MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Alejandro Sánchez Yalí
Juan Pablo Restrepo

PRIMERA EDICIÓN

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Cálculo en una variable

Estas notas comienzan con una revisión rápida de ideas del cálculo de una variable. El objetivo es sentar las bases para el desarrollo del análisis en varias variables.

1.1 El sistema de los números reales

Asumimos que existe un **sistema de números reales**, el cual es un conjunto $\mathbb{R}$ que contiene dos elementos distintos 0 y 1 y está dotado de las operaciones algebraicas de adición,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

y multiplicación,

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La suma $+(a, b)$ se escribe como $a + b$, y el producto $\cdot(a, b)$ se escribe como $a \cdot b$ o simplemente ab.

Teorema 1.1 (Axiomas de campo para $(\mathbb{R}, +, \cdot)$). *El sistema de números reales, con sus elementos distintos* 0 *y* 1 *y con sus operaciones de adición y multiplicación, satisface el siguiente conjunto de axiomas:*

1. *La adición es asociativa:* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. 0 *es una identidad aditiva:* $0 + x = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Existencia de inversos aditivos: Para cada* $x \in \mathbb{R}$ *existe* $y \in \mathbb{R}$ *tal que* $y + x = 0$.
4. *La adición es conmutativa:* $x + y = y + x$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
5. *La multiplicación es asociativa:* $x(yz) = (xy)z$ *para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

6. *1 es una identidad multiplicativa:* $1x = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
7. *Existencia de inversos multiplicativos: Para cada* $x \in \mathbb{R}$ *no nulo existe* $y \in \mathbb{R}$ *tal que* $yx = 1$.
8. *La multiplicación es conmutativa:* $xy = yx$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
9. *La multiplicación distribuye sobre la adición:* $(x + y)z = xz + yz$ *para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Todo el álgebra básica de los números reales se deriva de los axiomas de campo. Los inversos aditivos y multiplicativos son únicos, la ley de cancelación se cumple, $0 \cdot x = 0$ para todo número real x, y así sucesivamente.

El inverso aditivo de un número real x se denota por $-x$, y la resta se define en términos de la adición y el inverso aditivo como

$$- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x - y = x + (-y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

También asumimos que $\mathbb{R}$ es un campo **ordenado**. Es decir, asumimos que existe un subconjunto $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$ (los elementos **positivos**) tal que se cumplen los siguientes axiomas.

Teorema 1.2 (Axiomas de Orden)**.** 1. *Axioma de tricotomía: Para todo número real* x, *exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:*

$$x \in \mathbb{R}^+, \qquad -x \in \mathbb{R}^+, \qquad x = 0.$$

2. *Clausura de los positivos bajo la adición: Para todos los números reales* x *e* y, *si* $x \in \mathbb{R}^+$ *e* $y \in \mathbb{R}^+$ *entonces también* $x + y \in \mathbb{R}^+$.
3. *Clausura de los positivos bajo la multiplicación: Para todos los números reales* x *e* y, *si* $x \in \mathbb{R}^+$ *e* $y \in \mathbb{R}^+$ *entonces también* $xy \in \mathbb{R}^+$.

Para todos los números reales x e y, definimos

$$x < y$$

para significar

$$y - x \in \mathbb{R}^+.$$

Las reglas usuales para desigualdades se derivan entonces de los axiomas.

Teorema 1.3 (Completitud como criterio de búsqueda binaria)**.** *Toda secuencia de búsqueda binaria en el sistema de números reales converge a un límite único.*

La convergencia es un concepto de análisis, y por lo tanto también lo es la completitud. Otra versión de la completitud se expresa en términos de cotas de conjuntos.

Teorema 1.4 (Completitud como criterio de cota superior). *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente tiene una cota superior mínima.*

Ambas formulaciones de completitud son enunciados de existencia.

Definición 1.1. Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es **inductivo** si:

(i1) $0 \in S$,

(i2) Para todo $x \in \mathbb{R}$, si $x \in S$ entonces $x + 1 \in S$.

