

# Redes Neuronales

Una Introducción Moderna al Deep Learning

Alejandro Sánchez Yalí

Math & Code Community

15 de noviembre de 2025

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
<b>2. Álgebra Lineal</b>	<b>3</b>
2.1. Matrices . . . . .	3
2.2. Operaciones con matrices . . . . .	6
2.2.1. La traza y el determinante de una matriz . . . . .	11
2.2.2. Matriz inversa . . . . .	13
<b>Apéndice: Material Complementario</b>	<b>14</b>
.1. Demostraciones Adicionales . . . . .	14
.2. Tablas de Datos . . . . .	14

# Índice de figuras

# Índice de cuadros

# Capítulo 1

## Introducción

*La inteligencia es la capacidad de adaptarse al cambio.*

---

Albert Einstein

### 1.1 Preliminares

**Definición 1.1** (Grupo simétrico de permutaciones). Sea  $X$  un conjunto finito de  $n$  elementos. El grupo simétrico de permutaciones, denotado por  $S_n$ , es el conjunto de todas las biyecciones de  $X$  sobre sí mismo con la operación de composición de funciones.

**Definición 1.2** (Signo de una permutación). Sea  $\sigma \in S_n$  una permutación. El signo de  $\sigma$ , denotado por  $\text{sgn}(\sigma)$ , es 1 si  $\sigma$  es par (y se puede expresar como un producto de un número par de transposiciones) y  $-1$  si  $\sigma$  es impar (y se puede expresar como un producto de un número impar de transposiciones).

El signo de una permutación  $\sigma$  se puede calcular contando el número de inversiones en la permutación. Una inversión es un par de índices  $(i, j)$  con  $i < j$  tal que  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Si el número total de inversiones es par, entonces  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ ; si es impar, entonces  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ .

El proceso paso a paso para determinar el signo de una permutación es el siguiente:

1. Escribe la permutación en forma de lista, por ejemplo,  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ .
2. Para cada par de índices  $i < j$ , compara los valores  $\sigma(i)$  y  $\sigma(j)$ .
3. Cuenta cuántos pares cumplen que  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Cada uno de estos pares es una inversión.

4. Si el número total de inversiones es par, la permutación es par y  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ .
5. Si el número total de inversiones es impar, la permutación es impar y  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ .

*Ejemplo 1.1* (Permutaciones y su signo). Consideremos el conjunto  $X = \{1, 2, 3\}$ . Las permutaciones de  $X$  son:

- $\sigma_1 = (1, 2, 3)$  (identidad)
- $\sigma_2 = (1, 3, 2)$
- $\sigma_3 = (2, 1, 3)$
- $\sigma_4 = (2, 3, 1)$
- $\sigma_5 = (3, 1, 2)$
- $\sigma_6 = (3, 2, 1)$

El signo de cada permutación es:

- $\text{sgn}(\sigma_1) = 1$  (par, 0 inversiones)
- $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$  (impar, 1 inversión:  $(3, 2)$ )
- $\text{sgn}(\sigma_3) = -1$  (impar, 1 inversión:  $(2, 1)$ )
- $\text{sgn}(\sigma_4) = 1$  (par, 2 inversiones:  $(2, 1)$  y  $(3, 1)$ )
- $\text{sgn}(\sigma_5) = 1$  (par, 2 inversiones:  $(3, 1)$  y  $(3, 2)$ )
- $\text{sgn}(\sigma_6) = -1$  (impar, 3 inversiones:  $(3, 2)$ ,  $(3, 1)$  y  $(2, 1)$ )

# Capítulo 2

## Álgebra Lineal

*La inteligencia es la capacidad de adaptarse al cambio.*

---

Albert Einstein

El álgebra lineal constituye el fundamento matemático de la inteligencia artificial, proporcionando el lenguaje y las herramientas esenciales para representar y manipular datos, modelos y algoritmos. Este capítulo presenta una revisión sistemática de conceptos necesarios para el trabajo con Vectores y Matrices.

### 2.1 Matrices

**Definición 2.1** (Matriz). Una **Matriz** de orden  $m \times n$  sobre un campo  $\mathbb{K}$  es un arreglo rectangular de elementos  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  (llamados entradas o coeficientes), donde  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ , organizados en  $m$  filas y  $n$  columnas. Se denota como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

o de forma abreviada como  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

El conjunto de todas las matrices de orden  $m \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$  se denota por  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Cuando el número de filas coincide con el número de columnas, se dice que la matriz es **Matriz cuadrada**. El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden  $n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$  se denota por  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , que es equivalente a escribir  $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ .

