

MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Alejandro Sánchez Yalí
Juan Pablo Restrepo

PRIMERA EDICIÓN

Índice general

1. Los números reales y sus propiedades	1
1.1. Axiomas de suma	1
1.2. Axiomas de multiplicación	2
2. La genesis del análisis de Fourier	5
2.1. Introducción histórica	5
2.2. Derivación de la ecuación del calor	6
A. Material Complementario	9
A.1. Demostraciones Adicionales	9
A.2. Tablas de Símbolos	9

Índice de figuras

- 2.1. Relación entre el gradiente de temperatura y el flujo de calor. Cuando la pendiente es positiva (izquierda), el calor fluye en dirección negativa. Cuando la pendiente es negativa (derecha), el calor fluye en dirección positiva. 7

Índice de cuadros

Capítulo 1

Los números reales y sus propiedades

En esta sección introducimos el sistema de los números reales y presentamos sus propiedades fundamentales. Como es bien conocido, los números reales forma la base para el análisis matemático. Desde los griegos ya se sabía que los números racionales, es decir, cocientes de números enteros, no eran suficientes para describir todas las cantidades geométricas. Por ejemplo, en un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1, por el teorema de Pitágoras, la longitud c de la hipotenusa es tal que $c^2 = 2$, es fácil probar que no existe ningún número racional p/q (con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$) que satisfaga esta ecuación. En efecto, si $c = p/q$ fuera una solución racional y tal que p y q no tuvieran factores primos en común, entonces $p^2 = 2q^2$ implica que p^2 es par, y por lo tanto p es par. Si p es par, entonces existe un entero k tal que $p = 2k$, y por lo tanto $p^2 = 4k^2$. Sustituyendo en la ecuación original obtenemos $4k^2 = 2q^2$, o lo que es lo mismo, $q^2 = 2k^2$. Esto implica que q^2 es par, y por lo tanto q es par. Pero si p y q son ambos pares, entonces tienen al menos el factor primo 2 en común, lo cual contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto, no existe ningún número racional que satisfaga la ecuación $c^2 = 2$. Sin embargo el número la ecuación $c^2 = 2$ tiene una solución en los números reales, y a este número se denota por $\sqrt{2}$. Para resolver este problema fue necesario ampliar el sistema de los números racionales a un sistema más grande, el sistema de los números reales.

1.1 Axiomas de suma

Comenzaremos por postular que existe un conjunto \mathbb{R} , cuyos elementos llamaremos **números reales**, junto con las operaciones de suma y multiplicación y una relación de orden.

Definición 1.1 – Suma en \mathbb{R}

La **suma** en los números reales es una función

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisface los siguientes axiomas:

AS1. Conmutatividad: Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a + b = b + a$.

- AS2. **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- AS3. **Elemento neutro:** Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a + 0 = a$.
- AS4. **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.

Con estos cuatro axiomas, el conjunto \mathbb{R} junto con la operación de suma es un **grupo abeliano**. Además, a partir de estos axiomas se pueden demostrar las siguientes propiedades adicionales de la suma en \mathbb{R} .

Teorema 1.1

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a + (-a) = 0$.
2. $-(-a) = a$.
3. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.
4. $0 + a = a$.
5. Si para algún $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a + b = a$, entonces $b = 0$.

1.2 Axiomas de multiplicación

Definición 1.2 – Multiplicación en \mathbb{R}

La **multiplicación** en los números reales es una función

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisface los siguientes axiomas:

- AM1. **Commutatividad:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$.
- AM2. **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- AM3. **Elemento neutro:** Existe un elemento $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $1 \cdot a = a$.
- AM4. **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un elemento $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
- AM5. **Distributividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Se puede observar que los axiomas AM1 a AM4 son similares a los axiomas AS1 a AS4, y juntos implican que el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ junto con la operación de multiplicación es también un grupo abeliano. El axioma AM5 expresa una relación entre las operaciones de suma y multiplicación.

Teorema 1.2

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a \cdot 0 = 0$.
2. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
3. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.
4. $a \cdot 1 = a$.
5. Si para algún $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se cumple que $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$.

Es posible que el lector se haya dado cuenta que, en la definición de las operaciones de suma y multiplicación en los axiomas, no se utilizan las notaciones $+(a, b)$ y $\cdot(a, b)$ que tiene más sentido desde el punto de vista de funcional. Esto se debe a que en matemáticas es común usar una notación infija para las operaciones binarias: la suma $+(a, b)$ se escribe como $a + b$, y el producto $\cdot(a, b)$ se escribe como $a \cdot b$ o simplemente ab .

