Fórmulas de Cálculo

Geometría Analítica

Vectores

Vector que une dos puntos $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{PQ} = Q - P = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n)$$

Producto escalar $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Vectores ortogonales (perpendiculares)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Rectas

Ecuación vectorial de una recta que pasa por el punto P con dirección del vector $\mathbf{v}$

$$P + t\mathbf{v}$$

Ecuación punto-pendiente de una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto (x_0, y_0) con pendiente m

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

Planos

Ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) perpendicular al vector (a, b, c)

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Derivadas de funciones de una variable

Concepto de derivada

Tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, a + \Delta x]$

$$\text{ARC}f[a, a + \Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Tasa de variación instantánea (derivada) de una función $f(x)$ en el punto $x = a$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Álgebra de derivadas

Suma $(u + v)' = u' + v'$

Resta $(u - v)' = u' - v'$

Producto $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Cociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Regla de la cadena $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Rectas secante y tangente

Recta secante a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(a, f(a))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$

$$y = f(a) + \text{ARC}f[a, a + \Delta x](x - a)$$

Recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Crecimiento, concavidad y extremos

Crecimiento

- $\forall x \in I\ f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ es creciente en I.
- $\forall x \in I\ f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ es decreciente en I.

Concavidad

- $\forall x \in I\ f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en I.
- $\forall x \in I\ f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en I.

Extremos Si $f'(a) = 0$ (punto crítico)

- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo local en $x = a$.
- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en $x = a$.

Aproximación de funciones

Variación de una función

$$\Delta y \approx f'(a)\Delta x$$

Polinomio de Taylor de orden n de $f(x)$ en el punto $x = a$

$$P^n_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Polinomio de Maclaurin de orden n of $f(x)$

$$P^n_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Ecuaciones diferenciales

Ecuación diferencial de primer orden

Ecuación diferencial de primer orden

$$F(x,y,y')=0$$

Problema del valor inicial

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, & \text{EDO de primer orden;} \\ y(x_0)=y_0, & \text{Condición inicial.} \end{cases}$$

Resolución de EDO de primer orden

EDO de variables separables

$$y'g(y)=f(x)$$

Solución:

$$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C.$$

EDO lineal

$$y'+g(x)y=h(x)$$

Solución:

$$y=e^{-\int g(x)\,dx}\left(\int h(x)e^{\int g(x)\,dx}\,dx+C\right).$$

Derivadas de funciones vectoriales

Derivada de una función vectorial

Si $f(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ entonces

$$f'(t)=(x_1'(t),\dots,x_n'(t))$$

Rectas tangente y normal en el plano

Recta tangente a una trayectoria en el plano
$f(t)=(x(t),y(t))$ en el instante $t=a$

$$(x(a),y(a))+t(x'(a),y'(a)) \text{ o}$$
$$(x-x(a))y'(a)-(y-y(a))x'(a)=0$$

Recta normal a una trayectoria en el plano
$f(t)=(x(t),y(t))$ en el instante $t=a$

$$(x(a),y(a))+t(y'(a),-x'(a)) \text{ o}$$
$$(x-x(a))x'(a)+(y-y(a))y'(a)=0$$

Recta tangente y plano normal en el espacio

Recta tangente a una trayectoria en el espacio
$f(t)=(x(t),y(t),z(t))$ en el instante $t=a$

$$(x(a),y(a),z(a))+t(x'(a),y'(a),z'(a))$$

Plano normal a una trayectoria en el espacio
$f(t)=(x(t),y(t),z(t))$ en el instante $t=a$

$$x'(a)(x-x(a))+y'(a)(y-y(a))+z'(a)(z-z(a))=0$$

Derivadas de funciones de varias variables

Derivadas parciales

Vector gradiente

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Matriz Hessiana

$$\nabla^2 f=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Hessiano

$$Hf(P)=|\nabla^2 f(P)|$$

Derivada direccional de f en el punto P en la dirección de v

$$f_{\mathbf{v}}'(P)=\nabla f(P)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Regla de la cadena

$$f(g(t))'=\nabla f(g(t))g'(t)$$

Rectas tangente y normal en el plano

Recta normal a una trayectoria en el plano
$f(x,y)=0$ en el punto $P=(a,b)$

$$P+t\nabla f(P)=(a,b)+t\nabla f(a,b) \text{ or}$$
$$(x-a)\tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)-(y-b)\tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$$

Recta tangente a una trayectoria en el plano
$f(x,y)=0$ en el punto $P=(a,b)$

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

Recta normal y plano tangente en el espacio

Recta normal a una superficie en el espacio
$f(x,y,z)=0$ en el punto $P=(a,b,c)$

$$P+t\nabla f(P)=(a,b,c)+t\nabla f(a,b,c)$$

Plano tangente a una superficie en el espacio
$f(x,y,z)=0$ en el punto $P=(a,b,c)$

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)=0$$

Derivadas implícitas

Derivada implícita de una función $f(x,y)=0$

$$y'=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{and} \quad x'=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Derivada parcial implícita de una función $f(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Extremos locales y puntos de silla

1. Calcular los puntos críticos $\nabla f(P)=0$.
2. En cada punto crítico P calcular el Hessiano:
   - $Hf(P)>0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)>0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en P.
   - $Hf(P)>0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)<0 \Rightarrow f$ tiene un máximo local en P.
   - $Hf(P)<0 \Rightarrow f$ tiene un punto de silla en P.

Aproximación de funciones

Polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x,y)$ en el punto $P=(a,b)$

$$P^2_{f,P}(x,y)=f(a,b)+\nabla f(a,b)(x-a,y-b)+ \\ +\frac{1}{2}(x-a,y-b)\nabla^2 f(a,b)(x-a,y-b)$$

Polinomio de Maclaurin de segundo orden de $f(x,y)$

$$P^2_{f,(0,0)}(x,y)=f(0,0)+\nabla f(0,0)(x,y)+\frac{1}{2}(x,y)\nabla^2 f(0,0)(x,y)$$