

Facultad
de
Ciencias

Campos de Killing

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Gustavo Gancedo Crespo

Director: Diego Herranz Muñoz

1 Variedades diferenciables y topológicas

En relatividad general el espacio tiempo se define como una variedad diferenciable pseudo-riemanniana cuya métrica obedece unas ciertas ecuaciones de campo. En esta sección se va a motivar la definición de una variedad diferenciable y definir que es un sistema de coordenadas.

1.1. Variedades topológicas

Antes de definir que es una variedad diferenciable hay que definir un objeto más simple al cual se le imponen ciertas restricciones para definir las variedades diferenciables.

Una variedad topológica es un espacio topológico al cual “se le pueden dar coordenadas”

Definición: Espacio topológico.

Un espacio topológico es un conjunto de elementos M y otro conjunto, τ , al que llamamos topología.

La topología define que es un conjunto abierto en M y cumple las siguientes relaciones

$$\emptyset, M \in \tau$$

donde \emptyset es el conjunto vacío.

$$x_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i \in \tau$$

$$x_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=0}^n x_i \in \tau$$

En los espacios topológicos los conjuntos abiertos son también llamados entorno del punto.

En un espacio topológico se puede definir la continuidad de una función entre dos espacios topológicos de la siguiente manera.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre dos espacios topológicos. Si $x \in X$ cumple que para todo entorno V de $f(x) \in V$, $f^{-1}(V)$ es un entorno de x entonces f es continua en x .

Si una función es biyectiva, continua y con inversa continua se le llama homeomorfismo.

Un espacio topológico se llama **Hausdorff** si cumple que

$$\forall x, y \in M \quad \exists U, V \in \tau_M : U \cap V = \emptyset, x \in U, y \in V \quad (1.1)$$

Un espacio topológico tiene **base numerable** si existe un conjunto $B \subset \tau_M$ numerable tal que:

$$\forall V \in \tau_M \quad \exists U \subseteq B : V = \bigcup_{u \in U} u \quad (1.2)$$

Si un espacio topológico M cumple que cualquier conjunto abierto de su topología τ es homeomorfo a \mathbb{R}^n . Y además es Hausdorff y con base numerable entonces es una variedad topológica y las coordenadas locales son los homeomorfismos de abiertos a \mathbb{R}^n .

Se define una especie de sistema de referencia global llamado Atlas a un conjunto de mapas $\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\cup_i U_i = M$. Además se requiere que para cada pareja de mapas, si estas “mapean” la misma sección de la variedad, entonces puedan definir una biyección entre ambos conjuntos. Es decir, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es una biyección.

1.2. Variedades diferenciables

Dos mapas son compatibles si se cumple que la biyección $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es \mathcal{C}^∞ . Si se puede construir un Atlas tal que todos sus mapas son compatibles entonces este es un Atlas compatible.

Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica que admite Atlas compatibles.

2

Funciones escalares y curvas

2.1. Funciones escalares y diferenciabilidad.

Una función escalar en una variedad es una función que mapea puntos de la variedad a números.

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Puesto que en principio una variedad no tiene porqué tener una noción de distancia para definir cuando una función es suave se usa un sistema de coordenadas local. Es decir, dado un Atlas \mathcal{A} la función f es suave si $\forall \varphi \in \mathcal{A}$ la función $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es suave.

2.2. Curvas suaves

Una curva es un mapa de un parámetro en la variedad

$$\gamma : U \subset \mathbb{R} \rightarrow M \quad (2.2)$$

De manera similar a las funciones escalares una curva es suave si la curva $\varphi \circ \gamma$ es suave.

En el cálculo multivariable los campos vectoriales son funciones de $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esto da una noción de que cada vector se encuentra en un punto concreto del espacio, sin embargo, el espacio final es el mismo para todos los vectores independientemente del punto. En una variedad diferenciable esto no siempre se va a cumplir (en general nunca). Por ejemplo, en el caso de una esfera, si uno quisiera definir un campo vectorial en la esfera este debería ser tangente, puesto que al tratarla como una variedad diferenciable ignoramos la dimensión extra en la que se encuentra imbuida. Esto significa que cada vector situado en un punto p de la esfera vive en un espacio tangente a la esfera el cual corresponde a un plano tangente a la esfera en el punto p . Por lo tanto cada punto tiene su propio plano tangente y no corresponden al mismo espacio.