Cada posición en una matriz está identificada por dos índices: uno para la fila y otro para la columna. El elemento que se encuentra en la intersección de la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima se denomina **entrada**  $(i, j)$ -ésima de la matriz  $A$ . Por convención, este

elemento se denota como  $a_{ij}$ , lo que permite representar de manera compacta a la matriz  $A$  mediante la notación  $(a_{ij})$ .

**Definición 2.2** (Columna y fila de una matriz). Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Dado  $j \in \{1, \dots, n\}$  la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

se llama **columna  $j$ -ésima** de  $A$  y se denota como  $A_{c(j)}$ , y dado  $i \in \{1, \dots, m\}$  la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

se denomina **fila  $i$ -ésima** de  $A$  y se denota como  $A_{r(i)}$ .

A continuación se presentan algunos ejemplos de matrices.

*Ejemplo 2.1.* La **matriz nula**  $0 \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  es aquella con  $m$  filas y  $n$  columnas cuyas entradas son todas iguales a 0. En algunas ocasiones escribiremos  $0_{m \times n}$  para denotar a la matriz nula de orden  $m \times n$ .

*Ejemplo 2.2.* Se dice que una matriz cuadrada  $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es **diagonal** si  $d_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ . En otras palabras, una matriz diagonal es aquella que solo tiene elementos no nulos en su diagonal principal. Utilizaremos la notación

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

con  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , para denotar la matriz diagonal  $D$  donde  $d_{ii} = \lambda_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Es decir,

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

*Ejemplo 2.3.* La **matriz identidad**  $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es aquella con  $n$  filas y  $n$  columnas cuyas entradas son todas iguales a 0 excepto las de la diagonal principal, que son iguales a 1. Es decir,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Con la notación habitual de la *delta de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se tiene que  $I_n = (\delta_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Definición 2.3** (Igualdad de matrices). Dos matrices  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  en  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  son **iguales** si y solo si tienen el mismo orden y sus entradas correspondientes son iguales; es decir:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i = 1, \dots, m \text{ y } j = 1, \dots, n$$

**Definición 2.4** (Submatriz). Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Llamaremos **submatriz** de  $A$  a cualquier matriz obtenida a partir de  $A$  suprimiendo algunas de sus filas y/o columnas. Si  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  y  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  son subconjuntos de índices, denotaremos por  $A_{IJ}$  a la submatriz formada por las filas indexadas por  $I$  y las columnas indexadas por  $J$ .

*Ejemplo 2.4.* Consideremos la matriz  $A \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{K})$  dada por:

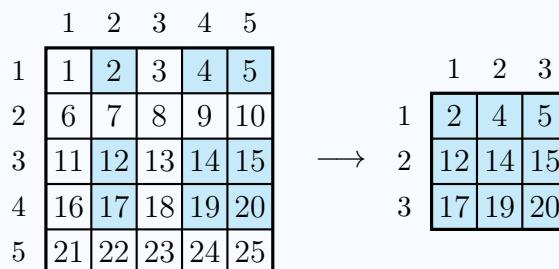
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}.$$

Si tomamos los subconjuntos de índices  $I = \{1, 3, 4\}$  y  $J = \{2, 4, 5\}$ , entonces la submatriz  $A_{IJ}$  es:

$$A_{IJ} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 12 & 14 & 15 \\ 17 & 19 & 20 \end{bmatrix}$$

que corresponde al conjunto de subíndices  $I \times J$  de la matriz  $A$ .

Para visualizar mejor este proceso de selección de submatriz, consideremos el siguiente diagrama:



donde las casillas sombreadas corresponden a los elementos seleccionados para formar la submatriz  $A_{IJ}$  con  $I = \{1, 3, 4\}$  y  $J = \{2, 4, 5\}$ .

