UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

# INMERSIONES AFINES EN VARIEDADES HOMOGÉNEAS

REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

ALEJANDRO SÁNCHEZ YALÍ

DIRECTOR : DR.CARLOS ALBERTO MARÍN ARANGO

2013

# Índice general

# Introducción

Tanto en la literatura clásica como en la literatura moderna existen diversos resultados sobre la existencia de inmersiones isométricas (tipo Bonnet). Tal es el caso del bien conocido *teorema de inmersiones isométricas en formas espaciales* [4], o el *teorema de inmersiones en variedades de Kähler con curvatura holomorfa constante.* Recientemente han aparecido algunos resultados sobre la existencia de inmersiones isométricas en variedades de Riemann [2, 5, 6, 9]. Darle sentido a las ecuaciones clásicas de *Gauss, Codazzi y Ricci* ha sido el punto clave para la obtención de dichos resultados. Para el estudio de la existencia de inmersiones en contextos más generales se requiere de supuestos adicionales a la validez de las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. Estas situaciones han sido discutidas en detalle recientemente por Piccione y Tausk en [12]. En este trabajo, los autores obtienen un teorema sobre la existencia de inmersiones en variedades suficientemente homogéneas, condición que es expresada en términos de la noción de $G$*-estructura en variedades.*

Como consecuencia de la terminología y del resultado principal que aparecen en [12] se tienen algunos trabajos recientes [1, 2, 3, 10, 11]. En particular, en [1, 2, 11] los autores estudian la existencia de inmersiones isométricas en variedades naturalmente dotadas de una $G$-estructura aplicando técnicas similares a las empleadas por Piccione y Tausk en [12].

En nuestro trabajo se describe en detalle el teorema de inmersiones afines preservando $G$-estructuras que aparece en [12] y lo aplicamos al caso particular de las *formas espaciales de contacto*. Más específicamente al caso de las variedades sub-riemannanas de contacto cuya sub-torsión se anula y cuya curvatura seccional holomorfa es constante. Obteniendo de este modo un par de teoremas sobre la existencia de inmersiones isométricas de variedades riemannianas (sub-riemannianas) en formas espaciales de contacto.

# Capítulo 1

# Notación y preliminares

A lo largo de este capítulo el adjetivo suave será entendido como diferenciable de clase $C^\infty$. Para efectos de notación y terminología emplearemos [12].

## 1.1. Fibrados

### 1.1.1. Fibrados principales

Un *espacio principal* consiste de un par $(P, G)$, donde $P$ es un conjunto no vacío y $G$ es un grupo que actúa a derecha en $P$ de forma libre y transitiva. En este caso, $G$ se denomina *grupo estructural* del espacio principal $(P, G)$; haremos referencia a éste diciendo que $P$ es un espacio principal con grupo estructural $G$. Si $H$ es un subgrupo de $G$ y $Q \subset P$ es una órbita por la acción del subgrupo $H$ en $P$, entonces $Q$ es un espacio principal con grupo estructural $H$ el cual se denomina *subespacio principal* de $P$. Por otro lado, si $G, G'$ son grupos, $P$ es un espacio $G$-principal y $Q$ un espacio $G'$-principal, una función $\phi : P \to Q$ se dice que es un *morfismos de espacios principales* si existe un homomorfismo de grupos $\phi_0 : G \to G'$ tal que:

$$\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot \phi_0(g) \tag{1.1.1}$$

para todo $p \in P$ y todo $g \in G$. En este caso $\phi_0$ es llamado el *morfismo subyacente al morfismo* $\phi$. La acción del grupo $G'$ sobre $Q$ garantiza que la función $\phi_0 : G \to G'$ es única.

Los espacios principales son importantes pues estos constituyen las fibras en los fibrados principales los cuales se define a continuación. Para esto se consideran los siguientes datos: una variedad suave $M$, un grupo de Lie $G$, un conjunto $P$ y una aplicación $\Pi : P \to M$; para cada $x \in M$ se denota por $P_x$ el subconjunto $\Pi^{-1}(x)$ de $P$ y se le llama *fibra* de $P$ sobre $x$. Asumimos que para cada $x \in M$ la fibra $P_x$ es un espacio principal con grupo estructural $G$, o de forma equivalente asumiendo que la aplicación $\Pi$ es sobreyectiva y que se tiene una acción a derecha de $G$ en el conjunto $P$;

$$P \times G \ni (p, g) \longmapsto p \cdot g \in P$$

tal que $\Pi(p \cdot g) = \Pi(p)$ para cada $p \in P, g \in G$ y tal que para cada $p, q \in P$ si $\Pi(p) = \Pi(q)$, existe un único $g \in G$ tal que $p \cdot g = q$.

Por una *sección local* para la aplicación $\Pi : P \to M$ entendemos una función $s : U \to P$ definida sobre un subconjunto abierto de $M$ tal que $\Pi \circ s$ es la función inclusión de $U$ en $M$; esto significa que para todo $x \in M$, $s(x)$ es un punto de la fibra $P_x$. Una sección local $s$ para $\Pi$ cuyo dominio sea toda la variedad $M$ se denomina *sección global*. Dadas secciones locales arbitrarias $s_1 : U_1 \to P, s_2 : U_2 \to P$ para $\Pi$, existe una única función $g : U_1 \cap U_2 \to G$ tal que $s_2(x) = s_1(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in U_1 \cap U_2$. La función $g$ es denominada *la función de transición* de $s_1$ a $s_2$. Las secciones locales $s_1$ y $s_2$ se dice que son *compatibles* si la función $g$ es suave. Un *atlas de secciones locales* $\mathcal{A}$ para $\Pi$ es un conjunto $\mathcal{A}$ de secciones locales de $\Pi$ tal que la unión de los dominios de los elementos en $\mathcal{A}$ cubren a $M$; y cualesquier par de secciones locales en $\mathcal{A}$ son compatibles. Es fácil ver que cualquier atlas $\mathcal{A}$ de secciones locales para $\Pi$ está contenido en un único atlas maximal $\mathcal{A}_{max}$ de secciones locales para $\Pi$.

**Definición 1.1.1.** *Por un fibrado principal entendemos la siguiente colección de objetos:*

*(a) un conjunto $P$, denominado* espacio total*;*

*(b) una variedad diferenciable $M$, denominada* espacio base*;*

*(c) una aplicación $\Pi : P \to M$, denominada* proyección*;*

*(d) un grupo de Lie $G$, denominado* grupo estructural*;*

*(e) una acción a derecha de $G$ en $P$, tal que para todo $x \in M$ la fibra $P_x = \Pi^{-1}(x)$ es un espacio $G$-principal;*

*(f) un atlas maximal $\mathcal{A}_{max}$ de secciones locales de $\Pi$, cuyos elementos son denominados* secciones locales admisibles *para $\Pi$.*

Al hacer referencia a un fibrado principal, se asume toda la colección de objetos en la definición anterior y con base a la notación presentada en ésta nos referiremos a la proyección $\Pi : P \to M$ o al espacio total $P$ para significar que tenemos un fibrado principal sobre $M$ con grupo estructural $G$ o simplemente un fibrado $G$-principal sobre $M$.