Por lo tanto es importante definir que es este espacio tangente en una variedad antes de poder definir los campos vectoriales.

3.1. Espacio tangente

Queremos definir un espacio que corresponda con los vectores posibles en un punto concreto. Una idea que puede tener uno es que, los posibles vectores podrían corresponder a las derivadas de curvas en M . Esta definición es interesante pero tiene el problema de que al no tener una noción de distancia en la variedad no se pueden tomar derivadas. Una forma de resolver este problema es usar las propias curvas como método para representar las direcciones posibles de forma similar a como las fracciones representan los números racionales.

De esta manera se define la siguiente equivalencia entre curvas.

Sean γ_1 y γ_2 curvas tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y φ un mapa tal que un entorno de p está en su dominio. Se define la siguiente relación de equivalencia

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \quad (3.1)$$

Es decir si sus derivadas son iguales al dar un sistema de coordenadas local.

De esta forma el espacio tangente en el punto p , denotado $T_p M$, es el conjunto de clases de equivalencia de las curvas suaves con $\gamma(0) = p$.

Con esta definición queda claro que la noción de espacio tangente no es tanto una noción de vector “clásica” como flecha que apunta en una dirección sino que más bien es algo así como las posibles direcciones en las que uno se puede mover desde p .

Existe una segunda definición, equivalente a la primera, que define el espacio tangente como una especie de análogo a las derivadas direccionales.

Para ello se define una derivación. Una derivación es una función lineal $D : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ que además satisface la regla del producto $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot D(g)$. El espacio tangente sería entonces el conjunto de derivaciones en el punto p .

Es fácil ver que ambas definiciones son equivalentes puesto que para cualquier curva

$$D_\gamma f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \quad (3.2)$$

es una derivación en el punto p .

3.2. Campos vectoriales

Un campo vectorial se puede interpretar como una función que mapea puntos de la variedad a los correspondientes espacios tangentes. Por simplificar la notación se suele usar la noción de paquete tangente

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (3.3)$$

cuyos elementos se suelen denotar $(p, v) \in TM$ de forma que $v \in T_p M$. Así se puede definir el llamado mapa proyectivo $\pi(p, v) = p$.

De esta forma un campo vectorial sería un mapa $X : M \rightarrow TM$ que cumple que $\pi \circ X = \text{id}_M$ donde id_M es la función identidad.

Esencialmente esto quiere decir que $p \mapsto X_p \in T_p M$.

Si se tiene un sistema de coordenadas $(U, (x^i))$ entonces se puede escribir el campo mediante la base de derivadas parciales

$$X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (3.4)$$

De esta forma se dice que X_p es suave si todas las X^i son suaves.

4

Mapados suaves entre variedades y diffeomorfismos

Un mapeado entre dos variedades diferenciables, M y N es una función $F : M \rightarrow N$. Dado un sistema de coordenadas (U, φ) para M y (V, ψ) para N de forma que $p \in U$ y $F(p) \in V$. Se dice que el mapeado es suave si la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es suave. Esencialmente lo que se hace es el siguiente proceso

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi^{-1}} M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

Puesto que φ y ψ son homeomorfismos F es suave si también lo es la composición con estos.

Un **Difeomorfismo** es un mapeado continuo con inversa continua.

Los diffeomorfismos dan una noción de equivalencia en el sentido de que si dos variedades son diffeomórficas entonces podemos considerarlas “equivalentes” y se puede escribir $M \approx N$.

4.1. Pullback y pushforward

Si uno tiene un campo escalar f en una variedad N . Y además tiene otra variedad con un mapeado suave $F : M \rightarrow N$. Entonces puede convertir el campo escalar f en un campo escalar en M mediante el “pullback”

$$F^*f = f \circ F \quad (4.2)$$

Esencialmente se tiene que $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ por lo que F^*f es un campo escalar en M .

Si además F es un diffeomorfismo se puede definir el pushforward F_* que mapea campos escalares en M , g , a campos escalares en N de la siguiente manera.

$$F_*g = (F^{-1})^*g = g \circ F^{-1} \quad (4.3)$$

Puesto que $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ el pushforward y el pullback son lineales.

De forma similar puesto que $(fg)(p) = f(p)g(p)$ tanto para el pullback como para el pushforward ambos son “lineales” con respecto al producto de campos escalares.