Cualquier intersección de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es nuevamente inductiva. El conjunto de los **números naturales**, denotado $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{N}$ es el subconjunto inductivo más pequeño de $\mathbb{R}$. No hay ningún número natural entre 0 y 1 (porque si lo hubiera, eliminarlo de $\mathbb{N}$ dejaría un subconjunto inductivo más pequeño de $\mathbb{R}$), y así

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

Teorema 1.5 (Teorema de Inducción). *Sea $P(n)$ una forma proposicional definida sobre $\mathbb{N}$. Supongamos que:*

- *$P(0)$ se cumple.*
- *Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ se cumple entonces también se cumple $P(n+1)$.*

Entonces $P(n)$ se cumple para todos los números naturales n.

De hecho, las hipótesis del teorema dicen que $P(n)$ se cumple para un subconjunto de $\mathbb{N}$ que es inductivo, y por lo tanto el teorema se sigue de la definición de $\mathbb{N}$ como el subconjunto inductivo más pequeño de $\mathbb{R}$.

El **Principio Arquimediano** establece que el subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ no está acotado superiormente. Equivalentemente, la secuencia $\{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$ converge a 0. El Principio Arquimediano se sigue de la suposición de que $\mathbb{R}$ es completo en el sentido de secuencias de búsqueda binaria o en el sentido de cotas de conjuntos. Una tercera versión de la completitud se expresa en términos de secuencias monótonas. Nuevamente es un enunciado de existencia.

Teorema 1.6 (Completitud como criterio de secuencia monótona). *Toda secuencia monótona acotada en $\mathbb{R}$ converge a un límite único.*

Esta versión de la completitud se sigue de cualquiera de las otras dos. Sin embargo, no implica las otras dos a menos que también asumamos el Principio Arquimediano.

El conjunto de los **enteros**, denotado $\mathbb{Z}$, es la unión de los números naturales y sus inversos aditivos,

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}.$$

Capítulo 2

La genesis del análisis de Fourier

> Respecto a las investigaciones de d'Alembert y Euler, ¿no podría añadirse que, si conocían esta expansión, hicieron un uso muy imperfecto de ella? Ambos estaban persuadidos de que una función arbitraria y discontinua nunca podría resolverse en series de este tipo, y ni siquiera parece que alguien hubiera desarrollado una constante en cosenos de arcos múltiples, el primer problema que tuve que resolver en la teoría del calor.
>
> *J. Fourier*, 1808-9

2.1 Introducción histórica

Durante el siglo XVIII, matemaáticos como Jean Le Rond d'Alembert(1717-1783) y Leonhard Euler (1707-1783) investigaron la ecuación de onda para describir el movimiento de una cuerda vibrante (Stein & Shakarchi, 2003). Aunque en 1753 Daniel Bernulli (1700-1782) propuso que cualquier movimiento en la cuerda podía expresarse como una suma infinita de oscilaciones sinusoidales (armónicos), Euler y d'Alembert Euler y d'Alembert rechazaron la propuesta de Bernoulli, argumentando que una suma de funciones suaves y periódicas (como senos y cosenos) jamás podría representar una curva que no fuera inherentemente suave o que tuviera comportamientos no periódicos en su origen (Rodríguez-del-Río & Zuazua, s.f.). En esa época, se creía firmemente que una función con discontinuidades nunca podría ser representada por una serie de funciones continuas y suaves como el seno y el coseno.

La revolución en el pensamiento matemático llegó con Joseph Fourier (1768-1830) a principios del siglo XIX (Sensenbaugh, 2023), (Wikipedia contributors, 2024). Mientras servía como prefecto en Isère, Francia, Fourier comenzó a experimentar con la difusión térmica, adoptando un enfoque fenomenológico: no buscacaba entender qué era el calor, sino las leyes matemáticas que gobernaban su propagación. En su memoría de 1807, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, (Fourier, 1808), Fourier derivó la ecuación del calor basándose en el principio de conservación de la energía y en la ley que establece que el flujo de calor es proporcional al gradiente negativo de la temperatura.

2.2 Derivación de la ecuación del calor

Consideraremos una barra tan delgada que podemos pensar en ella efectivamente como unidimensional y colocarla a lo largo del eje x, es decir, sea la coordenada x la que denota la posición de un punto en la barra. Imaginaremos que la temperatura en cada punto de la barra es conocida en algún tiempo inicial $t = 0$ y estaremos interesados en determinar la temperatura en tiempos futuros. Se asume que la barra está envuelta en algún tipo de aislamiento para que el calor no pueda escapar sino que deba fluir a lo largo del eje x. También se asume que la barra es "homogénea" en el sentido de que su composición física es la misma en todos los puntos. Denotaremos la temperatura en la posición x y tiempo t por $u(x, t)$.