Sea $P$ un fibrado $G$-principal sobre $M$. Cada sección local admisible $s : U \to P$ induce una función biyectiva

$$\beta_s : U \times G \ni (x, g) \mapsto s(x) \cdot g \in \Pi^{-1}(U) \subset P. \tag{1.1.2}$$

Luego existe una única estructura diferenciable sobre $P$, de modo que para cada sección local admisible $s : U \to P$, el conjunto $\Pi^{-1}(U) = P|_U$ es un abierto en $P$ y la función $\beta_s$ es un difeomorfismo suave. *Siempre consideramos a $P$ (como fibrado principal) dotado con esta estructura diferenciable.* Como las topologías de $M$ y $G$ cumplen la condición de Hausdorff y el segundo axioma de enumerabilidad, la topología de $P$ también cumple la condición de Hausdorff y el segundo axioma de enumerabilidad, luego $P$ es una variedad diferenciable. Dotando a $P$ con esta estructura diferenciable son de inmediata verificación las siguientes afirmaciones:

(a) la acción a derecha de $G$ sobre $P$ es suave;

(b) la proyección $\Pi : P \to M$ es una submersión suave;

(c) para cada $x \in M$, la fibra $P_x$ es una subvariedad suave de $P$;

(d) para cada $x \in M$, y cada $p \in P_x$, la función $\beta_p : G \to P_x$ definida por $\beta_p(g) = p \cdot g$ para todo $g \in G$ es un difeomorfismo suave;

(e) para cada $g \in G$, la aplicación $\gamma_g : P \to P$ definida por la acción del elemento $g \in G$ en $P$, i.e. para $p \in P$, $\gamma_g(p) = p \cdot g$ es un difeomorfismo suave;

(f) cada sección local admisible $s : U \to P$ es una función suave;

(g) si una sección local $s : U \to P$ para $\Pi$ es una función suave, ésta es compatible con cada sección local admisible para $\Pi$, por lo tanto $s$ es una sección local admisible para $\Pi$.

**Definición 1.1.2.** *Con la notación y la terminología anterior, dados $x \in M$, $p \in P_x$, el espacio vertical de $P$ en el punto $p$, se define como el espacio tangente a la subvariedad $P_x$ en $p$, es decir, como el espacio vectorial $T_pP_x$; este espacio se denota por:*

$$\mathrm{Ver}_p(P) = T_pP_x;$$

*claramente,* $\mathrm{Ver}_p(P)$ *es igual al kernel de* $\mathrm{d}\Pi(p)$*, es decir* $\mathrm{Ver}_p(P) = \ker(\mathrm{d}\Pi(p))$.

Dado que la función $\beta_p$ es un difeomorfismo de $G$ sobre la fibra que contiene a $p$, su diferencial en el elemento unidad $1 \in G$ permite identificar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo estructural $G$ con el espacio vertical a $P$ en el punto $p$; más específicamente se tiene el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mathrm{d}\beta_p(1) : \mathfrak{g} \to \mathrm{Ver}_p(P), \tag{1.1.3}$$

el cual se denomina *isomorfismo canónico* entre $\mathfrak{g}$ y $\mathrm{Ver}_p(P)$.

Por otro lado, es claro que diferenciando la acción de $G$ sobre $P$ con respecto a la primera variable se obtiene una acción a derecha $TP \times G \to TP$ de $G$ sobre el fibrado tangente $TP$; más explícitamente, para cada $\xi \in TP$ se tiene:

$$\xi \cdot g = \mathrm{d}\gamma_g(\xi) \in TP,$$

donde $\gamma_g : P \to P$ es el difeomorfismos dado por la acción del elemento $g \in G$ sobre $P$. Dado $g \in G$, es claro que $\gamma_g(P_x) = P_x$ para cada $x \in M$. Luego la acción de $G$ sobre $TP$ transforma espacios verticales en espacios verticales, es decir

$$\mathrm{d}\gamma_g(\mathrm{Ver}_p(P)) = \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P),$$

para todo $p \in P$ y todo $g \in G$. Observe que la acción de $G$ sobre los espacios verticales, permite identificar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ vía isomorfismos canónicos; así para cada $p \in P$, $g \in G$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ver}_p(P) \arrow[r, "\mathrm{d}\gamma_g"] & \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\mathrm{d}\beta_p(1)"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}_{g^{-1}}"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\mathrm{d}\beta_{p\cdot g}(1)"'] \end{tikzcd} \tag{1.1.4}$$

donde $\mathrm{Ad}$ denota la representación adjunta de $G$ sobre $\mathfrak{g}$.

**Definición 1.1.3.** *Sea $P$ un fibrado $G$-principal sobre $M$ y sea $H$ un subgrupo de Lie de $G$. Un subfibrado principal de $P$ con grupo estructural $H$ es un subconjunto $Q$ de $P$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *para todo $x \in M$, el conjunto $Q_x = P_x \cap Q$ es un subespacio principal de $P_x$ con grupo estructural $H$;*
2. *para todo $x \in M$, existe una sección local suave $s : U \to P$ tal que $x \in U$ y $s(U) \subset Q$.*

Considerando la restricción de la acción a derecha de $G$ sobre $P$ al subgrupo $H$ sobre $Q$, y la restricción de la proyección $\Pi : P \to M$ a $Q$, se tiene que $Q$ es un fibrado $H$-principal sobre $M$ dotado con un atlas maximal que consistente de todas las secciones locales $s : U \to Q$ para $Q$ tales que $i \circ s : U \to P$ es suave, donde $i : Q \to P$ denota la función inclusión. En este caso las estructuras suaves de $Q$ y $P$ se relacionan, considerando una sección local $s : U \to Q$ para $Q$, entonces $i \circ s : U \to P$ es una sección local para $P$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U \times H \arrow[r, "\beta_s"] \arrow[d, "i"'] & Q|_U \arrow[d, "i"] \\ U \times G \arrow[r, "\beta_{i\circ s}"'] & P|_U \end{tikzcd}$$

en este diagrama las flechas horizontales son difeomorfismos suaves. Se sigue que la inclusión $i : Q \to P$ es una inmersión suave. Desafortunadamente, en general no es un embebimiento, en efecto, la función inclusión $i : Q \to P$ es un embebimiento si y solo si la aplicación $i : U \times H \to U \times G$ es un embebimiento si y solo si, $H$ es un subgrupo embebido de $G$, es decir, $H$ es un subgrupo cerrado en $G$.