4.2. Diferencial

El diferencial de un mapeado suave esencialmente actúa como el pushforward para campos vectoriales. El diferencial, $dF : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$, se define de la siguiente manera

$$dF(v) = v \circ F^* \quad (4.4)$$

Esencialmente se usa que $T_{F(p)}N = \{\varphi : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}\}$ y $T_pM = \{\varphi : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}\}$ de forma que

$$\mathcal{C}^\infty(N) \xrightarrow{F^*} \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{v} \mathbb{R} \quad (4.5)$$

por lo que $v \circ F^* : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} \implies v \circ F^* \in T_{F(p)}N$

A la hora de definir la derivada de lie va a ser de vital importancia la noción de flujos. Un flujo, de forma intuitiva, describe el movimiento de una partícula cuya velocidad es un campo vectorial dado.

La forma de definir esta noción de forma rigurosa es la de las curvas integrales. Si uno tiene una curva $\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ y un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ entonces la “derivada” de γ es el correspondiente elemento del espacio tangente en $\gamma(t)$.

Se dice que γ es una curva integral de V si cumple que $\gamma'(t) = V(\gamma(t)) \quad \forall t$.

Si uno toma un sistema de coordenadas obtendrá un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $\gamma^{i'}(t) = V^i(\gamma(t))$. La existencia y unicidad de soluciones de este sistema está garantizado puesto que V es suave, por lo tanto, Lipschitz. Un punto interesante que surgirá más adelante es que no es difícil ver que si γ es solución entonces $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t + t_0)$ también lo será.

5.1. Flujos

Una manera de pensar en las curvas integrales es como diffeomorfismos $M \rightarrow M$. Si uno tiene el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t,p)}{dt} = V(\phi(t,p)) \\ \phi(0,p) = p \end{cases} \quad (5.1)$$

entonces fijando t , $\phi^t(p) = \phi(t,p)$, se obtiene un diffeomorfismo puesto que las soluciones son únicas.

Además puesto que las curvas integrales admiten un cambio de parámetro cambiando t_0 se tiene que

$$\phi(t, \phi(s,p)) = \phi(t+s, p) \quad (5.2)$$

De esta manera $\phi^{-t}(\phi^t(p)) = \phi^0(p) = p \implies \phi^{-t} = (\phi^t)^{-1}$

6.1. Espacio dual

Si uno tiene un espacio vectorial V uno puede definir un tipo de funciones entre dos espacios vectoriales llamadas lineales las cuales cumplen que para cualquier conjunto de escalares (a, b) y vectores (u, v)

$$f(a \cdot v + b \cdot u) = af(a) + bf(b) \quad (6.1)$$

En concreto, se pueden definir funciones de $V \rightarrow \mathbb{R}$ con la estructura habitual de espacio vectorial de los números reales. Uno puede definir la suma y multiplicación por un escalar de estas funciones de forma simple como

$$\begin{aligned} (f + g)(v) &= f(v) + g(v) \\ (af)(v) &= af(v) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Usando esta definición es claro que esto forma un segundo espacio vectorial al cual vamos a denotar V^* o espacio dual de V . Es facil ver que V^* tiene que tener la misma dimensión que V . Esto es porque si V tiene n dimensiones entonces tiene una base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Si uno evalúa un vector arbitrario u con una función lineal obtiene

$$f(u) = f(\alpha^i v_i) = \alpha^i f(v_i) \quad (6.3)$$

De esta forma uno puede ver que determinando los n números correspondiendo a las $f(v_i)$ la función f queda perfectamente determinada por lo que el espacio V^* tiene n dimensiones.

6.2. Pullback de covectores

Si uno tiene un covector y un mapeado entre variedades $F : M \rightarrow N$ se puede definir el pullback $F^* : T_{F(p)}N^* \rightarrow T_pM^*$ de un elemento del espacio cotangente ω mediante $(F^*\omega)(v) = \omega \circ F_*(v)$. Es decir, se translada v a $T_{F(p)}N$ con el pushforward y ahí se aplica ω .

6.3. Tensores

Ahora uno podría querer extender este razonamiento a funciones con más de un “input” y que devuelvan vectores en vez de solo escalares. Esto da la noción de funciones multilineales.

