MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Alejandro Sánchez Yalí
Juan Pablo Restrepo

PRIMERA EDICIÓN

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Los números reales y sus propiedades

En esta sección introducimos el sistema de los números reales y presentamos sus propiedades fundamentales. Como es bien conocido, los números reales forma la base para el análisis matemático. Desde los griegos ya se sabía que los números racionales, es decir, cocientes de números enteros, no eran suficientes para describir todas las cantidades geométricas. Por ejemplo, en un triángulo reactángulo con catetos de longitud 1, por el teorema de Pitágoras, la longitud c de la hipotenusa es tal que $c^2 = 2$, es fácil probar que no existe ningún número racional p/q (con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$) que satisfaga esta ecuación. En efecto, si $c = p/q$ fuera una solución racional y tal que p y q no tuvieran factores primos en común, entonces $p^2 = 2q^2$ implica que p^2 es par, y por lo tanto p es par. Si p es par, entonces existe un entero k tal que $p = 2k$, y por lo tanto $p^2 = 4k^2$. Sustituyendo en la ecuación original obtenemos $4k^2 = 2q^2$, o lo que es lo mismo, $q^2 = 2k^2$. Esto implica que q^2 es par, y por lo tanto q es par. Pero si p y q son ambos pares, entonces tienen al menos el factor primo 2 en común, lo cual contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto, no existe ningún número racional que satisfaga la ecuación $c^2 = 2$. Sin embargo el número la ecuación $c^2 = 2$ tiene una solución en los números reales, y a este número se denota por $\sqrt{2}$. Para resolver este problema fue necesario ampliar el sistema de los número racionales a un sistema más grande, el sistema de los números reales.

Ejercicio 1.1 – Aproximación racional de $\sqrt{2}$. Como vimos, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Sin embargo, podemos aproximarlo mediante fracciones. El método babilónico (o de Herón) genera una sucesión de aproximaciones racionales: dado $x_0 > 0$, se define

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Implemente en Python una función que, dado un valor inicial x_0 y un número de iteraciones n, retorne la aproximación x_n de $\sqrt{2}$. Utilice la biblioteca `fractions` para trabajar con números racionales exactos y observe cómo las fracciones se vuelven cada vez más complejas mientras se acercan a $\sqrt{2}$.

1.1 Axiomas de la suma en $\mathbb{R}$

Comenzaremos por postular que existe un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos llamaremos **números reales**, junto con las operaciones de suma y multiplicación y una relación de orden.

Definición 1.1 – Suma en $\mathbb{R}$

La **suma** en los números reales es una función

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que asigna a cada par (a, b) el elemento $+(a, b)$, denotado $a + b$ (notación infija). Esta operación satisface los siguientes axiomas:

AS1. **Conmutatividad:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a + b = b + a$.

AS2. **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$.

AS3. **Elemento neutro:** Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a + 0 = a$.

AS4. **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a+(-a) = 0$.

Con estos cuatro axiomas, el conjunto $\mathbb{R}$ junto con la operación de suma es un **grupo abeliano**. Además, a partir de estos axiomas se pueden demostrar las siguientes propiedades adicionales de la suma en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a + (-a) = 0$.
2. $-(-a) = a$.
3. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.
4. $0 + a = a$.
5. Si para algún $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a + b = a$, entonces $b = 0$.

1.2 Axiomas de la multiplicación en $\mathbb{R}$

Ahora definimos la operación de multiplicación en los números reales mediante los siguientes axiomas.

Definición 1.2 – Multiplicación en $\mathbb{R}$

La **multiplicación** en los números reales es una función

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que asigna a cada par (a, b) el elemento $\cdot(a, b)$, denotado $a \cdot b$ o simplemente ab (notación infija). Esta operación satisface los siguientes axiomas:

AM1. **Conmutatividad:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$.

AM2. **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

AM3. **Elemento neutro:** Existe un elemento $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $1 \cdot a = a$.