**Definición 1.1.4.** *Sean $P, Q$ fibrados principales sobre la misma variedad suave $M$, con grupos estructurales $G, H$ respectivamente. Una función $\phi : P \to Q$ se dice que preserva las fibras si $\phi(P_x) \subset Q_x$, para todo $x \in M$. Un morfismo de fibrados principales de $P$ a $Q$ es una aplicación suave que preserva fibras $\phi : P \to Q$ para la cual existe un homomorfismo de grupos $\phi_0 : G \to H$ de modo que para cada $x \in M$, la aplicación $\phi_x := \phi|_{P_x} : P_x \to Q_x$ es un morfismo de espacios principales cuyo morfismo de grupos subyacente es precisamente el morfismo $\phi_0$.*

El homomorfismo $\phi_0 : G \to H$ en la definición anterior, está únicamente determinado a partir de $\phi : P \to Q$; además, con $x \in M$ y $p \in P_x$ la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} P_x \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[d, "\beta_p"', "\cong"] & Q_x \arrow[d, "\cong"', "\beta_{\phi_x(p)}"] \\ G \arrow[r, "\phi_0"'] & H \end{tikzcd}$$

implica que $\phi_0$ es suave y por lo tanto, es un homomorfismo de grupos de Lie, el cual se llama *morfismo de grupos subyacente al morfismo de fibrados principales.*

### 1.1.2. Fibrados asociados

Dado un grupo arbitrario $G$, por un $G$-*espacio* entendemos un conjunto $N$ en el cual el grupo $G$ actua a izquierda. Si $G$ es un grupo de Lie, por un $G$-*espacio suave* entendemos un $G$-espacio $N$ dotado de una estructura suave de modo que la acción de $G$ en éste sea suave. Sea $\Pi : P \to M$ un fibrado $G$-principal y $N$ un $G$-espacio diferenciable. Dado $x \in M$ se tiene un acción a izquierda de $G$ sobre el producto cartesiano $P_x \times N$ definida por:

$$g \cdot (p, n) = (p \cdot g^{-1}, g \cdot n).$$

para todo $g \in G$, todo $p \in P_x$ y todo $n \in N$. Denotando por $[p, n]$ la órbita del elemento $(p, n)$ en $P_x \times N$ por tal acción y por $P_x \times_G N$ el conjunto de todas las órbitas. La colección $P_x \times_G N$ es llamada el *producto fibrado* del fibrado principal $P$ con el $G$-espacio $N$. Note que para todo $p \in P_x$, $g \in G$, $n \in N$ se tiene la siguiente igualdad:

$$[p \cdot g, n] = [p, g \cdot n].$$

Con base en lo anterior se define el conjunto

$$P \times_G N := \bigcup_{x \in M} (P_x \times_G N);$$

y una proyección natural

$$\pi : P \times_G N \to M$$

la cual mapea la colección $P_x \times_G N$ sobre el punto $x \in M$. Además una *función cociente* $\mathfrak{q}$ definida por

$$\mathfrak{q} : P \times N \ni (p, n) \longmapsto [p, n] \in P \times_G N. \tag{1.1.5}$$

El siguiente diagrama conmutativo ilustra la relación entre las funciones $\Pi$, $\pi$ y $\mathfrak{q}$;

$$\begin{tikzcd} P \times N \arrow[d, "\text{primera proyección}"'] \arrow[dr, "\mathfrak{q}"] & \\ P \arrow[d, "\Pi"'] & P \times_G N \arrow[dl, "\pi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Se denomina $\pi : P \times_G N \to M$ (o sólo a $P \times_G N$) el *fibrado asociado* al fibrado $G$-principal $P$ y al $G$-espacio diferenciable $N$. Análogo al caso de fibrados principales se tiene la siguiente terminología: El conjunto $P \times_G N$ es denominado *espacio total* del fibrado asociado, $M$ se denomina *espacio base* y la aplicación $\pi$ es denominada *proyección*. Para cada $x \in M$, el conjunto $P_x \times_G N = \pi^{-1}(x)$ se llama la *fibra* del fibrado asociado $P \times_G N$ sobre $x$. Además, es posible dotar de una estructura diferenciable al espacio total de un fibrado asociado. A saber, sea $s : U \to P$ una sección admisible para el fibrado principal $P$, asociada a ésta se tiene la siguiente aplicación biyectiva:

$$\hat{s} : U \times N \ni (x, n) \longmapsto [s(x), n] \in \pi^{-1}(U) \subset P \times_G N.$$

la cual es denominada *trivialización local* del fibrado asociado $P \times_G N$ correspondiente a la sección local $s$. Así dadas $s_1 : U_1 \to P$, $s_2 : U_2 \to P$ dos secciones locales suaves de $P$ y si $g : U_1 \cap U_2 \to G$ denota la función transición de $s_1$ a $s_2$, entonces la función de transición $\hat{s}_2^{-1} \circ \hat{s}_1$ de $\hat{s}_1$ a $\hat{s}_2$ está dada por:

$$\hat{s}_2^{-1} \circ \hat{s}_1 : (U_1 \cap U_2) \times N \ni (x, n) \longmapsto (x, g(x) \cdot n) \in (U_1 \cap U_2) \times N$$

la cual define un difeomorfismo entre conjuntos abiertos en variedades diferenciables. Luego existe una única estructura diferenciable sobre el conjunto $P \times_G N$ tal que, para cada sección local suave $s : U \to P$ para $P$, el conjunto $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en $P \times_G N$ y la trivialización local $\hat{s}$ es un difeomorfismo suave. Usualmente $P \times_G N$ se considera con esta estructura. Como las topologías de $M$ y $N$ son Hausdorff y satisfacen el segundo axioma de enumerabilidad, es claro que la topología de $P \times_G N$ es también Hausdorff y satisface el segundo axioma de enumerabilidad, así que $P \times_G N$ es una variedad diferenciable. Dotando tal conjunto de esta estructura diferenciable, las siguientes afirmaciones se demuestran de forma inmediata:

(a) la proyección $\pi : P \times_G N \to M$ es una submersión suave;

(b) la aplicación cociente $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$ es una submersión suave;

(c) para cada $x \in M$, la fibra $P_x \times_G N$ es una subvariedad diferenciable de $P \times_G N$;

(d) para cada $x \in M$ y para cada $p \in P_x$, la aplicación $\hat{p} : N \to P_x \times_G N$ definida por $\hat{p}(n) = [p, n]$ para cada $n \in N$ es un difeomorfismo.

