

Facultad
de
Ciencias

Campos de Killing

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Gustavo Gancedo Crespo

Director: Diego Herranz Muñoz

1 Variedades diferenciables y topológicas

En relatividad general el espacio tiempo se define como una variedad diferenciable pseudo-riemanniana cuya métrica obedece unas ciertas ecuaciones de campo. En esta sección se va a motivar la definición de una variedad diferenciable y definir que es un sistema de coordenadas.

1.1. Variedades topológicas

Antes de definir que es una variedad diferenciable hay que definir un objeto más simple al cual se le imponen ciertas restricciones para definir las variedades diferenciables.

Una variedad topológica es un espacio topológico al cual “se le pueden dar coordenadas”

Definición: Espacio topológico.

Un espacio topológico es un conjunto de elementos M y otro conjunto, τ , al que llamamos topología.

La topología define que es un conjunto abierto en M y cumple las siguientes relaciones

$$\emptyset, M \in \tau$$

donde \emptyset es el conjunto vacío.

$$x_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i \in \tau$$

$$x_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=0}^n x_i \in \tau$$

En los espacios topológicos los conjuntos abiertos son también llamados entorno del punto.

En un espacio topológico se puede definir la continuidad de una función entre dos espacios topológicos de la siguiente manera.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre dos espacios topológicos. Si $x \in X$ cumple que para todo entorno V de $f(x) \in V$, $f^{-1}(V)$ es un entorno de x entonces f es continua en x .

Si una función es biyectiva, continua y con inversa continua se le llama homeomorfismo.

Un espacio topológico se llama **Hausdorff** si cumple que

$$\forall x, y \in M \quad \exists U, V \in \tau_M : U \cap V = \emptyset, x \in U, y \in V \quad (1.1)$$

Un espacio topológico tiene **base numerable** si existe un conjunto $B \subset \tau_M$ numerable tal que:

$$\forall V \in \tau_M \quad \exists U \subseteq B : V = \bigcup_{u \in U} u \quad (1.2)$$

Si un espacio topológico M cumple que cualquier conjunto abierto de su topología τ es homeomorfo a \mathbb{R}^n . Y además es Hausdorff y con base numerable entonces es una variedad topológica y las coordenadas locales son los homeomorfismos de abiertos a \mathbb{R}^n .

Se define una especie de sistema de referencia global llamado Atlas a un conjunto de mapas $\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\cup_i U_i = M$. Además se requiere que para cada pareja de mapas, si estas “mapean” la misma sección de la variedad, entonces puedan definir una biyección entre ambos conjuntos. Es decir, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es una biyección.

1.2. Variedades diferenciables

Dos mapas son compatibles si se cumple que la biyección $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es \mathcal{C}^∞ . Si se puede construir un Atlas tal que todos sus mapas son compatibles entonces este es un Atlas compatible.

Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica que admite Atlas compatibles.

2

Funciones escalares y curvas

2.1. Funciones escalares y diferenciabilidad.

Una función escalar en una variedad es una función que mapea puntos de la variedad a números.

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Puesto que en principio una variedad no tiene porqué tener una noción de distancia para definir cuando una función es suave se usa un sistema de coordenadas local. Es decir, dado un Atlas \mathcal{A} la función f es suave si $\forall \varphi \in \mathcal{A}$ la función $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es suave.

2.2. Curvas suaves

Una curva es un mapa de un parámetro en la variedad

$$\gamma : U \subset \mathbb{R} \rightarrow M \quad (2.2)$$

De manera similar a las funciones escalares una curva es suave si la curva $\varphi \circ \gamma$ es suave.

En el cálculo multivariable los campos vectoriales son funciones de $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esto da una noción de que cada vector se encuentra en un punto concreto del espacio, sin embargo, el espacio final es el mismo para todos los vectores independientemente del punto. En una variedad diferenciable esto no siempre se va a cumplir (en general nunca). Por ejemplo, en el caso de una esfera, si uno quisiera definir un campo vectorial en la esfera este debería ser tangente, puesto que al tratarla como una variedad diferenciable ignoramos la dimensión extra en la que se encuentra imbuida. Esto significa que cada vector situado en un punto p de la esfera vive en un espacio tangente a la esfera el cual corresponde a un plano tangente a la esfera en el punto p . Por lo tanto cada punto tiene su propio plano tangente y no corresponden al mismo espacio.

Por lo tanto es importante definir que es este espacio tangente en una variedad antes de poder definir los campos vectoriales.

3.1. Espacio tangente

Queremos definir un espacio que corresponda con los vectores posibles en un punto concreto. Una idea que puede tener uno es que, los posibles vectores podrían corresponder a las derivadas de curvas en M . Esta definición es interesante pero tiene el problema de que al no tener una noción de distancia en la variedad no se pueden tomar derivadas. Una forma de resolver este problema es usar las propias curvas como método para representar las direcciones posibles de forma similar a como las fracciones representan los números racionales.

De esta manera se define la siguiente equivalencia entre curvas.

Sean γ_1 y γ_2 curvas tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y φ un mapa tal que un entorno de p está en su dominio. Se define la siguiente relación de equivalencia

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \quad (3.1)$$

Es decir si sus derivadas son iguales al dar un sistema de coordenadas local.

De esta forma el espacio tangente en el punto p , denotado $T_p M$, es el conjunto de clases de equivalencia de las curvas suaves con $\gamma(0) = p$.

Con esta definición queda claro que la noción de espacio tangente no es tanto una noción de vector “clásica” como flecha que apunta en una dirección sino que más bien es algo así como las posibles direcciones en las que uno se puede mover desde p .

Existe una segunda definición, equivalente a la primera, que define el espacio tangente como una especie de análogo a las derivadas direccionales.

Para ello se define una derivación. Una derivación es una función lineal $D : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ que además satisface la regla del producto $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot D(g)$. El espacio tangente sería entonces el conjunto de derivaciones en el punto p .

Es fácil ver que ambas definiciones son equivalentes puesto que para cualquier curva

$$D_\gamma f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \quad (3.2)$$

es una derivación en el punto p .

3.2. Campos vectoriales

Un campo vectorial se puede interpretar como una función que mapea puntos de la variedad a los correspondientes espacios tangentes. Por simplificar la notación se suele usar la noción de paquete tangente

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (3.3)$$

cuyos elementos se suelen denotar $(p, v) \in TM$ de forma que $v \in T_p M$. Así se puede definir el llamado mapa proyectivo $\pi(p, v) = p$.

De esta forma un campo vectorial sería un mapa $X : M \rightarrow TM$ que cumple que $\pi \circ X = \text{id}_M$ donde id_M es la función identidad.

Esencialmente esto quiere decir que $p \mapsto X_p \in T_p M$.

Si se tiene un sistema de coordenadas $(U, (x^i))$ entonces se puede escribir el campo mediante la base de derivadas parciales

$$X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (3.4)$$

De esta forma se dice que X_p es suave si todas las X^i son suaves.

4

Mapeados suaves entre variedades y diffeomorfismos

Un mapeado entre dos variedades diferenciables, M y N es una función $F : M \rightarrow N$. Dado un sistema de coordenadas (U, φ) para M y (V, ψ) para N de forma que $p \in U$ y $F(p) \in V$. Se dice que el mapeado es suave si la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es suave. Esencialmente lo que se hace es el siguiente proceso

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi^{-1}} M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

Puesto que φ y ψ son homeomorfismos F es suave si también lo es la composición con estos.

Un **Difeomorfismo** es un mapeado continuo con inversa continua.

Los diffeomorfismos dan una noción de equivalencia en el sentido de que si dos variedades son diffeomórficas entonces podemos considerarlas “equivalentes” y se puede escribir $M \approx N$.

