<table>
<tr><td rowspan="4">CEU</td><td colspan="2">EXAMEN DE ANÁLISIS (2ª PARTE)</td></tr>
<tr><td>1º Grado en Ingeniería Matemática</td><td>Nombre:</td></tr>
<tr><td>Asignatura: ANÁLISIS I</td><td>DNI:</td></tr>
<tr><td>Fecha: 2025-01-14</td><td>Modelo A</td></tr>
</table>

Duración: 1 hora y 30 minutos.

1. (2.5 puntos) La concentración de un fármaco en sangre, C en mg/dl, y el tiempo, t en s, están relacionados mediante la expresión $e^{tC} - t^2C^3 - \ln(C) = 0$.

   a) ¿Cómo varía la concentración del fármaco en sangre con el tiempo en el instante $t = 0$?

   b) Calcular la ecuación de la recta normal a la curva definida por la ecuación anterior en ese mismo instante.

2. (2.5 puntos) Un globo que está lleno de un gas perfecto tiene un volumen de 5 litros, una presión de 1 atmósfera y una temperatura de 300 K.

   a) Si en ese instante se empieza a calentar el gas a razón de 5 K/min, ¿cómo cambiará la presión suponiendo que el volumen se mantiene constante?

   b) Si en ese instante se empieza a comprimir el globo de manera que el volumen decrece a razón de 10 cl/min, ¿que variación experimentará la presión si se mantiene la temperatura constante? Dar una aproximación lineal del instante en el que el globo explotará, suponiendo que la presión máxima que puede soportar es de 1.1 atmósferas.

   Nota: La ecuación de los gases perfectos es $PV = cT$, donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura absoluta y c una constante.

3. (2.5 puntos) Demostrar la fórmula del binomio

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

   con $n \in \mathbb{N}$ usando polinomios de Taylor.

4. (2.5 puntos) Se dice que una función f es *Lipschitziana* en un intervalo $[a, b]$ si existe una constante $L > 0$, llamada constante de Lipschitz, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

   para cualesquiera $x, y \in [a, b]$.

   a) Demostrar que si f tiene derivada continua en $[a, b]$, entonces f es Lipschitziana en $[a, b]$ y la menor constante de Lipschitz es $L = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

   b) Usando el resultado anterior, demostrar que $f(x) = (x^2 - 4)^2$ es Lipschitziana en $[-2, 2]$, y calcular la menor constante de Lipschitz.