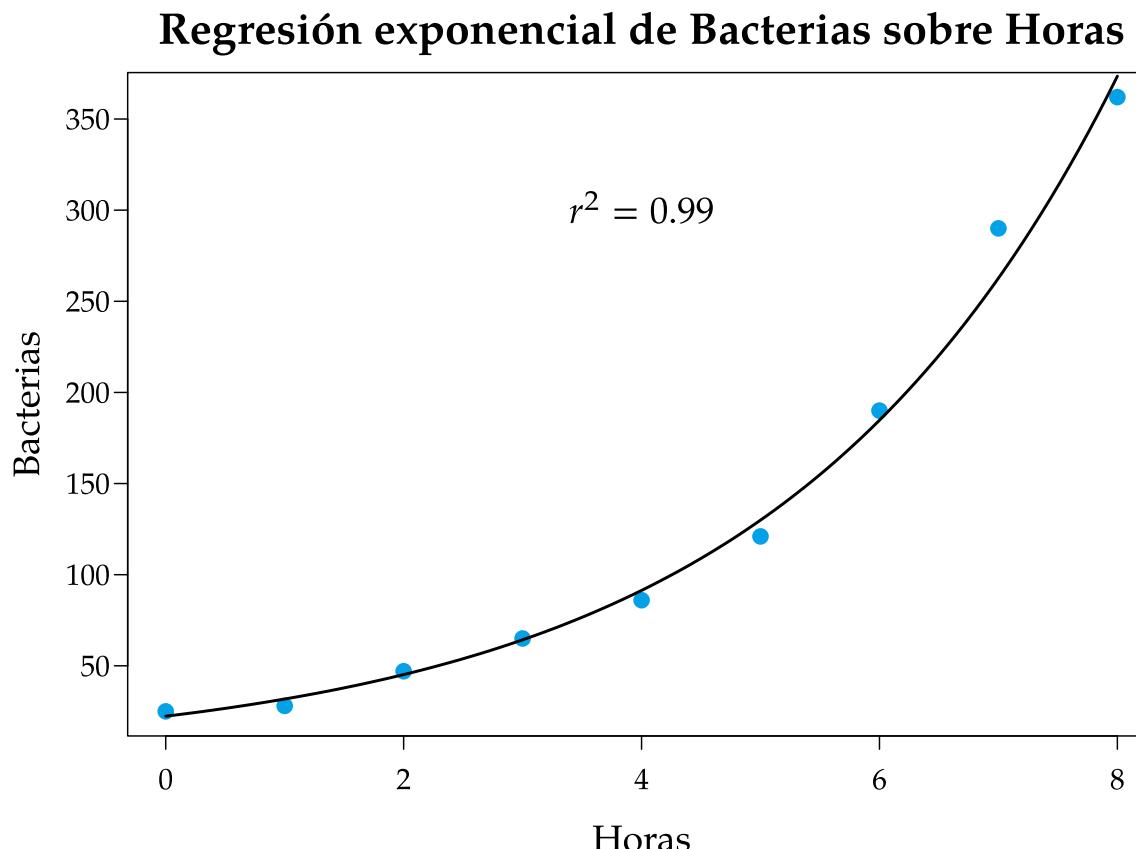


Figura 3.13: Regresión exponencial de la evolución de las bacterias de un cultivo.

Como se puede apreciar, el modelo exponencial se ajusta mucho mejor que el modelo lineal.

3.5 Riesgos de la regresión

3.5.1 La falta de ajuste no significa independencia

Es importante señalar que cada modelo de regresión tiene su propio coeficiente de determinación.

Advertencia

Así, un coeficiente de determinación cercano a cero significa que no existe relación entre las variables del tipo planteado por el modelo, pero *eso no quiere decir que las variables sean independientes*, ya que puede existir relación de otro tipo.

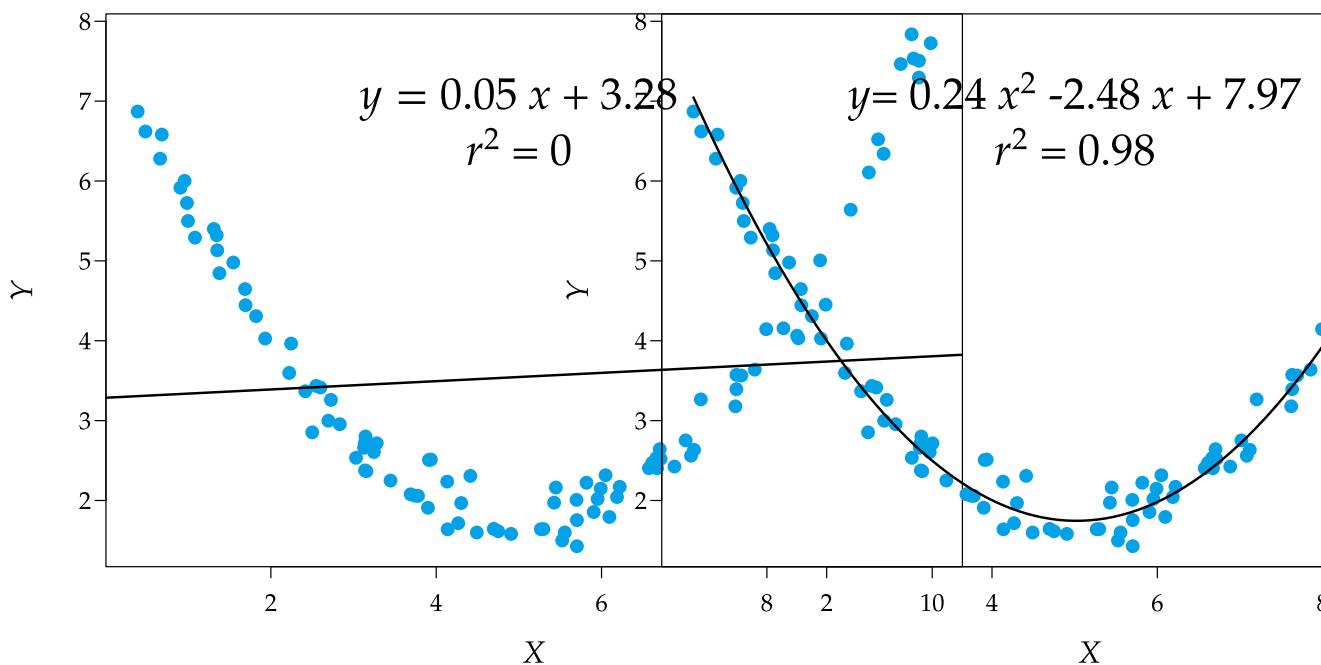


Figura 3.14: Modelo de regresión lineal en una relación cuadrática.

Figura 3.15: Modelo de regresión cuadrático en una relación cuadrática.

3.5.2 Datos atípicos en regresión

Los *datos atípicos* en un estudio de regresión son los puntos que claramente no siguen la tendencia del resto de los puntos en el diagrama de dispersión, incluso si los valores del par no se pueden considerar atípicos para cada variable por separado.

Advertencia

Los datos atípicos en regresión suelen provocar cambios drásticos en el ajuste de los modelos de regresión, y por tanto, habrá que tener mucho cuidado con ellos.

Diagrama de dispersión con datos atípicos

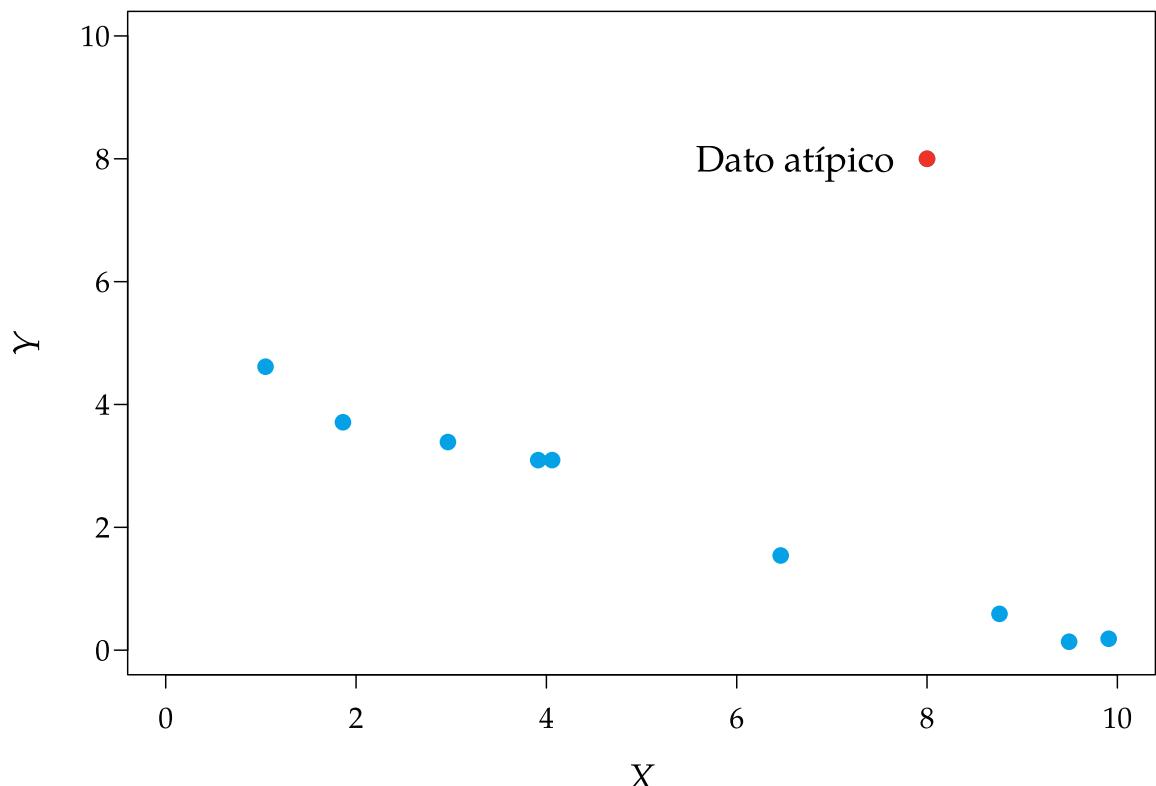


Figura 3.16: Diagrama de dispersión con un dato atípico.

Regresión lineal con datos atípicos Regresión lineal sin datos atípicos

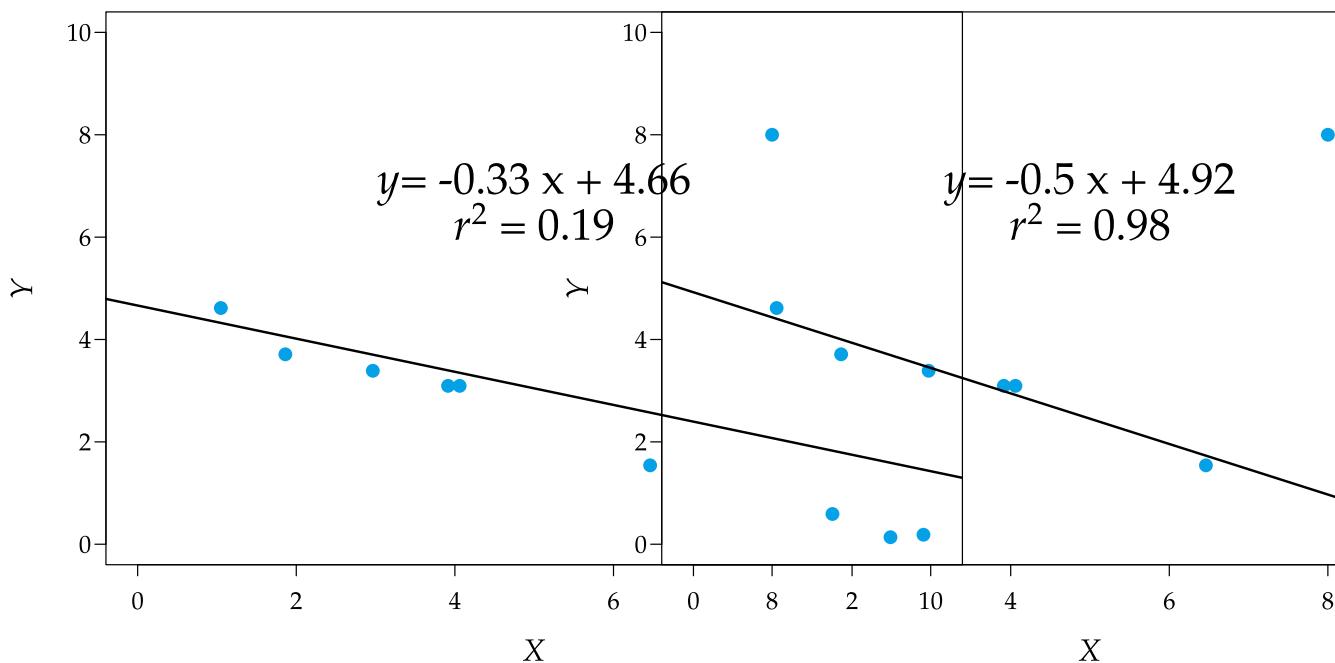


Figura 3.17: Modelo de regresión lineal con datos atípicos.
Figura 3.18: Modelo de regresión lineal sin datos atípicos.

3.5.3 La paradoja de Simpson

A veces, una tendencia desaparece o incluso se revierte cuando se divide la muestra en grupos de acuerdo a una variable cualitativa que está relacionada con la variable dependiente. Esto se conoce como la *paradoja de Simpson*.

:::{#exm-paradoja-simpson} El siguiente diagrama de dispersión muestra una relación inversa entre las horas de estudio preparando un examen y la nota del examen.

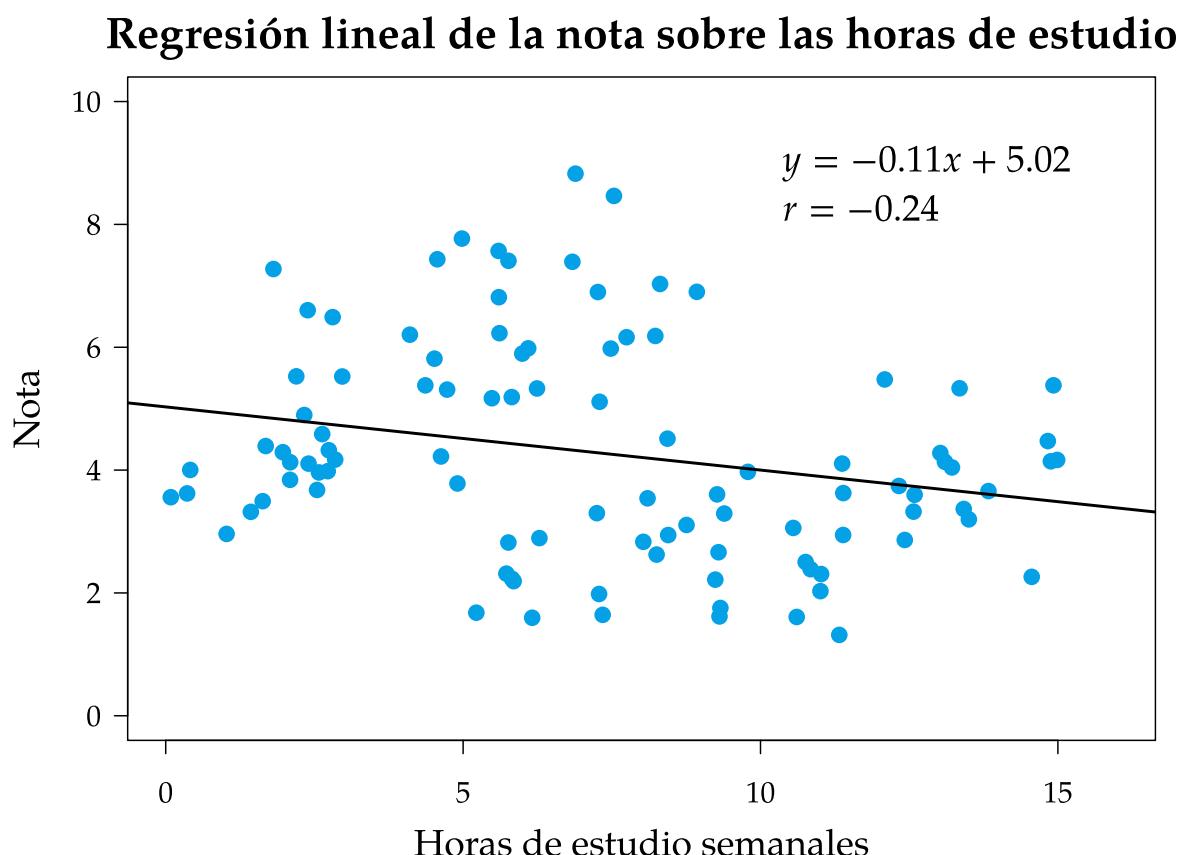


Figura 3.19: Paradoja de Simpson. Relación inversa entre las horas de estudio para un examen y la nota obtenida.

Pero si se divide la muestra en dos grupos (buenos y malos estudiantes) se obtienen diferentes tendencias y ahora la relación es directa, lo que tiene más lógica.

