EXAMEN DE ANÁLISIS I

1º Grado en Ingeniería Matemática — Modelo A — **21/12/2022**

Duración: 1 hora y 15 minutos.

1. (2 puntos) Dar una aproximación de $\ln(\sqrt{1/2})$ usando un polinomio de Taylor de cuarto grado.

Solución

Para realizar la aproximación que se pide calcularemos el polinomio de Taylor de cuarto grado de la función $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ en el punto 1, ya que el valor de la función y sus sucesivas derivadas en este punto son sencillas. La fórmula del polinomio de Taylor es

$$P^4_{f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f''''(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Así pues, calculamos hasta la cuarta derivada en 1:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \ln(\sqrt{x}) = \tfrac{1}{2}\ln(x) && f(1) = \tfrac{1}{2}\ln(1) = 0\\
&f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-1} && f'(1) = \tfrac{1}{2}\\
&f''(x) = \tfrac{-1}{2}x^{2} && f''(1) = \tfrac{-1}{2}\\
&f'''(x) = x^{-3} && f'''(1) = 1\\
&f''''(x) = -3x^{-4} && f''''(1) = -3
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la fórmula del polinomio de Taylor se tiene

$$\begin{aligned}
P^4_{f,1}(x) &= 0 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-1/2}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{-3}{24}(x-1)^4\\
&= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{8}(x-1)^4.
\end{aligned}$$

Para aproximar $\ln(\sqrt{1/2})$ calculamos el polinomio en $x = 1/2$.

$$P^4_{f,1}(1/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-1\right)^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-1\right)^4 = -0{,}34114583.$$

---

2. (2 puntos) La función $h(x) = \dfrac{x^2-2x+a}{x^3+bx^2-6x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Calcular el valor de a y b, y clasificar el resto de discontinuidades.

Solución

Para que la función $h(x) = \dfrac{x^2-2x+a}{x^3+bx^2-6x}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 2$, debe cumplirse que $\lim_{x\to 2} h(x) \neq h(2)$. Una manera de que esto se cumpla es que la función no esté definida en $x = 2$ pero sí exista el límite en ese punto. Para que la función no esté definida en $x = 2$ el denominador debe anularse, es decir,

$$2^3 + b2^2 - 6\cdot 2 = 0 \Rightarrow 8 + 4b - 12 = 0 \Rightarrow b = 1.$$

Por otro lado, el límite en $x = 2$ es

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x + a}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{a}{0},$$

de manera que, para que el límite exista, debe ser $a = 0$, y en tal caso,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 6x} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5},$$

y, por tanto, $h(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$ como se pide.

Como se trata de una función racional, será discontinua en los puntos que anulen el denominador, es decir $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$. Ya hemos visto que en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable y faltaría clasificar las otras dos discontinuidades.

En $x = -3$ se tiene

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = \infty,$$

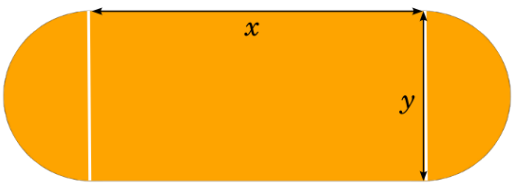
y, por tanto, h tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.

Finalmente en $x = 0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3},$$

por lo que h tiene otra discontinuidad evitable en $x = 0$.

3. (2.5 puntos) El envoltorio de unas píldoras está formado por un cilindro con dos semiesferas en sus extremos, tal y como se aprecia en la imagen.



Si el contenido de las píldoras debe ser de 0,15 ml, hallar las dimensiones de x e y para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

Solución

El volumen de una esfera de radio r es $v_e(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y el de un cilindro de radio r y altura h es $v_c(r,h) = \pi r^2 h$, de modo que que el volumen de la píldora es $v(r,h) = v_e(r) + v_c(r,h) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$. Como el volumen de la píldora debe ser 0,15 ml $= 0{,}15$ cm^3, imponiendo esta restricción, se tiene

$$v(r,h) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 0{,}15 \Leftrightarrow h = \frac{0{,}15 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}. \tag{1}$$

Por otro lado, la superficie de una esfera de radio r es $s_e(r) = 4\pi r^2$ y la superficie del envolvente de un cilindro de radio r y altura h es, en realidad, la superficie de un rectángulo de lados $2\pi r$ y h, es decir, $s_c(r,h) = 2\pi r h$, de manera que la superficie de la píldora es $s(r,h) = 4\pi r^2 + 2\pi r h$, pero sustituyendo el valor de h que hemos obtenido de imponer la restricción del volumen se tiene,

$$s(r) = 4\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{0{,}15 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}\right) = 4\pi r^2 + \left(\frac{0{,}3 - \frac{8}{3}\pi r^3}{r}\right) = 4\pi r^2 + \frac{0{,}3}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2 + \frac{0{,}3}{r},$$

que es la función a optimizar.