Dados $x \in M$, $p \in P_x$ y $n \in N$ el espacio tangente $T_{[p,n]}(P_x \times_G N)$ es un subespacio de $T_{[p,n]}(P \times_G N)$ el cual es llamado *espacio vertical* de $P \times_G N$ en el punto $[p, n]$; escribimos:

$$\mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N) = T_{[p,n]}(P_x \times_G N).$$

Es claro que

$$\mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}\pi([p, n])\big).$$

Dado que $p$ es un difeomorfismo suave de $N$ sobre la fibra $P_x \times_G N$, su diferencial en un punto $n \in N$ es un isomorfismo

$$\mathrm{d}\hat{p}(n) : T_n N \longrightarrow \mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N) \tag{1.1.6}$$

entre el espacio tangente $T_nN$ y el espacio vertical $\mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N)$.[1]

Por una *sección local* de un fibrado asociado $P \times_G N$ se entiende una función $\epsilon : U \to P \times_G N$ definida sobre un conjunto abierto $U$ de $M$ tal que la composición $\pi \circ \epsilon$ es la inclusión de $U$ en $M$; es decir, $\epsilon(x) \in P_x \times_G N$ para todo $x \in U$. Observe que si $\epsilon : U \to P \times_G N$ es una sección local de $P \times_G N$ y si $s : U \to P$ es un sección admisible de $P$, entonces existe una única función $\hat{\epsilon} : U \to N$ tal que $\epsilon = \mathfrak{q} \circ (s, \hat{\epsilon})$, es decir

$$\epsilon(x) = [s(x), \hat{\epsilon}(x)], \tag{1.1.7}$$

para todo $x \in U$; $\hat{\epsilon}$ es solo la segunda coordenada de la función $\hat{s}^{-1} \circ \epsilon$. Se denomina a $\hat{\epsilon}$ *la representación de* $\epsilon$ con respecto a $s$. Claramente la sección $\epsilon$ es suave si y solo si, su representación $\hat{\epsilon}$ es suave.

Veamos como se puede calcular la diferencial de la aplicación cociente $\mathfrak{q}$ definida en (1.1.5). Para cada $x \in M$, la aplicación $\mathfrak{q}$ mapea $P_x \times N$ sobre la fibra $P_x \times_G N$ luego, para cada $p \in P_x$ y cada $n \in N$, la diferencial $\mathrm{d}\mathfrak{q}(p,n)$ lleva $T_{(p,n)}(P_x \times N) = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus T_nN$ en el espacio vertical $\mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N)$. Calculemos la restricción de este diferencial al espacio $\mathrm{Ver}_p(P) \oplus T_nN$. Para esto, identificamos el espacio vertical $\mathrm{Ver}_p(P)$ con el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ por medio del isomorfismo canónico (1.1.3) e identificamos el espacio vertical $\mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N)$ con $T_nN$ via el isomorfismo (1.1.6). Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ver}_p(P) \oplus T_nN \arrow[r, "\mathrm{d}\mathfrak{q}(p,n)"] & \mathrm{Ver}_{(p,n)}(P \times_G N) \\
\mathfrak{g} \oplus T_nN \arrow[u, "\mathrm{d}\beta_p(1)\oplus\mathrm{Id}", "\cong"'] \arrow[r, dotted] & T_nN \arrow[u, "\cong", "\mathrm{d}\hat{p}(n)"']
\end{tikzcd}$$

Sea $x = \Pi(p)$. La aplicación $\mathfrak{q}(p,\cdot) : N \to P_x \times_G N$ coincide con $\hat{p}$ y por lo tanto, la flecha punteada en el diagrama lleva $(0,u)$ en $u$, para cada $u \in T_nN$. Por otro lado, los vectores de la forma $(X,0)$ son mapeados en $X^N(n)$,[2] a saber, esto se sigue diferenciando el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_x \arrow[r, "\mathfrak{q}(\cdot,n)"] & P_x \times_G N \\
G \arrow[u, "\beta_p"] \arrow[r, "\beta_n"'] & N \arrow[u, "\hat{p}"']
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente se tiene que la flecha punteada del diagrama es dada por:

$$\mathfrak{g} \oplus T_nN \ni (X,u) \longmapsto u + X^N(n) \in T_nN. \tag{1.1.8}$$

[1] Si $E_0$ es un espacio vectorial real, $\rho : G \to \mathrm{GL}(E_0)$ es una representación suave del grupo de Lie $G$. Entonces, para el fibrado asociado $P \times_G E_0$ cada fibra $P_x \times_G E_0$, $x \in M$ posee un estructura de espacio vectorial real tal que para cada $p \in P_x$, la aplicación $\hat{p} : E_0 \to P_x \times_G E_0$ es un isomorfismo lineal. Por lo tanto, $\mathrm{d}\hat{p}(e_0) = \hat{p}$ para cada $e_0 \in E_0$

[2] $X^N$ denota el campo vectorial en $N$ inducido por $X \in \mathfrak{g}$ el cual es definido por $X^N(n) = \mathrm{d}\beta_n(1) \cdot X \in T_nN$ para cada $n \in N$ donde $\beta_n : G \to N$ es la aplicación inducida por la acción de $G$ en el elemento $n \in N$.

### 1.1.3. Fibrados vectoriales

Sean $M$ una variedad suave, $E_0$ un espacio vectorial real finito dimensional, $E$ un conjunto y $\pi : E \to M$ una función; para cada $x$ se denota por $E_x$ el subconjunto de $\pi^{-1}(x)$ de $E$ y se denomina *fibra* de $E$ sobre $x$. Asuma que para cada $x \in M$ se tiene una estructura de espacio vectorial sobre $E_x$ tal que $E_0$ y $E_x$ tienen la misma dimensión. El conjunto $\mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$ constituido por todos los isomorfismos lineales $p : E_0 \to E_x$ es un espacio principal cuyo grupo estructural es el grupo de Lie $\mathrm{GL}(E_0)$ constituido por todos los isomorfismos lineales del espacio vectorial $E_0$. Con base en esto se define el conjunto:

$$\mathrm{FR}_{E_0}(E) = \bigcup_{x \in M} \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$$

y consideramos la aplicación $\Pi : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \to M$ que envía $\mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$ sobre $x$, para todo $x \in M$.