Regresión lineal de la nota sobre las horas de estudio

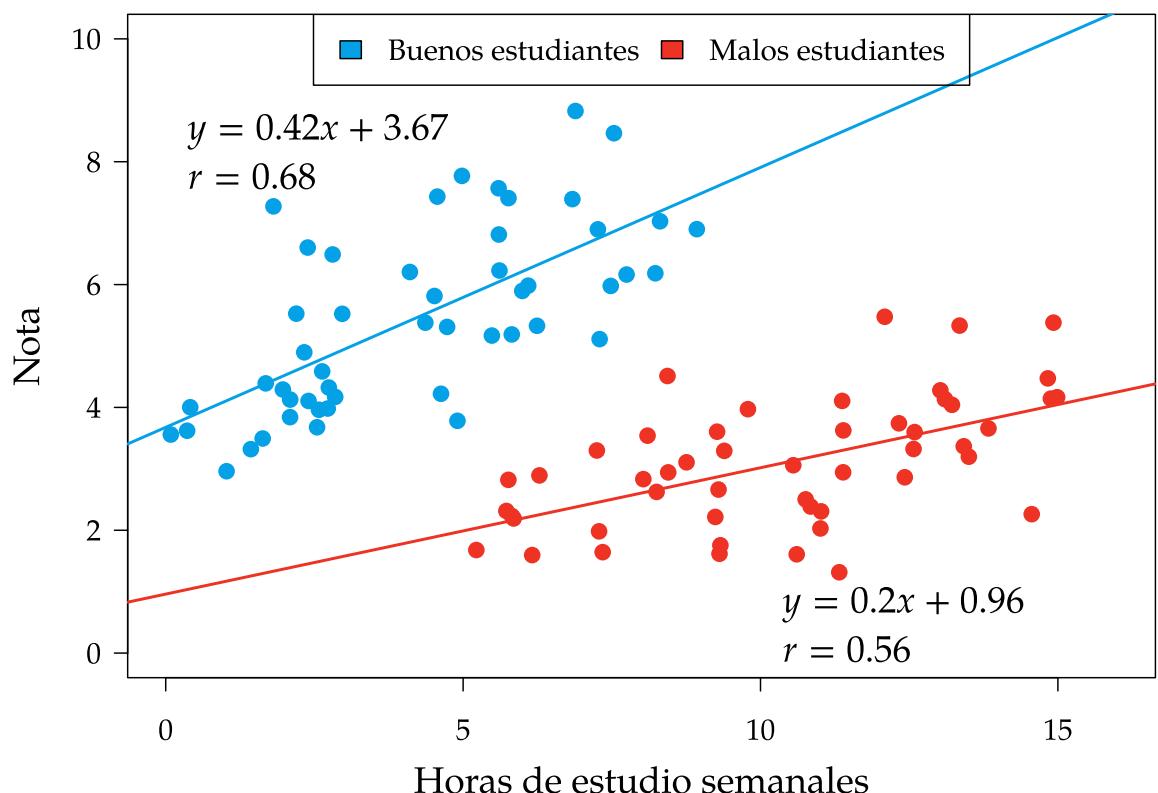


Figura 3.20: Paradoja de Simpson. Relación directa entre las horas de estudio para un examen y la nota obtenida.

4 Estimación de parámetros poblacionales

Los modelos de distribución de probabilidad vistos en el tema anterior explican el comportamiento de las variables aleatorias, pero para ello debemos saber qué modelo de distribución sigue una determinada variable. Este es el primer paso de la etapa de *Inferecia Estadística*.

Para determinar con exactitud el modelo de distribución de una variable hay que conocer la característica estudiada en todos los individuos de la población, lo cual no es posible en la mayoría de los casos (inviabilidad económica, física, temporal, etc.).

Para evitar estos inconvenientes se recurre al estudio de una muestra, a partir de la cual se trata de averiguar, de manera *aproximada*, el modelo de distribución de la variable en la población.

Estudiar un número reducido de individuos de una muestra en lugar de toda la población tiene indudables ventajas:

- Menor coste.
- Mayor rapidez.
- Mayor facilidad.

Pero también presenta algunos inconvenientes:

- Necesidad de conseguir una muestra representativa.
- Posibilidad de cometer errores (*sesgos*).

Afortunadamente, estos errores pueden ser superados: La representatividad de la muestra se consigue eligiendo la modalidad de muestreo más apropiada para el tipo de estudio; en el caso de los errores, aunque no se pueden evitar, se tratará de reducirlos al máximo y acotarlos.

4.1 Distribuciones muestrales

Los valores de una variable X en una muestra de tamaño n de una población pueden verse como el valor de una variable aleatoria n -dimensional.

Definición 4.1 (Variable aleatoria muestral). Una *variable aleatoria muestral* de una variable X estudiada en una población es una colección de n variables aleatorias X_1, \dots, X_n tales que:

- Cada una de las variables X_i sigue la misma distribución de probabilidad que la variable X en la población.
- Todas las variables X_i son mutuamente independientes.

Los valores que puede tomar esta variable n dimensional, serán todas las posibles muestras de tamaño n que pueden extraerse de la población.

Las tres características fundamentales de la variable aleatoria muestral son:

- **Homogeneidad:** Las n variables que componen la variable aleatoria muestral siguen la misma distribución.
- **Independencia:** Las variables son independientes entre sí.
- **Modelo de distribución:** El modelo de distribución que siguen las n variables.

Las dos primeras cuestiones pueden resolverse si se utiliza muestreo aleatorio simple para obtener la muestra. En cuanto a la última, hay que responder, a su vez, a dos cuestiones:

1. ¿Qué modelo de distribución se ajusta mejor a nuestro conjunto de datos? Esto se resolverá, en parte, mediante la utilización de técnicas no paramétricas.
2. Una vez seleccionado el modelo de distribución más apropiado, ¿qué estadístico del modelo nos interesa y cómo determinar su valor? De esto último se encarga la parte de la inferencia estadística conocida como **Estimación de Parámetros**.

En este tema se abordará la segunda cuestión, es decir, suponiendo que se conoce el modelo de distribución de una población, se intentará estimar los principales parámetros que la definen. Por ejemplo, los principales parámetros que definen las distribuciones vistas en el tema anterior son:

Distribución	Parámetro
Binomial	n, p
Poisson	λ
Uniforme	a, b
Normal	μ, σ
Chi-cuadrado	n
T-Student	n
F-Fisher	m, n

La distribución de probabilidad de los valores de la variable muestral depende claramente de la distribución de probabilidad de los valores de la población.

Ejemplo 4.1. Sea una población en la que la cuarta parte de las familias no tienen hijos, la mitad de las familias tiene 1 hijo, y el resto tiene 2 hijos.

Distribución Poblacional	
X	$P(x)$
0	0.25
1	0.50
2	0.25

Muestras de tamaño 2

Distribución muestral

(X_1, X_2)	$P(x_1, x_2)$
(0, 0)	0.0625
(0, 1)	0.1250
(0, 2)	0.0625
(1, 0)	0.1250
(1, 1)	0.2500
(1, 2)	0.1250
(2, 0)	0.0625
(2, 1)	0.1250
(2, 2)	0.0625

Por ser función de una variable aleatoria, un estadístico en el muestreo es también una variable aleatoria. Por tanto, su distribución de probabilidad también depende de la distribución de la población y de los parámetros que la determinan (μ, σ, p, \dots).

Ejemplo 4.2. Si se toma la media muestral \bar{X} de las muestras de tamaño 2 del ejemplo anterior, su distribución de probabilidad es

Distribución muestral	
(\bar{X}_1, \bar{X}_2)	$P(x_1, x_2)$
(0, 0)	0.0625
(0, 1)	0.1250
(0, 2)	0.0625
(1, 0)	0.1250
(1, 1)	0.2500
(1, 2)	0.1250
(2, 0)	0.0625
(2, 1)	0.1250
(2, 2)	0.0625

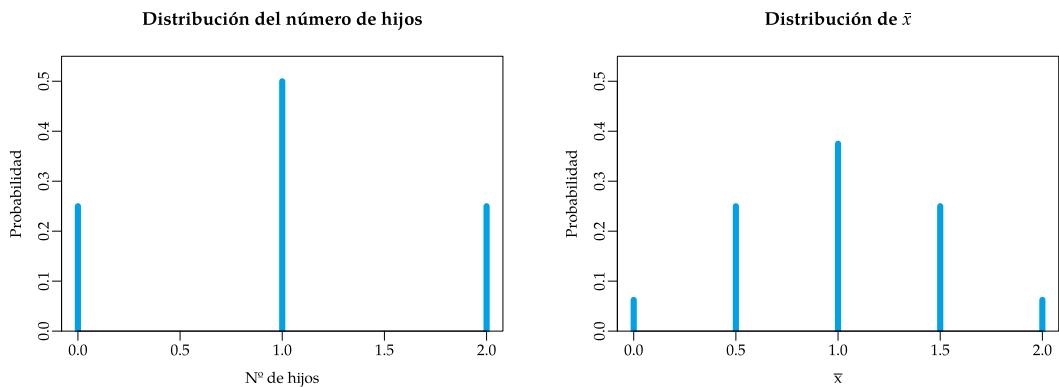
$$\bar{x} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}$$

Distribución de \bar{x}

\bar{X}	$P(x)$
0	0.0625
0.5	0.2500
1	0.3750
1.5	0.2500
2	0.0625

¿Cuál es la probabilidad de obtener una media muestral que aproxime la media poblacional con un error máximo de 0.5?

Como hemos visto, para conocer la distribución de un estadístico muestral, es necesario conocer la distribución de la población, lo cual no siempre es posible. Afortunadamente, para muestras grandes es posible aproximar la distribución de algunos estadísticos como la media, gracias al siguiente teorema:



Teorema 4.1 (Teorema central del límite). Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes ($n \geq 30$) con medias y varianzas $\mu_i = E(X_i)$, $\sigma_i^2 = Var(X_i)$, $i = 1, \dots, n$ respectivamente, entonces la variable aleatoria $X = X_1 + \dots + X_n$ sigue una distribución aproximadamente normal de media la suma de las medias y varianza la suma de las varianzas

$$X = X_1 + \dots + X_n \stackrel{n \geq 30}{\sim} N \left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \right)$$

Este teorema además es la explicación de que la mayoría de las variables biológicas presenten una distribución normal, ya que suelen ser causa de múltiples factores que suman sus efectos de manera independiente.

4.1.1 Distribución de la media muestral para muestras grandes ($n \geq 30$)

La media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n es la suma de n variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

De acuerdo a las propiedades de las transformaciones lineales, la media y la varianza de cada una de estas variables son

$$E \left(\frac{X_i}{n} \right) = \frac{\mu}{n} \quad \text{y} \quad Var \left(\frac{X_i}{n} \right) = \frac{\sigma^2}{n^2}$$

con μ y σ^2 la media y la varianza de la población de partida.

Entonces, si el tamaño de la muestra es grande ($n \geq 30$), de acuerdo al teorema central del límite, la distribución de la media muestral será normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\sum_{i=1}^n \frac{\mu}{n}, \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{n^2}}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Ejemplo 4.3 (Ejemplo para muestras grandes ($n \geq 30$)). Supóngase que se desea estimar el número medio de hijos de una población con media $\mu = 2$ hijos y desviación típica $\sigma = 1$ hijo.

¿Qué probabilidad hay de estimar μ a partir de \bar{x} con un error menor de 0.2?

De acuerdo al teorema central del límite se tiene:

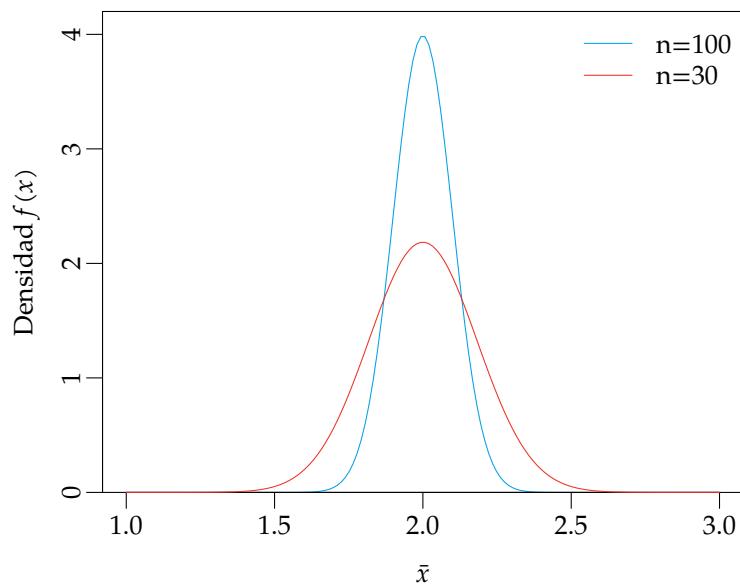
- Para $n = 30$, $\bar{x} \sim N(2, 1/\sqrt{30})$ y

$$P(1.8 < \bar{x} < 2.2) = 0.7267.$$

- Para $n = 100$, $\bar{x} \sim N(2, 1/\sqrt{100})$ y

$$P(1.8 < \bar{x} < 2.2) = 0.9545.$$

Distribuciones de la media del n° de hijos



4.1.2 Distribución de una proporción muestral para muestras grandes ($n \geq 30$)

Una proporción p poblacional puede calcularse como la media de una variable dicotómica (0,1). Esta variable se conoce como *variable de Bernouilli* $B(p)$, que es un caso particular de la binomial para $n = 1$. Por tanto, para una muestra aleatoria de tamaño n , una proporción muestral \hat{p} también puede expresarse como la suma de n variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas:

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}, \text{ con } X_i \sim B(p)$$

y con media y varianza

$$E\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{p}{n} \quad \text{y} \quad Var\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n^2}$$

Entonces, si el tamaño de la muestra es grande ($n \geq 30$), de acuerdo al teorema central del límite, la distribución de la proporción muestral también será normal:

$$\hat{p} \sim N\left(\sum_{i=1}^n \frac{p}{n}, \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{p(1-p)}{n^2}}\right) = N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right).$$

4.2 Estimadores

Los estadísticos muestrales pueden utilizarse para aproximar los parámetros de la población, y cuando un estadístico se utiliza con este fin se le llama *estimador del parámetro*.

Definición 4.2 (Estimador y estimación). Un *estimador* es una función de la variable aleatoria muestral

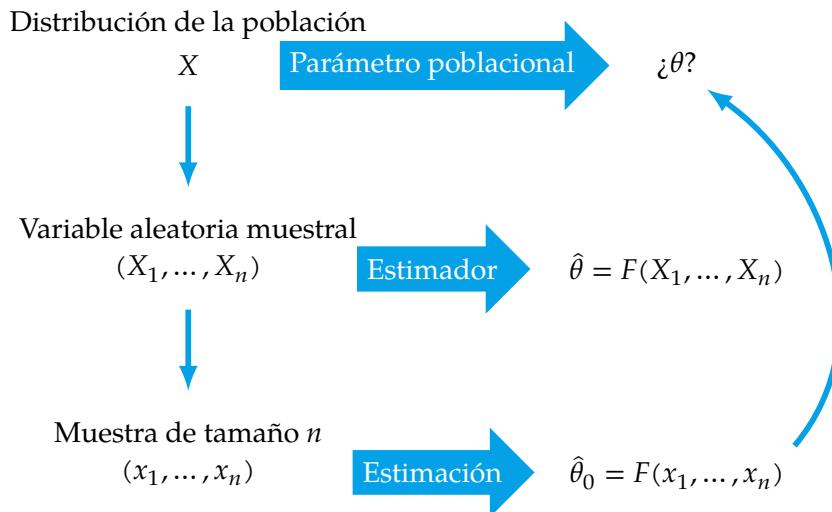
$$\hat{\theta} = F(X_1, \dots, X_n).$$

Dada una muestra concreta (x_1, \dots, x_n) , el valor del estimador aplicado a ella se conoce como *estimación*

$$\hat{\theta}_0 = F(x_1, \dots, x_n).$$

Por ser una función de la variable aleatoria muestral, un estimador es, a su vez, una variable aleatoria cuya distribución depende de la población de partida.

Mientras que el estimador es una función que es única, la estimación no es única, sino que depende de la muestra tomada.



Ejemplo 4.4. Supóngase que se quiere saber la proporción p de fumadores en una ciudad. En ese caso, la variable dicotómica que mide si una persona fuma (1) o no (0), sigue una distribución de Bernoulli $B(p)$.

Si se toma una muestra aleatoria de tamaño 5, $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, de esta población, se puede utilizar la proporción de fumadores en la muestra como estimador para la proporción de fumadores en la población:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^5 X_i}{5}$$

Este estimador es una variable que se distribuye $\hat{p} \sim \frac{1}{n}B\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

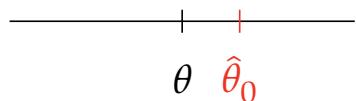
Si se toman distintas muestras, se obtienen diferentes estimaciones:

Muestra	Estimación
(1, 0, 0, 1, 1)	3/5
(1, 0, 0, 0, 0)	1/5
(0, 1, 0, 0, 1)	2/5
...	...

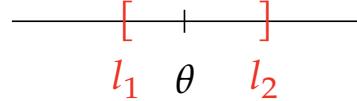
La estimación de parámetros puede realizar de dos formas:

- **Estimación puntual:** Se utiliza un único estimador que proporciona un valor o estimación aproximada del parámetro. El principal inconveniente de este tipo de estimación es que no se especifica la bondad de la estimación.
- **Estimación por intervalos:** Se utilizan dos estimadores que proporcionan los extremos de un intervalo dentro del cual se cree que está el verdadero valor del parámetro con un cierto grado de seguridad. Esta forma de estimar sí permite controlar el error cometido en la estimación.

Estimación puntual



Estimación por intervalo



4.3 Estimación puntual

La estimación puntual utiliza un único estimador para estimar el valor del parámetro desconocido de la población.

En teoría pueden utilizarse distintos estimadores para estimar un mismo parámetro. Por ejemplo, en el caso de estimar la proporción de fumadores en una ciudad, podrían haberse utilizado otros posibles estimadores además de la proporción muestral, como pueden ser:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \sqrt[5]{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5} \\ \hat{\theta}_2 &= \frac{X_1 + X_5}{2} \\ \hat{\theta}_3 &= X_1 \dots\end{aligned}$$

¿Cuál es el mejor estimador?