## 2.2 Operaciones con matrices

**Definición 2.5** (Suma de matrices). La suma de dos matrices  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  se define como la suma elemento a elemento, es decir,

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}).$$

La suma de matrices cumple las siguientes propiedades fundamentales:

1. **Asociatividad:** Para cualesquiera matrices  $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$ , se cumple que  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
2. **Commutatividad:** Para cualesquiera matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$ , se cumple que  $A + B = B + A$ .
3. **Elemento neutro:** La matriz nula  $0 \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$  actúa como elemento neutro de la suma, es decir, para toda matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$  se cumple que  $A + 0 = 0 + A = A$ .
4. **Elemento opuesto:** Para toda matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$ , existe una matriz opuesta  $-A = (-a_{ij})$  tal que  $A + (-A) = (-A) + A = 0$ . Esta matriz opuesta se obtiene multiplicando cada elemento de  $A$  por  $-1$ .

Estas propiedades dotan al conjunto  $\mathcal{M}_{m \times n}(k)$  de una estructura de grupo abeliano respecto a la operación suma.

**Definición 2.6** (Producto de un escalar por una matriz). Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$  y  $\lambda \in k$ . Se define el producto de  $\lambda$  por  $A$  como la matriz

$$\lambda \cdot A := \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(k),$$

esto es, el producto de un escalar por una matriz es la matriz que resulta al multiplicar cada una de las entradas de la matriz por el escalar.

Para  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  y  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , el producto de un escalar por una matriz cumple las siguientes propiedades:

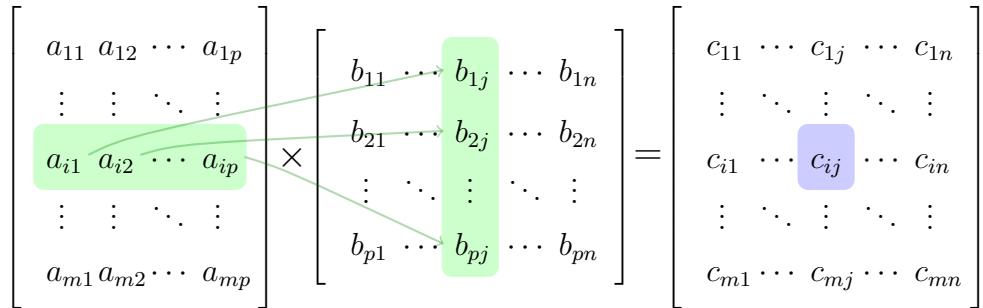
1. **Distributividad respecto a la suma de escalares:**  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .

2. Distributividad respecto a la suma de matrices:  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .
3. Compatibilidad con la multiplicación de escalares:  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ .
4. Asociatividad del producto por escalares:  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ .

**Definición 2.7** (Producto de matrices). Sean  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$  y  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$  dos matrices. El producto  $C = AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  es una matriz cuyos elementos  $c_{ij}$  se calculan como:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^p a_{il}b_{lj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Para visualizar mejor cómo se realiza este producto, consideremos la siguiente representación gráfica:



En el diagrama anterior, se muestra cómo cada elemento  $c_{ij}$  del producto (resaltado en azul) se obtiene del producto escalar entre la fila  $i$ -ésima de  $A$  (resaltada en verde) y la columna  $j$ -ésima de  $B$  (resaltada en verde). Utilizamos la notación  $A_{r(i)}$  para referirnos a la fila  $i$ -ésima de  $A$  y  $B_{c(j)}$  para la columna  $j$ -ésima de  $B$ .

*Observación.* Las matrices solo pueden multiplicarse si sus dimensiones «vecinas» coinciden. Por ejemplo, una matriz  $A$  de dimensión  $n \times p$  puede multiplicarse con una matriz  $B$  de dimensión  $p \times m$ , pero solo por la izquierda:

$$\underset{n \times p}{A} \cdot \underset{p \times m}{B} = \underset{n \times m}{C}$$

El producto  $BA$  no está definido si  $m \neq n$  ya que las dimensiones vecinas no coinciden.

*Observación.* La multiplicación de matrices *no* está definida como una operación elemento a elemento, es decir,  $c_{ij} \neq a_{ij}b_{ij}$  (incluso si el tamaño de  $A$  y  $B$  fuera apropiado). Este tipo de multiplicación elemento a elemento aparece frecuentemente en lenguajes de programación cuando multiplicamos arreglos (multidimensionales) entre sí, y se denomina *producto de Hadamard*.