4.1. Pullback y pushforward

Si uno tiene un campo escalar f en una variedad N . Y además tiene otra variedad con un mapeado suave $F : M \rightarrow N$. Entonces puede convertir el campo escalar f en un campo escalar en M mediante el “pullback”

$$F^*f = f \circ F \quad (4.2)$$

Esencialmente se tiene que $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ por lo que F^*f es un campo escalar en M .

Si además F es un diffeomorfismo se puede definir el pushforward F_* que mapea campos escalares en M , g , a campos escalares en N de la siguiente manera.

$$F_*g = (F^{-1})^*g = g \circ F^{-1} \quad (4.3)$$

Puesto que $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ el pushforward y el pullback son lineales.

De forma similar puesto que $(fg)(p) = f(p)g(p)$ tanto para el pullback como para el pushforward ambos son “lineales” con respecto al producto de campos escalares.

4.2. Diferencial

El diferencial de un mapeado suave esencialmente actúa como el pushforward para campos vectoriales. El diferencial, $dF : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$, se define de la siguiente manera

$$dF(v) = v \circ F^* \quad (4.4)$$

Esencialmente se usa que $T_{F(p)}N = \{\varphi : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}\}$ y $T_pM = \{\varphi : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}\}$ de forma que

$$\mathcal{C}^\infty(N) \xrightarrow{F^*} \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{v} \mathbb{R} \quad (4.5)$$

por lo que $v \circ F^* : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} \implies v \circ F^* \in T_{F(p)}N$

A la hora de definir la derivada de lie va a ser de vital importancia la noción de flujos. Un flujo, de forma intuitiva, describe el movimiento de una partícula cuya velocidad es un campo vectorial dado.

La forma de definir esta noción de forma rigurosa es la de las curvas integrales. Si uno tiene una curva $\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ y un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ entonces la “derivada” de γ es el correspondiente elemento del espacio tangente en $\gamma(t)$.

Se dice que γ es una curva integral de V si cumple que $\gamma'(t) = V(\gamma(t)) \quad \forall t$.

Si uno toma un sistema de coordenadas obtendrá un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $\gamma^{i'}(t) = V^i(\gamma(t))$. La existencia y unicidad de soluciones de este sistema está garantizado puesto que V es suave, por lo tanto, Lipschitz. Un punto interesante que surgirá más adelante es que no es difícil ver que si γ es solución entonces $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t + t_0)$ también lo será.

5.1. Flujos

Una manera de pensar en las curvas integrales es como diffeomorfismos $M \rightarrow M$. Si uno tiene el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t,p)}{dt} = V(\phi(t,p)) \\ \phi(0,p) = p \end{cases} \quad (5.1)$$

entonces fijando t , $\phi^t(p) = \phi(t,p)$, se obtiene un diffeomorfismo puesto que las soluciones son únicas.

Además puesto que las curvas integrales admiten un cambio de parámetro cambiando t_0 se tiene que

$$\phi(t, \phi(s,p)) = \phi(t+s, p) \quad (5.2)$$

De esta manera $\phi^{-t}(\phi^t(p)) = \phi^0(p) = p \implies \phi^{-t} = (\phi^t)^{-1}$

6 Tensores y espacio dual

6.1. Espacio dual

Si uno tiene un espacio vectorial V uno puede definir un tipo de funciones entre dos espacios vectoriales llamadas lineales las cuales cumplen que para cualquier conjunto de escalares (a, b) y vectores (u, v)

$$f(a \cdot v + b \cdot u) = af(a) + bf(b) \quad (6.1)$$

En concreto, se pueden definir funciones de $V \rightarrow \mathbb{R}$ con la estructura habitual de espacio vectorial de los números reales. Uno puede definir la suma y multiplicación por un escalar de estas funciones de forma simple como

$$\begin{aligned} (f + g)(v) &= f(v) + g(v) \\ (af)(v) &= af(v) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Usando esta definición es claro que esto forma un segundo espacio vectorial al cual vamos a denotar V^* o espacio dual de V . Es facil ver que V^* tiene que tener la misma dimensión que V . Esto es porque si V tiene n dimensiones entonces tiene una base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Si uno evalúa un vector arbitrario u con una función lineal obtiene

$$f(u) = f(\alpha^i v_i) = \alpha^i f(v_i) \quad (6.3)$$

De esta forma uno puede ver que determinando los n números correspondiendo a las $f(v_i)$ la función f queda perfectamente determinada por lo que el espacio V^* tiene n dimensiones.

6.2. Pullback de covectores

Si uno tiene un covector y un mapeado entre variedades $F : M \rightarrow N$ se puede definir el pullback $F^* : T_{F(p)}N^* \rightarrow T_pM^*$ de un elemento del espacio cotangente ω mediante $(F^*\omega)(v) = \omega \circ F_*(v)$. Es decir, se translada v a $T_{F(p)}N$ con el pushforward y ahí se aplica ω .

6.3. Tensores

Ahora uno podría querer extender este razonamiento a funciones con más de un “input” y que devuelvan vectores en vez de solo escalares. Esto da la noción de funciones multilineales.

Comenzando por el caso más simple función multilineal es aquella la cual toma elementos de $V \times V \times V \dots$ y devuelve números reales y además cumple la siguiente relación

$$T(v_1, v_2, \dots, \alpha v_i + \beta u_i, \dots) = \alpha T(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots) + \beta T(v_1, v_2, \dots, u_i, \dots) \quad (6.4)$$

para cualquier i .

Es interesante notar que si uno tiene una pareja de vectores arbitrarios escritos en unas bases $\{\vec{e}_i\}$ y $\{\vec{e}'_i\}$, $v = v^i \vec{e}_i$ y $u = u^i \vec{e}'_i$, y una aplicación multilineal con dos inputs, $T(v, u)$, entonces se puede definir $T_{\alpha\beta} := T(\vec{e}_\alpha, \vec{e}'_\beta)$ y usando linealidad se obtiene que $T(v, u) = v^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}$. Por lo que de nuevo la función está determinada por los números $T_{\alpha\beta}$

Ahora uno podría querer intentar generalizar esto y obtener aplicaciones multilineales que devuelvan vectores, múltiples vectores o incluso otras funciones multilineales. Esto, que en principio parece difícil de conseguir, solo requiere de añadir el espacio dual al input de nuestra aplicación.

Ejemplo con vectores

Imaginemos que queremos una aplicación multilineal G que coja dos vectores y devuelva otro. Si por ejemplo se tiene que $w = G(u, v)$, entonces se puede definir una aplicación multilineal de $V^* \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ usando elementos del espacio dual. Si $\omega \in V^*$

$$T(\omega, u, v) = \omega(G(u, v)) \quad (6.5)$$

Además T tiene la misma información que G puesto que si uno tiene una base $\{\vec{e}_i\}$ de V y una base de V^* $\{\omega^i\}$ tal que $\omega^i(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$ y definiendo $T^i_{jk} = T(\omega^i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ entonces

$$w^i = T^i_{jk} u^j v^k \quad (6.6)$$

Por lo tanto uno obtiene de forma automática lo que quería si permite copias de el espacio dual en el “input” de la función. De esta manera se define un tensor de tipo (p, q) o p veces contravariante y q veces covariante como una aplicación multilineal

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.7)$$

6.4. Campos tensoriales en variedades diferenciables

En una variedad diferenciable un campo tensorial es un mapa que a cada punto le asigna un tensor de un tipo arbitrario donde $V = T_p M$. Por ejemplo, la métrica es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ y por lo tanto es una función $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

De forma similar a en el caso de los campos vectoriales para determinar si un campo tensorial es continuo vamos a definir una base y unas componentes y el tensor será suave si las componentes son suaves.