Comenzando por el caso más simple función multilineal es aquella la cual toma elementos de $V \times V \times V \dots$ y devuelve números reales y además cumple la siguiente relación

$$T(v_1, v_2, \dots, \alpha v_i + \beta u_i, \dots) = \alpha T(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots) + \beta T(v_1, v_2, \dots, u_i, \dots) \quad (6.4)$$

para cualquier i .

Es interesante notar que si uno tiene una pareja de vectores arbitrarios escritos en unas bases $\{\vec{e}_i\}$ y $\{\vec{e}'_i\}$, $v = v^i \vec{e}_i$ y $u = u^i \vec{e}'_i$, y una aplicación multilineal con dos inputs, $T(v, u)$, entonces se puede definir $T_{\alpha\beta} := T(\vec{e}_\alpha, \vec{e}'_\beta)$ y usando linealidad se obtiene que $T(v, u) = v^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}$. Por lo que de nuevo la función está determinada por los números $T_{\alpha\beta}$

Ahora uno podría querer intentar generalizar esto y obtener aplicaciones multilineales que devuelvan vectores, múltiples vectores o incluso otras funciones multilineales. Esto, que en principio parece difícil de conseguir, solo requiere de añadir el espacio dual al input de nuestra aplicación.

Ejemplo con vectores

Imaginemos que queremos una aplicación multilineal G que coja dos vectores y devuelva otro. Si por ejemplo se tiene que $w = G(u, v)$, entonces se puede definir una aplicación multilineal de $V^* \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ usando elementos del espacio dual. Si $\omega \in V^*$

$$T(\omega, u, v) = \omega(G(u, v)) \quad (6.5)$$

Además T tiene la misma información que G puesto que si uno tiene una base $\{\vec{e}_i\}$ de V y una base de V^* $\{\omega^i\}$ tal que $\omega_i(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$ y definiendo $T^{+i}_{jk} = T(\omega^i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ entonces

$$w^i = T^{+i}_{jk} u^j v^k \quad (6.6)$$

Por lo tanto uno obtiene de forma automática lo que quería si permite copias de el espacio dual en el “input” de la función. De esta manera se define un tensor de tipo (p, q) o p veces contravariante y q veces covariante como una aplicación multilineal

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.7)$$

6.4. Campos tensoriales en variedades diferenciables

En una variedad diferenciable un campo tensorial es un mapa que a cada punto le asigna un tensor de un tipo arbitrario donde $V = T_p M$. Por ejemplo, la métrica es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ y por lo tanto es una función $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

De forma similar a en el caso de los campos vectoriales para determinar si un campo tensorial es continuo vamos a definir una base y unas componentes y el tensor será suave si las componentes son suaves.

Si uno tiene un tensor de tipo (p, q) T y además una base de $T_p M$ $\{e_i\}$ y $T_p M^*$ $\{\omega^i\}$ entonces las funciones componente de T son:

$$T^{+i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(p) = T_p(\omega^{i_1}(p), \dots, \omega^{i_p}(p), e_{j_1}(p), \dots, e_{j_q}(p)) \quad (6.8)$$

6.5. Pullback de un tensor

Igual que podemos hacer pullbacks y pushforwards de funciones escalares y campos vectoriales se puede hacer el pullback de un campo tensorial usando un mapeado continuo entre variedades. En el libro que tengo solo explican este concepto para tensores puramente covariantes, esto es suficiente en nuestro caso puesto que el resto de componentes se podrían bajar con el tensor métrico.

Sea T un tensor k veces covariante, es decir $T : (T_p N)^k \rightarrow \mathbb{R}$, y $F : M \rightarrow N$ un mapa.

El pullback de T se define como T actuando sobre el pushforward de los vectores de $T_{F^{-1}(p)} M$.

$$(F^*T)_p(A, B, C, D, \dots) = T_{F(p)}(dF_p(A), dF_p(B), dF_p(C), dF_p(D), \dots) \quad (6.9)$$

La derivada de Lie es un operador lineal que actúa de forma que dado un campo vectorial toma la derivada del objeto que se le pasa a lo largo del flujo del campo. En cierto sentido es como una derivada direccional en la que en cada punto el campo dicta en qué dirección hay que tomar la derivada.

7.1. Derivada de Lie de un campo escalar

El caso de los campos escalares es el más simple, esto es porque el producto final de un campo escalar es un número por lo que se puede dar una definición muy similar al de una derivada “clásica”.