AM4. **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un elemento $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

AM5. **Distributividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Se puede observar que los axiomas AM1 a AM4 son similares a los axiomas AS1 a AS4, y juntos implican que el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ junto con la operación de multiplicación es también un grupo abeliano. El axioma AM5 expresa una relación entre las operaciones de suma y multiplicación.

Teorema 1.2

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a \cdot 0 = 0$.
2. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
3. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.
4. $a \cdot 1 = a$.
5. Si para algún $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se cumple que $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$.

El conjunto de los números reales junto con las operaciones de suma y multiplicación que hemos definido hasta ahora se denomina un **cuerpo** y es una estructura algebraica fundamental en matemáticas que usualmente se denota como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. En general, si un conjunto K junto con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ satisface los axiomas AS1 a AS4 y AM1 a AM5, entonces decimos que $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Ejercicio 1.2. Considere un sistema con dos elementos α y β y las siguientes reglas de suma y multiplicación:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha &= \alpha, & \alpha + \beta &= \beta, & \beta + \alpha &= \beta, & \beta + \beta &= \alpha, \\ \alpha \cdot \alpha &= \alpha, & \alpha \cdot \beta &= \alpha, & \beta \cdot \alpha &= \alpha, & \beta \cdot \beta &= \beta. \end{aligned}$$

Demuestre que este sistema forma un cuerpo.

Ejercicio 1.3. Considere los números de la forma $a+b\sqrt{6}$ donde a y b son racionales. ¿Satisface este conjunto los axiomas de un cuerpo?

Ejercicio 1.4 – Verificación de axiomas de cuerpo. Implemente en Python una clase `TwoElementField` que represente el cuerpo con dos elementos $\{\alpha, \beta\}$ del Ejercicio 1.2. La clase debe:

1. Definir las operaciones de suma y multiplicación según las tablas dadas.
2. Incluir un método que verifique automáticamente cada uno de los axiomas AS1–AS4 y AM1–AM5 para todos los elementos del cuerpo.
3. Identificar cuál elemento actúa como el 0 (neutro aditivo) y cuál como el 1 (neutro multiplicativo).

1.3 Cuerpos finitos y sobrecarga de operadores

Los números reales no son el único ejemplo de cuerpo. Un caso particularmente interesante son los **cuerpos finitos**, que tienen un número finito de elementos. Podemos construir cuerpos finitos utilizando la **aritmética modular**.

Definición 1.3 – Aritmética modular

Dado un entero positivo n, decimos que dos enteros a y b son **congruentes módulo** n, y escribimos $a \equiv b \pmod{n}$, si y solo si n divide a $a - b$. Equivalentemente, a y b tienen el mismo residuo al dividirse entre n. El conjunto de clases de equivalencia se denota

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\},$$

donde $[a]$ representa la clase de todos los enteros congruentes con a módulo n. Las operaciones en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se definen como:

$$[a] + [b] = [a+b],$$
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

La aritmética modular puede visualizarse como un reloj: los números «ciclan» al llegar al módulo. Si el módulo es 12 (como en un reloj), entonces $10 + 5 \equiv 3 \pmod{12}$, pues al avanzar 5 horas desde las 10, llegamos a las 3.

Dado un número primo p, el conjunto $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con las operaciones de suma y multiplicación módulo p forma un cuerpo. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tenemos que $3 + 4 \equiv 2 \pmod{5}$ (pues $7 = 5 + 2$) y $3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod{5}$ (pues $12 = 2 \cdot 5 + 2$).

Teorema 1.3

Si p es un número primo, entonces $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

La demostración de este teorema requiere verificar los axiomas AS1–AS4 y AM1–AM5. El punto crucial es que cuando p es primo, todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo, lo cual se puede demostrar usando el algoritmo extendido de Euclides.

1.3.1. Implementación computacional en Python

Una de las características más elegantes de Python es la **sobrecarga de operadores** (*operator overloading*), que permite redefinir el comportamiento de operadores como `+`, `-`, `*` para tipos de datos personalizados. Esto nos permite escribir código que se lee de forma natural, como si estuviéramos trabajando con números ordinarios.