Ahora bien, calor y temperatura no son lo mismo. La temperatura es una propiedad que describe el calor o frío relativo de un objeto que puede medirse (en grados en alguna escala elegida) por comparación con otro objeto (por ejemplo, un termómetro). El calor es energía. Usualmente se mide en calorías o BTU (Unidades Térmicas Británicas). La conexión es simple: elevar o bajar la temperatura de algo requiere una ganancia o pérdida de energía. Cuánta energía se necesita depende de una propiedad del objeto llamada *calor específico*.

Asociada con nuestra barra homogénea hay una constante σ (el calor específico) que depende de la sustancia de la que está hecha la barra y da una medida de la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una unidad de masa en un grado. Como es más conveniente tratar con longitudes de la barra en lugar de masas, introduciremos otra constante δ, la densidad de masa de la barra. Esta representa la cantidad de masa en una unidad de longitud de la barra. Así, si la barra tiene longitud L, la masa total de la barra es δL. Si queremos cambiar la temperatura de una barra de longitud L en T grados, la energía necesaria (o perdida) es $\sigma T \delta L$.

Consideremos un punto x en la barra y la pequeña sección de longitud Δx de la barra entre x y $x + \Delta x$. Más adelante, tomaremos un límite cuando $\Delta x \to 0$, así que somos libres de pensar en Δx como tan pequeño como queramos. Comencemos pensando en él lo suficientemente pequeño para que la temperatura de la sección esté bastante bien aproximada por la temperatura de su punto medio, es decir, la temperatura en el tiempo t de la sección es simplemente $u(x + \frac{\Delta x}{2}, t)$. La temperatura en un tiempo posterior $t + \Delta t$ es entonces simplemente $u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t)$, por lo que la diferencia de temperatura en estos dos tiempos es

$$u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t).$$

Ahora, ¿cuánta energía (calor) se necesita para cambiar la temperatura de la pequeña sección de la barra en esta cantidad? Bueno, según la definición de calor específico, podemos escribir esta energía como:

$$\sigma \left[u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t) \right] \delta \Delta x. \tag{2.1}$$

Hay otra forma de llegar a una expresión equivalente para la cantidad de calor necesaria dada anteriormente, pensando en términos de conducción de calor. Las sustancias conducen el calor de manera diferente, por eso algunas sustancias son mejores aislantes que otras. El experimento muestra que la cantidad de calor conducido a través de un punto x es proporcional a la diferencia de temperaturas a cada lado de x. La constante de proporcionalidad se llama conductividad térmica de la sustancia y se denotará por k. Los físicos llaman a esta conducción "flujo de calor" y se expresa matemáticamente de la siguiente manera: la cantidad de calor por unidad de tiempo que cruza el punto x en la dirección positiva de x está dada por

$$\Phi(x,t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{2.2}$$

Para entender la definición de flujo de calor puede ser útil considerar una figura. Si graficamos la temperatura $u(x,t)$ como función de x para algún valor fijo de t, la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ es simplemente la derivada regular con respecto a x, es decir, representa la pendiente de la línea tangente a la gráfica de u en el punto $(x, u(x,t))$. En el punto etiquetado $(x_1, u(x_1,t))$, esta pendiente es negativa y la ecuación (2) nos dice entonces que una cantidad positiva de calor por unidad de tiempo fluirá más allá de x_1 en la dirección positiva de x. Esto tiene sentido, ya que está más caliente justo a la izquierda de x_1 que justo a la derecha. En el punto etiquetado $(x_2, u(x_2,t))$, la pendiente es positiva y la ecuación (2) nos dice que una cantidad negativa de calor por unidad de tiempo fluirá más allá de x_2 en la dirección positiva de x, en otras palabras, el calor está fluyendo más allá de x_2 en la dirección negativa. Esto tiene sentido, ya que está más frío justo a la izquierda de x_1 que justo a la derecha.