Si uno tiene un tensor de tipo (p, q) T y además una base de $T_p M$ $\{e_i\}$ y $T_p M^*$ $\{\omega^i\}$ entonces las funciones componente de T son:

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(p) = T_p(\omega^{i_1}(p), \dots, \omega^{i_p}(p), e_{j_1}(p), \dots, e_{j_q}(p)) \quad (6.8)$$

6.5. Pullback de un tensor

Igual que podemos hacer pullbacks y pushforwards de funciones escalares y campos vectoriales se puede hacer el pullback de un campo tensorial usando un mapeado continuo entre variedades. En el libro que tengo solo explican este concepto para tensores puramente covariantes, esto es suficiente en nuestro caso puesto que el resto de componentes se podrían bajar con el tensor métrico.

Sea T un tensor k veces covariante, es decir $T : (T_p N)^k \rightarrow \mathbb{R}$, y $F : M \rightarrow N$ un mapa.

El pullback de T se define como T actuando sobre el pushforward de los vectores de $T_{F^{-1}(p)} M$.

$$(F^* T)_p(A, B, C, D, \dots) = T_{F(p)}(dF_p(A), dF_p(B), dF_p(C), dF_p(D), \dots) \quad (6.9)$$

7 Derivada de Lie

La derivada de Lie es un operador lineal que actúa de forma que dado un campo vectorial toma la derivada del objeto que se le pasa a lo largo del flujo del campo. En cierto sentido es como una derivada direccional en la que en cada punto el campo dicta en qué dirección hay que tomar la derivada.

7.1. Derivada de Lie de un campo escalar

El caso de los campos escalares es el más simple, esto es porque el producto final de un campo escalar es un número por lo que se puede dar una definición muy similar al de una derivada “clásica”.

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi^t(p)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}(f \circ \phi^t) = X(f) \quad (7.1)$$

7.2. Derivada de Lie de un campo vectorial

Uno podría intentar hacer lo mismo que en los campos escalares y definir la derivada de Lie mediante la diferencia de los campos en los puntos p y $\phi^t(p)$, sin embargo, el primero de estos es un elemento de $T_p M$ y el segundo de $T_{\phi^t(p)} M$ por lo que no se puede calcular la diferencia de ambos. Para poder definir este objeto hay que llevar ambos objetos al mismo espacio. Para ello se puede usar el diferencial del flujo inverso para mapear $T_{\phi^t(p)} M$ a $T_p M$. De esta forma se define

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}(Y_{\phi^t(p)}) - Y_p}{t} \quad (7.2)$$

Esta expresión resulta ser equivalente a el braket de Lie de ambos campos definido como

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (7.3)$$

Para demostrarlo se puede hacer dando un sistema de coordenadas, en concreto se puede elegir $X = \partial_0$ en los puntos en los que $X \neq 0$. Con esta elección de coordenadas $\phi^t(x^0, x^1, \dots) = (x^0 + t, x^1, \dots)$ y

$$d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi^t(p)}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \quad (7.4)$$

Con estas coordenadas el braket es

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^0}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial Y^j}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Por otro lado la derivada de Lie se convierte en

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Y &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}(Y_{\phi^t(p)}) - Y_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi^t(p)}^j d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\phi^t(p)}\right) - Y_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p}{t} \stackrel{\text{Ec. (7.4)}}{=} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi^t(p)}^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p - Y_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi^t(p)}^i - Y_p^i}{t} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = (\mathcal{L}_X Y^i)_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^0}(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

En los puntos en los cuales $X = 0$ y por lo tanto no se puede tomar este sistema de coordenadas la derivada de Lie es nula puesto que $\phi^t(p) = p$. Además el braket también se anula puesto que $Y(0) = X(\cdot) = 0$. Por lo tanto ambas expresiones son nulas en ambos casos.

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \tag{7.7}$$

7.3. Derivada de Lie de un tensor covariante

La derivada de Lie de un tensor covariante se define de forma similar a los campos vectoriales usando el pullback y el pushforward.

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi^{t*} T_{\phi^t(p)} - T_p}{t} \tag{7.8}$$

Esta expresión puede demostrarse que es equivalente a

$$(\mathcal{L}_X T)(A, B, \dots) = \mathcal{L}_X(T(A, B, \dots)) - T(\mathcal{L}_X A, B, \dots) - T(A, \mathcal{L}_X B, \dots) \tag{7.9}$$

donde $\mathcal{L}_X(T(A, B, \dots))$ es la derivada del campo escalar que a cada punto le asigna el valor al evaluar los campos vectoriales con T .

Tensor métrico

En el caso del tensor métrico se tiene que

$$(\mathcal{L}_X g)_{\alpha\beta} = X^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu} \partial_\beta X^\mu + g_{\mu\beta} \partial_\alpha X^\mu = \nabla_\alpha X_\beta + \nabla_\beta X_\alpha \tag{7.10}$$

Esto da lugar a la ecuación que define los **campos de Killing**.

Un campo de Killing será aquel campo cuyo flujo define una isometría, es decir, que conserva la métrica y por lo tanto

$$\mathcal{L}_X g = X^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu} \partial_\beta X^\mu + g_{\mu\beta} \partial_\alpha X^\mu = \nabla_\alpha X_\beta + \nabla_\beta X_\alpha = 0 \tag{7.11}$$

En cosmología la métrica fundamental que describe el espacio tiempo a gran escala es la métrica FLRW o de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker. En coordenadas esféricas tiene la siguiente expresión

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2 \right) \quad (8.1)$$

donde $a(t)$ es el llamado factor de escala y describe la expansión y contracción del universo y k es el signo de la curvatura del espacio.

Esta sección es bastante matemática y es relativamente larga por lo que es facil perderse. Por ello se da una idea del camino que lleva la demostración.

1. Definir las condiciones que se imponen a la métrica
2. Se demuestra que la métrica tiene forma $ds^2 = -dt^2 + a(t)g_{ij}(x) dx^i dx^j$
3. Se demuestra que la parte espacial de la métrica g_{ij} tiene que ser un espacio de curvatura seccional constante
4. Aplicando el teorema de Killing-Hopf se obtiene que la parte espacial de la métrica tiene que ser isométrica a una esfera, un hiperboloide o un espacio plano y se obtiene la expresión de estas métricas.

8.1. Condiciones para el espacio tiempo a gran escala

A pesar de que a pequeñas escalas el universo no parece tener muchas simetrías. A gran escala se observa que el universo es totalmente homogéneo e isótropo. Es decir, invariante frente a translaciones y frente a rotaciones de este. Esto lleva a pensar que la métrica del espacio debe tener estas propiedades puesto que si no las tuviera se generarían fuerzas gravitatorias que romperían la simetría.

El primer paso definir de forma rigurosa que significa isotropía y homogeneidad en una variedad diferenciable.

Forma general de los campos de Killing

El primer paso consiste en definir que es una rotación y una translación. Para ello el camino a seguir va a ser, primero obtener una forma general de los campos de Killing. Y a partir de esto obtener una base de este espacio de isometrías de forma que unos elementos van a corresponder a rotaciones y otros a translaciones.