Por otro lado, el conjunto de los números reales junto con las operaciones de suma y multiplicación que hemos definido hasta ahora se denomina un **cuerpo** y es una estructura algebraica fundamental en matemáticas que usualmente se denota como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. En general, si un conjunto K junto con dos operaciones binarias $+$ y \cdot satisface los axiomas AS1 a AS4 y AM1 a AM5, entonces decimos que $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Ejercicio 1.1. Considere un sistema con dos elementos α y β y las siguientes reglas de suma y multiplicación:

$$\begin{array}{llll} \alpha + \alpha = \alpha, & \alpha + \beta = \beta, & \beta + \alpha = \beta, & \beta + \beta = \alpha, \\ \alpha \cdot \alpha = \alpha, & \alpha \cdot \beta = \alpha, & \beta \cdot \alpha = \alpha, & \beta \cdot \beta = \beta. \end{array}$$

Demuestre que este sistema forma un cuerpo.

Ejercicio 1.2. Considere los números de la forma $a + b\sqrt{6}$ donde a y b son racionales. ¿Satisface este conjunto los axiomas de un cuerpo?

Ejercicio 1.3 – Aproximación racional de $\sqrt{2}$. Como vimos, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Sin embargo, podemos aproximararlo mediante fracciones. El método babilónico (o de Herón) genera una sucesión de aproximaciones racionales: dado $x_0 > 0$, se define

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Implemente en Python una función que, dado un valor inicial x_0 y un número de iteraciones n , retorne la aproximación x_n de $\sqrt{2}$. Utilice la biblioteca `fractions` para trabajar

con números racionales exactos y observe cómo las fracciones se vuelven cada vez más complejas mientras se acercan a $\sqrt{2}$.

Ejercicio 1.4 – Verificación de axiomas de cuerpo. Implemente en Python una clase `TwoElementField` que represente el cuerpo con dos elementos $\{\alpha, \beta\}$ del Ejercicio 1.1. La clase debe:

1. Definir las operaciones de suma y multiplicación según las tablas dadas.
2. Incluir un método que verifique automáticamente cada uno de los axiomas AS1–AS4 y AM1–AM5 para todos los elementos del cuerpo.
3. Identificar cuál elemento actúa como el 0 (neutro aditivo) y cuál como el 1 (neutro multiplicativo).

Problema 1.1 – No completitud de \mathbb{Q}

Una sucesión (a_n) en un cuerpo ordenado se llama **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo $n, m > N$. Un cuerpo ordenado se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del cuerpo. El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} satisface todos los axiomas de cuerpo (AS1–AS4 y AM1–AM5), sin embargo no es completo. Demuestre esto construyendo una sucesión de racionales (r_n) tal que:

1. $r_n^2 < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. La sucesión (r_n) es estrictamente creciente y acotada superiormente.
3. (r_n) es una sucesión de Cauchy.

Concluya que (r_n) no puede converger a ningún número racional, demostrando así que \mathbb{Q} no es completo.

Sugerencia: Considere la sucesión definida por $r_1 = 1$ y $r_{n+1} = \frac{1}{2} \left(r_n + \frac{2}{r_n} \right)$.

Capítulo 2

La genesis del análisis de Fourier

Respecto a las investigaciones de d'Alembert y Euler, ¿no podría añadirse que, si conocían esta expansión, hicieron un uso muy imperfecto de ella? Ambos estaban persuadidos de que una función arbitraria y discontinua nunca podría resolverse en series de este tipo, y ni siquiera parece que alguien hubiera desarrollado una constante en cosenos de arcos múltiples, el primer problema que tuve que resolver en la teoría del calor.

J. Fourier, 1808-9

2.1 Introducción histórica

Durante el siglo XVIII, matemáticos como Jean Le Rond d'Alembert(1717-1783) y Leonhard Euler (1707-1783) investigaron la ecuación de onda para describir el movimiento de una cuerda vibrante (Stein & Shakarchi, 2003). Aunque en 1753 Daniel Bernoulli (1700-1782) propuso que cualquier movimiento en la cuerda podía expresarse como una suma infinita de oscilaciones sinusoidales (armónicos), Euler y d'Alembert Euler y d'Alembert rechazaron la propuesta de Bernoulli, argumentando que una suma de funciones suaves y periódicas (como senos y cosenos) jamás podría representar una curva que no fuera inherentemente suave o que tuviera comportamientos no periódicos en su origen (Rodríguez-del-Río & Zuazua, s.f.). En esa época, se creía firmemente que una función con discontinuidades nunca podría ser representada por una serie de funciones continuas y suaves como el seno y el coseno.