**Definición 1.1.5.** *Por un fibrado vectorial entendemos la siguiente colección de objetos:*

*(a)* *un conjunto $E$, denominado* espacio total*;*

*(b)* *una variedad diferenciable $M$, denominada* espacio base*;*

*(c)* *una aplicación $\pi : E \to M$, denominada* proyección*;*

*(d)* *un espacio vectorial real finito dimensional $E_0$, denominado* fibra típica *;*

*(e)* *una estructura de espacio vectorial real en la fibra $E_x$ tal que para cada $x \in M$, los espacios vectoriales $E_0$ y $E_x$ tienen la misma dimensión;*

*(f)* *un atlas maximal $\mathcal{A}_{max}$ de secciones locales para $\Pi : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \to M$ tal que éste es un fibrado $\mathrm{GL}(E_0)$-principal sobre $M$.*

Al hacer referencia a un fibrado vectorial, se asume toda la colección de objetos en la definición anterior y con base a la notación presentada en ésta nos referiremos a la proyección $\pi : E \to M$ o al espacio total $E$ para significar que se habla de un fibrado vectorial sobre $M$ con fibra típica $E_0$. El fibrado $\Pi : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \to M$ se denomina *fibrado principal de $E_0$-referenciales del fibrado vectorial $E$*; así, una sección admisible de $\mathrm{FR}_{E_0}$ es denominada un *$E_0$-referencial local del fibrado vectorial $E$*. Cuando $E_0 = \mathbb{R}^n$ escribiremos simplemente $\mathrm{FR}(E)$.

Si $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$ sobre una variedad $M$, considerando el fibrado asociado $\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0$, con $G = \mathrm{GL}(E_0)$ se define la *función contracción $C^E$* por:

$$C^E : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0 \ni [p, e_0] \longmapsto p(e_0) \in E.$$

Esta aplicación es biyectiva y su restricción a la fibra sobre un punto $x \in M$ produce un isomorfismo lineal de $\mathrm{FR}_{E_0}(E_x) \times_G E_0$ sobre $E_x$, para todo $x \in M$. Por lo tanto, existe una única estructura diferenciable sobre el conjunto $E$ de manera que la función $C^E$ es un difeomorfismo. Siempre al trabajar con fibrados vectoriales estaremos considerando los espacios totales dotados de esta estructura diferenciable. Claramente la topología de $E$ es Hausdorff y satisface el segundo axioma de enumerabilidad, es decir, $E$ es una variedad diferenciable. Los siguientes hechos son de verificación inmediata:

(a) la proyección $\pi : E \to M$ es una submersión suave;

(b) la aplicación $\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0 \ni (p, e_0) \longmapsto p(e_0) \in E$ es una submersión suave;

(c) para cada $x \in M$, la fibra $E_x$ es una subvariedad diferenciable de $E$;

(d) para cada $x \in M$ la estructura diferenciable de $E_x$ heredada de $E$ como subvariedad coincide con la estructura diferenciable que está determinada por la estructura de espacio vectorial finito dimensional.

Sea $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ una sección admisible de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y $\check{s} = C^E \circ \hat{s}$. Explícitamente,

$$\check{s} : U \times E_0 \ni (x, e_0) \longmapsto s(x) \cdot e_0 \in \pi^{-1}(U) \subseteq E.$$

La función $\check{s}$ es un difeomorfismo suave y se denonomina *trivialización local de $E$ correspondiente al $E_0$-referencial $s$*. Note que la estructura diferenciable del espacio total $E$ puede también ser caracterizada por el hecho que para cada $E_0$-referencial $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ para $E$, la función $\check{s}$ es un difeomorfismo sobre el conjunto abierto $\pi^{-1}(U)$ de $E$.

Un ejemplo importante de fibrado vectorial para nuestro propósito es el fibrado tangente a una variedad suave $n$-dimensional $M$, a saber, considere el conjunto:

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

y sea $\pi : TM \to M$ la proyección canónica que para todo $x \in M$ envía $T_xM$ sobre el punto $x$. Dado $x \in M$, la fibra $T_xM$ tiene la estructura de espacio vectorial real isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi : U \to \tilde{U}$ es una carta local de $M$, donde $U$ es un subconjunto abierto de $M$ y $\tilde{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces para cada $x \in U$ la función $\mathrm{d}\varphi(x)^{-1} : \mathbb{R}^n \to T_xM$ es un isomorfismo lineal y la función:

$$s^{\varphi} : U \ni x \longmapsto \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \in \mathrm{FR}(TM)$$

es una sección admisible para $\mathrm{FR}(TM) \to M$. Si $\psi : V \to \tilde{V}$ es otra carta de $M$ y $\alpha = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ denota la función de transición de $\varphi$ para $\psi$, entonces la función transición de $s^{\varphi}$ a $s^{\psi}$ está dada por:

$$U \cap V \ni x \longmapsto \mathrm{d}\alpha(\varphi(x)) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

y por lo tanto, el conjunto:

$$\{s^{\varphi} : \varphi \text{ es una carta local de } M\} \tag{1.1.9}$$

es un atlas de secciones admisibles para $\mathrm{FR}(TM) \to M$. Si $\mathrm{FR}(TM)$ se dota de la única estructura de atlas maximal de secciones admisibles que contiene a (1.1.9) entonces $\pi : TM \to M$ es un fibrado vectorial sobre $M$ con fibra típica $\mathbb{R}^n$.

**Definición 1.1.6.** *Si $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$, para $x \in M$ y para $e \in E_x$ el espacio tangente $T_eE_x$ es un subespacio de $T_eE$ y es denominado* espacio vertical *del fibrado vectorial $E$ en el punto $e$, en este caso escribimos*

$$\mathrm{Ver}_e(E) = T_eE_x.$$

*Claramente,* $\mathrm{Ver}_e(E) = \ker(\mathrm{d}\pi(e))$*; además, como para cada* $x \in M$ *la fibra* $E_x$ *es un espacio vectorial real finito dimensional, es posible identificar el espacio tangente* $T_eE_x$ *en el punto* $e \in E_x$ *con el propio* $E_x$*, luego* $\mathrm{Ver}_e(E) = T_eE_x \cong E_x$.

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$; por una *sección local* para $E$ se entiende una función $\epsilon : U \to E$ definida sobre un subconjunto $U$ de $M$ tal que $\pi \circ \epsilon$ es la función inclusión de $U$ en $M$, es decir, tal que $\epsilon(x) \in E_x$ , para todo $x \in U$. Si $\epsilon : U \to E$ es un sección local para $E$ y si $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ es un $E_0$-referencial entonces la función $\tilde{\epsilon} : U \to E_0$ definida por $\tilde{\epsilon}(x) = s(x)^{-1} \cdot \epsilon(x) \in E_0$ para todo $x \in U$; es denominada *la representación de la sección* $\epsilon$ con respecto al $E_0$-referencial $s$. Si $\check{s}$ es una trivialización local para $E$ correspondiente al referencial $s$, entonces $\epsilon(x) = \check{s}(x, \tilde{\epsilon}(x))$, para todo $x \in U$; por lo tanto, la sección local $\epsilon$ es suave si y solo si, su representación $\tilde{\epsilon}$ es suave. Una sección globalmente definida para $E$, $\epsilon : M \to E$ se denomina *sección global o simplemente sección* de $E$. Denotaremos por $\bar{\Gamma}(E)$ la colección constituida por las secciones de $E$ y por $\Gamma(E)$ la colección de todas las secciones suaves de $E$. Claramente $\bar{\Gamma}(E)$ es un espacio vectorial dotado con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar punto a punto; además, $\bar{\Gamma}(E)$ es un módulo sobre el anillo $\mathbb{R}^M$ de todos las funciones $f : M \to \mathbb{R}$. Es claro que $\Gamma(E)$ es un subespacio de $\Gamma(\bar{E})$; pero obviamente no es en general un $\mathbb{R}^M$-módulo. Sin embargo $\Gamma(E)$ es un $C^\infty(M)$-submódulo de $\bar{\Gamma}(E)$.