La respuesta a esta cuestión depende de las propiedades de cada estimador.

Aunque la estimación puntual no proporciona ninguna medida del grado de bondad de la estimación, existen varias propiedades que garantizan dicha bondad.

Las propiedades más deseables en un estimador son:

- Insesgadez
- Eficiencia
- Consistencia
- Normalidad asintótica
- Suficiencia

Definición 4.3 (Estimador insesgado). Un estimador $\hat{\theta}$ es *insesgado* para un parámetro θ si su esperanza es precisamente θ , es decir,

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Distribuciones de estimadores sesgados e insesgados

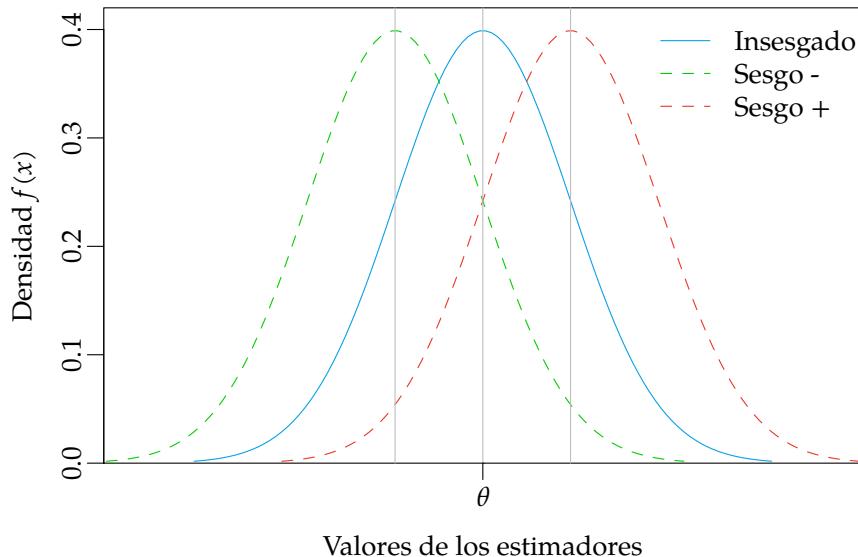


Figura 4.1: Distribución de estimadores sesgados e insesgados.

Cuando un estimador no es insesgado, a la diferencia entre su esperanza y el valor del parámetro θ se le llama *sesgo*:

$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

Cuanto menor sea el sesgo de un estimador, mejor se aproximarán sus estimaciones al verdadero valor del parámetro.

Definición 4.4 (Estimador consistente). Un estimador $\hat{\theta}_n$ para muestras de tamaño n es *consistente* para un parámetro θ si para cualquier valor $\epsilon > 0$ se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) = 1.$$

Las condiciones suficientes para que un estimador sea consistente son:

1. $\text{Sesgo}(\hat{\theta}_n) = 0$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sesgo}(\hat{\theta}_n) = 0$.

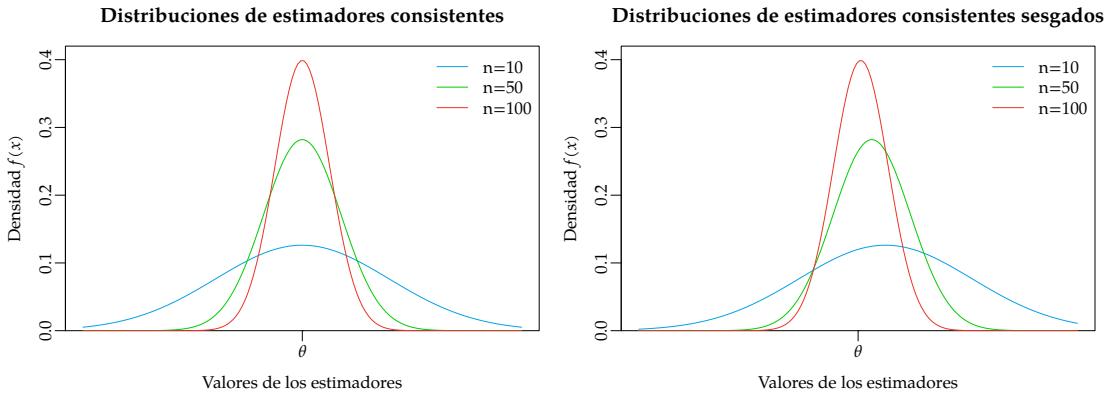


Figura 4.2: Distribución de estimadores consistentes.

Figura 4.3: Distribución de estimadores consistentes sesgados.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0.$$

Así pues, si la varianza y el sesgo disminuyen a medida que aumenta el tamaño de la muestra, el estimador será consistente.

Definición 4.5 (Estimador eficiente). Un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ es *eficiente* si tiene el menor error cuadrático medio

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{Sesgo}(\hat{\theta})^2 + \text{Var}(\hat{\theta}).$$

Definición 4.6 (Estimador asintóticamente normal). Un estimador $\hat{\theta}$ es *asintóticamente normal* si, independientemente de la distribución de la variable aleatoria muestral, su distribución es normal si el tamaño de la muestra es suficientemente grande.:::

Como veremos más adelante esta propiedad es muy interesante para hacer estimaciones de parámetros mediante intervalos.

Definición 4.7 (Estimador suficiente). Un estimador $\hat{\theta}$ es *suficiente* para un parámetro θ , si la distribución condicionada de la variable aleatoria muestral, una vez dada la estimación $\hat{\theta} = \hat{\theta}_0$, no depende de θ .

Esto significa que cuando se obtiene una estimación, cualquier otra información es irrelevante para θ .

El estimador que se suele utilizar para estimar la media poblacional es la media muestral.

Para muestras de tamaño n resulta la siguiente variable aleatoria:

Distribuciones de estimadores insesgado y eficiente sesgado

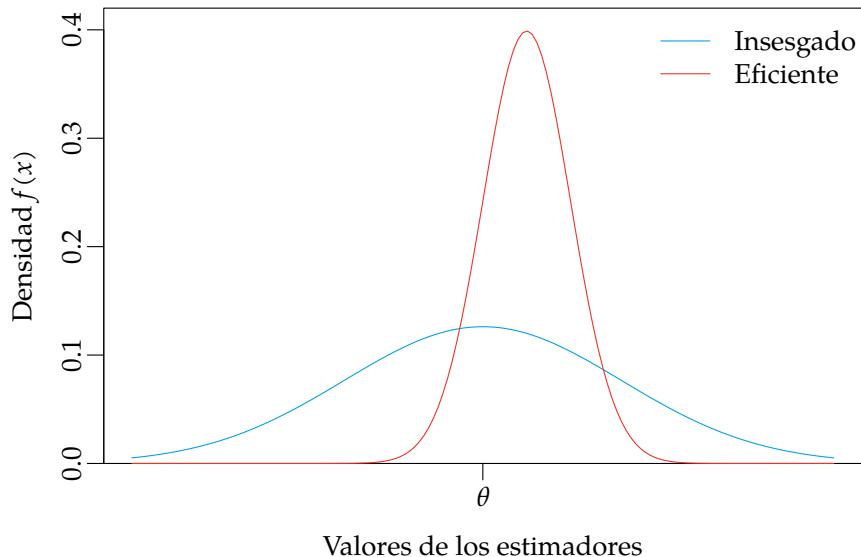


Figura 4.4: Distribución de estimadores insesgados y eficientes sesgados.

Distribuciones de estimadores asintóticamente normales

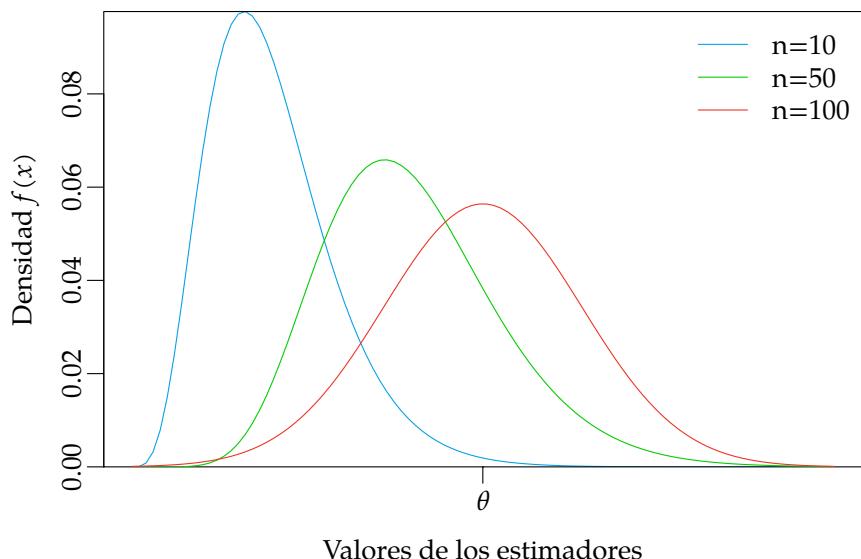


Figura 4.5: Distribución de estimadores asintóticamente normales.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Si la población de partida tiene media μ y varianza σ^2 se cumple

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{y} \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Así pues, la media muestral es un estimador insesgado, y como su varianza disminuye a medida que aumenta el tamaño muestral, también es consistente y eficiente.

Sin embargo, la varianza muestral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

es un estimador sesgado para la varianza poblacional, ya que

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

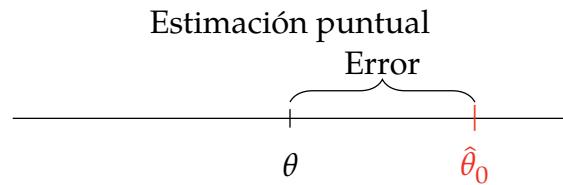
No obstante, resulta sencillo corregir este sesgo para llegar a un estimador insesgado:

Definición 4.8 (Cuasivarianza muestral). Dada una muestra de tamaño n de una variable aleatoria X , se define la *cuasivarianza muestral* como

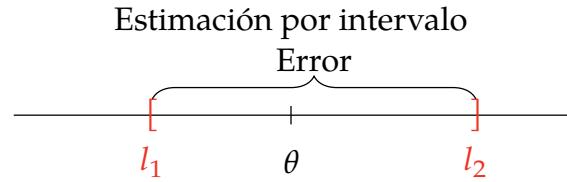
$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} S^2.$$

4.4 Estimación por intervalos

El principal problema de la estimación puntual es que, una vez seleccionada la muestra y hecha la estimación, resulta imposible saber el error cometido.



Para controlar el error de la estimación es mejor utilizar la estimación por intervalos



La estimación por intervalos trata de construir a partir de la muestra un intervalo dentro del cual se supone que se encuentra el parámetro a estimar con un cierto grado de confianza. Para ello se utilizan dos estimadores, uno para el límite inferior del intervalo y otro para el superior.

Definición 4.9 (Intervalo de confianza). Dados dos estimadores $\hat{l}_i(X_1, \dots, X_n)$ y $\hat{l}_s(X_1, \dots, X_n)$, y sus respectivas estimaciones l_1 y l_2 para una muestra concreta, se dice que el intervalo $I = [l_1, l_2]$ es un intervalo de confianza para un parámetro poblacional θ , con un nivel de confianza $1 - \alpha$ (o nivel de significación α), si se cumple

$$P(\hat{l}_i(X_1, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{l}_s(X_1, \dots, X_n)) = 1 - \alpha.$$

Un intervalo de confianza nunca garantiza con absoluta certeza que el parámetro se encuentra dentro él.

Tampoco se puede decir que la probabilidad de que el parámetro esté dentro del intervalo es $1 - \alpha$, ya que una vez calculado el intervalo, las variables aleatorias que determinan sus extremos han tomado un valor concreto y ya no tiene sentido hablar de probabilidad, es decir, o el parámetro está dentro, o está fuera, pero con absoluta certeza.

Lo que si se deduce de la definición es que el $(1 - \alpha)\%$ de los intervalos correspondientes a las todas las posibles muestras aleatorias, contendrán al parámetro. Es por eso que se habla de *confianza* y no de probabilidad.

Para que un intervalo sea útil su nivel de confianza debe ser alto:

$$1 - \alpha = 0.90 \text{ o } \alpha = 0.10$$

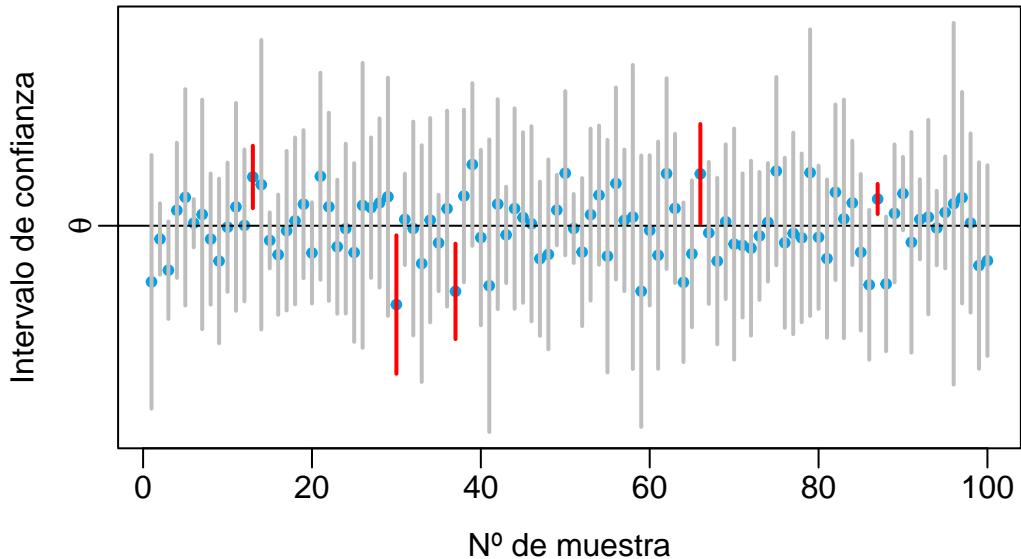
$$1 - \alpha = 0.95 \text{ o } \alpha = 0.05$$

$$1 - \alpha = 0.99 \text{ o } \alpha = 0.01$$

siendo 0.95 el nivel de confianza más habitual y 0.99 en casos críticos.

Teóricamente, de cada 100 intervalos para estimar un parámetro θ con nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$, 95 contendrían a θ y sólo 5 lo dejarían fuera.

50 intervalos de confianza del 95% para θ

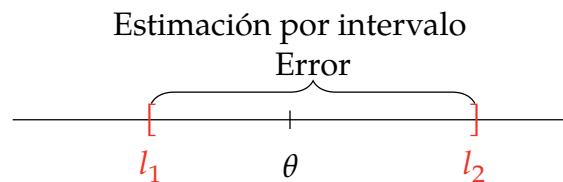


4.4.1 Error de estimación

Otro de los aspectos más importantes de un intervalo de confianza es su error.

Definición 4.10 (Error o imprecisión de un intervalo). El *error* o la *imprecisión* de un intervalo de confianza $[l_i, l_s]$ es su amplitud

$$A = l_s - l_i.$$



Para que un intervalo sea útil no debe ser demasiado impreciso.

En general, la precisión de un intervalo depende de tres factores:

- La dispersión de la población. Cuanto más dispersa sea, menos preciso será el intervalo.
- El nivel de confianza. Cuanto mayor sea el nivel de confianza, menos preciso será el intervalo.

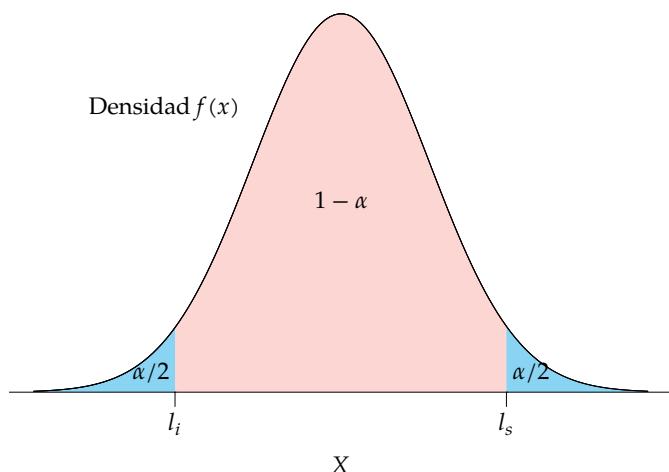
- El tamaño muestral. Cuanto mayor sea el tamaño muestral, más preciso será el intervalo.

Si la confianza y la precisión están reñidas, ¿cómo se puede ganar precisión sin perder confianza?

Habitualmente, para calcular un intervalo de confianza se suele partir de un estimador puntual del que se conoce su distribución muestral.

A partir de este estimador se calculan los extremos del intervalo sobre su distribución, buscando los valores que dejan encerrada una probabilidad $1 - \alpha$. Estos valores suelen tomarse de manera simétrica, de manera que el extremo inferior deje una probabilidad acumulada inferior $\alpha/2$ y el extremo superior deje una probabilidad acumulada superior también de $\alpha/2$.

Distribución del estimador de referencia



4.5 Intervalos de confianza para una población

A continuación se presentan los intervalos de confianza para estimar un parámetro de una población:

- Intervalo para la media de una población normal con varianza conocida.
- Intervalo para la media de una población normal con varianza desconocida.
- Intervalo para la media de una población con varianza desconocida a partir de muestras grandes.
- Intervalo para la varianza de una población normal.
- Intervalo para un proporción de una población.

4.5.1 Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- La media μ es desconocida, pero su varianza σ^2 es conocida.