Ahora que hemos definido la multiplicación de matrices, la suma de matrices y la matriz identidad, veamos algunas propiedades de las operaciones matriciales:

- Propiedad asociativa de la multiplicación:** Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p \times q}$ , entonces

$$(AB)C = A(BC)$$

Esta propiedad nos permite calcular productos de tres o más matrices en cualquier orden de agrupación.

- Propiedades distributivas:** Sea  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $C, D \in \mathcal{M}_{n \times p}$ , entonces

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(C + D) = AC + AD$$

La multiplicación matricial distribuye tanto por la izquierda como por la derecha respecto a la suma.

- Propiedades de la matriz identidad:** Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , entonces

$$I_m A = A I_n = A$$

La matriz identidad actúa como elemento neutro de la multiplicación. Es importante observar que  $I_m \neq I_n$  cuando  $m \neq n$ , y que necesitamos matrices identidad de diferentes dimensiones para multiplicar por la izquierda ( $I_m$ ) y por la derecha ( $I_n$ ).

Con las propiedades anteriores, el conjunto  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  con las operaciones de suma y producto por escalares, y con la matriz identidad, cumple las propiedades de un anillo conmutativo con unidad.

**Definición 2.8** (Matriz traspuesta). Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , definimos su **Matriz transpuesta**  $A^\top \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  como aquella que se obtiene al intercambiar filas por columnas, es decir,  $(A^\top)_{ij} = A_{ji}$ .

*Ejemplo 2.5.* Si tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

su matriz traspuesta es

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$$

Observe que las columnas de  $A^\top$  son las filas de  $A$  y viceversa.

**Definición 2.9** (Matriz simétrica y antisimétrica). Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es:

1. **Simétrica** si  $A = A^\top$ , es decir, si  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i, j$ .
2. **Antisimétrica** si  $A = -A^\top$ , es decir, si  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo  $i, j$ .

*Ejemplo 2.6.* Consideremos las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz  $B$  es Matriz simétrica ya que  $B = B^\top$ , mientras que  $C$  es Matriz antisimétrica pues  $C = -C^\top$ . Puede verificarse esto observando que en  $B$ , los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son iguales ( $b_{12} = b_{21} = 2$ ), mientras que en  $C$ , los elementos simétricos son opuestos ( $c_{12} = -c_{21} = 1$ ).

**Definición 2.10** (Matriz invertible). Una matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es **invertible** (o **no singular**) si existe una matriz  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $AB = BA = I_n$ . En tal caso, la matriz  $B$  es única y se denomina **Matriz inversa de  $A$** , denotándose por  $A^{-1}$ .

*Ejemplo 2.7.* Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, podemos verificar que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$  realizando el producto:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

En este caso particular,  $A$  es su propia inversa, es decir,  $A^{-1} = A$ . Las matrices con esta propiedad se denominan **involutivas**.

Más adelante daremos un criterio para saber si una matriz es invertible y, en este caso, una fórmula para calcular la matriz inversa.

**Definición 2.11** (Matriz ortogonal). Una matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es **ortogonal** si su transpuesta coincide con su inversa, es decir, si  $A^\top = A^{-1}$ . De forma equivalente,  $A$

es ortogonal si y solo si  $AA^\top = A^\top A = I_n$ .

*Ejemplo 2.8.* Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Podemos verificar que  $A$  es ortogonal realizando el producto:

$$A^\top A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Por lo tanto,  $A$  es ortogonal.

**Definición 2.12** (Matriz traspuesta conjugada). Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ . La matriz  $A^* = (\overline{a_{ji}}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$  se denomina **matriz traspuesta conjugada** o **matriz adjunta**, siendo  $\overline{a_{ji}}$  el conjugado complejo de  $a_{ji}$ , para  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ . Esta operación combina la transposición de la matriz con la conjugación compleja de sus elementos.

La matriz traspuesta conjugada tiene varias propiedades importantes:

1.  $(A^*)^* = A$  (involución)
2. Para matrices reales,  $A^* = A^\top$ , ya que los números reales son iguales a sus conjugados
3.  $(AB)^* = B^*A^*$  para matrices compatibles
4. Para escalares  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$

Para un vector columna

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

su traspuesta conjugada es el vector fila  $\mathbf{v}^* = (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n})$ .

**Definición 2.13** (Matrices especiales complejas). Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Se dice que  $A$  es:

1. **Hermítica** (o auto-adjunta) si  $A = A^*$ , es decir,  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica son necesariamente números reales.
2. **Unitaria** si  $A^* = A^{-1}$ , es decir,  $AA^* = A^*A = I_n$ . Las matrices unitarias son la generalización compleja de las matrices ortogonales reales.