Un punto por el que comenzar es el tensor de riemann puesto que tiene simetrías similares a las de la ecuación de Killing

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} K_\delta = \nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma \quad (8.2)$$

Usando que el tensor de Riemann cumple la identidad de Bianchi

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} + R^\delta_{\gamma\alpha\beta} + R^\delta_{\beta\gamma\alpha} = 0 \quad (8.3)$$

Y multiplicando por K_δ y sustituyendo la Ec. (8.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta - \nabla_\alpha \nabla_\gamma K_\beta + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\beta K_\alpha = \\
 & \nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\alpha \nabla_\gamma K_\beta + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta - \nabla_\gamma \nabla_\beta K_\alpha = \\
 & \nabla_\alpha (\nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\gamma K_\beta) + \nabla_\beta (\nabla_\gamma K_\alpha - \nabla_\alpha K_\gamma) + \nabla_\gamma (\nabla_\alpha K_\beta - \nabla_\beta K_\alpha) = \\
 & 2(\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta) = 0
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ahora identificando el término $\nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha = -\nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma$ de la Ec. (8.2) se obtiene

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = -R^\delta_{\alpha\beta\gamma} K_\delta \tag{8.5}$$

Con esta ecuación se puede resolver en términos de la serie de Taylor de los campos de Killing. Para ello se expande K_δ en series de Taylor. Usando la notación multi-índice de forma que

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\
 |\alpha| &= \sum_i \alpha_i \\
 D^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}} \\
 \alpha! &= \prod_i \alpha_i! x^\alpha = \prod_i (x^i)^{\alpha_i}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

La serie de Taylor queda como

$$K_\delta(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha K_\delta(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha \tag{8.7}$$

Ahora mediante la Ec. (8.5) los términos de $|\alpha| = 2$ quedan determinados por $K(p)$ y $\partial_\mu K(p)$, los términos de $|\alpha| = 3$ se obtienen mediante las derivadas de la misma ecuación y así para cualquier $|\alpha|$. Todas estas relaciones son lineales por lo que se puede escribir

$$D^\alpha K_\delta = \hat{A}_\delta{}^\gamma(p, \alpha) K_\gamma(p) + \hat{B}_\delta{}^{\gamma\beta}(p, \alpha) \partial_\gamma K_\beta(p) \tag{8.8}$$

Sustituyendo en la serie de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned}
 K_\delta(x) &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha K_\delta(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha \\
 &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (x-p)^\alpha \left(\hat{A}_\delta{}^\gamma(p, \alpha) K_\gamma(p) + \hat{B}_\delta{}^{\gamma\beta}(p, \alpha) \partial_\gamma K_\beta(p) \right) \\
 &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (x-p)^\alpha \hat{A}_\delta{}^\gamma(p, \alpha) \right) K_\gamma(p) + \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (x-p)^\alpha \hat{B}_\delta{}^{\gamma\beta}(p, \alpha) \right) \partial_\gamma K_\beta(p) \\
 &= A_\delta{}^\gamma(x, p) K_\gamma(p) + 2B_\delta{}^{\gamma\beta}(x, p) \partial_\gamma K_\beta(p)
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Ahora se puede imponer una condición adicional en esta ecuación usando la ecuación de Killing puesto que

$$\partial_\alpha K_\beta = -\partial_\beta K_\alpha + 2\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} K_\sigma \tag{8.10}$$

aplicando esto se obtiene

$$\begin{aligned}
 K_\delta(x) &= A'_\delta{}^\gamma(x, p)K_\gamma(p) + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) + \partial_\gamma K_\sigma(p)) \\
 &= A'_\delta{}^\gamma(x, p)K_\gamma(p) + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) - \partial_\sigma K_\gamma(p) + 2\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}K_\alpha(p)) \\
 &= \underbrace{\left(A'_\delta{}^\alpha(x, p) + 2B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\right)}_{A_\delta{}^\alpha(x, p)}K_\alpha + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) - \partial_\sigma K_\gamma(p)) \quad (8.11) \\
 &= A_\delta{}^\gamma(x, p)K_\gamma(p) + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) - \partial_\sigma K_\gamma(p))
 \end{aligned}$$

En esta ecuación final se obtiene una información muy importante. Puesto que los tensores A y B son independientes del campo de killing los campos de killing forman un espacio vectorial de dimensión $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Esto es puesto que los campos de killing quedan definidos por los valores de $K_\gamma(p)$ y $\partial_\gamma K_\sigma(p)$, el primer término da n elementos y el segundo por ser antisimétrico en la ecuación $\frac{n(n-1)}{2}$.

Para definir una base de este espacio se elige un conjunto de campos de killing dando una serie de elementos del espacio tangente en p y a partir de la Ec. (8.11) se extiende a una base en todo el espacio. Es importante decir que el hecho de que se pueda elegir una base con n elementos no implica que existan n campos de Killing. Esto es porque puede ocurrir que los términos de A y B al combinarlos con ciertos elementos de la base den lugar a un campo de Killing nulo, esto indica que el espacio no tiene todas las posibles simetrías de un espacio con su dimensión.

Por un lado tenemos los términos que acompañan al término $A_\delta{}^\gamma$. Aquí se tendrán n posibles términos, uno por cada dimensión del espacio. De esta forma se puede elegir de forma que el elemento γ todas sus componentes sean nulas excepto el componente γ que valga uno.

$$\begin{aligned}
 K_\alpha^{(\gamma)}(p) &= \delta_\alpha^\gamma \\
 \partial_\sigma K_\alpha^{(\gamma)}(p) &= 0
 \end{aligned} \quad (8.12)$$

donde γ es una etiqueta para cada campo. Si un espacio tiene una base completa de estos elementos en todo punto, y además estos dan lugar a campos de Killing no nulos el espacio se denominará homogéneo. La razón de esta definición se explorará más adelante junto con la isotropía.

Además de los elementos anteriores se tienen los términos de $B_\delta{}^{\gamma\sigma}$. Aquí se sigue el mismo proceso que en la parte anterior, sin embargo, por la antisimetría de estos términos usando una notación similar a la anterior pero haciendo las derivadas parciales no nulas se tiene que $K^{(\gamma, \sigma)} = -K^{(\sigma, \gamma)}$. Para introducir esto se definen $n(n-1)/2$ términos independientes de la forma

$$\begin{aligned}
 K_\alpha^{(\gamma, \sigma)}(p) &= 0 \\
 \partial_\alpha K_\beta^{\gamma, \sigma} &= \delta_{\alpha, \beta}^{\gamma, \sigma} - \delta_{\alpha, \beta}^{\sigma, \gamma}
 \end{aligned} \quad (8.13)$$

Si un espacio tiene una base completa de estos elementos en todo punto y estos dan lugar a campos de Killing lo llamamos isótropo.

Para comprender estas definiciones conviene trabajar en una base ortonormal.

La definición dada en Ec. (8.12) da lugar a una serie de isotropías de forma que las coordenadas se transforman como $x'^\mu = x^\mu + tK^\mu(x) + \mathcal{O}(t^2)$. De esta forma si la Ec. (8.12) se cumple todos los puntos son isótropos a su entorno.

Por otro lado ante la definición Ec. (8.13), en el caso de la base ortonormal cada uno de los elementos corresponde a rotaciones. Esto es porque al aplicar la isotropía asociada se obtiene que para un vector arbitrario

$$V'^{\mu(x)} = \phi_* V^{\mu(x)} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} = (\delta_{\nu}^{\mu} + t \partial_{\nu} K^{\mu}) V^{\nu} = V^{\mu} + t \Delta V^{\mu} \quad (8.14)$$

El vector al aplicar la transformación se convierte en sí mismo mas una componente que es perpendicular al propio vector $(\partial_{\nu} K^{\mu} \stackrel{K(p)=0}{=} \nabla_{\nu} K^{\mu} \stackrel{g=\delta}{=} \nabla_{\nu} \delta^{\mu\alpha} K_{\alpha} = \delta^{\mu\alpha} \nabla_{\nu} K_{\alpha} \stackrel{\text{Si } \mu=\nu}{=} 0)$, además esta transformación conserva la norma por lo que podemos concluir que se trata de una rotación. Un espacio con todas las posibles rotaciones en todos los puntos es isótropo.

Además una variedad que es al mismo tiempo homogénea e isótropa tiene todos los posibles campos de Killing por lo que también se le denomina **maximalmente simétrica**

Nuestro espacio tiempo es homogéneo e isótropo **espacialmente**. Esto quiere decir que en la variedad pseudo-riemanniana que es el espacio-tiempo tiene que haber una familia de sub-variedades Rimanianas de dimensión 3 cuyos vectores tangentes son de tipo espacial y que además son homogéneos e isótropos de acuerdo a la definiciones Ec. (8.12) y Ec. (8.13).