Bajo estas hipótesis, la media muestral, para muestras de tamaño n , sigue también una distribución normal

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Tipificando la variable se tiene

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Sobre esta distribución resulta sencillo calcular los valores z_i y z_s de manera que

$$P(z_i \leq Z \leq z_s) = 1 - \alpha.$$

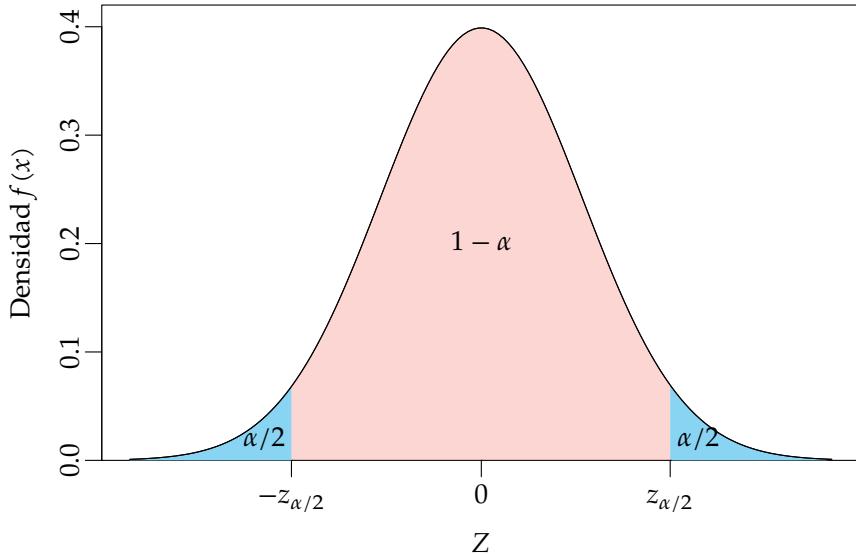
Como la distribución normal estándar es simétrica respecto al 0, lo mejor es tomar valores opuestos $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que dejen sendas colas de probabilidad acumulada $\alpha/2$.

A partir de aquí, deshaciendo la tipificación, resulta sencillo llegar a los estimadores que darán los extremos del intervalo de confianza:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = \\ &= P\left(-z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= P\left(-\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Así pues, el intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida es:

Distribución $N(0, 1)$



Teorema 4.2 (Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza conocida). Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ con σ conocida, el intervalo de confianza para la media μ con nivel de confianza $1 - \alpha$ es

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

o bien

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De la fórmula del intervalo de confianza

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se deducen varias características:

- a. El intervalo está centrado en la media muestral \bar{X} que era el mejor estimador de la media poblacional.
- b. La amplitud o imprecisión del intervalo es

$$A = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de manera que depende de:

- σ : cuanto mayor sea la varianza poblacional, mayor será la imprecisión.
- $z_{\alpha/2}$: que a su vez depende del nivel de confianza, y cuanto mayor sea $1 - \alpha$, mayor será la imprecisión.
- n : cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, menor será la imprecisión.

Por tanto, la única forma de reducir la imprecisión del intervalo, manteniendo la confianza, es aumentando el tamaño muestral.

4.5.1.1 Cálculo del tamaño muestra para estimar la media de una población normal con varianza conocida

Teniendo en cuenta que la amplitud o imprecisión del intervalo para la media de una población normal con varianza conocida es

$$A = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se puede calcular fácilmente el tamaño muestral necesario para conseguir un intervalo de amplitud A con confianza $1 - \alpha$:

$$A = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{A},$$

de donde se deduce

$$n = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma^2}{A^2}$$

Ejemplo 4.5. Sea una población de estudiantes en la que la puntuación obtenida en un examen sigue una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma = 1.5)$.

Para estimar la nota media μ , se toma una muestra de 10 estudiantes:

$$4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3$$

A partir de esta muestra, podemos calcular el intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$ (nivel de significación $\alpha = 0.05$):

- $\bar{X} = \frac{4+\dots+3}{10} = \frac{53}{10} = 5.3$ puntos.
- $z_{\alpha/2} = z_{0.025}$ es el valor de la normal estándar que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, que vale aproximadamente 1.96.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se tiene

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5.3 \pm 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{10}} = 5.3 \pm 0.93 = [4.37, 6.23].$$

Es decir, μ estaría entre 4.37 y 6.23 puntos con un 95% de confianza.

Ejemplo 4.6. La imprecisión del intervalo anterior es de ± 0.93 puntos.

Si se desea reducir esta imprecisión a ± 0.5 puntos, ¿qué tamaño muestral sería necesario?

$$n = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma^2}{A^2} = 4 \cdot 1.96^2 \frac{1.5^2}{(2 \cdot 0.5)^2} = 34.57.$$

Por tanto, se necesitaría una muestra de al menos 35 estudiantes para conseguir un intervalo del 95% de confianza y una precisión de ± 0.5 puntos.

4.5.2 Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Cuando se desconoce la varianza poblacional se suele estimar mediante la cuasivarianza \hat{S}^2 . Como consecuencia, el estimador de referencia ya no sigue una distribución normal como en el caso de conocer la varianza, sino un T de Student de $n-1$ grados de libertad:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \sim T(n-1),$$

Como la distribución T de Student, al igual que la normal, también es simétrica respecto al 0, se pueden tomar dos valores opuestos $-t_{\alpha/2}^{n-1}$ y $t_{\alpha/2}^{n-1}$ de manera que

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(-t_{\alpha/2}^{n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}^{n-1}\right) \\ &= P\left(-t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Teorema 4.3 (Intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida). *Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ con σ desconocida, el intervalo de confianza para la media μ con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right]$$

o bien

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

4.5.2.1 Calculo del tamaño muestral para estimar la media de una población normal con varianza desconocida

Al igual que antes, teniendo en cuenta que la amplitud o imprecisión del intervalo para la media de una población con varianza desconocida es

$$A = 2t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

se puede calcular fácilmente el tamaño muestral necesario para conseguir un intervalo de amplitud A con confianza $1 - \alpha$:

$$A = 2t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{A},$$

de donde se deduce

$$n = 4(t_{\alpha/2}^{n-1})^2 \frac{\hat{S}^2}{A^2}$$

El único problema, a diferencia del caso anterior en que σ era conocida, es que se necesita \hat{S} , por lo que se suele tomar una muestra pequeña previa para calcularla. Por otro lado, el valor de la T de student suele aproximarse asintóticamente por el de la normal estándar $t_{\alpha/2}^{n-1} \approx z_{\alpha/2}$.

Ejemplo 4.7. Supóngase que en el ejemplo anterior no se conoce la varianza poblacional de las puntuaciones.

Trabajando con la misma muestra de las puntuaciones de 10 estudiantes

$$4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3$$

se puede calcular el intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$ (nivel de significación $\alpha = 0.05$):

- $\bar{X} = \frac{4+...+3}{10} = \frac{53}{10} = 5.3$ puntos.
- $\hat{S}^2 = \frac{(4-5.3)^2 + \dots + (3-5.3)^2}{9} = 3.5667$ y $\hat{S} = \sqrt{3.5667} = 1.8886$ puntos.
- $t_{\alpha/2}^{n-1} = t_{0.025}^9$ es el valor de la T de Student de 9 grados de libertad, que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, que vale 2.2622.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se tiene

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = 5.3 \pm 2.2622 \frac{1.8886}{\sqrt{10}} = 5.3 \pm 1.351 = [3.949, 6.651].$$

Ejemplo 4.8. Como se puede apreciar, la imprecisión del intervalo anterior es de ± 1.8886 puntos, que es significativamente mayor que en el caso de conocer la varianza de la población. Esto es lógico pues al tener que estimar la varianza de la población, el error de la estimación se agrega al error del intervalo.

Ahora, el tamaño muestral necesario para reducir la imprecisión a ± 0.5 puntos es

$$n = 4(z_{\alpha/2})^2 \frac{\hat{S}^2}{A^2} = 4 \cdot 1.96^2 \frac{3.5667}{(2 \cdot 0.5)^2} = 54.81.$$

Por tanto, si se desconoce la varianza de la población se necesita una muestra de al menos 55 estudiantes para conseguir un intervalo del 95% de confianza y una precisión de ± 0.5 puntos.

4.5.3 Intervalo de confianza para la media de una población no normal

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución no es normal.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Si la población no es normal las distribuciones de los estimadores de referencia cambian, de manera que los intervalos anteriores no son válidos.

No obstante, si la muestra es grande ($n \geq 30$), de acuerdo al teorema central del límite, la distribución de la media muestral se aproximarán a una normal, de modo que sigue siendo cierto

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En consecuencia, sigue siendo válido el intervalo anterior.

Teorema 4.4 (Intervalo de confianza para la media de una población no normal con muestras grandes). *Si X es una variable con distribución no normal y $n \geq 30$, el intervalo de confianza para la media μ con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

4.5.4 Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

1. Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
2. Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Para estimar la varianza de una población normal, se parte del estimador de referencia

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

que sigue una distribución chi-cuadrado de $n-1$ grados de libertad.

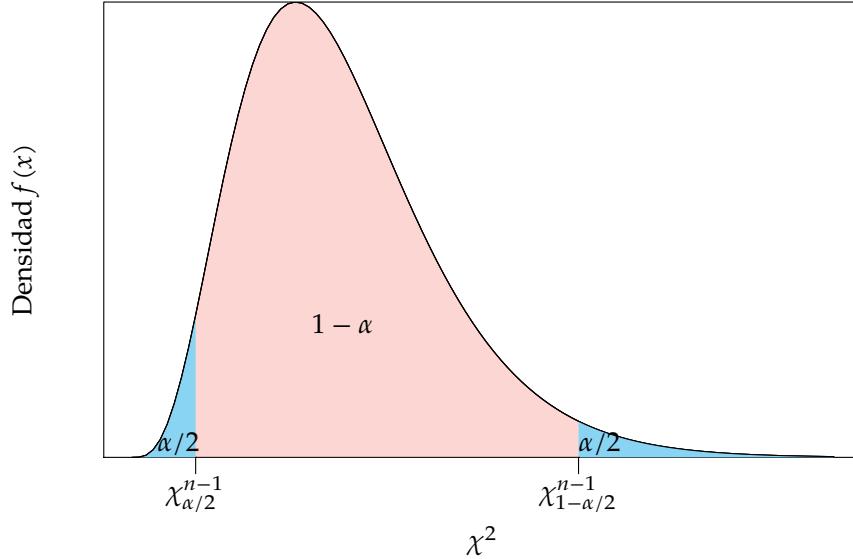
Sobre esta distribución hay que calcular los valores χ_i y χ_s tales que

$$P(\chi_i \leq \chi^2(n-1) \leq \chi_s) = 1 - \alpha.$$

Como la distribución chi-cuadrado no es simétrica respecto al 0, se toman dos valores $\chi_{\alpha/2}^{n-1}$ y $\chi_{1-\alpha/2}^{n-1}$ que dejen sendas colas de probabilidad acumulada inferior de $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$ respectivamente.

Así pues, se tiene

Distribución $\chi^2(n - 1)$



$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(\chi_{\alpha/2}^{n-1} \leq \frac{nS^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^{n-1}\right) = P\left(\frac{1}{\chi_{\alpha/2}^{n-1}} \geq \frac{\sigma^2}{nS^2} \geq \frac{1}{\chi_{1-\alpha/2}^{n-1}}\right) = \\ &= P\left(\frac{1}{\chi_{1-\alpha/2}^{n-1}} \leq \frac{\sigma^2}{nS^2} \leq \frac{1}{\chi_{\alpha/2}^{n-1}}\right) = P\left(\frac{nS^2}{\chi_{1-\alpha/2}^{n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{\chi_{\alpha/2}^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo de confianza para la varianza de una población normal es:

Teorema 4.5 (Intervalo de confianza para la varianza de una población normal). *Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ con σ conocida, el intervalo de confianza para la varianza σ^2 con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\left[\frac{nS^2}{\chi_{1-\alpha/2}^{n-1}}, \frac{nS^2}{\chi_{\alpha/2}^{n-1}} \right]$$

Ejemplo 4.9. Siguiendo con el ejemplo de las puntuaciones en un examen, si se quiere estimar la varianza a partir de la muestra:

$$4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3$$

para el intervalo de confianza para σ^2 con un nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$ (nivel de significación $\alpha = 0.05$) se tiene:

- $S^2 = \frac{(4-5.3)^2 + \dots + (3-5.3)^2}{10} = 3.21$ puntos².
- $\chi_{\alpha/2}^{n-1} = \chi_{0.025}^9$ es el valor de la chi-cuadrado de 9 grados de libertad, que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.025, y vale 2.7.
- $\chi_{1-\alpha/2}^{n-1} = \chi_{0.975}^9$ es el valor de la chi-cuadrado de 9 grados de libertad, que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.975, y vale 19.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se llega a

$$\left[\frac{nS^2}{\chi_{1-\alpha/2}^{n-1}}, \frac{nS^2}{\chi_{\alpha/2}^{n-1}} \right] = \left[\frac{10 \cdot 3.21}{19}, \frac{10 \cdot 3.21}{2.7} \right] = [1.69, 11.89] \text{ puntos}^2.$$

4.5.5 Intervalo de confianza para una proporción

Para estimar la proporción p de individuos de una población que presentan una determinada característica, se parte de la variable que mide el número de individuos que la presentan en una muestra de tamaño n . Dicha variable sigue una distribución binomial

$$X \sim B(n, p)$$

Como ya se vio, si el tamaño muestral es suficientemente grande (en realidad basta que se cumpla $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$), el teorema central de límite asegura que X tendrá una distribución aproximadamente normal

$$X \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

En consecuencia, la proporción muestral \hat{p} también será normal

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N \left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right),$$

que es el estimador de referencia.

Trabajando con la distribución del estimador de referencia

$$\hat{p} \sim N \left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

tras tipificar, se pueden encontrar fácilmente, al igual que hicimos antes, valores $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que cumplan

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Así pues, deshaciendo la tipificación y razonando como antes, se tiene

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq z_{\alpha/2}\right) \\ &= P\left(-z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n} \leq \hat{p} - p \leq z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right) \\ &= P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo de confianza para una proporción es

Teorema 4.6 (Intervalo de confianza para una proporción). *Si $X \sim B(n, p)$, y se cumple que $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$, entonces el intervalo de confianza para la proporción p con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

o bien

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

4.5.5.1 Cálculo del tamaño muestra para estimar una proporción

La amplitud o imprecisión del intervalo para la proporción de una población es

$$A = 2z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

así que se puede calcular fácilmente el tamaño muestral necesario para conseguir un intervalo de amplitud A con confianza $1 - \alpha$:

$$A = 2z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Leftrightarrow A^2 = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n},$$

de donde se deduce

$$n = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{A^2}$$

Para poder hacer el cálculo se necesita una estimación de la proporción \hat{p} , por lo que suele tomarse una muestra previa pequeña para calcularla. En el peor de los casos, si no se dispone de una muestra previa, puede tomarse $\hat{p} = 0.5$.

Ejemplo 4.10. Supóngase que se quiere estimar la proporción de fumadores que hay en una determinada población. Para ello se toma una muestra de 20 personas y se observa si fuman (1) o no (0):

0 – 1 – 1 – 0 – 0 – 0 – 1 – 0 – 0 – 1 – 1 – 0 – 1 – 1 – 0 – 0

Entonces:

- $\hat{p} = \frac{8}{20} = 0.4$, por tanto, se cumple $np = 20 \cdot 0.4 = 8 \geq 5$ y $n(1 - p) = 20 \cdot 0.6 = 12 \geq 5$.
- $z_{\alpha/2} = z_{0.025}$ es el valor de la normal estándar que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, que vale aproximadamente 1.96.

Sustituyendo estos valores en la fórmula del intervalo, se tiene

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = 0.4 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{10}} = 0.4 \pm 0.3 = [0.1, 0.7].$$

Es decir, p estaría entre 0.1 y 0.7 con un 95% de confianza.

Ejemplo 4.11. Como se puede apreciar la imprecisión del intervalo anterior es ± 0.3 , que es enorme teniendo en cuenta que se trata de un intervalo para una proporción.

Para conseguir intervalos precisos para estimar proporciones se necesitan tamaños muestrales bastante grandes. Si por ejemplo se quiere una precisión de ± 0.05 , el tamaño muestral necesario sería:

$$n = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{A^2} = 4 \cdot 1.96^2 \frac{0.4 \cdot 0.6}{(2 \cdot 0.05)^2} = 368.79.$$

Es decir, se necesitarían al menos 369 individuos para conseguir un intervalo para la proporción con una confianza del 95%.

4.6 Intervalos de confianza para la comparación dos poblaciones

En muchos estudios el objetivo en sí no es averiguar el valor de un parámetro, sino compararlo con el de otra población. Por ejemplo, comparar si un determinado parámetro vale lo mismo en la población de hombres y en la de mujeres.

En estos casos no interesa realmente estimar los dos parámetros por separado, sino hacer una estimación que permita su comparación.

Se verán tres casos:

- **Comparación de medias:** Se estima la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$.
- **Comparación de varianzas:** Se estima la razón de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.
- **Comparación de proporciones:** Se estima la diferencia de proporciones $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

A continuación se presentan los siguientes intervalos de confianza para la comparación de dos poblaciones:

- Intervalo para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas.
- Intervalo para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas pero iguales.
- Intervalo para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas y diferentes.
- Intervalo para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales.
- Intervalo para la diferencia de proporciones de dos poblaciones.

4.6.1 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de poblaciones normales con varianzas conocidas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

1. Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
2. Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas, pero sus varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas.