La revolución en el pensamiento matemático llegó con Joseph Fourier (1768-1830) a principios del siglo XIX (Sensenbaugh, 2023), (Wikipedia contributors, 2024). Mientras servía como prefecto en Isère, Francia, Fourier comenzó a experimentar con la difusión térmica, adoptando un enfoque fenomenológico: no buscacaba entender qué era el calor, sino las leyes matemáticas que gobernaban su propagación. En su memoria de 1807, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, (Fourier, 1808), Fourier derivó la ecuación del calor basándose en el principio de conservación de la energía y en la ley que establece que el flujo de calor es proporcional al gradiente negativo de la temperatura.

2.2 Derivación de la ecuación del calor

Consideraremos una barra tan delgada que podemos pensar en ella efectivamente como unidimensional y colocarla a lo largo del eje x , es decir, sea la coordenada x la que denota la posición de un punto en la barra. Imaginaremos que la temperatura en cada punto de la barra es conocida en algún tiempo inicial $t = 0$ y estaremos interesados en determinar la temperatura en tiempos futuros. Se asume que la barra está envuelta en algún tipo de aislamiento para que el calor no pueda escapar sino que deba fluir a lo largo del eje x . También se asume que la barra es “homogénea” en el sentido de que su composición física es la misma en todos los puntos. Denotaremos la temperatura en la posición x y tiempo t por $u(x, t)$.

Ahora bien, calor y temperatura no son lo mismo. La temperatura es una propiedad que describe el calor o frío relativo de un objeto que puede medirse (en grados en alguna escala elegida) por comparación con otro objeto (por ejemplo, un termómetro). El calor es energía. Usualmente se mide en calorías o BTU (Unidades Térmicas Británicas). La conexión es simple: elevar o bajar la temperatura de algo requiere una ganancia o pérdida de energía. Cuánta energía se necesita depende de una propiedad del objeto llamada *calor específico*.

Asociada con nuestra barra homogénea hay una constante σ (el calor específico) que depende de la sustancia de la que está hecha la barra y da una medida de la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una unidad de masa en un grado. Como es más conveniente tratar con longitudes de la barra en lugar de masas, introduciremos otra constante δ , la densidad de masa de la barra. Esta representa la cantidad de masa en una unidad de longitud de la barra. Así, si la barra tiene longitud L , la masa total de la barra es δL . Si queremos cambiar la temperatura de una barra de longitud L en T grados, la energía necesaria (o perdida) es $\sigma T \delta L$.

Consideremos un punto x en la barra y la pequeña sección de longitud Δx de la barra entre x y $x + \Delta x$. Más adelante, tomaremos un límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, así que somos libres de pensar en Δx como tan pequeño como queramos. Comencemos pensando en él lo suficientemente pequeño para que la temperatura de la sección esté bastante bien aproximada por la temperatura de su punto medio, es decir, la temperatura en el tiempo t de la sección es simplemente $u(x + \frac{\Delta x}{2}, t)$. La temperatura en un tiempo posterior $t + \Delta t$ es entonces simplemente $u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t)$, por lo que la diferencia de temperatura en estos dos tiempos es

$$u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t).$$

Ahora, ¿cuánta energía (calor) se necesita para cambiar la temperatura de la pequeña sección de la barra en esta cantidad? Bueno, según la definición de calor específico, podemos escribir esta energía como:

$$\sigma \left[u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t) \right] \delta \Delta x. \quad (2.1)$$

Hay otra forma de llegar a una expresión equivalente para la cantidad de calor necesaria dada anteriormente, pensando en términos de conducción de calor. Las sustancias conducen el calor de manera diferente, por eso algunas sustancias son mejores aislantes que

otras. El experimento muestra que la cantidad de calor conducido a través de un punto x es proporcional a la diferencia de temperaturas a cada lado de x . La constante de proporcionalidad se llama conductividad térmica de la sustancia y se denotará por k . Los físicos llaman a esta conducción “flujo de calor” y se expresa matemáticamente de la siguiente manera: la cantidad de calor por unidad de tiempo que cruza el punto x en la dirección positiva de x está dada por

$$\Phi(x, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (2.2)$$

Para entender la definición de flujo de calor puede ser útil considerar una figura. Si graficamos la temperatura $u(x, t)$ como función de x para algún valor fijo de t , la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ es simplemente la derivada regular con respecto a x , es decir, representa la pendiente de la línea tangente a la gráfica de u en el punto $(x, u(x, t))$. En el punto etiquetado $(x_1, u(x_1, t))$, esta pendiente es negativa y la ecuación (2) nos dice entonces que una cantidad positiva de calor por unidad de tiempo fluirá más allá de x_1 en la dirección positiva de x . Esto tiene sentido, ya que está más caliente justo a la izquierda de x_1 que justo a la derecha. En el punto etiquetado $(x_2, u(x_2, t))$, la pendiente es positiva y la ecuación (2) nos dice que una cantidad negativa de calor por unidad de tiempo fluirá más allá de x_2 en la dirección positiva de x , en otras palabras, el calor está fluyendo más allá de x_2 en la dirección negativa. Esto tiene sentido, ya que está más frío justo a la izquierda de x_2 que justo a la derecha.