La conexión con los axiomas de cuerpo es directa: cuando definimos una clase que representa elementos de un cuerpo, los métodos especiales de Python corresponden exactamente a las operaciones algebraicas (ver Cuadro 1.1).

Axioma	**Operación**	**Método Python**
AS1–AS4	Suma $a + b$	`__add__(self, other)`
	Negativo $-a$	`__neg__(self)`
AM1–AM5	Producto $a \cdot b$	`__mul__(self, other)`
	Inverso a^{-1}	`__invert__(self)` o método

Cuadro 1.1: Correspondencia entre axiomas de cuerpo y métodos especiales de Python.

A continuación presentamos una implementación de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que ilustra estos conceptos:

Código 1.1 – Implementación de aritmética modular en Python

```python
class Zmod:
    """
    Representa un elemento de Z/nZ.
    Implementa los axiomas de cuerpo mediante sobrecarga de operadores.
    """
    def __init__(self, value: int, modulus: int):
        self.modulus = modulus
        self.value = value % modulus

    def __repr__(self):
        return f"{self.value} (mod {self.modulus})"

    def __eq__(self, other):
        return self.value == other.value and self.modulus == other.modulus

    # AS1-AS4: Operaciones de suma
    def __add__(self, other):
        return Zmod(self.value + other.value, self.modulus)

    def __neg__(self):
        return Zmod(-self.value, self.modulus)

    def __sub__(self, other):
        return self + (-other)

    # AM1-AM5: Operaciones de multiplicacion
    def __mul__(self, other):
        return Zmod(self.value * other.value, self.modulus)

    def inverse(self):
        """Calcula el inverso multiplicativo usando Euclides extendido."""
        def extended_gcd(a, b):
            if a == 0:
                return b, 0, 1
            gcd, x1, y1 = extended_gcd(b % a, a)
            return gcd, y1 - (b // a) * x1, x1

        gcd, x, _ = extended_gcd(self.value, self.modulus)
```

```
        if gcd != 1:
            raise ValueError(f"{self.value} no tiene inverso en Z/{self.modulus}Z")
        return Zmod(x, self.modulus)

    def __truediv__(self, other):
        return self * other.inverse()
```

Con esta implementación, podemos trabajar con aritmética modular de forma natural:

Código 1.2 – Ejemplo de uso de la clase Zmod

```
from zmod import Zmod

# Trabajando en Z/7Z (un cuerpo, pues 7 es primo)
a = Zmod(3, 7)
b = Zmod(5, 7)

print(a + b)        # 1 (mod 7), pues 3 + 5 = 8 = 1 (mod 7)
print(a * b)        # 1 (mod 7), pues 3 * 5 = 15 = 1 (mod 7)
print(a.inverse()) # 5 (mod 7), pues 3 * 5 = 1 (mod 7)
print(b / a)        # 4 (mod 7), pues 5 * 5 = 25 = 4 (mod 7)
```

Ejercicio 1.5 – Verificador de axiomas para $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Extienda la clase `Zmod` presentada anteriormente para incluir un método de clase `verify_field_axioms(n)` que:

1. Genere todos los elementos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Verifique sistemáticamente cada uno de los axiomas AS1–AS4 y AM1–AM5.
3. Retorne `True` si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un cuerpo, `False` en caso contrario.
4. Imprima cuál axioma falla cuando n no es primo (por ejemplo, para $n = 6$, el elemento 2 no tiene inverso multiplicativo).

Pruebe su implementación con $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y verifique que solo los valores primos producen cuerpos.

1.4 Axioma para la relación de orden en $\mathbb{R}$

Los números reales también están ordenados, lo que significa que existe una relación de orden que nos permite comparar dos números reales y determinar cuál es mayor, menor o si son iguales. Esta relación de orden se define mediante los siguientes axiomas:

Definición 1.4 – Relación de orden en $\mathbb{R}$

La relación de orden en los números reales es una relación binaria denotada por $<$ que satisface los siguientes axiomas:

AO1. **Tricotomía:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera: $a < b$, $a = b$, o $a > b$.