Para calcular el mínimo de la función, calculamos primero los puntos críticos.

$$s'(r) = \frac{4}{3}\pi 2r - \frac{0{,}3}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\pi r = \frac{0{,}3}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{0{,}9}{8\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0{,}9}{8\pi}} \approx 0{,}3296\text{cm}.$$

Para ver si en este punto hay un mínimo aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$s''(r) = \frac{8}{3}\pi - \frac{0{,}3(-2)}{r^3} = \frac{8}{3}\pi + \frac{0{,}6}{r^3} > 0\ \forall r > 0.$$

Por tanto, s tiene un mínimo local en $r = 0{,}3296$, y la altura del la píldora con la mínima superficie será, utilizando la ecuación (1),

$$h = \frac{0{,}15 - \frac{4}{3}\pi 0{,}3296^3}{\pi 0{,}3296^2} \approx 0.$$

Así pues, las dimensiones óptimas serían $x = h = 0$ e $y = 2r = 0{,}6592$, que en realidad es una esfera de diámetro 0,6592 cm.

---

4. (1.5 puntos) Demostrar que la función $f(x) = \ln\left(k\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)\right)$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0,1)$ para cualquier valor de k.

Solución

$x^2 - 2x + \frac{3}{2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, de manera que, para que exista la función f, debe ser también $k > 0$ y, por tanto, aplicando propiedades de logaritmos se tiene, $f(x) = \ln\left(k\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)\right) = \ln(k) + \ln\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)$.

Por otro lado, como $x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ es un polinomio, es continuo en todo $\mathbb{R}$, y por tanto, $f(x)$ también es continua en todo $\mathbb{R}$, siempre que $k > 0$.

Demostraremos que f no puede tener más de una raíz en el intervalo $(0,1)$ por reducción al absurdo. Supongamos que existen $0 < a < b < 1$ tales que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces, aplicando el teorema de Rolle, debe existir algún valor $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Si calculamos los puntos críticos de f se tiene

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3/2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

pero como $1 \not\in (a,b)$, llegamos a una contradicción ya que no existe ningún valor $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$. Así pues, f no puede más de una raíz en el intervalo $(0,1)$.

---

5. (2 puntos) Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la curva implícita $e^{x^2y} - \ln(\sqrt{x-y}) = 0$ en el punto $x = 0$.

Solución

En primer lugar obtenemos los valores de y que cumplen la ecuación de la curva implícita para $x = 0$. Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$e^{0^2y} - \ln(\sqrt{0-y}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(\sqrt{-y}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln(\sqrt{-y}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{-y} = e \Leftrightarrow y = -e^2.$$

Así pues, hay que calcular la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto $(0, -e^2)$.
Como la pendiente de la recta tangente es la tasa de variación instantánea, calculamos $y' = \frac{dy}{dx}$ implícitamente

$$\left(e^{x^2y} - \ln(\sqrt{x-y})\right)' = 0' \Leftrightarrow \left(e^{x^2y} - \frac{1}{2}\ln(x-y)\right)' = 0 \Leftrightarrow$$
$$e^{x^2y}(2xy + x^2y') - \frac{1}{2}\frac{1-y'}{x-y} = 0.$$

Sustituyendo en $x = 0$ y $y = -e^2$, se tiene

$$e^{0^2(-e^2)}(2\cdot 0(-e^2) + 0^2y') - \frac{1}{2}\frac{1-y'}{0-(-e^2)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-(1-y')}{2e^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - y' = 0 \Leftrightarrow y' = 1.$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en $(0, -e^2)$ es

$$y = y_0 + \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) = (-e^2) + 1(x-0) = x - e^2.$$

Y la ecuación de la recta normal a la curva en $(0, -e^2)$ es

$$y = y_0 - \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_0, y_0)}(x - x_0) = (-e^2) - 1(x-0) = -x - e^2.$$