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi^t(p)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}(f \circ \phi^t) = X(f) \quad (7.1)$$

7.2. Derivada de Lie de un campo vectorial

Uno podría intentar hacer lo mismo que en los campos escalares y definir la derivada de Lie mediante la diferencia de los campos en los puntos p y $\phi^t(p)$, sin embargo, el primero de estos es un elemento de $T_p M$ y el segundo de $T_{\phi^t(p)} M$ por lo que no se puede calcular la diferencia de ambos. Para poder definir este objeto hay que llevar ambos objetos al mismo espacio. Para ello se puede usar el diferencial del flujo inverso para mapear $T_{\phi^t(p)} M$ a $T_p M$. De esta forma se define

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}(Y_{\phi^t(p)}) - Y_p}{t} \quad (7.2)$$

Esta expresión resulta ser equivalente a el braket de Lie de ambos campos definido como

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (7.3)$$

Para demostrarlo se puede hacer dando un sistema de coordenadas, en concreto se puede elegir $X = \partial_0$ en los puntos en los que $X \neq 0$. Con esta elección de coordenadas $\phi^t(x^0, x^1, \dots) = (x^0 + t, x^1, \dots)$ y

$$d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi^t(p)}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \quad (7.4)$$

.

Con estas coordenadas el braket es

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^0}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial Y^j}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Por otro lado la derivada de Lie se convierte en

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Y &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}(Y_{\phi^t(p)}) - Y_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi^t(p)}^j d\phi^{-t}_{\phi^t(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\phi^t(p)}\right) - Y_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p}{t} \stackrel{\text{Ec. (7.4)}}{=} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi^t(p)}^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p - Y_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi^t(p)}^i - Y_p^i}{t} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = (\mathcal{L}_X Y^i)_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^0}(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

En los puntos en los cuales $X = 0$ y por lo tanto no se puede tomar este sistema de coordenadas la derivada de Lie es nula puesto que $\phi^t(p) = p$. Además el braket también se anula puesto que $Y(0) = X(\cdot) = 0$. Por lo tanto ambas expresiones son nulas en ambos casos.

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \tag{7.7}$$

7.3. Derivada de Lie de un tensor covariante

La derivada de Lie de un tensor covariante se define de forma similar a los campos vectoriales usando el pullback y el pushforward.

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi^{t*} T_{\phi^t(p)} - T_p}{t} \tag{7.8}$$

Esta expresión puede demostrarse que es equivalente a

$$(\mathcal{L}_X T)(A, B, \dots) = \mathcal{L}_X(T(A, B, \dots)) - T(\mathcal{L}_X A, B, \dots) - T(A, \mathcal{L}_X B, \dots) \tag{7.9}$$

donde $\mathcal{L}_X(T(A, B, \dots))$ es la derivada del campo escalar que a cada punto le asigna el valor al evaluar los campos vectoriales con T .

Tensor métrico

En el caso del tensor métrico se tiene que

$$(\mathcal{L}_X g)_{\alpha\beta} = X^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu} \partial_\beta X^\mu + g_{\mu\beta} \partial_\alpha X^\mu = \nabla_\alpha X_\beta + \nabla_\beta X_\alpha \tag{7.10}$$

En cosmología la métrica fundamental que describe el espacio tiempo a gran escala es la métrica FLRW o de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker. En coordenadas esféricas tiene la siguiente expresión

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2 \right) \quad (8.1)$$

donde $a(t)$ es el llamado factor de escala y describe la expansión y contracción del universo y k es el signo de la curvatura del espacio.

Esta sección es bastante matemática y es relativamente larga por lo que es facil perderse. Por ello se da una idea del camino que lleva la demostración.

1. Definir las condiciones que se imponen a la métrica
2. Se demuestra que la métrica tiene forma $ds^2 = -dt^2 + a(t)g_{ij}(x) dx^i dx^j$
3. Se demuestra que la parte espacial de la métrica g_{ij} tiene que ser un espacio de curvatura seccional constante
4. Se demuestra que los espacios de curvatura seccional constante son isométricos con una n esfera, hiperboloide o un espacio euclídeo de n dimensiones.