Esta figura nos ayuda a visualizar la relación entre la pendiente de la temperatura y la dirección del flujo de calor:

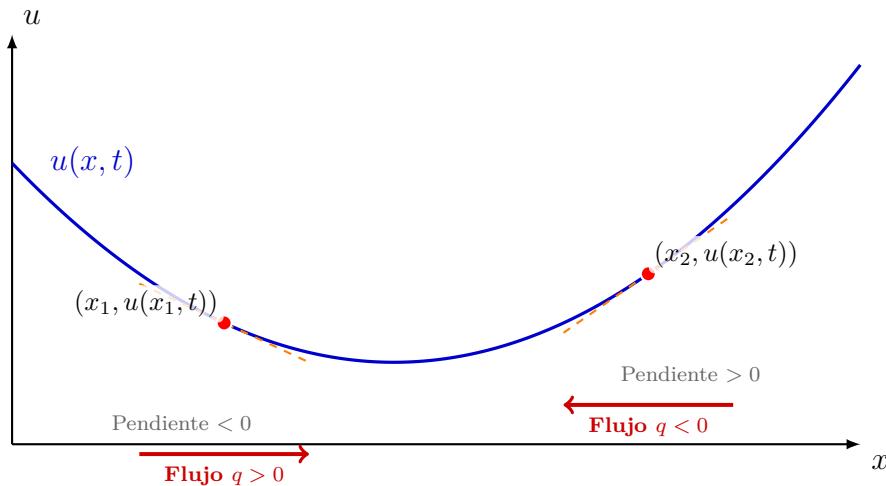


Figura 2.1: Relación entre el gradiente de temperatura y el flujo de calor. Cuando la pendiente es positiva (izquierda), el calor fluye en dirección negativa. Cuando la pendiente es negativa (derecha), el calor fluye en dirección positiva.

Ahora volvamos a nuestra pequeña subsección de la barra entre x y $x + \Delta x$. La cantidad total de calor que fluye hacia la sección de la barra por unidad de tiempo es simplemente el flujo de calor en x menos el flujo de calor en $x + \Delta x$ (el signo menos aquí es debido a la dirección: en $x + \Delta x$, “hacia la sección” está en la dirección negativa de x), o sea, $\Phi(x, t) - \Phi(x + \Delta x, t)$. Durante un pequeño intervalo de tiempo entre t y $t + \Delta t$, la energía

total que entra en la pequeña sección de la barra es entonces

$$[\Phi(x, t) - \Phi(x + \Delta x, t)] \Delta t = k \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] \Delta t. \quad (2.3)$$

Igualando (1) y el lado derecho de (3) obtenemos

$$\sigma \left[u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t) \right] \delta \Delta x = k \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] \Delta t$$

o bien,

$$\frac{u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t)}{\Delta t} = \kappa \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \quad (2.4)$$

donde $\kappa \equiv \frac{k}{\sigma \delta}$. Si ahora tomamos el límite de ambos lados de (4) cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Tomando el límite de esta última ecuación cuando $\Delta t \rightarrow 0$ nos da lo que se conoce comúnmente como la ecuación del calor (o difusión) unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (2.5)$$

Apéndice A

Material Complementario

A.1 Demostraciones Adicionales

Aquí puedes incluir demostraciones más detalladas o extensas que no encajan en el cuerpo principal del libro.

A.2 Tablas de Símbolos

Aquí puedes incluir tablas de símbolos lógicos y matemáticos de referencia.

Bibliografía

- Fourier, J.-B. J. (1808). Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides [Présenté le 21 décembre 1807 à l’Institut national]. *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris*, 1(6), 112-116. 
- Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2003). *Fourier Analysis: An Introduction* (Vol. 1). Princeton University Press. 
- Sensenbaugh, R. (2023). Joseph Fourier. 
- Wikipedia contributors. (2024). Joseph Fourier. 
- Rodríguez-del-Río, R., & Zuazua, E. (s.f.). Series de Fourier y fenómeno de Gibbs. 