8.2. Forma general de un espacio-tiempo espacialmente homogéneo e isótropo

Comenzamos a tratar la métrica del espacio, lo primero es separar las coordenadas en una parte espacial y una temporal. Es decir, llamando a la variedad espacio-temporal \mathcal{M} existe una hipersuperficie, $\mathbb{E} \subset \mathcal{M}$, de tres dimensiones de tipo espacial que además es maximalmente simétrica que va a representar el espacio en un instante de tiempo concreto.

Eligiendo un sistema de coordenadas para \mathbb{E} , $\{\hat{x}^i\}$, se tiene una base de vectores del espacio tangente a la superficie espacial. Esta base puede extenderse a una base completa del espacio tangente del espacio-tiempo mediante el método de ortonormalización de Gram-Schmidt. De esta forma se obtiene un campo normal a la superficie n^{μ} . Con esto se puede extender el sistema de coordenadas en \mathbb{E} a un sistema de coordenadas en \mathcal{M} . Para ello se coge cada punto $x^{\mu} \in \mathbb{E}$ y se le asigna una geodésica con la condición inicial $\gamma(0) = x^{\mu}$ $\dot{\gamma}(0) = n$. Al conjunto de puntos que traza la geodésica se les asignan las coordenadas $[x^{\mu}] = (s, \hat{x}^i)$ donde \hat{x}^i son las coordenadas asignadas al punto inicial en la variedad y s es la longitud de la geodésica entre $\gamma(0)$ y el punto correspondiente.

Así el espacio en el tiempo “ τ ” corresponde a la hipersuperficie correspondiente a $s = \tau$.

Con este sistema de coordenadas nos gustaría demostrar que la forma de la métrica es $ds^2 = dt^2 - a^2(t) \hat{g}_{ij} dx^i dx^j$. Para ello primero demostramos que la métrica tiene forma de $ds^2 = dt^2 - h_{ij} dx^i dx^j$, que todas las hipersuperficies con $s = \text{cte}$ son maximalmente simétricas y por último que en estas hipersuperficies, por ser maximalmente simétricas, $\dot{h} \propto h$ y por lo tanto $h = a(t)^2 g$.

Para el primer paso nos basta con comprobar que $g_{0i} = 0$ en todo instante de tiempo de forma que en la métrica solo hay términos puramente espaciales y un término puramente temporal.

Para ello podemos usar la ecuación geodésica. Por construcción en este sistema de coordenadas las geodésicas con la condición inicial $\dot{x}^{\mu} = \delta_0^{\mu}$ tienen coordenadas espaciales constantes. La ecuación geodésica resultante es

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i &= 0 = \Gamma_{\mu\nu}^i \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^i \delta_0^{\mu} \delta_0^{\nu} = \Gamma_{00}^i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Gamma_{i00} = 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

.

Usando ahora la relación entre los símbolos de christoffel y la métrica se obtiene que

$$\Gamma_{i00} = \frac{1}{2}(2\partial_0 g_{i0} - \partial_i g_{00}) = 0 \quad (8.16)$$

Puesto que $g_{00} = \|n\|^2$, por construcción $\partial_i g_{00} = 0$. De esta forma se obtiene que

$$\partial_0 g_{i0} = 0 \quad (8.17)$$

Combinando esto con la condición inicial $g_{i0}(s=0, x^i) = 0$ se obtiene esta igualdad para todo punto y todo tiempo. De esta forma se concluye que la métrica tiene que ser de la forma

$$ds^2 = dt^2 - h_{ij} dx^i dx^j \quad (8.18)$$

Para la siguiente parte de la demostración es necesario demostrar primero que todas las superficies con $s = \text{cte}$ son maximalmente simétricas. Es decir, que no aparecen anisotropías ni inhomogeneidades al avanzar el tiempo. Esto se puede demostrar de forma similar a como hemos demostrado que la métrica es separable en espacio y tiempo pero aplicándolo a los campos de Killing.

Partimos de que la superficie $s = 0$ es homogénea e isótropa. Es decir, en términos de campos de Killing, existen campos satisfaciendo las condiciones Ec. (8.12) y Ec. (8.13) para los índices espaciales y con $K^0(s=0, x^i) = 0$.

Usando la componente $(0, 0)$ de la ecuación de Killing Ec. (7.11) se obtiene

$$\begin{aligned} 2g_{00}\partial_0 K^0 + \cancel{K^\alpha \partial_\alpha g_{00}} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \partial_0 K^0 &= 0 \end{aligned} \quad (8.19)$$

Esto unido a la condición inicial $K(s=0, x^i) = 0$ implica que $K^0 = 0$ en todo espacio y tiempo. Es decir, los campos de Killing no pasan a ser de tipo temporal y mantienen su espacialidad.

Si las otras componentes de los campos de Killing también se conservan entonces podemos concluir que el resto de superficies a tiempo constante son maximalmente simétricas puesto que ningún campo se anularía ni tampoco ocurriría que dos campos dejaran de ser únicos en alguna región reduciendo el número de simetrías.

Para ello usamos las componentes $(0, i)$ de la ecuación de Killing

$$\begin{aligned} \cancel{g_{0\alpha}\partial_i K^\alpha} + g_{i\alpha}\partial_0 K^\alpha + \cancel{K^\alpha \partial_\alpha g_{0i}} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \partial_0 K^i &= 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

donde el primer término se anula cuando $\alpha = 0$ por la Ec. (8.19) y el resto puesto que la métrica es separable en parte espacial y temporal. El segundo término se anula por la separabilidad de la métrica. La implicación se debe a que la parte espacial de la métrica es no degenerada por tratarse de una variedad Riemanniana, por lo tanto para cada componente espacial de $\partial_0 K^i$ tiene que haber un término de g que no se anule dando la igualdad.

Esto combinado con las condiciones iniciales correspondientes a cada campo de Killing da lugar a que todos las superficies con tiempo constante son variedades Riemannianas cuya métrica es h y que son maximalmente simétricas.

Para demostrar el último punto de esta sección, que la métrica tiene la forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\hat{g}_{ij} dx^i dx^j \quad (8.21)$$

primero hay que demostrar un teorema que aplica a las variedades Riemannianas maximelemente simétricas.

Este teorema dice que si uno tiene un campo tensorial $T_{\alpha\beta}$ en una variedad maximalmente simétrica y se cumple que $\mathcal{L}_K T = 0$ donde K es un campo de Killing entonces $T_{\alpha\beta} \propto g_{\alpha\beta}$.

Para demostrar esto partimos de la ecuación de Killing usando el conjunto de campos que definen la isometría Ec. (8.13).

$$\mathcal{L}_K T = T_{\gamma\beta} \partial_\alpha K^\gamma + T_{\alpha\gamma} \partial_\beta K^\gamma + \cancel{K^\gamma \partial_\gamma T_{\alpha\beta}} \stackrel{\partial_\alpha K^\gamma = \nabla_\alpha K^\gamma}{=} T^\gamma{}_\beta \partial_\alpha K_\gamma + T_\alpha{}^\gamma \partial_\beta K_\gamma = 0 \quad (8.22)$$

Esto se puede simplificar de la siguiente forma

$$T^\gamma{}_\beta \partial_\alpha K_\gamma + T_\alpha{}^\gamma \partial_\beta K_\gamma = (T^\gamma{}_\beta \delta_\alpha^\sigma + T_\alpha{}^\gamma \delta_\beta^\sigma) \partial_\sigma K_\gamma = 0 \quad (8.23)$$

Usando que para los campos elegidos se cumple la Ec. (8.13) se obtiene que

$$T^\gamma{}_\beta \delta_\alpha^\sigma + T_\alpha{}^\gamma \delta_\beta^\sigma = T^\sigma{}_\beta \delta_\alpha^\gamma + T_\alpha{}^\sigma \delta_\beta^\gamma \quad (8.24)$$