Bajo estas hipótesis, si se toman dos muestras independientes, una de cada población, de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, la diferencia de las medias muestrales sigue una distribución normal

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{n_1}}\right) \\ \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{n_2}}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

A partir de aquí, tipificando, se pueden buscar los valores de la normal estándar $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que cumplen:

$$P \left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha.$$

Y deshaciendo la tipificación, se tiene

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P \left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2} \right) \\ &= P \left(-z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) \\ &= P \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) \end{aligned}$$

Así pues, el intervalo de confianza para la diferencia de medias es

Teorema 4.7 (Intervalo de confianza para la diferencia de medias de poblaciones normales con varianzas conocidas). *Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, con σ_1 y σ_2 conocidas, el intervalo de confianza para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

o bien

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

4.6.2 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

- Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas y sus varianzas también, pero son iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Cuando se desconoce la varianza poblacional se puede estimar a partir de las muestras de tamaños n_1 y n_2 de ambas poblaciones mediante la *cuasivarianza ponderada*:

$$\hat{S}_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

El estimador de referencia en este caso sigue una distribución T de Student:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\right) \\ \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} \sim T(n_1 + n_2 - 2).$$

A partir de aquí, se pueden buscar los valores de la T de Student $-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$ y $t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$ que cumplen

$$P\left(-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} \leq t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}\right) = 1 - \alpha.$$

Y deshaciendo la transformación se tiene

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} \leq t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}\right) \\ &= P\left(-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}} \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\right) \\ &= P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\right). \end{aligned}$$

Así pues, el intervalo de confianza para la diferencia de medias es

Teorema 4.8 (Intervalo de confianza para la diferencia de medias de poblaciones normales con varianzas desconocidas iguales). *Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, con $\sigma_1 = \sigma_2$ desconocidas, el intervalo de confianza para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}} \right]$$

o bien

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$$

Si $[l_i, l_s]$ es un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$, entonces

$$\mu_1 - \mu_2 \in [l_i, l_s]$$

con una confianza del $1 - \alpha\%$.

Por consiguiente, según los valores del intervalo de confianza se tiene:

- Si todos los valores del intervalo son negativos ($l_s < 0$), entonces se puede concluir que $\mu_1 - \mu_2 < 0$ y por tanto $\mu_1 < \mu_2$.
- Si todos los valores del intervalo son positivos ($l_i > 0$), entonces se puede concluir que $\mu_1 - \mu_2 > 0$ y por tanto $\mu_1 > \mu_2$.
- Si el intervalo tiene tanto valores positivos como negativos, y por tanto contiene al 0 ($0 \in [l_i, l_s]$), entonces no se puede afirmar que una media sea mayor que la otra. En este caso se suele asumir la hipótesis de que las medias son iguales $\mu_1 = \mu_2$.

Tanto en el primer como en el segundo caso se dice que entre las medias hay diferencias *estadísticamente significativas*.

Ejemplo 4.12. Supóngase que se quiere comparar el rendimiento académico de dos grupos de alumnos, uno con 10 alumnos y otro con 12, que han seguido metodologías diferentes. Para ello se les realiza un examen y se obtienen las siguientes puntuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 : & 4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3 \\ X_2 : & 8 - 9 - 5 - 3 - 8 - 7 - 8 - 6 - 8 - 7 - 5 - 7 \end{aligned}$$

Si se supone que ambas variables tienen la misma varianza, se tiene

- $\bar{X}_1 = \frac{4+...+3}{10} = 5.3$ y $\bar{X}_2 = \frac{8+...+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $S_1^2 = \frac{4^2+...+3^2}{10} - 5.3^2 = 3.21$ y $S_2^2 = \frac{8^2+...+7^2}{12} - 6.75^2 = 2.6875$ puntos².
- $\hat{S}_p^2 = \frac{10 \cdot 3.21 + 12 \cdot 2.6875}{10+12-2} = 3.2175$ puntos², y $\hat{S}_p = 1.7937$.

- $t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} = t_{0.025}^{20}$ es el valor de la T de Student de 20 grados de libertad que deja una probabilidad acumulada superior de 0.025, y que vale aproximadamente 2.09.

Y sustituyendo en la fórmula del intervalo llegamos a

$$5.3 - 6.75 \pm 2.086 \cdot 1.7937 \sqrt{\frac{10 + 12}{10 \cdot 12}} = -1.45 \pm 1.6021 = [-3.0521, 0.1521] \text{ puntos.}$$

Es decir, la diferencia de puntuaciones medias $\mu_1 - \mu_2$ está entre -3.0521 y 0.1521 puntos con una confianza del 95%.

A la vista del intervalo se puede concluir que, puesto que el intervalo contiene tanto valores positivos como negativos, y por tanto contiene al 0, no puede afirmarse que una de las medias sea mayor que la otra, de modo que se supone que son iguales y no se puede decir que haya diferencias significativas entre los grupos.

4.6.3 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas y distintas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2, σ_2^2 , son desconocidas, pero $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

En este caso el estimador de referencia sigue una distribución T de Student

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} \sim T(g),$$

donde el número de grados de libertad es $g = n_1 + n_2 - 2 - \Delta$, siendo

$$\Delta = \frac{\left(\frac{n_2-1}{n_1} \hat{S}_1^2 - \frac{n_1-1}{n_2} \hat{S}_2^2 \right)^2}{\frac{n_2-1}{n_1^2} \hat{S}_1^4 + \frac{n_1-1}{n_2^2} \hat{S}_2^4}.$$

A partir de aquí, una vez más, se pueden buscar los valores de la T de Student $-t_{\alpha/2}^g$ y $t_{\alpha/2}^g$ que cumplen

$$P \left(-t_{\alpha/2}^g \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} \leq t_{\alpha/2}^g \right) = 1 - \alpha.$$

Y deshaciendo la transformación se llega a

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= P \left(-t_{\alpha/2}^g \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}}}} \leq t_{\alpha/2}^g \right) \\
&= P \left(-t_{\alpha/2}^g \sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}} \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq t_{\alpha/2}^g \sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}} \right) \\
&= P \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2}^g \sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\alpha/2}^g \sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}} \right)
\end{aligned}$$

Así pues, el intervalo de confianza para la diferencia de medias es

Teorema 4.9 (Intervalo de confianza para la diferencia de medias de poblaciones normales con varianzas desconocidas distintas). *Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, con $\sigma_1 \neq \sigma_2$ desconocidas, el intervalo de confianza para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2}^g \sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\alpha/2}^g \sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}} \right]$$

o bien

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2}^g \sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}}$$

Como se acaba de ver, existen dos intervalos posibles para estimar la diferencia de medias: uno para cuando las varianzas poblacionales son iguales y otro para cuando no lo son.

Ahora bien, si las varianzas poblacionales son desconocidas,

¿cómo saber qué intervalo utilizar?

La respuesta está en el próximo intervalo que se verá, que permite estimar la razón de varianzas $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ y por tanto, su comparación.

Así pues, antes de calcular el intervalo de confianza para la comparación de medias, cuando las varianzas poblacionales sean desconocidas, es necesario calcular el intervalo de confianza para la razón de varianzas y elegir el intervalo para la comparación de medias en función del valor de dicho intervalo.

4.6.4 Intervalo de confianza para el cociente de varianzas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes hipótesis:

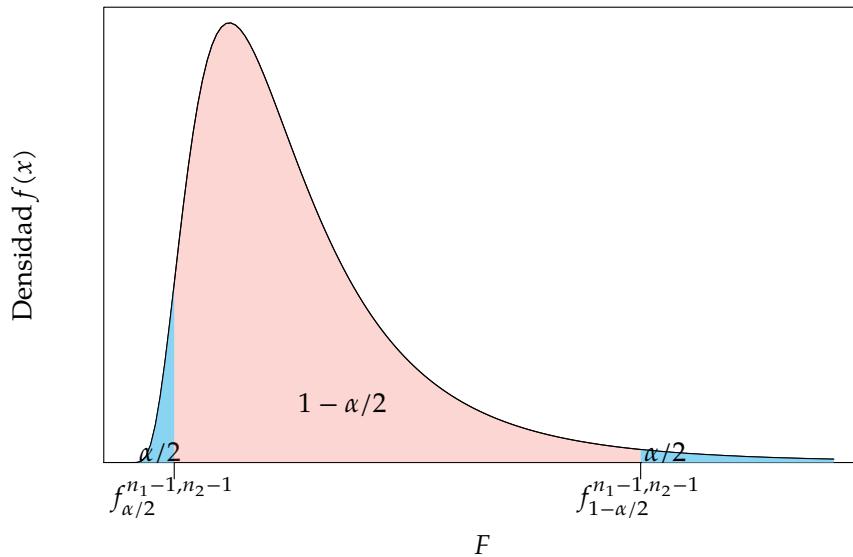
- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1 , μ_2 y varianzas σ_1^2 , σ_2^2 son desconocidas.

En este caso, para muestras de ambas poblaciones de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, el estimador de referencia sigue una distribución F de Fisher-Snedecor:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1) \\ \frac{(n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{(n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}}{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \frac{\hat{S}_2^2}{\hat{S}_1^2} \sim F(n_2 - 1, n_1 - 1).$$

Como la distribución F de Fisher-Snedecor no es simétrica respecto al 0, se toman dos valores $f_{\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1}$ y $f_{1-\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1}$ que dejen sendas colas de probabilidad acumulada inferior de $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ respectivamente.

Distribución $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$



Así pues, se tiene

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P \left(f_{\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \frac{\hat{S}_2^2}{\hat{S}_1^2} \leq f_{1-\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} \right) = \\ &= P \left(f_{\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq f_{1-\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo de confianza para la comparación de varianzas de dos poblaciones normales es

Teorema 4.10 (Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de poblaciones normales). *Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, el intervalo de confianza para el cociente de varianzas σ_1^2/σ_2^2 con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\left[f_{\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}, f_{1-\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \right]$$

Si $[l_i, l_s]$ es un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para la razón de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, entonces

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in [l_i, l_s]$$

con una confianza del $1 - \alpha\%$.

Por consiguiente, según los valores del intervalo de confianza se tiene:

- Si todos los valores del intervalo son menores que 1 ($l_s < 1$), entonces se puede concluir que $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ y por tanto $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.
- Si todos los valores del intervalo son mayores que 1 ($l_i > 1$), entonces se puede concluir que $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ y por tanto $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.
- Si el intervalo tiene tanto valores mayores como menores que 1, y por tanto contiene al 1 ($1 \in [l_i, l_s]$), entonces no se puede afirmar que una varianza sea mayor que la otra. En este caso se suele asumir la hipótesis de que las varianzas son iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Ejemplo 4.13. Siguiendo con el ejemplo de las puntuaciones en dos grupos:

$$\begin{aligned} X_1 &: 4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3 \\ X_2 &: 8 - 9 - 5 - 3 - 8 - 7 - 8 - 6 - 8 - 7 - 5 - 7 \end{aligned}$$

Para calcular el intervalo de confianza para la razón de varianzas con una confianza del 95%, se tiene:

- $\bar{X}_1 = \frac{4+...+3}{10} = 5.3$ puntos y $\bar{X}_2 = \frac{8+...+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $\hat{S}_1^2 = \frac{(4-5.3)^2 + \dots + (3-5.3)^2}{9} = 3.5667$ puntos² y $\hat{S}_2^2 = \frac{(8-6.75)^2 + \dots + (7-6.75)^2}{11} = 2.9318$ puntos².
- $f_{\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} = f_{0.025}^{11,9}$ es el valor de la F de Fisher de 11 y 9 grados de libertad que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.025, y que vale aproximadamente 0.2787.
- $f_{1-\alpha/2}^{n_2-1, n_1-1} = f_{0.975}^{11,9}$ es el valor de la F de Fisher de 11 y 9 grados de libertad que deja una probabilidad acumulada inferior de 0.975, y que vale aproximadamente 3.9121.

Sustituyendo en la fórmula del intervalo se llega a

$$\left[0.2787 \frac{3.5667}{2.9318}, 3.9121 \frac{3.5667}{2.9318} \right] = [0.3391, 4.7591] \text{ puntos}^2.$$

Es decir, la razón de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ está entre 0.3391 y 4.7591 con una confianza del 95%.

Como el intervalo tiene tanto valores menores como mayores que 1, no se puede concluir que una varianza sea mayor que la otra, y por tanto se mantiene la hipótesis de que ambas varianzas son iguales.

Si ahora se quisiesen comparar las medias de ambas poblaciones, el intervalo de confianza para la diferencia de medias que habría que tomar es el que parte de la hipótesis de igualdad de varianzas, que precisamente es el que se ha utilizado antes.

4.6.5 Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones

Para comparar las proporciones p_1 y p_2 de individuos que presentan una determinada característica en dos poblaciones independientes, se estima su diferencia $p_1 - p_2$.

Si se toma una muestra de cada población, de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, las variables que miden el número de individuos que presentan la característica en cada una de ellas siguen distribuciones

$$X_1 \sim B(n_1, p_1) \quad \text{y} \quad X_2 \sim B(n_2, p_2)$$

Cuando los tamaños muestrales son grandes (en realidad basta que se cumpla $n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 p_2 \geq 5$ y $n_2(1-p_2) \geq 5$), el teorema central de límite asegura que X_1 y X_2 tendrán distribuciones normales

$$X_1 \sim N(n_1 p_1, \sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1)}) \quad \text{y} \quad X_2 \sim N(n_2 p_2, \sqrt{n_2 p_2 (1 - p_2)}),$$

y las proporciones muestrales

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \sim N\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}\right) \quad \text{y} \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} \sim N\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)$$

A partir de las proporciones muestrales se construye el estimador de referencia

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right).$$

Tipificando, se buscan valores $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ que cumplan

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Y deshaciendo la tipificación, se llega a

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \\ &= P\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \leq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2) \leq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right) \\ &= P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + p_1 - p_2 \leq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right) \end{aligned}$$

Así pues, el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones es

Teorema 4.11 (Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones). *Si $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ y $X_2 \sim B(n_2, p_2)$, con $n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 p_2 \geq 5$ y $n_2(1-p_2) \geq 5$, el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones $p_1 - p_2$ con nivel de confianza $1 - \alpha$ es*

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Ejemplo 4.14. Supóngase que se quieren comparar las proporciones o porcentajes de aprobados en dos grupos que han seguido metodologías distintas. En el primer grupo han aprobado 24 alumnos de un total de 40, mientras que en el segundo han aprobado 48 de 60.

Para calcular el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones con un nivel de confianza del 95%, se tiene:

- $\hat{p}_1 = 24/40 = 0.6$ y $\hat{p}_2 = 48/60 = 0.8$, de manera que se cumplen las hipótesis $n_1\hat{p}_1 = 40 \cdot 0.6 = 24 \geq 5$, $n_1(1-\hat{p}_1) = 40(1-0.6) = 26 \geq 5$, $n_2\hat{p}_2 = 60 \cdot 0.8 = 48 \geq 5$ y $n_2(1-\hat{p}_2) = 60(1-0.8) = 12 \geq 5$.
- $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

Sustituyendo en la fórmula del intervalo se tiene

$$0.6 - 0.8 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{40} + \frac{0.8(1-0.8)}{60}} = -0.2 \pm 0.17 = [-0.37, -0.03].$$

Como el intervalo es negativo se tiene $p_1 - p_2 < 0 \Rightarrow p_1 < p_2$, y se puede concluir que hay diferencias significativas en el porcentaje de aprobados.

5 Contrastes de hipótesis paramétricos

5.1 Hipótesis estadística y tipos de contrastes

En muchos estudios estadísticos, el objetivo, más que estimar el valor de un parámetro desconocido en la población, es comprobar la veracidad de una hipótesis formulada sobre la población objeto de estudio.

El investigador, de acuerdo a su experiencia o a estudios previos, suele tener conjeturas sobre la población estudiada que expresa en forma de hipótesis.

Definición 5.1 (Hipótesis estadística). Una *hipótesis estadística* es cualquier afirmación o conjetura que determina, total o parcialmente, la distribución de una o varias variables de la población.

Ejemplo 5.1. Para contrastar el rendimiento académico de un grupo de alumnos en una determinada asignatura, podríamos plantear la hipótesis de si el porcentaje de aprobados es mayor del 50%.

5.1.1 Contraste de hipótesis

En general nunca se sabrá con absoluta certeza si una hipótesis estadística es cierta o falsa, ya que para ello habría que estudiar a todos los individuos de la población.

Para comprobar la veracidad o falsedad de estas hipótesis hay que contrastarlas con los resultados empíricos obtenidos de las muestras. Si los resultados observados en las muestras coinciden, dentro del margen de error admisible debido al azar, con lo que cabría esperar en caso de que la hipótesis fuese cierta, la hipótesis se aceptará como verdadera, mientras que en caso contrario se rechazará como falsa y se buscarán nuevas hipótesis capaces de explicar los datos observados.

Como las muestras se obtienen aleatoriamente, *la decisión de aceptar o rechazar una hipótesis estadística se tomará sobre una base de probabilidad*.

La metodología que se encarga de contrastar la veracidad de las hipótesis estadísticas se conoce como *contraste de hipótesis*.

5.1.2 Tipos de contrastes de hipótesis

- **Contrastes de bondad de ajuste:** El objetivo es comprobar una hipótesis sobre la forma de la distribución de la población.
Por ejemplo, contrastar si las notas de un grupo de alumnos siguen una distribución normal.
- **Contrastes de conformidad:** El objetivo es comprobar una hipótesis sobre alguno de los parámetros de la población.
Por ejemplo, contrastar si la nota media en un grupo de alumnos es igual a 5.
- **Contrastes de homogeneidad :** El objetivo es comparar dos poblaciones con respecto a alguno de sus parámetros.
Por ejemplo, contrastar si el rendimiento de dos grupos de alumnos es el mismo comparando sus notas medias.
- **Contrastes de independencia:** El objetivo es comprobar si existe relación entre dos variables de la población.
Por ejemplo, contrastar si existe relación entre las notas de dos asignaturas diferentes.