Esta figura nos ayuda a visualizar la relación entre la pendiente de la temperatura y la dirección del flujo de calor:

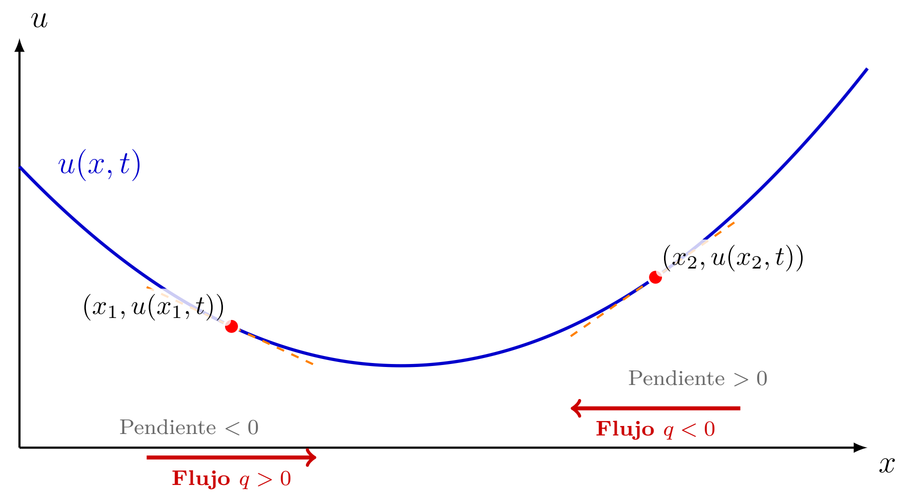

Figura 2.1: Relación entre el gradiente de temperatura y el flujo de calor. Cuando la pendiente es positiva (izquierda), el calor fluye en dirección negativa. Cuando la pendiente es negativa (derecha), el calor fluye en dirección positiva.

Ahora volvamos a nuestra pequeña subsección de la barra entre x y $x + \Delta x$. La cantidad total de calor que fluye hacia la sección de la barra por unidad de tiempo es simplemente el flujo de calor en x menos el flujo de calor en $x + \Delta x$ (el signo menos aquí es debido a la dirección: en $x + \Delta x$, "hacia la sección" está en la dirección negativa de x), o sea, $\Phi(x,t) - \Phi(x+\Delta x,t)$. Durante un pequeño intervalo de tiempo entre t y $t+\Delta t$, la energía total que entra en la pequeña sección de la barra es entonces

$$[\Phi(x,t) - \Phi(x+\Delta x,t)]\,\Delta t = k\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]\Delta t. \tag{2.3}$$

Igualando (1) y el lado derecho de (3) obtenemos

$$\sigma\left[u(x+\frac{\Delta x}{2},t+\Delta t) - u(x+\frac{\Delta x}{2},t)\right]\delta\Delta x = k\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]\Delta t$$

o bien,

$$\frac{u(x+\frac{\Delta x}{2},t+\Delta t) - u(x+\frac{\Delta x}{2},t)}{\Delta t} = \kappa\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x} \tag{2.4}$$

donde $\kappa \equiv \frac{k}{\sigma\delta}$. Si ahora tomamos el límite de ambos lados de (4) cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos:

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Tomando el límite de esta última ecuación cuando $\Delta t \to 0$ nos da lo que se conoce comúnmente como la ecuación del calor (o difusión) unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t). \tag{2.5}$$

Apéndice A

Material Complementario

A.1 Demostraciones Adicionales

Aquí puedes incluir demostraciones más detalladas o extensas que no encajan en el cuerpo principal del libro.

A.2 Tablas de Símbolos

Aquí puedes incluir tablas de símbolos lógicos y matemáticos de referencia.

Bibliografía

- Fourier, J.-B. J. (1808). Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides [Présenté le 21 décembre 1807 à l'Institut national]. *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris*, *1*(6), 112-116. 🌐.
- Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2003). *Fourier Analysis: An Introduction* (Vol. 1). Princeton University Press. 🌐.
- Sensenbaugh, R. (2023). Joseph Fourier. 🌐.
- Wikipedia contributors. (2024). Joseph Fourier. 🌐.
- Rodríguez-del-Río, R., & Zuazua, E. (s.f.). Series de Fourier y fenómeno de Gibbs. 🌐.