Contrayendo los índices $\alpha = \sigma$ se obtiene

$$\begin{aligned} n T^\gamma{}_\beta + T_\beta{}^\gamma &= T^\gamma{}_\beta + \delta_\beta^\gamma T \Rightarrow \\ \Rightarrow (n-1) T^\gamma{}_\beta + T_\beta{}^\gamma &= \delta_\beta^\gamma T \end{aligned} \quad (8.25)$$

donde n es la dimensión del espacio (en nuestro caso será 3 puesto que va a aplicar a la parte espacial unicamente) y $T := T_\alpha{}^\alpha$

Esta última expresión puede simplificarse multiplicando por $g_{\alpha\gamma}$ y contrayendo índices se obtiene

$$(n-1) T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta} T \quad (8.26)$$

Puesto que la parte derecha de la expresión es simétrica en alpha y beta también lo debe ser la parte izquierda por lo tanto

$$\begin{aligned} (n-1) T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} &= (n-1) T_{\beta\alpha} + T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow (n-2) T_{\alpha\beta} &= (n-2) T_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (8.27)$$

puesto que nuestro caso de interés es $n = 3$ podemos concluir que T debe ser simétrico y por lo tanto combinando esto con la Ec. (8.26) se obtiene finalmente

$$T_{\alpha\beta} = \frac{T}{n} g_{\alpha\beta} \quad (8.28)$$

■

Ahora queremos aplicar este teorema a \dot{h} puesto que si se cumple entonces $\dot{h} \propto h$.

Para ello usamos la ecuación de Killing y las relaciones de Ec. (8.19) y Ec. (8.20).

Derivando la ecuación de Killing con respecto a ∂_0

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K h &= 0 \Rightarrow \partial_0 (\mathcal{L}_K h) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \partial_0 (h_{\sigma\beta} \partial_\alpha K^\sigma + h_{\alpha\sigma} \partial_\beta K^\sigma + K^\sigma \partial_\sigma h_{\alpha\beta}) &= \\ \dot{h}_{\sigma\beta} \partial_\alpha K^\sigma + \dot{h}_{\alpha\sigma} \partial_\beta K^\sigma + K^\sigma \partial_\sigma \dot{h}_{\alpha\beta} + \cancel{h_{\sigma\beta} \partial_\alpha \partial_0 K^\sigma + h_{\alpha\sigma} \partial_\beta \partial_0 K^\sigma + \partial_0 (K^\sigma) \partial_\sigma h_{\alpha\beta}} &= \\ = \mathcal{L}_K \dot{h} &= 0 \end{aligned} \quad (8.29)$$

Por lo tanto aplicando el teorema anterior obtenemos la siguiente ecuación

$$\dot{h}_{\alpha\beta} = f(t)h_{\alpha\beta} \quad (8.30)$$

que dando la condición inicial $h(s=0)_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta}$ se obtiene la solución

$$h_{\alpha\beta}(t, x) = e^{\int_0^t f(s) ds} \hat{g}_{\alpha\beta}(x) = a^2(t) \hat{g}_{\alpha\beta}(x) \quad (8.31)$$

demostrando la forma de la métrica descrita en Ec. (8.21). ■

8.3. El subespacio \mathbb{E} es de curvatura consante

Para finalizar la derivación de la métrica se va a emplear el teorema de Killing Hopf

Para enunciar este teorema es necesario intrducir una noción de curvatura llamada curvatura seccional. Esta noción de curvatura se obtiene eligiendo dos vectores del espacio tangente y extendiendo ese plano mediante geodésicas a un “plano” del espacio, la curvatura seccional es entonces la curvatura gaussiana de esa superficie.

Esta noción de curvatura puede demostrarse que se relaciona con el tensor de curvatura mediante la siguiente ecuación

$$K(u, v) = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta}{(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta}) u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta} \quad (8.32)$$

Donde u y v son los vectores tangentes al plano.

El caso de que la curvatura seccional K sea constante se obtiene que

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta}) \quad (8.33)$$

El teorema de Killing-Hopf establece que cualquier pareja de espacios de curvatura seccional constante son isométricos si tienen la misma curvatura seccional. Es decir, tienen la misma métrica. Por lo tanto, solo existen 3 métricas distintas para estos espacios. En el caso de curvatura positiva se tienen los espacios isométricos a una n -esfera, en el caso de curvatura nula se tiene el espacio euclídeo y en el caso de curvatura seccional negativa son isométricos a un hiperboloide.

De esta forma si se demuestra que los espacios maximalmente simétricos son espacios de curvatura constante ya tendríamos la métrica de FLWR puesto que la única incógnita que queda en la métrica es \hat{g} correspondiente a la métrica de la hipersuperficie \mathbb{E} en $t = 0$.

Restringiéndonos a \mathbb{E} tenemos que en esta subvariedad hay el número máximo de campos de Killing. Puesto que el tensor de Riemann es intrínseco (solo depende de la inducida métrica y no del espacio inmerso) este tiene que ser invariante frente a isometrías y por lo tanto su derivada de Lie debe anularse. En concreto si calculamos la derivada de Lie de los campos definidos en la isotropía Ec. (8.13)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K R &= K^\alpha \partial_\alpha R_{\mu\nu\gamma\sigma} + R_{\alpha\nu\gamma\sigma} \partial_\mu K^\alpha + R_{\mu\alpha\gamma\sigma} \partial_\nu K^\alpha + R_{\mu\nu\alpha\sigma} \partial_\gamma K^\alpha + R_{\mu\nu\gamma\alpha} \partial_\delta K^\alpha = \\ &= R_{\alpha\nu\gamma\sigma} \partial_\mu K^\alpha - R_{\alpha\mu\gamma\sigma} \partial_\nu K^\alpha + R_{\alpha\sigma\mu\nu} \partial_\gamma K^\alpha - R_{\alpha\gamma\mu\nu} \partial_\sigma K^\alpha = \\ \frac{\nabla_\alpha K = \partial_\alpha K}{\text{en rotaciones}} &= R^\alpha_{\nu\gamma\sigma} \nabla_\mu K_\alpha - R^\alpha_{\mu\gamma\sigma} \nabla_\nu K_\alpha + R^\alpha_{\sigma\mu\nu} \nabla_\gamma K_\alpha - R^\alpha_{\gamma\mu\nu} \nabla_\sigma K_\alpha = \\ &= (R^\alpha_{\nu\gamma\sigma} \delta_\mu^\varepsilon - R^\alpha_{\mu\gamma\sigma} \delta_\nu^\varepsilon + R^\alpha_{\sigma\mu\nu} \delta_\gamma^\varepsilon - R^\alpha_{\gamma\mu\nu} \delta_\sigma^\varepsilon) \nabla_\varepsilon K_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (8.34)$$

En esta última igualdad se tiene que $\nabla_\varepsilon K_\alpha$ es antisimétrico en α y ε . Además se tiene que este tensor es arbitrario por la condición de isotropía por lo tanto el término de los tensores de Riemann debe ser simétrico en α y ε .

$$\begin{aligned}
R^\alpha_{\nu\gamma\sigma}\delta^\varepsilon_\mu - R^\alpha_{\mu\gamma\sigma}\delta^\varepsilon_\nu + R^\alpha_{\sigma\mu\nu}\delta^\varepsilon_\gamma - R^\alpha_{\gamma\mu\nu}\delta^\varepsilon_\sigma &= \\
&= R^\varepsilon_{\nu\gamma\sigma}\delta^\alpha_\mu - R^\varepsilon_{\mu\gamma\sigma}\delta^\alpha_\nu + R^\varepsilon_{\sigma\mu\nu}\delta^\alpha_\gamma - R^\varepsilon_{\gamma\mu\nu}\delta^\alpha_\sigma
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Para poder demostrar la ecuación que tenemos que obtener una relación entre el tensor de Riemann y la métrica. Por lo tanto parece buena idea realizar una contracción en esta ecuación con $\varepsilon = \mu$ puesto que de esta forma solo quedan tensores de Riemann y de Ricci. Además puesto que el tensor de Ricci es intrínseco por lo que aplicando Ec. (8.28)

$$\mathcal{L}_K R_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta} = \frac{R}{n} g_{\alpha\beta} \tag{8.36}$$