Cuando las hipótesis se plantean sobre parámetros de la población, también se habla de **contrastos paramétricos**.

5.1.3 Hipótesis nula e hipótesis alternativa

En la mayoría de los casos un contraste supone tomar una decisión entre dos hipótesis antagonistas:

- **Hipótesis nula:** Es la hipótesis conservadora, ya que se mantendrá mientras que los datos de las muestras no reflejen claramente su falsedad. Se representa como H_0 .
- **Hipótesis alternativa:** Es la negación de la hipótesis nula y generalmente representa la afirmación que se pretende probar. Se representa como H_1 .

Ambas hipótesis se eligen de acuerdo con el principio de simplicidad científica:

“Solamente se debe abandonar un modelo simple por otro más complejo cuando la evidencia a favor del último sea fuerte.” (Navaja de Occam)

Por ejemplo, en el caso de un juicio, en el que el juez debe decidir si el acusado es culpable o inocente, la elección de hipótesis debería ser

$$H_0 : \text{Inocente}$$

$$H_1 : \text{Culpable}$$

ya que la inocencia se asume, mientras que la culpabilidad hay que demostrarla.

Según esto, el juez sólo aceptaría la hipótesis alternativa cuando hubiese pruebas significativas de la culpabilidad del acusado.

El investigador jugaría el papel del fiscal, ya que su objetivo consistiría en intentar rechazar la hipótesis nula, es decir, demostrar culpabilidad del acusado.

 Advertencia

¡Esta metodología siempre favorece a la hipótesis nula!

5.1.4 Contrastes de hipótesis paramétricos

En muchos contrastes, sobre todo en las pruebas de conformidad y de homogeneidad, las hipótesis se formulan sobre parámetros desconocidos de la población como puede ser una media, una varianza o una proporción.

En tal caso, la hipótesis nula siempre asigna al parámetro un valor concreto, mientras que la alternativa suele ser una hipótesis abierta que, aunque opuesta a la hipótesis nula, no fija el valor del parámetro.

Esto da lugar a tres tipos de contrastes:

Bilateral	Unilateral menor	Unilateral mayor
$H_0: \theta = \theta_0$	$H_0: \theta = \theta_0$	$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta \neq \theta_0$	$H_1: \theta < \theta_0$	$H_1: \theta > \theta_0$

Ejemplo 5.2. Supóngase que existen sospechas de que en una población hay menos hombres que mujeres.

¿Qué tipo de contraste debería plantearse para validar o refutar esta sospecha?

1. Las sospechas se refieren al porcentaje o la proporción p de hombres en la población, por lo que se trata de un *contraste paramétrico*.
2. El objetivo es averiguar el valor de p , por lo que se trata de una *prueba de conformidad*. En la hipótesis nula el valor de p se fijará a 0.5 ya que, de acuerdo a las leyes de la genética, en la población debería haber la misma proporción de hombres que de mujeres.

- Finalmente, existen sospechas de que el porcentaje de hombres es menor que el de mujeres, por lo que la hipótesis alternativa será de menor $p < 0.5$.

Así pues, el contraste que debería plantearse es el siguiente:

$$\begin{aligned} H_0 : p &= 0.5 \\ H_1 : p &< 0.5 \end{aligned}$$

5.2 Metodología para realizar un contraste de hipótesis

5.2.1 Estadístico del contraste

La aceptación o rechazo de la hipótesis nula depende, en última instancia, de lo que se observe en la muestra.

La decisión se tomará según el valor que presente algún estadístico de la muestra relacionado con el parámetro o característica que se esté contrastando, y cuya distribución de probabilidad debe ser conocida suponiendo cierta la hipótesis nula y una vez fijado el tamaño de la muestra. Este estadístico recibe el nombre de **estadístico del contraste**.

Para cada muestra, el estadístico dará una estimación a partir de la cual se tomará la decisión: *si la estimación difiere demasiado del valor esperado bajo la hipótesis H_0 , entonces se rechazará, y en caso contrario se aceptará.*

La lógica que guía la decisión es la de mantener la hipótesis nula a no ser que en la muestra haya pruebas contundentes de su falsedad. Siguiendo con el símil del juicio, se trataría de mantener la inocencia mientras no haya pruebas claras de culpabilidad.

Ejemplo 5.3. Volviendo al ejemplo del contraste sobre la proporción de hombres de una población

$$\begin{aligned} H_0 : p &= 0.5 \\ H_1 : p &< 0.5 \end{aligned}$$

Si para resolver el contraste se toma una muestra aleatoria de 10 personas, podría tomarse como estadístico del contraste X el número de hombres en la muestra.

Suponiendo cierta la hipótesis nula, el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $X \sim B(10, 0.5)$, de manera que el número esperado de hombres en la muestra sería 5.

Así pues, es lógico aceptar la hipótesis nula si en la muestra se obtiene un número de hombres próximo a 5 y rechazarla cuando el número de hombres sea muy inferior a 5. Pero, *¿dónde poner el límite entre los valores X que lleven a la aceptación y los que lleven al rechazo?*

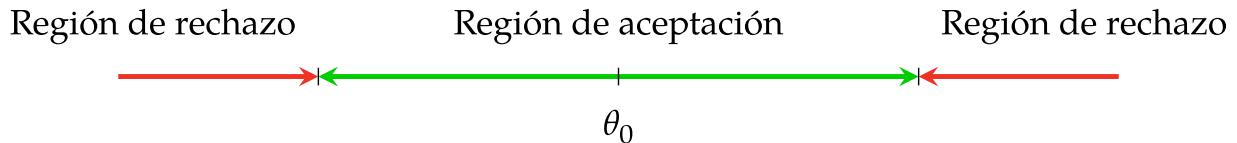
5.2.2 Regiones de aceptación y de rechazo

Una vez elegido el estadístico del contraste, lo siguiente es decidir para qué valores de este estadístico se decidirá aceptar la hipótesis nula y para qué valores se rechazará. Esto divide del conjunto de valores posibles del estadístico en dos regiones:

- **Región de aceptación:** Es el conjunto de valores del estadístico del contraste a partir de los cuales se decidirá aceptar la hipótesis nula.
- **Región de rechazo:** Es el conjunto de valores del estadístico del contraste a partir de los cuales se decidirá rechazar la hipótesis nula, y por tanto, aceptar la hipótesis alternativa.

Dependiendo de la dirección del contraste, la región de rechazo quedará a un lado u otro del valor esperado del estadístico del contraste según la hipótesis nula:

- Contraste bilateral $H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$.



- Contraste unilateral de menor $H_0 : \theta = \theta_0$ & $H_1 : \theta < \theta_0$.



- Contraste unilateral de mayor $H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$.

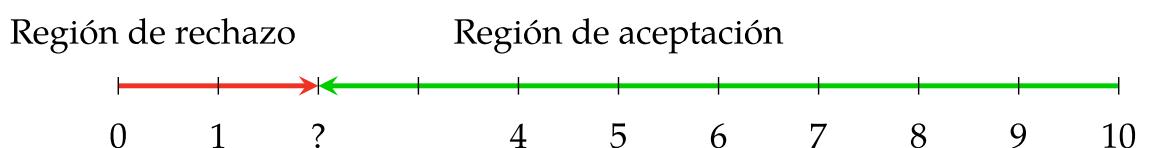


Ejemplo 5.4. Siguiendo con el ejemplo del contraste sobre la proporción de hombres de una población

$$H_0 : p = 0.5$$

$$H_1 : p < 0.5$$

Como el estadístico del contraste tenía una distribución binomial $X \sim B(10, 0.5)$ suponiendo cierta la hipótesis nula, su recorrido será de 0 a 10 y su valor esperado 5, por lo que, al tratarse de un contraste unilateral de menor, la región de rechazo quedará por debajo del 5. Pero, *¿dónde poner el límite entre las regiones de aceptación y de rechazo?*



5.2.3 Errores en un contraste de hipótesis

Hemos visto que un contraste de hipótesis se realiza mediante una regla de decisión que permite aceptar o rechazar la hipótesis nula dependiendo del valor que tome el estadístico del contraste.

Al final el contraste se resuelve tomando una decisión de acuerdo a esta regla. El problema es que nunca se conocerá con absoluta certeza la veracidad o falsedad de una hipótesis, de modo que al aceptarla o rechazarla es posible que se esté tomando una decisión equivocada.

Los errores que se pueden cometer en un contraste de hipótesis son de dos tipos:

- **Error de tipo I:** Se comete cuando se rechaza la hipótesis nula siendo esta verdadera.
 - **Error de tipo II:** Se comete cuando se acepta la hipótesis nula siendo esta falsa.

Decisión	H_0 cierta	H_1 cierta
Aceptar H_0	Decisión correcta	Error de tipo II
Rechazar H_0	Error de tipo I	Decisión correcta

5.2.4 Riesgos de los errores de un contraste de hipótesis

Los riesgos de cometer cada tipo de error se cuantifican mediante probabilidades:

Definición 5.2 (Riesgos α y β). En un contraste de hipótesis, se define el *riesgo α* como la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I, es decir,

$$P(\text{Rechazar } H_0 | H_0) \leq \alpha,$$

y se define el *riesgo β* como la máxima probabilidad de cometer un error de tipo II, es decir,

$$P(\text{Aceptar } H_0 | H_1) \leq \beta.$$

Advertencia

En principio, puesto que esta metodología favorece a la hipótesis nula, el error del tipo I suele ser más grave que el error del tipo II, y por tanto, el riesgo α suele fijarse a niveles bajos de 0.1, 0.05 o 0.01, siendo 0.05 lo más habitual.

Debe tenerse cuidado al interpretar el riesgo α ya que se trata de una probabilidad condicionada a que la hipótesis nula sea cierta. Por tanto, cuando se rechace la hipótesis nula con un riesgo $\alpha = 0.05$, es erróneo decir 5 de cada 100 veces nos equivocaremos, ya que esto sería cierto sólo si la hipótesis nula fuese siempre verdadera.

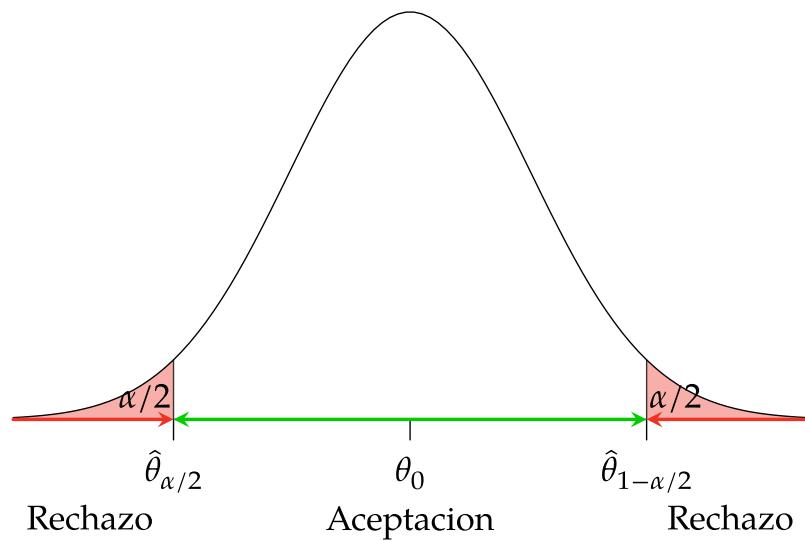
Tampoco tiene sentido hablar de la probabilidad de haberse equivocado una vez tomada una decisión a partir de una muestra concreta, pues en tal caso, si se ha tomado la decisión acertada, la probabilidad de error es 0 y si se ha tomado la decisión equivocada, la probabilidad de error es 1.

5.2.5 Determinación de las regiones de aceptación y de rechazo en función del riesgo α

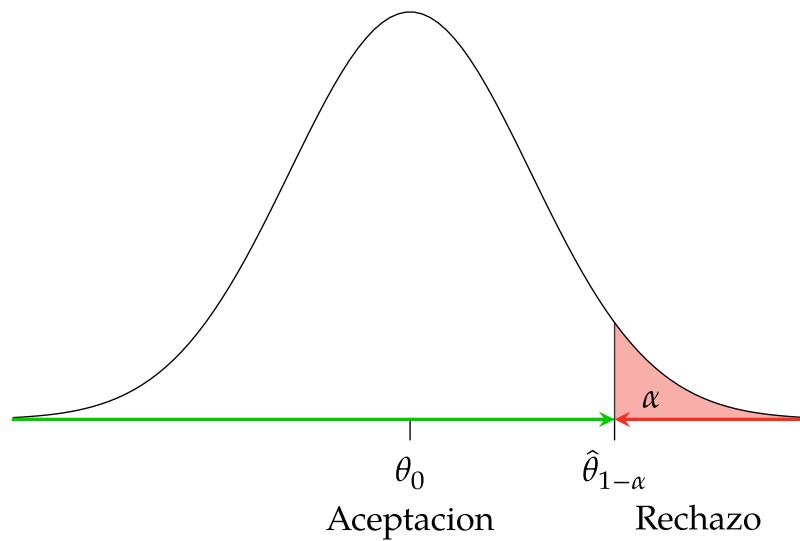
Una vez fijado el riesgo α que se está dispuesto a tolerar, es posible delimitar las regiones de aceptación y de rechazo para el estadístico del contraste de manera que la probabilidad acumulada en la región de rechazo sea α , suponiendo cierta la hipótesis nula.

Ejemplo 5.5. Siguiendo con el contraste sobre la proporción de hombres de una población, como el estadístico del contraste sigue una distribución binomial $X \sim B(10, 0.5)$, si se decide rechazar la hipótesis nula cuando en la muestra haya 2 o menos hombres, la probabilidad de cometer un error de tipo I será

Regiones de un contraste bilateral



Regiones de un contraste unilateral de mayor

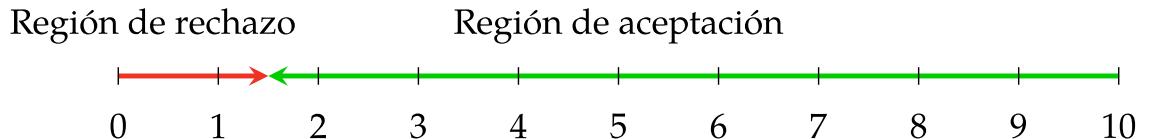


$$P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.0010 + 0.0098 + 0.0439 = 0.0547.$$

Si riesgo máximo de error de tipo I que se está dispuesto a tolerar es $\alpha = 0.05$, ¿qué valores del estadístico permitirán rechazar la hipótesis nula?

$$P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = 0.0010 + 0.0098 = 0.0107.$$

Es decir, sólo se podría rechazar la hipótesis nula con 0 o 1 hombres en la muestra.



5.2.6 Riesgo β y tamaño del efecto

Aunque el error de tipo II pueda parecer menos grave, también interesa que el riesgo β sea bajo, ya que de lo contrario será difícil rechazar la hipótesis nula (que es lo que se persigue la mayoría de las veces), aunque haya pruebas muy claras de su falsedad.

El problema, en el caso de contrastes paramétricos, es que la hipótesis alternativa es una hipótesis abierta en la que no se fija el valor del parámetro a contrastar, de modo que, para poder calcular el riesgo β es necesario fijar dicho valor.

Lo normal es fijar el valor del parámetro del contraste a la mínima cantidad para admitir diferencias significativas desde un punto de vista práctico o clínico. Esa mínima diferencia que se considera clínicamente significativa se conoce como **tamaño del efecto** y se representa por δ .

5.2.7 Potencia de un contraste

Puesto que el objetivo del investigador suele ser rechazar la hipótesis nula, a menudo, lo más interesante de un contraste es su capacidad para detectar la falsedad de la hipótesis nula cuando realmente hay diferencias mayores que δ entre el verdadero valor del parámetro y el que establece la hipótesis nula.

Definición 5.3 (Potencia de un contraste). La *potencia* de un contraste de hipótesis se define como

$$\text{Potencia} = P(\text{Rechazar } H_0 | H_1) = 1 - P(\text{Aceptar } H_0 | H_1) = 1 - \beta.$$

Así pues, al reducir el riesgo β se aumentará la potencia del contraste.

Un contraste poco potente no suele ser interesante ya que no permitirá rechazar la hipótesis nula aunque haya evidencias en su contra.

5.2.8 Cálculo del riesgo β y de la potencia $1 - \beta$

:::{#exm-**} Supóngase que en el contraste sobre la proporción de hombres no se considera importante una diferencia de menos de un 10% con respecto al valor que establece la hipótesis nula, es decir, $\delta = 0.1$.

Esto permite fijar la hipótesis alternativa

$$H_1 : p = 0.5 - 0.1 = 0.4.$$

Suponiendo cierta esta hipótesis el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $X \sim B(10, 0.4)$.

En tal caso, el riesgo β para las regiones de aceptación y rechazo fijadas antes será

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 | H_1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.0464 = 0.9536.$$

Como puede apreciarse, se trata de un riesgo β muy alto, por lo que la potencia del contraste sería sólo de

$$1 - \beta = 1 - 0.9536 = 0.0464,$$

lo que indica que no se trataría de un buen contraste para detectar diferencias de un 10% en el valor del parámetro.