**Definición 1.1.7.** *Sean* $E$*,* $F$ *fibrados vectoriales sobre la misma variedad* $M$*. Una función* $L : E \to F$ preserva fibras*, si* $L(E_x) \subset F_x$ *para todo* $x \in M$*; sea* $L_x := L|_{E_x} : E_x \to F_x$*. La función* $L$ *es denominada* lineal en las fibras*, si* $L$ *preserva fibras y para cada* $x \in M$*, la aplicación* $L_x$ *es una función lineal. Una función suave y lineal en las fibras* $L : E \to F$ *se dice que es un* morfismo de fibrados vectoriales*.*

Si $E_0$, $F_0$ son las fibras típicas para los fibrados vectoriales $E$, $F$, respectivamente y si $s, s'$ son referenciales definidos en el mismo subconjunto abierto $U$ de $M$. Dada una aplicación lineal en las fibras $L : E \to F$, la aplicación dada por:

$$\tilde{L}(x) = s^{'}(x)^{-1} \circ L_x \circ s(x) \in \mathrm{Lin}(E_0, F_0),$$

para todo $x \in U$, donde $\mathrm{Lin}(E_0, F_0)$ denota el espacio de todas las funciones lineales de $E_0$ a $F_0$, es llamada la *representación* de $L$ con respecto a $s$ y $s'$. Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E|_U \arrow[r, "L"] & F|_U \\
U \times E_0 \arrow[u, "\check{s}"] \arrow[r] & U \times F_0 \arrow[u, "\check{s}'"']
\end{tikzcd}$$

donde $U \times E_0 \to U \times F_0$ está dada por $(x, e_0) \mapsto (x, \tilde{L}(x) \cdot e_0)$. En este diagrama las flechas verticales son difeomorfismos suaves. Claramente la flecha inferior del diagrama es suave, si y sólo si, la funcion $\tilde{L}$ es suave. Se sigue:

(a) si $L$ es un morfismos de fibrados vectoriales entonces su representación $\tilde{L}$ con respecto a cualesquier par de referenciales $s$ y $s'$ es suave;

(b) si $L$ es lineal en las fibras y si cada punto de $M$ está contenido en un conjunto $U$ dominio de referenciales $s, s'$ para los cuales la representación $\tilde{L}$ es suave, entonces $L$ es un morfismo de fibrados vectoriales.

Si $L : E \to F$ es un morfismo de fibrados vectoriales, obviamente $L$ es biyectivo si y solo si $L_x : E_x \to F_x$ es un isomorfismo lineal, para todo $x \in M$. Un morfismo de fibrados vectoriales $L : E \to F$ que es biyectivo se denomina *isomorfismo de fibrados vectoriales*. Si $L : E \to F$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales entonces $L$ es un difeomorfismo y la función $L^{-1} : F \to E$ es también un isomorfismo de fibrados vectoriales.

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$, $F_0$ un subespacio de $E_0$ y $F$ un subconjunto de $E$ tal que para cada $x \in M$, el conjunto $F_x = F \cap E_x$ es un subespacio de la fibra $E_x$ el cual tiene la misma dimensión que $F_0$. Dado $x \in M$, entonces un $E_0$-referencial $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$ se dice *adaptado* a $(F_0, F)$ si $p$ es adaptado a $(F_0, F_x)$, es decir, si $p(E_0) = F_x$. Considere el conjunto:

$$\mathrm{FR}_{E_0}(E; F_0, F) = \bigcup_{x \in M} \mathrm{FR}_{E_0}(E_x; F_0, F_x) \tag{1.1.10}$$

constituido por todos los $E_0$-referenciales de $F$ adaptados a $(F_0, F)$. Para cada $x \in M$, el conjunto $\mathrm{FR}_{E_0}(E_x; F_0, F)$ es un subespacio principal de $\mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$ cuyo grupo estructural es el subgrupo de Lie $\mathrm{GL}(E_0; F_0)$ de $\mathrm{GL}(E_0)$; es decir, el subgrupo de los isomorfismos lineales que preservan el subespacio $F_0$.

**Definición 1.1.8.** *Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$. Un subconjunto $F \subset E$ es un* subfibrado vectorial *si existe un subespacio $F_0$ de $E_0$ tal que:*

*(a) para cada $x \in M$, el conjunto $F_x = F \cap E_x$ es un subespacio de la fibra $E_x$ el cual tiene la misma dimensión que $F_0$;*

*(b) $\mathrm{FR}_{E_0}(E; F_0, F)$ es un subfibrado principal de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ con grupo estructural $\mathrm{GL}(E_0; F_0)$.*

Un subfibrado vectorial $F$ de un fibrado vectorial $E$, puede de forma natural ser interpretado como un fibrado vectorial. Basta restringir la proyección $\pi : E \to M$ a una aplicación $\pi|_F : F \to M$ y para todo $x \in M$ dotar a $F_x$ con una estructura de espacio vectorial isomorfa a $F_0$. Finalmente, para obtener un atlas maximal de secciones admisibles para $\mathrm{FR}_{F_0}(F) \to M$ consideremos los siguiente: Si $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E; F_0, F)$, se tiene $p|F_0$ es un $F_0$-referencial de $F$. Así, la aplicación:

$$\mathrm{FR}_{E_0}(E; F_0, F) \ni p \overset{\phi}{\longmapsto} p|_{F_0} \in \mathrm{FR}_{F_0}(F) \tag{1.1.11}$$

es un morfismo de fibrados principales cuyo homomorfismos subyacente es dado por:

$$\mathrm{GL}(E_0; F_0) \ni T \longmapsto T|_{F_0} \in \mathrm{GL}(F_0). \tag{1.1.12}$$

Luego la colección $\{\phi \circ s : s$ es una secciíon local para $\mathrm{FR}_{E_0}(E, F_0, F)\}$ define un atlas de secciones admisibles para $\mathrm{FR}_{F_0}(F)$.