Realizando la contracción de $\varepsilon = \mu$ a la relación en la Ec. (8.35)

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= R^\alpha_{\nu\gamma\sigma}\delta^\mu_\mu - R^\alpha_{\mu\gamma\sigma}\delta^\mu_\nu + R^\alpha_{\sigma\mu\nu}\delta^\mu_\gamma - R^\alpha_{\gamma\mu\nu}\delta^\mu_\sigma \\
&= nR^\alpha_{\nu\gamma\sigma} - R^\alpha_{\nu\gamma\sigma} + R^\alpha_{\sigma\gamma\nu} - R^\alpha_{\gamma\sigma\nu} \\
&= (n-1)R^\alpha_{\nu\gamma\sigma} + \underbrace{R^\alpha_{\sigma\gamma\nu} + R^\alpha_{\gamma\nu\sigma}}_{\text{identidad de Bianchi}} \\
&= (n-1)R^\alpha_{\nu\gamma\sigma} - R^\alpha_{\nu\sigma\gamma} \\
\text{RHS} &= R^\mu_{\nu\gamma\sigma}\delta^\alpha_\mu - \underbrace{(R^\mu_{\mu\gamma\sigma}\delta^\alpha_\nu)}_{R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -R_{\beta\alpha\gamma\sigma}} + R^\mu_{\sigma\mu\nu}\delta^\alpha_\gamma - R^\mu_{\gamma\mu\nu}\delta^\alpha_\sigma \\
&= R^\alpha_{\nu\gamma\sigma} + R_{\sigma\nu}\delta^\alpha_\gamma - R_{\gamma\nu}\delta^\alpha_\sigma \\
&= -R^\alpha_{\nu\sigma\gamma} + R_{\sigma\nu}\delta^\alpha_\gamma - R_{\gamma\nu}\delta^\alpha_\sigma
\end{aligned} \tag{8.37}$$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \text{RHS} + \text{Ec. (8.36)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow R^\alpha_{\nu\gamma\sigma} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\sigma\nu}\delta^\alpha_\gamma - g_{\gamma\nu}\delta^\alpha_\sigma) \Rightarrow \\
&\cdot g_{\alpha\beta} \Rightarrow R_{\beta\nu\gamma\sigma} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\sigma\nu}g_{\beta\gamma} - g_{\gamma\nu}g_{\beta\sigma})
\end{aligned}$$

Con esto quedaría demostrada la ecuación Ec. (8.33) si se cumple que el escalar de curvatura R es constante. Puesto que esta cantidad es contracción del tensor de Riemann $R = R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$ también es intrínseco y por lo tanto debe cumplir

$$\mathcal{L}_K R = K^\alpha \partial_\alpha R = 0 \tag{8.38}$$

Aplicando la condición de homogeneidad Ec. (8.12) queda demostrado que este escalar es constante y por lo tanto aplica el teorema de Killing-Hopf. De esta forma la parte espacial de la métrica tiene que ser isométrica a uno de los tres espacios de curvatura constante de forma que

$$ds^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right) \tag{8.39}$$

Donde R es un parámetro que controla el módulo de la curvatura y $k \in \{-1, 0, 1\}$ y selecciona el signo de la curvatura. Absorbiendo R^2 en el término de a^2 queda demostrada la ecuación Ec. (8.1)

■

9

Demostración ley de Snell

Si uno tiene una lente o algun otro tipo de material cuando la luz cambia de medio se desvía. Una forma de modelar esto es usando una teoría efectiva la cual describe el movimiento de la luz como si se encontrara en una métrica de la forma

$$ds = v_L^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (9.1)$$

donde v_L es la velocidad de la luz en ese punto.

Para demostrar esto se puede comenzar con un caso simple en el cual solo hay una frontera plana entre dos objetos, tras esto se puede generalizar a casos más complejos mediante cambios de variables.

9.1. Caso simple

En este caso la métrica está determinada por la velocidad en función de la posición

$$v_L(x) = \begin{cases} v & \text{si } x < 0 \\ v' & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

Para esta métrica hay tres campos de killing de interés

$$\begin{aligned} [\xi^\mu] &= (1, 0, 0, 0) \\ [k^\mu] &= (0, 0, -1, 0) \\ [\omega^\mu] &= (0, 0, -z, y) \end{aligned} \quad (9.3)$$

La ecuación de conservación del tercero no lo he hecho todavía pero es invarianza con respecto a rotaciones y da la conservación del plano que forman el vector velocidad y el vector normal al plano.

Las otras dos dan respectivamente la conservación de las componentes u^2 y $v_L^2 u^0$. No es difícil de comprobar puesto que para todo campo de killing la cantidad $K = k_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} k^\nu u^\mu$ es constante de movimiento.

Ahora hay que darse cuenta de una cosa. Si el rayo de luz se mueve con un ángulo θ con respecto al eje x la velocidad en el eje y será:

$$\begin{aligned} v_L \sin(\theta) &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dy}{d\sigma} \left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^{-1} = \frac{u^2}{u^0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sin(\theta)}{v_L} = \frac{u^2}{v_L^2 u^0} \end{aligned} \quad (9.4)$$

puesto que la parte derecha de la igualdad son cantidades conservadas la parte izquierda también debe de serlo y por lo tanto

$$\frac{\sin(\theta)}{v_L} = \frac{\sin(\theta')}{v'_L} \quad (9.5)$$

■

9.2. Caso general

En el caso general basta con realizar un cambio de variable de forma que y y z parametrizan la superficie que separa los dos medios y x sea perpendicular a la superficie.

De esta manera uno se puede dar cuenta que en un punto superficial el espacio tangente no cambia entre ambos sistemas de referencia por lo tanto el ángulo se mantiene al hacer los cambios de variable.

También es importante darse cuenta de que los campos de killing anteriores dejan de serlo en puntos alejados de la superficie pero en la superficie sí que lo son por lo que es suficiente para demostrar el teorema.

9.3. Anisotropos

tengo que hacerlo pero en este caso se usaría una métrica

$$ds = (dt)^2 - \frac{(dx)^2}{(v_x)^2} - \frac{(dy)^2}{(v_y)^2} - \frac{(dz)^2}{(v_z)^2} \quad (9.6)$$

y se procedería de forma similar

10 Métrica de schwarzschild

La métrica de schwarzschild es la métrica exterior a un cuerpo masivo cuya distribución de materia es esféricamente simétrica. En concreto es la solución a las ecuaciones de campo con una única partícula estacionaria en el origen.

Usando coordenadas esféricas se obtiene la siguiente métrica

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (10.1)$$

que puesto que es diagonal cumple que

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}} \quad (10.2)$$

Para estudiar los campos de killing en este espacio es interesante primero darse cuenta de que este espacio no es maximalmente simétrico. Esto es facil de ver puedo que en ningún punto existen campos de Killing con la condición $K_\mu(p) = \delta_\mu^r$, $\partial_\mu K_\mu = 0$ puesto que la derivada de Lie de un campo con estas características no se anula por la dependencia de los términos temporales y radiales de la métrica. Con el objetivo de obtener todos los campos uno primero puede calcular un escalar de curvatura para obtener una cantidad intrínseca para guiarse. La siguiente cantidad cumple con las características

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12r_s}{r^6} \quad (10.3)$$

Puesto que esta cantidad es un escalar intrínseco (al estar construido solo por el tensor de Riemann) debe ser conservado bajo isometrías. Es decir, no pueden existir isometrías que cambien el valor de r . En términos de campos de Killing esto es $K^r = 0$.