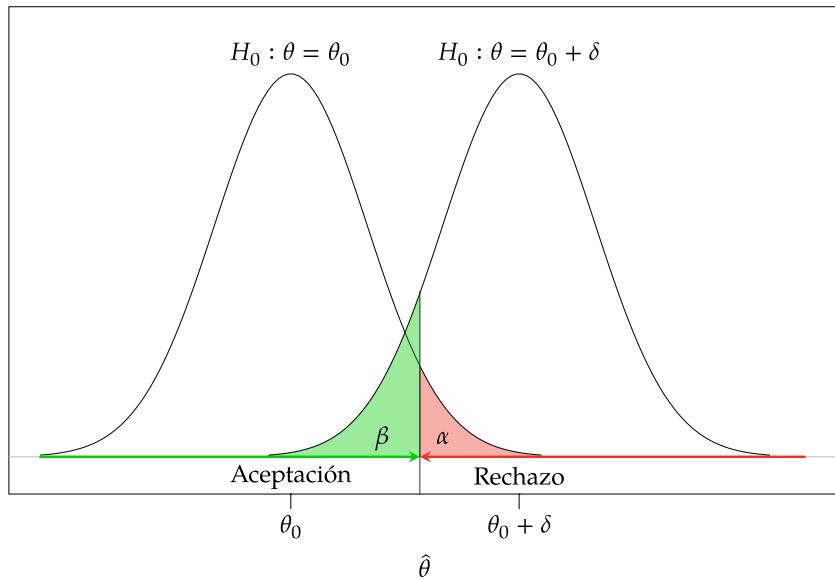
5.2.9 Relación del riesgo β y el tamaño del efecto δ

El riesgo β depende directamente de la mínima diferencia δ que se desea detectar con respecto al valor del parámetro que establece la hipótesis nula.

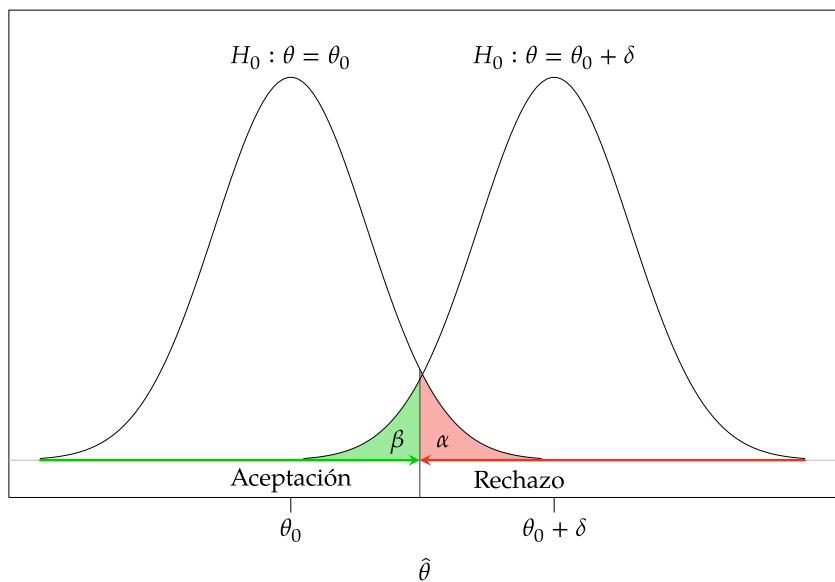
Ejemplo 5.6. Si en el contraste sobre la proporción de hombres se desease detectar una diferencia de al menos un 20% con respecto al valor que establece la hipótesis nula, es decir, $\delta = 0.2$, entonces la hipótesis alternativa se fijaría a

$$H_1 : p = 0.5 - 0.2 = 0.3,$$

Relación entre el riesgo β y el tamaño del efecto δ



Relación entre el riesgo β y la mínima diferencia importante δ



y bajo esta hipótesis el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $X \sim B(10, 0.3)$.

En tal caso, el riesgo β para las regiones de aceptación y rechazo fijadas antes sería

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 | H_1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.1493 = 0.8507,$$

por lo que el riesgo riesgo β disminuiría y la potencia del contraste aumentaría

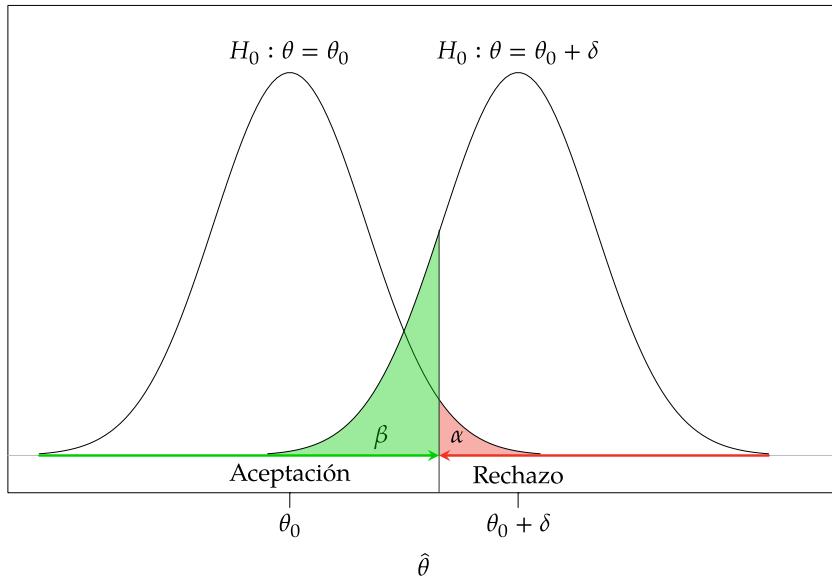
$$1 - \beta = 1 - 0.8507 = 0.1493,$$

aunque seguiría siendo un contraste poco potente.

5.2.10 Relación entre los riesgos α y β

Los riesgos α y β están enfrentados, es decir, cuando uno aumenta el otro disminuye y viceversa.

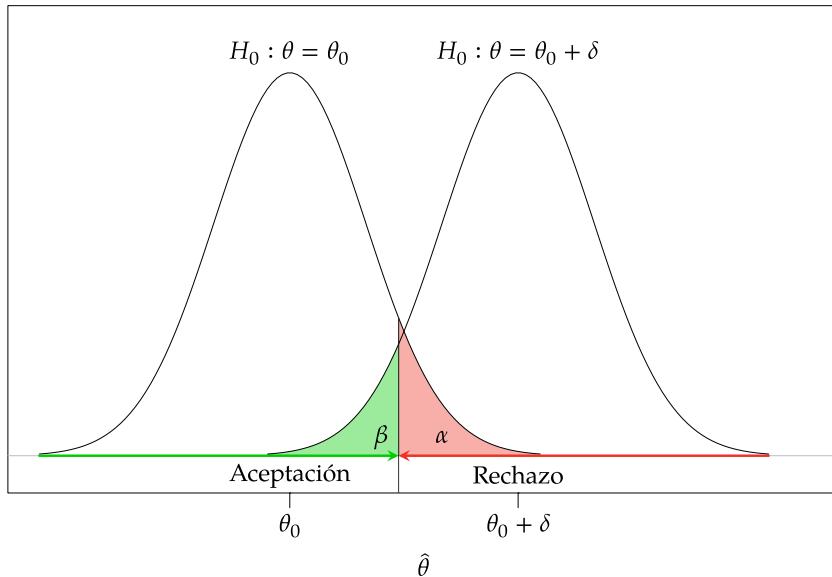
Relación entre los riesgos α y β



Ejemplo 5.7. Si en el contraste sobre la proporción de hombres toma como riesgo $\alpha = 0.1$, entonces la región de rechazo sería $X \leq 2$ ya que, suponiendo cierta la hipótesis nula, $X \sim B(10, 0.5)$, y

$$P(X \leq 2) = 0.0547 \leq 0.1 = \alpha.$$

Relación entre los riesgos α y β



Entonces, para una diferencia mínima $\delta = 0.1$ y suponiendo cierta la hipótesis alternativa, $X \sim B(10, 0.4)$, el riesgo β será

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 | H_1) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0.1673 = 0.8327,$$

y ahora la potencia ha subido hasta

$$1 - \beta = 1 - 0.8327 = 0.1673.$$

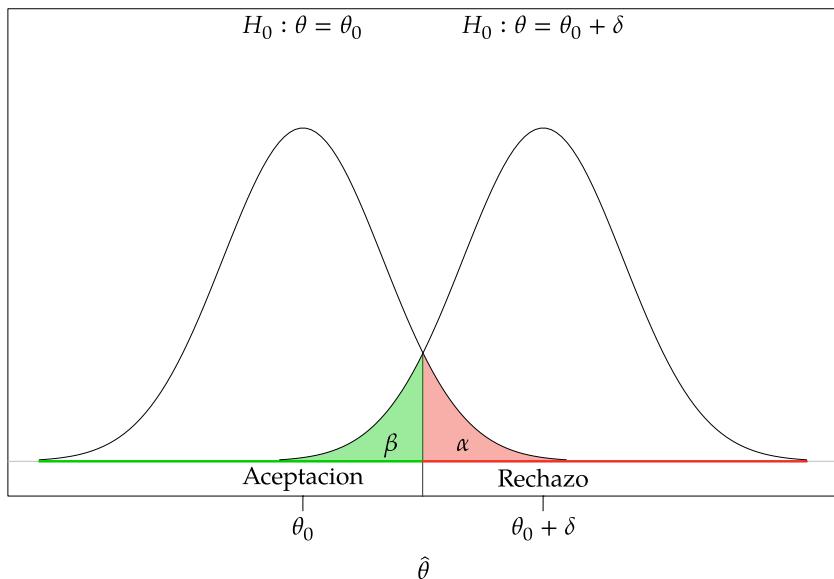
5.2.11 Relación de los riesgos de error y el tamaño muestral

Los riesgos de error también dependen del tamaño de la muestra, ya que al aumentar el tamaño de la muestra, la dispersión del estadístico del contraste disminuye y con ello también lo hacen los riesgos de error.

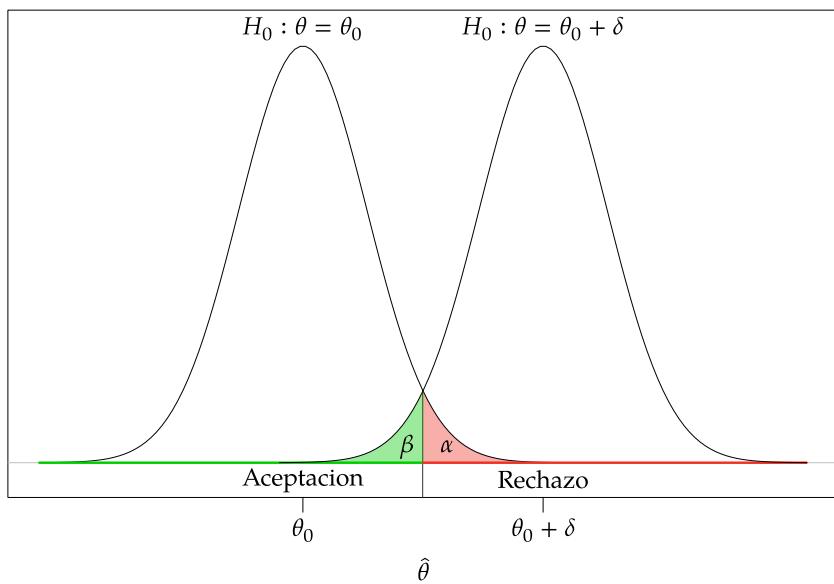
Ejemplo 5.8. Si para realizar el contraste sobre la proporción de hombres se hubiese tomado una muestra de tamaño 100, en lugar de 10, entonces, bajo la suposición de certeza de la hipótesis nula, el estadístico del contraste seguiría una distribución binomial $B(100, 0.5)$, y ahora la región de rechazo sería $X \leq 41$, ya que

$$P(X \leq 41) = 0.0443 \leq 0.05 = \alpha.$$

Riesgos de error para muestras pequeñas



Riesgos de error para muestras grandes



Entonces, para $\delta = 0.1$ y suponiendo cierta la hipótesis alternativa, $X \sim B(100, 0.4)$, el riesgo β sería

$$\beta = P(\text{Aceptar } H_0 | H_1) = P(X \geq 42) = 0.3775,$$

y ahora la potencia habría aumentado considerablemente

$$1 - \beta = 1 - 0.3775 = 0.6225.$$

Este contraste sería mucho más útil para detectar una diferencia de al menos un 10% con respecto al valor del parámetro que establece la hipótesis nula.

5.3 Curva de potencia

La potencia de un contraste depende del valor del parámetro que establezca la hipótesis alternativa y, por tanto, es una función de este

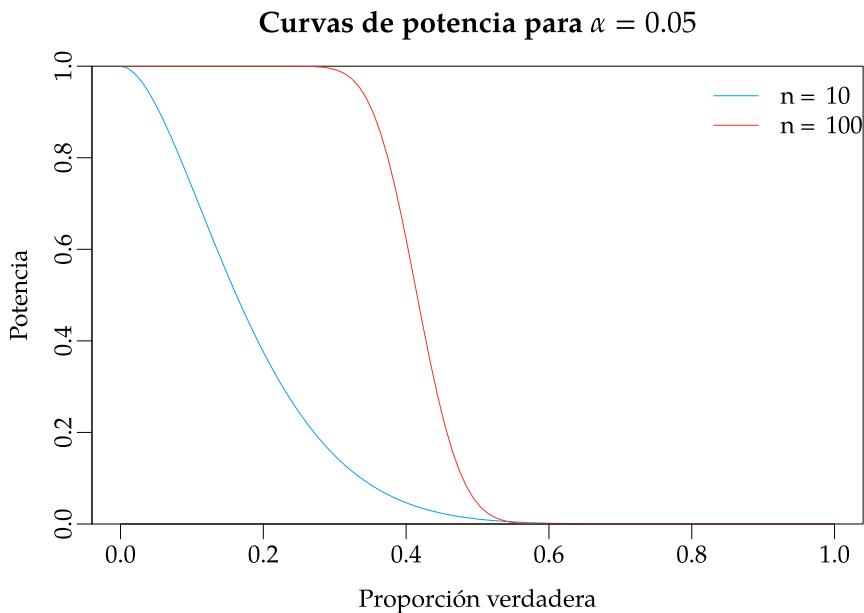
$$\text{Potencia}(x) = P(\text{Rechazar } H_0 | \theta = x).$$

Esta función da la probabilidad de rechazar la hipótesis nula para cada valor del parámetro y se conoce como **curva de potencia**.

Cuando no se puede fijar el valor concreto del parámetro en la hipótesis alternativa, resulta útil representar esta curva para ver la bondad del contraste cuando no se rechaza la hipótesis nula. También es útil cuando sólo se dispone de un número determinado de individuos en la muestra, para ver si merece la pena hacer el estudio.

Un contraste será mejor cuanto mayor sea el área encerrada por debajo de la curva de potencia.

Ejemplo 5.9. La curva de potencia correspondiente al contraste sobre la proporción de hombres en la población es la siguiente



5.3.1 p -valor de un contraste de hipótesis

En general, siempre que la estimación del estadístico caiga dentro de la región de rechazo, rechazaremos la hipótesis nula, pero evidentemente, si dicha estimación se aleja bastante de la región de aceptación tendremos más confianza en el rechazo que si la estimación está cerca del límite entre las regiones de aceptación y rechazo.

Por este motivo, al realizar un contraste, también se calcula la probabilidad de obtener una discrepancia mayor o igual a la observada entre la estimación del estadístico del contraste y su valor esperado según la hipótesis nula.

Definición 5.4 (p -valor). En un contraste de hipótesis, para cada estimación x_0 del estadístico del contraste X , dependiendo del tipo de contraste, se define el p -valor del contraste como

$$\text{Contraste bilateral : } 2P(X \geq x_0 | H_0)$$

$$\text{Contraste unilateral de menor : } P(X \leq x_0 | H_0)$$

$$\text{Contraste unilateral de mayor : } P(X \geq x_0 | H_0)$$

En cierto modo, el p -valor expresa la confianza que se tiene al tomar la decisión de rechazar la hipótesis nula. Cuanto más próximo esté el p -valor a 1, mayor confianza existe al aceptar la hipótesis nula, y cuanto más próximo esté a 0, mayor confianza hay al rechazarla.

5.3.2 Regla de decisión de un contraste

Una vez fijado el riesgo α , la regla de decisión para realizar un contraste también puede expresarse de la siguiente manera:

i Interpretación

Regla de decisión

$$\begin{aligned} \text{Si } p\text{-valor} \leq \alpha &\rightarrow \text{Rechazar } H_0 \\ \text{Si } p\text{-valor} > \alpha &\rightarrow \text{Aceptar } H_0. \end{aligned}$$

De este modo, el p -valor nos da información de para qué niveles de significación puede rechazarse la hipótesis nula y para cuales no.

Ejemplo 5.10. Si el contraste sobre la proporción de hombres se toma una muestra de tamaño 10 y se observa 1 hombre, entonces el p -valor, bajo a supuesta certeza de la hipótesis nula, $X \sim B(10, 0.5)$, será

$$p = P(X \leq 1) = 0.0107,$$

mientras que si en la muestra se observan 0 hombres, entonces el p -valor será

$$p = P(X \leq 0) = 0.001.$$

En el primer caso se rechazaría la hipótesis nula para un riesgo $\alpha = 0.05$, pero no podría rechazarse para un riesgo $\alpha = 0.01$, mientras que en el segundo caso también se rechazaría para $\alpha = 0.01$. Es evidente que en el segundo la decisión de rechazar la hipótesis nula se tomaría con mayor confianza.

5.3.3 Pasos para la realización de un contraste de hipótesis

1. Formular la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1 .
2. Fijar los riesgos α y β deseados.
3. Seleccionar el estadístico del contraste.
4. Fijar la mínima diferencia clínicamente significativa (tamaño del efecto) δ .
5. Calcular el tamaño muestral necesario n .
6. Delimitar las regiones de aceptación y rechazo.
7. Tomar una muestra de tamaño n .
8. Calcular el estadístico del contraste en la muestra.
9. Rechazar la hipótesis nula si la estimación cae en la región de rechazo o bien si el p -valor es menor que el riesgo α y aceptarla en caso contrario.

