Fórmulas de Cálculo

Geometría Analítica

Vectores

Vector que une dos puntos $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{PQ} = Q - P = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n)$$

Producto escalar $\mathrm{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\mathrm{v} = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Vectores ortogonales (perpendiculares)

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = 0$$

Rectas

Ecuación vectorial de una recta que pasa por el punto P con dirección del vector v

$$P + t\mathrm{v}$$

Ecuación punto-pendiente de una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto (x_0, y_0) con pendiente m

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

Planos

Ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) perpendicular al vector (a, b, c)

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Derivadas de funciones de una variable

Concepto de derivada

Tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, a + \Delta x]$

$$\mathrm{ARC}f[a, a + \Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Tasa de variación instantánea (derivada) de una función $f(x)$ en el punto $x = a$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Álgebra de derivadas

Suma $(u + v)' = u' + v'$

Resta $(u - v)' = u' - v'$

Producto $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Cociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Regla de la cadena $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Rectas secante y tangente

Recta secante a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(a, f(a))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$

$$y = f(a) + \mathrm{ARC}f[a, a + \Delta x](x - a)$$

Recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Crecimiento, concavidad y extremos

Crecimiento

- $\forall x \in I\ f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ es creciente en I.
- $\forall x \in I\ f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ es decreciente en I.

Concavidad

- $\forall x \in I\ f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en I.
- $\forall x \in I\ f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en I.

Extremos Si $f'(a) = 0$ (punto crítico)

- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo local en $x = a$.
- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en $x = a$.

Aproximación de funciones

Variación de una función

$$\Delta y \approx f'(a)\Delta x$$

Polinomio de Taylor de orden n de $f(x)$ en el punto $x = a$

$$P^n_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Polinomio de Maclaurin de orden n of $f(x)$

$$P^n_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Ecuaciones diferenciales

Ecuación diferencial de primer orden

Ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0$$

Problema del valor inicial

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, & \text{EDO de primer orden;} \\ y(x_0) = y_0, & \text{Condición inicial.} \end{cases}$$

Resolución de EDO de primer orden

EDO de variables separables

$$y' g(y) = f(x)$$

Solución:

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx + C.$$

EDO lineal

$$y' + g(x)y = h(x)$$

Solución:

$$y = e^{-\int g(x)\, dx} \left(\int h(x) e^{\int g(x)\, dx}\, dx + C \right).$$

Derivadas de funciones vectoriales

Derivada de una función vectorial

Si $f(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ entonces

$$f'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

Rectas tangente y normal en el plano

Recta tangente a una trayectoria en el plano
$f(t) = (x(t), y(t))$ en el instante $t = a$

$$(x(a), y(a)) + t(x'(a), y'(a)) \text{ o}$$
$$(x - x(a))y'(a) - (y - y(a))x'(a) = 0$$

Recta normal a una trayectoria en el plano
$f(t) = (x(t), y(t))$ en el instante $t = a$

$$(x(a), y(a)) + t(y'(a), -x'(a)) \text{ o}$$
$$(x - x(a))x'(a) + (y - y(a))y'(a) = 0$$

Recta tangente y plano normal en el espacio

Recta tangente a una trayectoria en el espacio
$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en el instante $t = a$

$$(x(a), y(a), z(a)) + t(x'(a), y'(a), z'(a))$$

Plano normal a una trayectoria en el espacio
$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en el instante $t = a$

$$x'(a)(x - x(a)) + y'(a)(y - y(a)) + z'(a)(z - z(a)) = 0$$

Derivadas de funciones de varias variables

Derivadas parciales

Vector gradiente

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Matriz Hessiana

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Hessiano

$$Hf(P) = |\nabla^2 f(P)|$$

Derivada direccional de f en el punto P en la dirección de v

$$f_v'(P) = \nabla f(P) \frac{v}{|v|}$$

Regla de la cadena

$$f(g(t))' = \nabla f(g(t)) g'(t)$$

Rectas tangente y normal en el plano

Recta normal a una trayectoria en el plano
$f(x, y) = 0$ en el punto $P = (a, b)$

$$P + t\nabla f(P) = (a, b) + t\nabla f(a, b) \text{ or}$$
$$(x - a)\tfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) - (y - b)\tfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$$

Recta tangente a una trayectoria en el plano
$f(x, y) = 0$ en el punto $P = (a, b)$

$$(x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Recta normal y plano tangente en el espacio

Recta normal a una superficie en el espacio $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P = (a, b, c)$

$$P + t\nabla f(P) = (a, b, c) + t\nabla f(a, b, c)$$

Plano tangente a una superficie en el espacio $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P = (a, b, c)$

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)+(z-c)\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

Derivadas implícitas

Derivada implícita de una función $f(x, y) = 0$

$$y' = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{and} \quad x' = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Derivada parcial implícita de una función $f(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Extremos locales y puntos de silla

1. Calcular los puntos críticos $\nabla f(P) = 0$.
2. En cada punto crítico P calcular el Hessiano:
   - $Hf(P) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en P.
   - $Hf(P) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo local en P.
   - $Hf(P) < 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de silla en P.

Aproximación de funciones

Polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x, y)$ en el punto $P = (a, b)$

$$P^2_{f,P}(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b)(x - a, y - b)+$$
$$+\frac{1}{2}(x - a, y - b)\nabla^2 f(a, b)(x - a, y - b)$$

Polinomio de Maclaurin de segundo orden de $f(x, y)$

$$P^2_{f,(0,0)}(x, y) = f(0, 0)+\nabla f(0, 0)(x, y)+\frac{1}{2}(x, y)\nabla^2 f(0, 0)(x, y)$$