AO2. **Compatibilidad con la suma y el producto:** Si a y b son números reales tales que $0 < a$ y $0 < b$, entonces $0 < a + b$ y $0 < a \cdot b$.

AO3. **Caracterización del orden:** Para a y b en $\mathbb{R}$, $a < b$ si y solo si $b - a > 0$.

Si $a < b$ también escribimos $b > a$. La relación $\leq$ se define por $a \leq b$ si y solo si $a < b$ o $a = b$. Los axiomas AO1 y AO3 dicen que $<$ es un orden lineal, y AO2 relaciona el orden $<$ con las operaciones $+$ y $\cdot$.

Los axiomas anteriores nos dicen que $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ es un **cuerpo ordenado**. Las consecuencias de estos axiomas son válidas para cualquier cuerpo ordenado, como por ejemplo los números racionales $\mathbb{Q}$. Lo que distingue a $\mathbb{R}$ de otros cuerpos ordenados es el **axioma de completitud**, que enunciaremos más adelante.

Definición 1.5 – Valor absoluto

Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el **módulo** o **valor absoluto** $|a|$ se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 1.6 – Propiedades del orden. Usando los axiomas AS1–AS4, AM1–AM5 y AO1–AO3, demuestre las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a < b$ y $b < c$ implican $a < c$; $a \leq b$ y $b \leq c$ implican $a \leq c$. Es decir, las relaciones $<$ y $\leq$ son transitivas. La relación $\leq$ es reflexiva ($a \leq a$) mientras que $<$ no lo es.
2. Si a y b están en $\mathbb{R}$, $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
3. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a > b$, entonces $a + c > b + c$; si $c > 0$ entonces $ac > bc$; si $c < 0$ entonces $ac < bc$.
4. Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $a \cdot a > 0$. En consecuencia, $1 > 0$.
5. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ si y solo si $-a < 0$.
6. Si $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$; si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.
7. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a - b < a - c$ si y solo si $b > c$.
8. Si a y b están en $\mathbb{R}$, $a > b > 0$ implica $0 < a^{-1} < b^{-1}$, mientras que $a < b < 0$ implica $b^{-1} < a^{-1} < 0$.
9. Para cualesquiera a y b en $\mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$, $a > b \Leftrightarrow a \cdot a > b \cdot b$.

Ejercicio 1.7 – Propiedades del valor absoluto. Demuestre las siguientes propiedades del valor absoluto:

1. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|-a| = |a|$. Además, $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$.
2. Para cualesquiera a y b en $\mathbb{R}$: $|ab| = |a||b|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular) y $|a - b| \geq ||a| - |b||$.
3. Si a y b están en $\mathbb{R}$ y $b > 0$, entonces $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.

Ejercicio 1.8 – Orden en cuerpos finitos. Demuestre que para el sistema de dos elementos $\{\alpha, \beta\}$ definido en el Ejercicio 1.2, no es posible definir una relación de orden que satisfaga los axiomas AO1–AO3.

Ejercicio 1.9. Considere el conjunto descrito en el Ejercicio 1.3 (números de la forma $a+b\sqrt{6}$). ¿Satisface este conjunto los axiomas para la relación de orden?

Ejercicio 1.10 – Implementación de un cuerpo ordenado en Python. Implemente una clase `QuadraticExtension` para representar números de la forma $a + b\sqrt{6}$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$ (use la biblioteca `fractions`). La clase debe incluir:

Operaciones de cuerpo:

Operación	Método Python
$x + y$	`__add__(self, other)`
$-x$	`__neg__(self)`
$x \cdot y$	`__mul__(self, other)`
x^{-1}	`inverse(self)`

Operaciones de orden:

Operador	Método Python
$x < y$	`__lt__(self, other)`
$x \leq y$	`__le__(self, other)`
$x > y$	`__gt__(self, other)`
$x \geq y$	`__ge__(self, other)`

Sugerencia: Para comparar $a+b\sqrt{6}$ con 0, considere que $\sqrt{6} \approx 2.449$. Si $b \neq 0$, puede determinar el signo analizando los casos según el signo de b y comparando a^2 con $6b^2$.