5.4 Contrastes paramétricos más importantes

Pruebas de conformidad:

- Contraste para la media de una población normal con varianza conocida.
- Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida.
- Contraste para la media de una población con varianza desconocida a partir de muestras grandes.
- Contraste para la varianza de una población normal.
- Contraste para un proporción de una población.

Pruebas de homogeneidad:

- Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas.
- Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas pero iguales.
- Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas y diferentes.
- Contraste de comparación de varianzas de dos poblaciones normales.
- Contraste de comparación de proporciones de dos poblaciones.

5.5 Contraste para la media de una población normal con varianza conocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes condiciones:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- La media μ es desconocida, pero su varianza σ^2 es conocida.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Región de aceptación: $z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}$.

Región de rechazo: $Z \leq z_{\alpha/2}$ y $Z \geq z_{1-\alpha/2}$.

5.6 Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes condiciones:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Contraste:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del contraste: Utilizando la cuasivarianza como estimador de la varianza poblacional se tiene

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \sim T(n-1).$$

Región de aceptación: $t_{\alpha/2}^{n-1} < T < t_{1-\alpha/2}^{n-1}$.

Región de rechazo: $T \leq t_{\alpha/2}^{n-1}$ y $T \geq t_{1-\alpha/2}^{n-1}$.

Ejemplo 5.11. En un grupo de alumnos se quiere contrastar si la nota media de estadística es mayor que 5 puntos. Para ello se toma la siguiente muestra:

$$6.3, 5.4, 4.1, 5.0, 8.2, 7.6, 6.4, 5.6, 4.3, 5.2$$

El contraste que se plantea es

$$H_0 : \mu = 5 \quad H_1 : \mu > 5$$

Para realizar el contraste se tiene:

- $\bar{x} = \frac{6.3+\dots+5.2}{10} = \frac{58.1}{10} = 5.81$ puntos.
- $\hat{s}^2 = \frac{(6.3-5.56)^2 + \dots + (5.2-5.56)^2}{9} = \frac{15.949}{9} = 1.7721$ puntos², y $\hat{s} = 1.3312$ puntos.

Y el estadístico del contraste vale

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} = \frac{5.81 - 5}{1.3312/\sqrt{10}} = 1.9246.$$

El p -valor del contraste es $P(T(9) \geq 1.9246) = 0.04323$, lo que indica que se rechazaría la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$.

La región de rechazo es

$$T = \frac{\bar{x} - 5}{1.3312/\sqrt{10}} \geq t_{0.95}^9 = 1.8331 \Leftrightarrow \bar{x} \geq 5 + 1.8331 \frac{1.3312}{\sqrt{10}} = 5.7717,$$

de modo que se rechazará la hipótesis nula siempre que la media de la muestra sea mayor que 5.7717 y se aceptará en caso contrario.

Suponiendo que en la práctica la mínima diferencia importante en la nota media fuese de un punto $\delta = 1$, entonces bajo la hipótesis alternativa $H_1 : \mu = 6$, si se decidiese rechazar la hipótesis nula, el riesgo β sería

$$\beta = P\left(T(9) \leq \frac{5.7717 - 6}{1.3312\sqrt{10}}\right) = P(T(9) \leq -0.5424) = 0.3004,$$

de manera que la potencia del contraste para detectar una diferencia de $\delta = 1$ punto sería $1 - \beta = 1 - 0.3004 = 0.6996$.

5.6.1 Determinación del tamaño muestral en un contraste para la media

Se ha visto que para un riesgo α la región de rechazo era

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}^{n-1} \approx z_{1-\alpha} \quad \text{para } n \geq 30.$$

o lo que es equivalente

$$\bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}.$$

Si el tamaño del efecto es δ , para una hipótesis alternativa $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$, el riesgo β es

$$\beta = P\left(Z < \frac{\mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + \delta)}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z < \frac{z_{1-\alpha} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} - \delta}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}\right).$$

de modo que

$$z_\beta = \frac{z_{1-\alpha} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} - \delta}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow \delta = (z_{1-\alpha} - z_\beta) \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = (z_{1-\alpha} - z_\beta)^2 \frac{\hat{s}^2}{\delta^2} = (z_\alpha + z_\beta)^2 \frac{\hat{s}^2}{\delta^2}.$$

Ejemplo 5.12. Se ha visto en el ejemplo anterior que la potencia del contraste para detectar una diferencia en la nota media de 1 punto era del 69.96%. Para aumentar la potencia del test hasta un 90%, ¿cuántos alumnos habría que tomar en la muestra?

Como se desea una potencia $1 - \beta = 0.9$, el riesgo $\beta = 0.1$ y mirando en la tabla de la normal estándar se puede comprobar que $z_\beta = z_{0.1} = 1.2816$.

Aplicando la fórmula anterior para determinar el tamaño muestral necesario, se tiene

$$n = (z_\alpha + z_\beta)^2 \frac{\hat{s}^2}{\delta^2} = (1.6449 + 1.2816)^2 \frac{1.7721}{1^2} = 15.18,$$

de manera que habría que haber tomado al menos 16 alumnos.

5.7 Contraste para la media de una población con varianza desconocida y muestras grandes

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes condiciones:

- Su distribución puede ser de cualquier tipo.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste: Utilizando la cuasivarianza como estimador de la varianza poblacional y gracias al teorema central del límite por tratarse de muestras grandes ($n \geq 30$) se tiene

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Región de aceptación: $-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}$.

Región de rechazo: $Z \leq -z_{\alpha/2}$ y $Z \geq z_{\alpha/2}$.

5.8 Contraste para la varianza de una población normal

Sea X una variable aleatoria que cumple las siguientes hipótesis:

- Su distribución es normal $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Tanto su media μ como su varianza σ^2 son desconocidas.

Contraste:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0$$

$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0$$

Estadístico del contraste: Partiendo de la cuasivarianza muestral como estimador de la varianza poblacional, se tiene

$$J = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

que sigue una distribución chi-cuadrado de $n - 1$ grados de libertad.

Región de aceptación: $\chi_{\alpha/2}^{n-1} < J < \chi_{1-\alpha/2}^{n-1}$.

Región de rechazo: $J \leq \chi_{\alpha/2}^{n-1}$ y $J \geq \chi_{1-\alpha/2}^{n-1}$.

Ejemplo 5.13. En un grupo de alumnos se quiere contrastar si la desviación típica de la nota es mayor de 1 punto. Para ello se toma la siguiente muestra:

$$6.3, 5.4, 4.1, 5.0, 8.2, 7.6, 6.4, 5.6, 4.3, 5.2$$

El contraste que se plantea es

$$H_0 : \sigma = 1 \quad H_1 : \sigma > 1$$

Para realizar el contraste se tiene:

- $\bar{x} = \frac{6.3+\dots+5.2}{10} = \frac{58.1}{10} = 5.81$ puntos.
- $\hat{s}^2 = \frac{(6.3-5.56)^2+\dots+(5.2-5.56)^2}{9} = \frac{15.949}{9} = 1.7721$ puntos².

El estadístico del contraste vale

$$J = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot 1.7721}{1^2} = 15.949,$$

y el p -valor del contraste es $P(\chi(9) \geq 15.949) = 0.068$, por lo que no se puede rechazar la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$.

5.9 Contraste para proporción de una población

Sea p la proporción de individuos de una población que tienen una determinada característica.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: p = p_0 \\ H_1 &: p \neq p_0 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste: La variable que mide el número de individuos con la característica en una muestra aleatoria de tamaño n sigue una distribución binomial $X \sim B(n, p_0)$. De acuerdo al teorema central del límite, para muestras grandes ($np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$), $X \sim N(np_0, \sqrt{np_0(1-p_0)})$, y se cumple

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N \left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right) \Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0, 1).$$

Región de aceptación: $z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}$.

Región de rechazo: $Z \leq z_{\alpha/2}$ y $Z \geq z_{1-\alpha/2}$.

Ejemplo 5.14. En un grupo de alumnos se desea estimar si el porcentaje de aprobados es mayor del 50%. Para ello se toma una muestra de 80 alumnos entre los que hay 50 aprobados.

El contraste que se plantea es

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0.5 \\ H_1 &: p > 0.5 \end{aligned}$$

Para realizar el contraste se tiene que $\hat{p} = 50/80 = 0.625$ y como se cumple $n\hat{p} = 80 \cdot 0.625 = 50 \geq 5$ y $n(1 - \hat{p}) = 80(1 - 0.625) = 30 \geq 5$, el estadístico del contraste vale

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} = \frac{0.625 - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/80}} = 2.2361.$$

y el p -valor del contraste es $P(Z \geq 2.2361) = 0.0127$, por lo que se rechaza la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$ y se concluye que el porcentaje de aprobados es mayor de la mitad.

5.10 Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes condiciones:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas, pero sus varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &\sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right) \\ \bar{X}_2 &\sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

Región de aceptación: $-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}$.

Región de rechazo: $Z \leq -z_{\alpha/2}$ y $Z \geq z_{\alpha/2}$.

5.11 Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes condiciones:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$.
- Sus medias μ_1 y μ_2 son desconocidas y sus varianzas también, pero son iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_1 - \bar{X}_2 &\sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}\right) \\ \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} \sim T(n_1 + n_2 - 2).$$

Región de aceptación: $-t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2} < T < t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$.

Región de rechazo: $T \leq -t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$ y $T \geq t_{\alpha/2}^{n_1+n_2-2}$.

Ejemplo 5.15. Se quiere comparar el rendimiento académico de dos grupos de alumnos, uno con 10 alumnos y otro con 12, que han seguido metodologías diferentes. Para ello se les realiza un examen y se obtienen las siguientes puntuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &: 4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3 \\ X_2 &: 8 - 9 - 5 - 3 - 8 - 7 - 8 - 6 - 8 - 7 - 5 - 7 \end{aligned}$$

El contraste que se plantea es

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Para realizar el contraste, se tiene

- $\bar{X}_1 = \frac{4+...+3}{10} = 5.3$ puntos y $\bar{X}_2 = \frac{8+...+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $S_1^2 = \frac{(4^2+...+3^2)}{10} - 5.3^2 = 3.21$ puntos² y $S_2^2 = \frac{(8^2+...+7^2)}{12} - 6.75^2 = 2.69$ puntos².
- $\hat{S}_p^2 = \frac{10 \cdot 3.21 + 12 \cdot 2.69}{10+12-2} = 3.2175$ puntos², y $\hat{S}_p = 1.7937$.

Si se suponen varianzas iguales, el estadístico del contraste vale

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{S}_p \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{5.3 - 6.75}{1.7937 \sqrt{\frac{10+12}{10 \cdot 12}}} = -1.8879,$$

y el p -valor del contraste es $2P(T(20) \leq -1.8879) = 0.0736$, de modo que no se puede rechazar la hipótesis nula y se concluye que no hay diferencias significativas entre las notas medias de los grupos.

5.12 Contraste de comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes condiciones:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Sus medias μ_1 , μ_2 y varianzas σ_1^2 , σ_2^2 , son desconocidas, pero $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} \sim T(g),$$

con $g = n_1 + n_2 - 2 - \Delta$ y

$$\Delta = \frac{\left(\frac{n_2-1}{n_1}\hat{S}_1^2 - \frac{n_1-1}{n_2}\hat{S}_2^2\right)^2}{\frac{n_2-1}{n_1^2}\hat{S}_1^4 + \frac{n_1-1}{n_2^2}\hat{S}_2^4}.$$

Región de aceptación: $-t_{\alpha/2}^g < T < t_{\alpha/2}^g$.

Región de rechazo: $T \leq -t_{\alpha/2}^g$ y $T \geq t_{\alpha/2}^g$.

5.13 Contraste de comparación de varianzas de dos poblaciones normales

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias que cumplen las siguientes condiciones:

- Su distribución es normal $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- Sus medias μ_1 , μ_2 y varianzas σ_1^2 , σ_2^2 son desconocidas.

Contraste:

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_1 &= \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 &\neq \sigma_2 \end{aligned}$$

Estadístico del contraste:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2} &\sim \chi^2(n_1 - 1) \\ \frac{(n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2} &\sim \chi^2(n_2 - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \frac{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Región de aceptación: $F_{\alpha/2}^{n_1-1, n_2-1} < F < F_{1-\alpha/2}^{n_1-1, n_2-1}$.

Región de rechazo: $F \leq F_{\alpha/2}^{n_1-1, n_2-1}$ y $F \geq F_{1-\alpha/2}^{n_1-1, n_2-1}$.

Ejemplo 5.16. Siguiendo con el ejemplo de las puntuaciones en dos grupos:

$$\begin{aligned} X_1 &: 4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3 \\ X_2 &: 8 - 9 - 5 - 3 - 8 - 7 - 8 - 6 - 8 - 7 - 5 - 7 \end{aligned}$$

Si se desea comparar las varianzas, el contraste que se plantea es

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Para realizar el contraste, se tiene

- $\bar{X}_1 = \frac{4+...+3}{10} = 5.3$ puntos y $\bar{X}_2 = \frac{8+...+7}{12} = 6.75$ puntos.
- $\hat{S}_1^2 = \frac{(4-5.3)^2 + \dots + (3-5.3)^2}{9} = 3.5667$ y $\hat{S}_2^2 = \frac{(8-6.75)^2 + \dots + (7-6.75)^2}{11} = 2.9318$ puntos².

El estadístico del contraste vale

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{3.5667}{2.9318} = 1.2165,$$

y el p -valor del contraste es $2P(F(9, 11) \leq 1.2165) = 0.7468$, por lo que se mantiene la hipótesis de igualdad de varianzas.

5.14 Contraste de comparación de proporciones de dos poblaciones

Sean p_1 y p_2 las respectivas proporciones de individuos que presentan una determinada característica en dos poblaciones.

Contraste:

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad H_1 : p_1 \neq p_2$$

Estadístico del contraste: Las variables que miden el número de individuos con la característica en dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, siguen distribuciones binomiales $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ y $X_2 \sim B(n_2, p_2)$. Si las muestras son grandes ($n_i p_i \geq 5$ y $n_i(1 - p_i) \geq 5$), de acuerdo al teorema central del límite, $X_1 \sim N(np_1, \sqrt{np_1(1 - p_1)})$ y $X_2 \sim N(np_2, \sqrt{np_2(1 - p_2)})$, y se cumple

$$\left. \begin{array}{l} \hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \sim N\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}\right) \\ \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} \sim N\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Región de aceptación: $z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}$.

Región de rechazo: $z \leq z_{\alpha/2}$ y $z \geq z_{1-\alpha/2}$.

:::{#exm-contraste-diferencia-proporciones} Se quiere comparar los porcentajes de aprobados en dos grupos que han seguido metodologías distintas. En el primer grupo han aprobado 24 alumnos de un total de 40, mientras que en el segundo han aprobado 48 de 60.

El contraste que se plantea es

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad H_1 : p_1 \neq p_2$$

Para realizar el contraste, se tiene $\hat{p}_1 = 24/40 = 0.6$ y $\hat{p}_2 = 48/60 = 0.8$, de manera que se cumplen las condiciones $n_1 \hat{p}_1 = 40 \cdot 0.6 = 24 \geq 5$, $n_1(1 - \hat{p}_1) = 40(1 - 0.6) = 26 \geq 5$,

$n_2\hat{p}_2 = 60 \cdot 0.8 = 48 \geq 5$ y $n_2(1-\hat{p}_2) = 60(1-0.8) = 12 \geq 5$, y el estadístico del contraste vale

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \frac{0.6 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{40} + \frac{0.8(1-0.8)}{60}}} = -2.1483,$$

y el p -valor del contraste es $2P(Z \leq -2.1483) = 0.0317$, de manera que se rechaza la hipótesis nula para $\alpha = 0.05$ y se concluye que hay diferencias.

5.15 Realización de contrastes mediante intervalos de confianza

Una interesante alternativa a la realización de un contraste

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

con un riesgo α , es calcular el intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza $1 - \alpha$, ya que este intervalo se puede interpretar como el conjunto aceptable de hipótesis para θ , de manera que si θ_0 está fuera del intervalo, la hipótesis nula es poco creíble y puede rechazarse, mientras que si está dentro la hipótesis es creíble y se acepta.

Cuando el contraste sea unilateral de menor, el contraste se realizaría comparando θ_0 con el límite superior del intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza $1 - 2\alpha$, mientras que si el contraste es unilateral de mayor, se comparará con el límite inferior del intervalo.

Contraste	Intervalo de confianza	Decisión
Bilateral	$[l_i, l_s]$ con nivel de confianza $1 - \alpha$	Rechazar H_0 si $\theta_0 \notin [l_i, l_s]$
Unilateral menor	$[-\infty, l_s]$ con nivel de confianza $1 - 2\alpha$	Rechazar H_0 si $\theta_0 \geq l_s$
Unilateral mayor	$[l_i, \infty]$ con nivel de confianza $1 - 2\alpha$	Rechazar H_0 si $\theta_0 \leq l_i$

Ejemplo 5.17. Volviendo al contraste para comparar el rendimiento académico de dos grupos de alumnos que han obtenido las siguientes puntuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &: 4 - 6 - 8 - 7 - 7 - 6 - 5 - 2 - 5 - 3 \\ X_2 &: 8 - 9 - 5 - 3 - 8 - 7 - 8 - 6 - 8 - 7 - 5 - 7 \end{aligned}$$

El contraste que se planteaba era

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Como se trata de un contraste bilateral, el intervalo de confianza para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$, suponiendo varianzas iguales, vale $[-3.0521, 0.1521]$ puntos. Y como según la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$, y el 0 cae dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula.

La ventaja del intervalo es que, además de permitirnos realizar el contraste, nos da una idea de la magnitud de la diferencia entre las medias de los grupos.