8.1. Condiciones para el espacio tiempo a gran escala

A pesar de que a pequeñas escalas el universo no parece tener muchas simetrías. A gran escala se observa que el universo es totalmente homogéneo e isótropo. Es decir, invariante frente a translaciones y frente a rotaciones de este. Esto lleva a pensar que la métrica del espacio debe tener estas propiedades puesto que si no las tuviera se generarían fuerzas gravitatorias que romperían la simetría.

El primer paso definir de forma rigurosa que significa isotropía y homogeneidad en una variedad diferenciable.

Forma general de los campos de Killing

El primer paso consiste en definir que es una rotación y una translación. Para ello el camino a seguir va a ser, primero obtener una forma general de los campos de Killing. Y a partir de esto obtener una base de este espacio de isometrías de forma que unos elementos van a corresponder a rotaciones y otros a translaciones.

Un punto por el que comenzar es el tensor de riemann puesto que tiene simetrías similares a las de la ecuación de Killing

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} K_{\delta} = \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} K_{\gamma} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} K_{\gamma} \quad (8.2)$$

Usando que el tensor de Riemann cumple la identidad de Bianchi

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + R_{\gamma\alpha\beta}{}^{\delta} + R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\delta} = 0 \quad (8.3)$$

Y multiplicando por K_{δ} y sustituyendo la Ec. (8.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta - \nabla_\alpha \nabla_\gamma K_\beta + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\beta K_\alpha = \\
 & \nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\alpha \nabla_\gamma K_\beta + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta - \nabla_\gamma \nabla_\beta K_\alpha = \\
 & \nabla_\alpha (\nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\gamma K_\beta) + \nabla_\beta (\nabla_\gamma K_\alpha - \nabla_\alpha K_\gamma) + \nabla_\gamma (\nabla_\alpha K_\beta - \nabla_\beta K_\alpha) = \\
 & 2(\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta) = 0
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ahora identificando el término $\nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha = -\nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma$ de la Ec. (8.2) se obtiene

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta \tag{8.5}$$

Con esta ecuación se puede resolver en términos de la serie de Taylor de los campos de Killing. Para ello se expande K_δ en series de Taylor. Usando la notación multi-índice de forma que

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\
 |\alpha| &= \sum_i \alpha_i \\
 D^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}} \\
 \alpha! &= \prod_i \alpha_i! x^\alpha = \prod_i (x^i)^{\alpha_i}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

La serie de taylor queda como

$$K_\delta(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha K_\delta(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha \tag{8.7}$$

Ahora mediante la Ec. (8.5) los términos de $|\alpha| = 2$ quedan determinados por $K(p)$ y $\partial_\mu K(p)$, los términos de $|\alpha| = 3$ se obtienen mediante las derivadas de la misma ecuación y así para cualquier $|\alpha|$. Todas estas relaciones son lineales por lo que se puede escribir

$$D^\alpha K_\delta = \hat{A}_\delta{}^\gamma(p, \alpha) K_\gamma(p) + \hat{B}_\delta{}^{\gamma\beta}(p, \alpha) \partial_\gamma K_\beta(p) \tag{8.8}$$

Sustituyendo en la serie de taylor se obtiene

$$\begin{aligned}
 K_\delta(x) &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha K_\delta(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha \\
 &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (x-p)^\alpha \left(\hat{A}_\delta{}^\gamma(p, \alpha) K_\gamma(p) + \hat{B}_\delta{}^{\gamma\beta}(p, \alpha) \partial_\gamma K_\beta(p) \right) \\
 &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (x-p)^\alpha \hat{A}_\delta{}^\gamma(p, \alpha) \right) K_\gamma(p) + \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (x-p)^\alpha \hat{B}_\delta{}^{\gamma\beta}(p, \alpha) \right) \partial_\gamma K_\beta(p) \\
 &= A_\delta{}^\gamma(x, p) K_\gamma(p) + 2B_\delta{}^{\gamma\beta}(x, p) \partial_\gamma K_\beta(p)
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Ahora se puede imponer una condición adicional en esta ecuación usando la ecuación de killing puesto que

$$\partial_\alpha K_\beta = -\partial_\beta K_\alpha + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma K_\sigma \tag{8.10}$$