El siguiente resultado es bien conocido:

**Proposición 1.1.1.** *Sea $E$, $E'$ fibrados vectoriales sobre la misma variedad suave $M$ y sea $L : E \to E'$ un morfismo de fibrados vectoriales. Entonces:*

1. *si $L$ es inyectivo, su imagen $L(E)$ es un subfibrado vectorial de $E'$;*

2. *si $L$ es sobreyectiva, su kernel $\ker(L) = \bigcup_{x\in M} \ker(L_x)$ es un subfibrado subvectorial de $E$.*

**Definición 1.1.9.** *Sea $M$ un variedad diferenciable. Por una* distribución *sobre $M$ se entiende un subconjunto de $TM$ tal que para todo $x \in M$, $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \cap T_xM$ es un subespacio del espacio tangente $T_xM$. Por un* distribución suave *sobre $M$ se entiende un subfibrado $\mathcal{D}$ del fibrado tangente $TM$.*

## 1.2. Pull-back

Un fibrado $G$-principal $\Pi : P \to M$ puede ser pensado como una familia $(P_x)_{x\in M}$ de espacios principales $P_x$ con grupo estructural $G$ parametrizada por puntos de $M$. Si $M'$ es otra variedad suave y $f : M' \to M$ es una aplicación suave, es natural considerar una reparametrización $(P_{f(y)})_{y\in M'}$ de la familia $(P_x)_{x\in M}$ por medio de la aplicación $f$. Esta idea motiva la definición de pull-back de fibrados principales presentada a seguir.

Sea $\Pi : P \to M$ un fibrado $G$-principal y sea $f : M' \to M$ una función suave definida en una variedad suave $M'$. El *pull-back* de $P$ por $f$ es el conjunto $f^*P$ definido por:

$$f^*P = \bigcup_{y\in M'} \big(\{y\} \times P_{f(y)}\big) \subset M' \times P.$$

La restricción a $f^*P$ de la proyección en la primera coordenada es una aplicación $\Pi_1 : f^*P \to M'$ y la restricción a $f^*P$ de la proyección en la segunda coordenada es una aplicación $\bar{f} : f^*P \to P$;. Con base en esto, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\Pi_1"'] & P \arrow[d, "\Pi"] \\ M' \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} \tag{1.2.1}$$

La aplicación $\bar{f} : f^*P \to P$ es llamada *la aplicación canónica* asociada con el pull-back $f^*P$.

**Observación 1.2.1.** *Observaciones con respecto al pull-back.*

1. *El pull-back $f^*P$ es precisamente el subconjunto de $M' \times P$ en el cual las aplicaciones $\Pi \circ \bar{f}$ y $f \circ \Pi_1$ coinciden; es decir*

$$f^*P = \{(y, p) \in M' \times P : f(y) = \Pi(p)\}.$$

*Además, la aplicación $(\Pi_1, \bar{f}) : f^*P \to M' \times P$ es simplemente la aplicación inclusión.*

2. *Con base en lo observado en el item anterior, es inmediato desde la teoría de conjuntos que dado un conjunto $X$ y dadas aplicaciones $\tau_1 : X \to M'$, $\tau_2 : X \to P$ con $\Pi \circ \tau_2 = f \circ \tau_1$, existe una única aplicación $\tau : X \to f^*P$ tal que $\Pi_1 \circ \tau = \tau_1$ y $\bar{f} \circ \tau = \tau_2$. Esta situación se describe en el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\tau_2"] \arrow[dr, dotted, "\tau"] \arrow[ddr, bend right, "\tau_1"'] & & \\
& f^*P \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[d, "\Pi_1"] & P \arrow[d, "\Pi"] \\
& M' \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd} \tag{1.2.2}$$

3. *La noción de pull-back puede ser presentada de forma más general para categorías arbitrarias. Nuestro interés se reduce al caso de fibrados principales, vectoriales y asociados. Por esta razón enfatizamos nuestro trabajo en estas situaciones.*

Con el fin de tornar $\Pi_1 : f^*P \to M'$ en un fibrado $G$-principal sobre $M'$ observamos lo siguiente. Para cada $y \in M'$, la fibra $(f^*P)_y$ es igual a $\{y\} \times P_{f(y)}$; luego *identificamos la fibra $(f^*P)_y$ de $f^*P$ con la fibra $P_{f(y)}$ de $P$*. Bajo tal identificación, cada fibra de $f^*P$ es una fibra de $P$ y por lo tanto cada fibra de $f^*P$ es dotada de una acción a derecha del grupo $G$ que torna ésta en un espacio principal con grupo estructural $G$. Ahora procedamos a definir un atlas de secciones admisibles para la proyección $\Pi_1$. Para este fin, se necesita un poco de lenguaje técnico y algunos resultados, los cuales tienen versiones idénticas para el caso de fibrados vectoriales. Por tal motivo sólo nos preocuparemos de su presentación detallada en el caso de fibrados principales.

**Definición 1.2.1.** *Con la notación y terminología anterior, por una* sección local para el fibrado principal $P$ a lo largo de $f$ *se entiende una aplicación $\sigma : U' \to P$ definida en un subconjunto abierto $U'$ de $M'$ satisfaciendo la condición $\Pi \circ \sigma = f|_{U'}$. Por ejemplo, si $s : U \to P$ es una sección local de $P$, la composición $s \circ f : f^{-1}(U) \to P$ produce una sección local de $P$ a lo largo $f$.*

La composición de una sección local para $\Pi_1 : f^*P \to M'$ a la izquierda con $\bar{f}$, produce una sección local de $P$ a lo largo de $f$; además, si $\sigma : U' \to P$ es una sección local de $P$ a lo largo de $f$. Además, existe una única sección local $\overleftarrow{\sigma} : U' \to f^*P$ para $\Pi_1 : f^*P \to M'$ tal que $\bar{f} \circ \overleftarrow{\sigma} = \sigma$. A saber, con $X = U'$, $\tau_1$ la aplicación inclusión de $U'$ en $M'$ y $\tau_2 = \sigma$, entonces $\overleftarrow{\sigma}$ es la aplicación $\tau$ dada en la Observación 1.2.1. El siguiente diagrama conmutativo ilustra la relación entre $\overleftarrow{\sigma}$ y $\sigma$:

$$\begin{tikzcd}
f^*P \arrow[r, "\bar{f}"] & P \arrow[d, "\Pi"] \\
U' \arrow[u, dotted, "\overleftarrow{\sigma}"] \arrow[ur, "\sigma"'] \arrow[r, "f|_{U'}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Es decir, la composición a izquierda con $\bar{f}$ induce una biyección entre el conjunto de las secciones locales para $\Pi_1 : f^*P \to M'$ y las secciones locales para $P$ a lo largo de $f$. Dadas $s_1 : U_1 \to P$, $s_2 : U_2 \to P$