Ejercicio 1.11 – Verificación computacional de propiedades del orden. Implemente una función `verify_order_properties()` que, dados tres números racionales a, b y c (usando la biblioteca `fractions`), verifique computacionalmente las propiedades del Ejercicio 1.6:

1. Transitividad: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
2. Si $a \neq 0$, entonces $a \cdot a > 0$.
3. Si $a > 0$, entonces $-a < 0$.

4. Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.

Pruebe su función con varios casos, incluyendo números negativos y fracciones.

Problema 1.1 – No completitud de $\mathbb{Q}$

Una sucesión (a_n) en un cuerpo ordenado se llama **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo $n, m > N$. Un cuerpo ordenado se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del cuerpo. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ satisface todos los axiomas de cuerpo (AS1–AS4 y AM1–AM5), sin embargo no es completo. Demuestre esto construyendo una sucesión de racionales (r_n) tal que:

1. $r_n^2 < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. La sucesión (r_n) es estrictamente creciente y acotada superiormente.
3. (r_n) es una sucesión de Cauchy.

Concluya que (r_n) no puede converger a ningún número racional, demostrando así que $\mathbb{Q}$ no es completo.
Sugerencia: Considere la sucesión definida por $r_1 = 1$ y $r_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(r_n + \dfrac{2}{r_n}\right)$.

1.5 Los números naturales

En esta sección introducimos y estudiaremos algunas propiedades de los números naturales como subconjunto de $\mathbb{R}$. Intuitivamente pensamos en los números naturales como el conjunto que contiene al número 1 y a todos los números que se obtienen sumando 1 repetidamente:

$$\{1, 1+1, 1+1+1, \dots\} \tag{1.1}$$

de modo que 1 es un natural y si n es un natural, entonces $n+1$ es un natural. Sin embargo, esta definición no es lo suficientemente rigurosa para trabajar con los números naturales en el contexto de los números reales. Por lo tanto, es necesario definir formalmente qué entendemos por «número natural».

Definición 1.6 – Conjuntos inductivos

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es un **conjunto inductivo** si satisface las siguientes propiedades:

1. $1 \in S$.
2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

Como ejemplos tenemos que $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo y también lo es $x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1$. Es fácil verificar que la intersección de cualquier colección de conjunto inductivos es un conjunto inductivo. Sea $\mathcal{I}$ la colección de todos los conjuntos inductivos. Entonces, el conjunto de los números naturales se define como

$$\mathbb{N} = \bigcap_{S \in \mathcal{I}} S \tag{1.2}$$

es decir,

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{R} \mid n \in S \text{ para todo } S \in \mathcal{I}\}. \tag{1.3}$$

Los elementos de $\mathbb{N}$ son los números naturales (o enteros positivos). Si A es un conjunto inductivo, entonces $A \supseteq \mathbb{N}$. Además $1 \in \mathbb{N}$ y si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$, lo cual coincide con nuestra intuición inicial.

Teorema 1.4 – Principio de inducción matemática

Si $S \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Si S es inductivo entonces $\mathbb{N} \subseteq S$. Por hipótesis $S \subseteq \mathbb{N}$. Por lo tanto, $S = \mathbb{N}$. □

Veamos la forma como se utiliza el principio de inducción matemática. Supongamos que queremos demostrar que una propiedad $P(n)$ es cierta para todo número natural n. Entonces, debemos demostrar que $P(1)$ es cierta y que si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ es cierta. Si logramos demostrar ambas cosas, entonces $P(n)$ es cierta para todo número natural n. En efecto, sea $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es cierta}\}$. Entonces $1 \in S$ y si $n \in S$, entonces $P(n)$ es cierta, por lo que $P(n+1)$ es cierta, de modo que $n+1 \in S$. Por lo tanto, S es un conjunto inductivo y por el Teorema 1.1, $S = \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.12 – Suma de los primeros n números naturales. Demuestre por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.4}$$

Ejercicio 1.13 – Suma de los primeros n números impares. Demuestre por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \tag{1.5}$$

Ejercicio 1.14 – Suma de los primeros n cubos. Demuestre por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{1.6}$$

Ejercicio 1.15 – Suma de los primeros n números pares. Demuestre por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1) \tag{1.7}$$

Ejercicio 1.16 – Suma de los primeros n números impares. Demuestre por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \tag{1.8}$$

Teorema 1.5

Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$, entonces $n-1 \in \mathbb{N}$.