Por lo tanto para encontrar los campos de Killing de este espacio bastaría con encontrar los campos de Killing de las subvariedades definidas por $r = \text{cte}$. Como es natural estas subvariedades son las esferas. Si uno demuestra esto entonces el problema está practicamente resuelto puesto que las esferas son variedades maximalmente simétricas por lo que nos encontraríamos en un caso equivalente al de la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en el cual tendríamos una variedad con subvariedades espaciales maximalmente simétricas.

Eligiendo $r = \text{cte}$ las subvariedades tienen una métrica inducida de la siguiente forma

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (10.4)$$

El primer campo de Killing es el campo de Killing temporal, este tiene la siguiente forma

$$\omega^\mu = \delta^{t\mu} \quad (10.5)$$

Es facil comprobar que esto es un campo de Killing puesto que es constante y la métrica es independiente de la componente temporal. El resto de campos de Killing pueden encontrarse si uno se restringe a subvariedades con $t = \text{cte}$. Estas subvariedades tienen solo dos términos en la métrica, $g_{\varphi\varphi}$ y $g_{\theta\theta}$, y

su forma es la misma que la métrica en una esfera. Por lo tanto esta subvariedad y las esferas deben tener los mismos campos de Killing. En coordenadas cartesianas estos campos son

$$K^{(\gamma)\mu} = \varepsilon^{\gamma\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad (10.6)$$

donde ε es la tensor de levi-civita

$$\varepsilon^{\gamma\mu}{}_{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\gamma, \nu, \mu) \text{ es permutación par} \\ -1 & \text{si } (\gamma, \mu, \nu) \text{ es permutación impar} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (10.7)$$

Ahora mismo los campos que tenemos corresponderían a translaciones en t , θ y φ y a la rotación en el plano $\theta - \varphi$. Si la subvariedad $r = \text{cte}$ fuera maximalmente simétrica faltarían 2 campos adicionales por comprobar, correspondientes a las rotaciones $t - \varphi$ y $t - \theta$. No puede existir una isometría de este tipo puesto que la componente temporal tiene signo negativo en la métrica y las espaciales positivo. Además, físicamente no está claro que podría representar este tipo de invarianzas.

Esto se puede demostrar usando las componentes tt , φt , $\varphi\varphi$, $r\varphi$ y rt se puede demostrar que $\partial_t K^\varphi = \partial_\varphi K^t = 0$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_g K)_{tt} &= 2g_{tt}\partial_t K^t = 0 \Rightarrow K^t = f(r, \theta, \varphi) \\ (\mathcal{L}_g K)_{\varphi\varphi} &= 2g_{\varphi\varphi}\partial_\varphi K^\varphi = 0 \Rightarrow K^\varphi = f(r, t, \varphi) \\ (\mathcal{L}_g K)_{\varphi r} &= 2g_{\varphi\varphi}\partial_r K^\varphi = 0 \\ (\mathcal{L}_g K)_{tr} &= 2g_{tt}\partial_t K^t = 0 \\ (\mathcal{L}_g K)_{t\varphi} &= g_{tt}\partial_\varphi K^t + g_{\varphi\varphi}\partial_t K^\varphi = 0 \Rightarrow \\ \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\partial_\varphi K^t &= -\partial_t K^\varphi \Rightarrow \partial_r \left(\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} \right) \partial_\varphi K^t = 0 \Rightarrow \partial_\varphi K^t = 0 \Rightarrow \partial_t K^\varphi = 0 \end{aligned} \quad (10.8)$$

Similar con θ pero todavía no lo he escrito.

De esta forma la subvariedad al perder 2 posibles campos de Killing queda con 4 campos de Killing asociados 3 a rotaciones y 1 a translación temporal.

11

Métrica de Kerr y frame dragging

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\Sigma} \sin^2(\theta)\right) \sin^2(\theta) d\varphi^2 - \frac{2r_s r a \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\varphi$$

$$a = \frac{J}{M} \quad (11.1)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$$

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2$$

En este espacio se tienen dos campos de Killing de interés, el primero es

$$\omega^\mu = \delta^{\mu t} \quad (11.2)$$

Este campo de Killing da lugar a la siguiente cantidad conservada

$$E = \omega_\mu u^\mu = g_{\mu\alpha} \omega^\alpha u^\mu = g_{\mu\alpha} \delta^{\alpha t} u^\mu = g_{\mu t} u^\mu = g_{t\mu} u^\mu = u_t \quad (11.3)$$

De manera similar existe un segundo campo de killing en la dirección φ

$$\xi^\mu = \delta^{\mu\varphi} \quad (11.4)$$

que da lugar a la cantidad conservada

$$L = \xi_\mu u^\mu = g_{\mu\alpha} \xi^\alpha u^\mu = u_\varphi \quad (11.5)$$

Puesto que la métrica es diagonal excepto en el bloque correspondiente al subespacio φ, t la métrica contravariante será diagonal excepto las componentes $g^{\varphi t} = g^{t\varphi}$. De esta manera uno obtiene que

$$\begin{aligned} u^t &= g^{tt} E + g^{t\varphi} L \\ u^\varphi &= g^{\varphi t} E + g^{\varphi\varphi} L \end{aligned} \quad (11.6)$$

Se puede ahora tomar un ejemplo de partícula que comienza en reposo y cae al agujero negro, en este caso se tiene

$$\begin{cases} E = g_{t\nu} u^\nu(\tau = 0) = g_{tt}(x^\mu(\tau = 0)) \\ L = g_{\varphi\nu} u^\nu(\tau = 0) = g_{\varphi t}(x^\mu(\tau = 0)) \end{cases} \quad (11.7)$$

Si ahora se permite evolucionar el sistema se obtiene

$$u^\varphi(\tau) = g^{\varphi t}(x(\tau))E + g^{\varphi\varphi}(x(\tau))L \quad (11.8)$$

Este sistema tiene que $u^\varphi \neq 0$ al evolucionar, de hecho para soluciones con energía existe un punto a partir del cual todas las partículas se mueven.

Esta superficie de “no estacionariedad” está descrita por la condición

$$g^{\varphi\varphi}(x^\mu) = 0 \quad (11.9)$$

Puesto que $g^{\varphi\varphi} \propto g_{tt}$ se tiene que esta superficie corresponde a

$$1 - \frac{r_s r}{\Sigma} = 0 \Rightarrow \Sigma - r_s r = 0 \Rightarrow r^2 - r_s r + a^2 \cos^2(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow r_{\pm} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2 \cos^2(\theta)}}{2} = \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 - a^2 \cos^2(\theta)} \quad (11.10)$$

Para que existan soluciones resulta necesario imponer la condición $a < \frac{r_s}{2}$. Esta condición es la impuesta por la hipótesis de censura cósmica en la cual se postula la no existencia de singularidades descubiertas.

La superficie dada por r_+ (tomando el valor positivo de el \pm) es la llamada ergosfera. A partir de este punto y hasta llegado una zona más interna del agujero negro todo objeto que cae debe comenzar a rotar con el agujero negro, este efecto es el llamado frame dragging.

El origen de este efecto es el término $g_{\varphi t}$ no nulo. Esto es consecuencia directa de la ruptura de la simetría $t \rightarrow -t$ y $\varphi \rightarrow -\varphi$ por separado pero manteniendo la simetría $t, \varphi \rightarrow -t, -\varphi$ (ambas de forma simultánea).

Queda así demostrado que cualquier sistema estacionario, con simetría cilíndrica (∂_{φ} es campo de Killing), con componente $g_{\varphi, t}$ no nula manteniendo el resto de términos no diagonales asociados al tiempo o a la coordenada φ puede sufrir frame dragging. Además si las componentes $g_{\varphi\varphi}$ o g_{tt} se anulan en algún punto este lugar será una superficie de no estacionareidad.