aplicando esto se obtiene

$$\begin{aligned}
K_\delta(x) &= A'_\delta{}^\gamma(x, p)K_\gamma(p) + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) + \partial_\sigma K_\gamma(p)) \\
&= A'_\delta{}^\gamma(x, p)K_\gamma(p) + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) - \partial_\sigma K_\gamma(p) + 2\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}K_\alpha(p)) \\
&= \underbrace{\left(A'_\delta{}^\alpha(x, p) + 2B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\right)}_{A_\delta{}^\alpha(x, p)}K_\alpha + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) - \partial_\sigma K_\gamma(p)) \quad (8.11) \\
&= A_\delta{}^\gamma(x, p)K_\gamma(p) + B_\delta{}^{\gamma\sigma}(x, p)(\partial_\gamma K_\sigma(p) - \partial_\sigma K_\gamma(p))
\end{aligned}$$

En esta ecuación final se obtiene una información muy importante. Puesto que los tensores A y B son independientes del campo de killing los campos de killing forman un espacio vectorial de dimensión $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Esto es puesto que los campos de killing quedan definidos por los valores de $K_\gamma(p)$ y $\partial_\gamma K_\sigma(p)$, el primer término da n elementos y el segundo por ser antisimétrico en la ecuación $\frac{n(n-1)}{2}$.

Para definir una base de este espacio se elige un conjunto de campos de killing dando una serie de elementos del espacio tangente en p y a partir de la Ec. (8.11) se extiende a una base en todo el espacio. Es importante decir que el hecho de que se pueda elegir una base con n elementos no implica que existan n campos de Killing. Esto es porque puede ocurrir que los términos de A y B al combinarlos con ciertos elementos de la base den lugar a un campo de Killing nulo, esto indica que el espacio no tiene todas las posibles simetrías de un espacio con su dimensión.

Por un lado tenemos los términos que acompañan al término $A_\delta{}^\gamma$. Aquí se tendrán n posibles términos, uno por cada dimensión del espacio. De esta forma se puede elegir de forma que el elemento γ todas sus componentes sean nulas excepto el componente γ que valga uno.

$$\begin{aligned}
K_\alpha^{(\gamma)}(p) &= \delta_\alpha^\gamma \\
\partial_\sigma K_\alpha^{(\gamma)}(p) &= 0
\end{aligned} \quad (8.12)$$

donde γ es una etiqueta para cada campo. Si un espacio tiene una base completa de estos elementos en todo punto, y además estos dan lugar a campos de Killing no nulos el espacio se denominará homogéneo. La razón de esta definición se explorará más adelante junto con la isotropía.

Además de los elementos anteriores se tienen los términos de $B_\delta{}^{\gamma\sigma}$. Aquí se sigue el mismo proceso que en la parte anterior, sin embargo, por la antisimetría de estos términos usando una notación similar a la anterior pero haciendo las derivadas parciales no nulas se tiene que $K^{(\gamma, \sigma)} = -K^{(\sigma, \gamma)}$. Para introducir esto se definen $n(n-1)/2$ términos independientes de la forma

$$\begin{aligned}
K_\alpha^{(\gamma, \sigma)}(p) &= 0 \\
\partial_\alpha K_\beta^{\gamma, \sigma} &= \delta_{\alpha, \beta}^{\gamma, \sigma} - \delta_{\alpha, \beta}^{\sigma, \gamma}
\end{aligned} \quad (8.13)$$

Si un espacio tiene una base completa de estos elementos en todo punto y estos dan lugar a campos de Killing lo llamamos isótropo.

Para comprender estas definiciones conviene trabajar en una base ortonormal.

La definición dada en Ec. (8.12) da lugar a una serie de isotropías de forma que las coordenadas se transforman como $x'^\mu = x^\mu + tK^\mu(x) + \mathcal{O}(t^2)$. De esta forma si la Ec. (8.12) se cumple todos los puntos son isótropos a su entorno.