Demostración. Usamos inducción, sea $A = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n-1 \in \mathbb{N}\}$. Claramente $1 \in A$. Supongamos que $k \in A$, entonces $(k+1)-1 = k \in A \subset \mathbb{N}$, de modo que $k+1 \in A$. Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 2

La genesis del análisis de Fourier

> Respecto a las investigaciones de d'Alembert y Euler, ¿no podría añadirse que, si conocían esta expansión, hicieron un uso muy imperfecto de ella? Ambos estaban persuadidos de que una función arbitraria y discontinua nunca podría resolverse en series de este tipo, y ni siquiera parece que alguien hubiera desarrollado una constante en cosenos de arcos múltiples, el primer problema que tuve que resolver en la teoría del calor.
>
> *J. Fourier*, 1808-9

2.1 Introducción histórica

Durante el siglo XVIII, matemaáticos como Jean Le Rond d'Alembert(1717-1783) y Leonhard Euler (1707-1783) investigaron la ecuación de onda para describir el movimiento de una cuerda vibrante (Stein & Shakarchi, 2003). Aunque en 1753 Daniel Bernulli (1700-1782) propuso que cualquier movimiento en la cuerda podía expresarse como una suma infinita de oscilaciones sinusoidales (armónicos), Euler y d'Alembert Euler y d'Alembert rechazaron la propuesta de Bernoulli, argumentando que una suma de funciones suaves y periódicas (como senos y cosenos) jamás podría representar una curva que no fuera inherentemente suave o que tuviera comportamientos no periódicos en su origen (Rodríguez-del-Río & Zuazua, s.f.). En esa época, se creía firmemente que una función con discontinuidades nunca podría ser representada por una serie de funciones continuas y suaves como el seno y el coseno.

La revolución en el pensamiento matemático llegó con Joseph Fourier (1768-1830) a principios del siglo XIX (Sensenbaugh, 2023), (Wikipedia contributors, 2024). Mientras servía como prefecto en Isère, Francia, Fourier comenzó a experimentar con la difusión térmica, adoptando un enfoque fenomenológico: no buscacaba entender qué era el calor, sino las leyes matemáticas que gobernaban su propagación. En su memoría de 1807, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, (Fourier, 1808), Fourier derivó la ecuación del calor basándose en el principio de conservación de la energía y en la ley que establece que el flujo de calor es proporcional al gradiente negativo de la temperatura.

2.2 Derivación de la ecuación del calor

Consideraremos una barra tan delgada que podemos pensar en ella efectivamente como unidimensional y colocarla a lo largo del eje x, es decir, sea la coordenada x la que denota la posición de un punto en la barra. Imaginaremos que la temperatura en cada punto de la barra es conocida en algún tiempo inicial $t = 0$ y estaremos interesados en determinar la temperatura en tiempos futuros. Se asume que la barra está envuelta en algún tipo de aislamiento para que el calor no pueda escapar sino que deba fluir a lo largo del eje x. También se asume que la barra es "homogénea" en el sentido de que su composición física es la misma en todos los puntos. Denotaremos la temperatura en la posición x y tiempo t por $u(x, t)$.

Ahora bien, calor y temperatura no son lo mismo. La temperatura es una propiedad que describe el calor o frío relativo de un objeto que puede medirse (en grados en alguna escala elegida) por comparación con otro objeto (por ejemplo, un termómetro). El calor es energía. Usualmente se mide en calorías o BTU (Unidades Térmicas Británicas). La conexión es simple: elevar o bajar la temperatura de algo requiere una ganancia o pérdida de energía. Cuánta energía se necesita depende de una propiedad del objeto llamada *calor específico*.