3. **Normal** si  $AA^* = A^*A$ , es decir, si la matriz commuta con su traspuesta conjugada.

**Teorema 2.1.** *Las matrices hermíticas y unitarias tienen propiedades especiales que las relacionan con las matrices normales. En particular:*

1. *Toda matriz hermítica o unitaria es también normal.*
2. *Si  $A$  es hermítica, entonces  $A = A^*$ . Por consiguiente,  $AA^* = AA = A^*A$ .*
3. *Si  $A$  es unitaria, entonces  $AA^* = I_n$  y  $A^*A = I_n$ . Por consiguiente,  $AA^* = A^*A$ .*

### 2.2.1. La traza y el determinante de una matriz

**Definición 2.14** (Traza de una matriz). Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . La **traza** de  $A$ , denotada por  $\text{tr}(A)$ , es la suma de los elementos de su diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

*Ejemplo 2.9.* Si tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

su traza es

$$\text{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15.$$

**Definición 2.15** (Determinante de una matriz). Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . El **determinante** de  $A$ , denotado por  $\det(A)$  o  $|A|$ , es un escalar que se define por la expresión:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

donde  $S_n$  es el conjunto de todas las permutaciones de los índices  $\{1, 2, \dots, n\}$  y  $\text{sign}(\sigma)$  es la función signo que asigna  $+1$  a las permutaciones pares y  $-1$  a las impares.

Esta definición se puede expresar de manera compacta como:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

Veamos algunos ejemplos de determinantes:

*Ejemplo 2.10.* Consideremos la matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , entonces su determinante se calcula como:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En donde  $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$  y  $\text{sign}((1, 2)) = 1$ ,  $\text{sign}((2, 1)) = -1$ .

*Ejemplo 2.11.* Consideremos la matriz  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ , entonces su determinante se calcula como:

$$|B| = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32}.$$

En donde  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$  y las funciones signo son  $\text{sign}((1, 2, 3)) = 1$ ,  $\text{sign}((1, 3, 2)) = -1$ ,  $\text{sign}((2, 1, 3)) = -1$ ,  $\text{sign}((2, 3, 1)) = 1$ ,  $\text{sign}((3, 1, 2)) = 1$ , y  $\text{sign}((3, 2, 1)) = -1$ .

**Definición 2.16** (Matrices menores). Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$ . Para un entero positivo  $p$  tal que  $p \leq \min(m, n)$ , se denomina *menor de orden p* de  $A$  a cualquier determinante de una submatriz cuadrada de  $A$  de tamaño  $p \times p$ .

En el caso en que  $A$  es cuadrada ( $m = n$ ), el **menor principal de orden p** es el determinante de la submatriz obtenida al conservar las primeras  $p$  filas y columnas de  $A$  (es decir, eliminando las últimas  $n - p$  filas y columnas).

**Definición 2.17** (Matriz de cofactores). Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(k)$ . La **matriz de cofactores** de  $A$ , denotada por  $C = (c_{ij})$ , es la matriz obtenida al calcular el cofactor  $c_{ij}$  de cada elemento  $a_{ij}$  de  $A$ . El cofactor se define como:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|,$$

donde  $|A_{ij}|$  es el determinante del menor obtenido al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $A$ .

**Teorema 2.2.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(k)$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Entonces el determinante de  $A$  es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila (o columna) de  $A$  por sus cofactores correspondientes, es decir, si elegimos la fila

*i, entonces:*

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ij} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}.$$

*o si elegimos la columna j, entonces:*

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}.$$

*Observación.* Es importante resaltar que el determinante de la suma de matrices no es igual a la suma de los determinantes, es decir, en general  $|A + B| \neq |A| + |B|$  para matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(k)$ , y por lo tanto, tampoco se  $|\lambda A| = \lambda|A|$  para un escalar  $\lambda \in k$  y una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(k)$ .

### 2.2.2. Matriz inversa

# **Apéndice: Material Complementario**

## **.1 Demostraciones Adicionales**

Aquí puedes incluir demostraciones más detalladas o extensas que no encajan en el cuerpo principal del libro.

## **.2 Tablas de Datos**

Aquí puedes incluir tablas de datos extensas o información de referencia.