Por otro lado ante la definición Ec. (8.13), en el caso de la base ortonormal cada uno de los elementos corresponde a rotaciones. Esto es porque al aplicar la isotropía asociada se obtiene que para un vector arbitrario

$$V'^{\mu(x)} = \phi_* V^{\mu(x)} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + t \partial_{\nu} K^{\mu}) V^{\nu} = V^{\mu} + t \Delta V^{\mu} \quad (8.14)$$

El vector al aplicar la transformación se convierte en sí mismo mas una componente que es perpendicular al propio vector $(\partial_{\nu} K^{\mu} \stackrel{K(p)=0}{=} \nabla_{\nu} K^{\mu} \stackrel{g=\delta}{=} \nabla_{\nu} \delta^{\mu\alpha} K_{\alpha} = \delta^{\mu\alpha} \nabla_{\nu} K_{\alpha} = \delta^{\mu\alpha} \partial_{\nu} K_{\alpha} \stackrel{\text{Si } \mu=\nu}{=} 0)$, además esta transformación conserva la norma por lo que podemos concluir que se trata de una rotación. Un espacio con todas las posibles rotaciones en todos los puntos es isótropo.

Además una variedad que es al mismo tiempo homogénea e isótropa tiene todos los posibles campos de Killing por lo que también se le denomina **maximalmente simétrica**

Nuestro espacio tiempo es homogéneo e isótropo **espacialmente**. Esto quiere decir que en la variedad pseudo-riemanniana que es el espacio-tiempo tiene que haber una familia de sub-variedades Rimanianas de dimensión 3 cuyos vectores tangentes son de tipo espacial y que además son homogéneos e isótropos de acuerdo a la definiciones Ec. (8.12) y Ec. (8.13).

8.2. Forma general de un espacio-tiempo espacialmente homogéneo e isótropo

9

Demostración ley de Snell

Si uno tiene una lente o algun otro tipo de material cuando la luz cambia de medio se desvía. Una forma de modelar esto es usando una teoría efectiva la cual describe el movimiento de la luz como si se encontrara en una métrica de la forma

$$ds = v_L^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (9.1)$$

donde v_L es la velocidad de la luz en ese punto.

Para demostrar esto se puede comenzar con un caso simple en el cual solo hay una frontera plana entre dos objetos, tras esto se puede generalizar a casos más complejos mediante cambios de variables.

9.1. Caso simple

En este caso la métrica está determinada por la velocidad en función de la posición

$$v_L(x) = \begin{cases} v & \text{si } x < 0 \\ v' & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

Para esta métrica hay tres campos de killing de interés

$$\begin{aligned} [\xi^\mu] &= (1, 0, 0, 0) \\ [k^\mu] &= (0, 0, -1, 0) \\ [\omega^\mu] &= (0, 0, -z, y) \end{aligned} \quad (9.3)$$

La ecuación de conservación del tercero no lo he hecho todavía pero es invarianza con respecto a rotaciones y da la conservación del plano que forman el vector velocidad y el vector normal al plano.

Las otras dos dan respectivamente la conservación de las componentes u^2 y $v_L^2 u^0$. No es difícil de comprobar puesto que para todo campo de killing la cantidad $K = k_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} k^\nu u^\mu$ es constante de movimiento.

Ahora hay que darse cuenta de una cosa. Si el rayo de luz se mueve con un ángulo θ con respecto al eje x la velocidad en el eje y será:

$$\begin{aligned} v_L \sin(\theta) &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dy}{d\sigma} \left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^{-1} = \frac{u^2}{u^0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sin(\theta)}{v_L} = \frac{u^2}{v_L^2 u^0} \end{aligned} \quad (9.4)$$

puesto que la parte derecha de la igualdad son cantidades conservadas la parte izquierda también debe de serlo y por lo tanto

$$\frac{\sin(\theta)}{v_L} = \frac{\sin(\theta')}{v'_L} \quad (9.5)$$

■

9.2. Caso general

En el caso general basta con realizar un cambio de variable de forma que y y z parametrizan la superficie que separa los dos medios y x sea perpendicular a la superficie.

De esta manera uno se puede dar cuenta que en un punto superficial el espacio tangente no cambia entre ambos sistemas de referencia por lo tanto el ángulo se mantiene al hacer los cambios de variable.

También es importante darse cuenta de que los campos de killing anteriores dejan de serlo en puntos alejados de la superficie pero en la superficie sí que lo son por lo que es suficiente para demostrar el teorema.

9.3. Anisotropos

tengo que hacerlo pero en este caso se usaría una métrica

$$ds = (dt)^2 - \frac{(dx)^2}{(v_x)^2} - \frac{(dy)^2}{(v_y)^2} - \frac{(dz)^2}{(v_z)^2} \quad (9.6)$$

y se procedería de forma similar