Asociada con nuestra barra homogénea hay una constante σ (el calor específico) que depende de la sustancia de la que está hecha la barra y da una medida de la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una unidad de masa en un grado. Como es más conveniente tratar con longitudes de la barra en lugar de masas, introduciremos otra constante δ, la densidad de masa de la barra. Esta representa la cantidad de masa en una unidad de longitud de la barra. Así, si la barra tiene longitud L, la masa total de la barra es δL. Si queremos cambiar la temperatura de una barra de longitud L en T grados, la energía necesaria (o perdida) es $\sigma T \delta L$.

Consideremos un punto x en la barra y la pequeña sección de longitud Δx de la barra entre x y $x + \Delta x$. Más adelante, tomaremos un límite cuando $\Delta x \to 0$, así que somos libres de pensar en Δx como tan pequeño como queramos. Comencemos pensando en él lo suficientemente pequeño para que la temperatura de la sección esté bastante bien aproximada por la temperatura de su punto medio, es decir, la temperatura en el tiempo t de la sección es simplemente $u(x + \frac{\Delta x}{2}, t)$. La temperatura en un tiempo posterior $t + \Delta t$ es entonces simplemente $u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t)$, por lo que la diferencia de temperatura en estos dos tiempos es

$$u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t).$$

Ahora, ¿cuánta energía (calor) se necesita para cambiar la temperatura de la pequeña sección de la barra en esta cantidad? Bueno, según la definición de calor específico, podemos escribir esta energía como:

$$\sigma \left[u(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t) - u(x + \frac{\Delta x}{2}, t) \right] \delta \Delta x. \tag{2.1}$$

Hay otra forma de llegar a una expresión equivalente para la cantidad de calor necesaria dada anteriormente, pensando en términos de conducción de calor. Las sustancias conducen el calor de manera diferente, por eso algunas sustancias son mejores aislantes que otras. El experimento muestra que la cantidad de calor conducido a través de un punto x es proporcional a la diferencia de temperaturas a cada lado de x. La constante de proporcionalidad se llama conductividad térmica de la sustancia y se denotará por k. Los físicos llaman a esta conducción "flujo de calor" y se expresa matemáticamente de la siguiente manera: la cantidad de calor por unidad de tiempo que cruza el punto x en la dirección positiva de x está dada por

$$\Phi(x,t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{2.2}$$

Para entender la definición de flujo de calor puede ser útil considerar una figura. Si graficamos la temperatura $u(x,t)$ como función de x para algún valor fijo de t, la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ es simplemente la derivada regular con respecto a x, es decir, representa la pendiente de la línea tangente a la gráfica de u en el punto $(x, u(x,t))$. En el punto etiquetado $(x_1, u(x_1,t))$, esta pendiente es negativa y la ecuación (2) nos dice entonces que una cantidad positiva de calor por unidad de tiempo fluirá más allá de x_1 en la dirección positiva de x. Esto tiene sentido, ya que está más caliente justo a la izquierda de x_1 que justo a la derecha. En el punto etiquetado $(x_2, u(x_2,t))$, la pendiente es positiva y la ecuación (2) nos dice que una cantidad negativa de calor por unidad de tiempo fluirá más allá de x_2 en la dirección positiva de x, en otras palabras, el calor está fluyendo más allá de x_2 en la dirección negativa. Esto tiene sentido, ya que está más frío justo a la izquierda de x_1 que justo a la derecha.

Esta figura nos ayuda a visualizar la relación entre la pendiente de la temperatura y la dirección del flujo de calor:

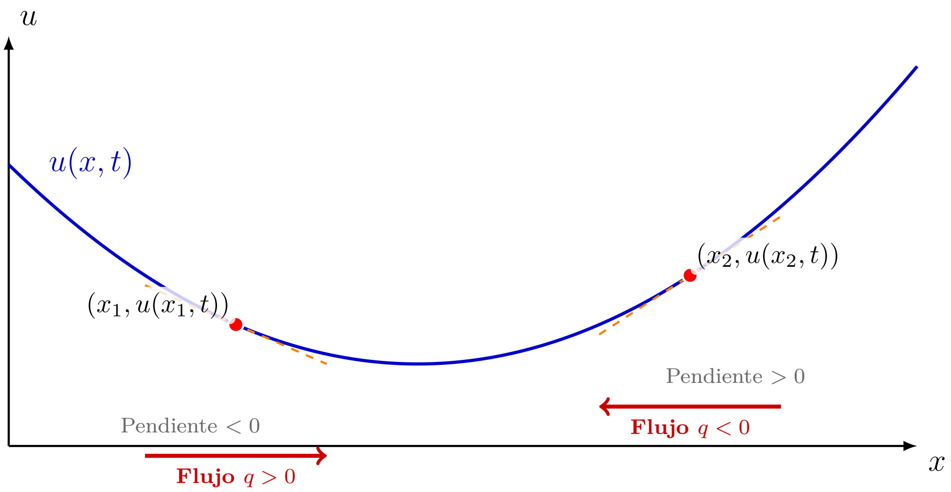

Figura 2.1: Relación entre el gradiente de temperatura y el flujo de calor. Cuando la pendiente es positiva (izquierda), el calor fluye en dirección negativa. Cuando la pendiente es negativa (derecha), el calor fluye en dirección positiva.

Ahora volvamos a nuestra pequeña subsección de la barra entre x y $x + \Delta x$. La cantidad total de calor que fluye hacia la sección de la barra por unidad de tiempo es simplemente el flujo de calor en x menos el flujo de calor en $x + \Delta x$ (el signo menos aquí es debido a la dirección: en $x + \Delta x$, "hacia la sección" está en la dirección negativa de x), o sea, $\Phi(x,t) - \Phi(x + \Delta x, t)$. Durante un pequeño intervalo de tiempo entre t y $t + \Delta t$, la energía total que entra en la pequeña sección de la barra es entonces

$$[\Phi(x,t) - \Phi(x + \Delta x, t)]\,\Delta t = k\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]\Delta t. \tag{2.3}$$

Igualando (1) y el lado derecho de (3) obtenemos

$$\sigma\left[u(x+\frac{\Delta x}{2},t+\Delta t)-u(x+\frac{\Delta x}{2},t)\right]\delta\Delta x=k\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]\Delta t$$

o bien,

$$\frac{u(x+\frac{\Delta x}{2},t+\Delta t)-u(x+\frac{\Delta x}{2},t)}{\Delta t}=\kappa\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x} \tag{2.4}$$

donde $\kappa\equiv\dfrac{k}{\sigma\delta}$. Si ahora tomamos el límite de ambos lados de (4) cuando $\Delta x\to 0$, obtenemos:

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Tomando el límite de esta última ecuación cuando $\Delta t\to 0$ nos da lo que se conoce comúnmente como la ecuación del calor (o difusión) unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t). \tag{2.5}$$

Apéndice A

Material Complementario

A.1 Demostraciones Adicionales

Aquí puedes incluir demostraciones más detalladas o extensas que no encajan en el cuerpo principal del libro.

A.2 Tablas de Símbolos

Aquí puedes incluir tablas de símbolos lógicos y matemáticos de referencia.

Bibliografía

- Fourier, J.-B. J. (1808). Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides [Présenté le 21 décembre 1807 à l'Institut national]. *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris*, *1*(6), 112-116. .

- Spivak, M. (1965). *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Addison-Wesley. .

- Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2003). *Fourier Analysis: An Introduction* (Vol. 1). Princeton University Press. .

- Ghorpade, S. R., & Limaye, B. V. (2010). *A Course in Multivariable Calculus and Analysis*. Springer. .

- Sensenbaugh, R. (2023). Joseph Fourier. .

- Wikipedia contributors. (2024). Joseph Fourier. .

- Ivorra Castillo, C. (s.f.). *Historia de la Fundamentación de la Matemática*. .

- Rodríguez-del-Río, R., & Zuazua, E. (s.f.). Series de Fourier y fenómeno de Gibbs. .

- Shurman, J. (s.f.). *Multivariable Calculus*. .