secciones locales para $P$ con función de transicción $g : U_1 \cap U_2 \to G$. Sean $\sigma_i = s_i \circ f : f^{-1}(U_i) \to P$, $i = 1, 2$, las secciones para $P$ a lo largo de $f$ obtenidas como se ejemplifica en la Definición 1.2.1. Considere las secciones locales $\overleftarrow{\sigma_i} : f^{-1}(U_i) \to f^*P$ para $\Pi_1 : f^*P \to M'$ tales que $\bar{f} \circ \overleftarrow{\sigma_i} = \sigma_i$, $i = 1, 2$. Evidentemente, la función de transicción de $\overleftarrow{\sigma_1}$ a $\overleftarrow{\sigma_2}$ es $g \circ f : f^{-1}(U_1 \cap U_2) \to G$ la cual es una aplicación suave. Por lo tanto, las secciones locales $\overleftarrow{\sigma_1}$ y $\overleftarrow{\sigma_2}$ son compatibles. Luego el conjunto

$$\left\{ \overleftarrow{\sigma} : \sigma = s \circ f \text{ y } s \text{ es una sección admisible para } P \right\} \tag{1.2.3}$$

es un atlas de secciones locales admisibles para $\Pi_1 : f^*P \to M'$ el cual torna $f^*P$ en un fibrado $G$-principal sobre $M'$. Siempre, a menos que se diga lo contrario, consideramos a $f^*P$ dotado de esta estructura de fibrado principal. Ls siguientes afirmaciones son de verificación inmediata:

1. Con la notación y la terminología anterior. La aplicación $(\Pi_1, \bar{f}) : f^*P \to M' \times P$ es un embebimiento; en particular, la aplicación canónica $\bar{f} : f^*P \to P$ es suave.

2. Bajo las condiciones en el item 2 de la Observación 1.2.1, si $X$ es una variedad suave, la aplicación $\tau$ es suave si y solo si, ambas $\tau_1, \tau_2$ son suaves.

3. Con al notación y la terminología anterior, $\sigma \mapsto \overleftarrow{\sigma}$ define una correspondencia 1-1 entre las secciones locales suaves para $P$ a lo largo de $f$ y las secciones admisibles para $f^*P$.

**Definición 1.2.2.** *Sean* $\Pi : P \to M$, $\Pi' : P' \to M'$ *fibrados principales con grupos estructurales* $G$ *y* $G'$ *respectivamente y sea* $f : M' \to M$ *una aplicación suave. Una aplicación* $\varphi : P' \to P$ *se dice* que preserva fibra a lo largo de $f$ *si* $\varphi(P'_y) \subset P_{f(y)}$*, para cada* $y \in M'$*. Esto equivale con la conmutatividad del diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\varphi} & P \\ {\scriptstyle \Pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ M' & \xrightarrow[f]{} & M \end{array} \tag{1.2.4}$$

*Por un* morfismo de fibrados principales a lo largo de $f$ *de* $P'$ *a* $P$ *entendemos una función suave* $\varphi : P' \to P$ *tal que:*

1. $\varphi$ *preserva fibras a lo largo de* $f$*;*

2. *existe un homomorfismo de grupos* $\varphi_0 : G' \to G$ *tal que para cada* $y \in M'$*, la aplicación* $\varphi_y = \varphi|_{P'_y} : P'_y \to P_{f(y)}$ *es un morfismo de espacios principales con morfismo subyacente* $\varphi_0$.

Como ya se observó para el caso de morfismos de fibrados principales, si $\varphi$ es un morfismo de fibrados principales a lo largo de una aplicación $f$, el homomorfismo de grupos $\varphi_0$ es unicamente determinado por $\varphi$ y la diferenciabilidad de $\varphi$ implica la diferenciabilidad de $\varphi_0$.

**Observación 1.2.2.** *Si* $\Pi : P \to M$ *es un fibrado* $G$*-principal y si* $f : M' \to M$ *es una aplicación suave definida en una variedad suave* $M'$*, se tiene:*

1. *La aplicación canónica $\bar{f} : f^*P \to P$ preserva fibras a lo largo de $f$ (compare* (1.2.1) *con* (1.2.4)*); además, $\bar{f}$ es un morfismo de fibrados principales a lo largo de $f$ cuyo morfismo subyacente de grupos de Lie es el morfismo identidad de $G$.*

2. *Si $\Pi' : P' \to M'$ es otro fibrado $G'$-principal sobre $M'$, la composición a izquierda de cualesquier aplicación que preserve fibras de $P'$ en $f^*P$ con $\bar{f}$ produce una aplicación que preserva fibras a lo largo de $f$ de $P'$ a $P$. Recíprocamente, si una aplicación $\varphi : P' \to P$ preserva fibras a lo largo de $f$, existe una única aplicación que preserva fibras $\overleftarrow{\varphi} : P' \to f^*P$ tal que $\bar{f} \circ \overleftarrow{\varphi} = \varphi$; a saber, basta tomar $\overleftarrow{\varphi}$ como la aplicación $\tau$ dada en la Observación 1.2.1 considerando $X = P'$, $\tau_1 = \Pi'$ y $\tau_2 = \varphi$. La relación entre $\varphi$ y $\overleftarrow{\varphi}$ es ilustrada por el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "\overleftarrow{\varphi}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "\Pi'"'] & & \\ & f^*P \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[d, "\Pi_1"] & P \arrow[d, "\Pi"] \\ & M' \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} \tag{1.2.5}$$

3. *Con la notación y la terminología del item anterior, $\varphi$ es suave si y solo si, la aplicación que preserva fibras $\overleftarrow{\varphi} : P' \to f^*P$ lo es. Además, $\varphi$ es un morfismo de fibrados principales a lo largo de $f$ con morfismo de grupos subyacente $\varphi_0 : G' \to G$ si y solo si, $\overleftarrow{\varphi}$ es un morfismo de fibrados principales con morfismo de grupos subyacente $\varphi_0 : G' \to G$.*

4. *Con base en el item anterior, $\bar{f} \circ \overleftarrow{\varphi} \mapsto \varphi$ define una correspondencia 1-1 entre los morfismos de fibrados principales de $P'$ en $f^*P$ y los morfismos de fibrados principales $P'$ en $P$ a lo largo de $f$.*

Para un fibrado asociado tenemos lo siguiente. Sean $P$ un fibrado $G$-principal sobre una variedad suave $M$, $f : M' \to M$ una función suave definida en una variedad suave $M'$. Dado un $G$-espacio suave $N$, el fibrado asociado $(f^*P) \times_G N$ puede ser identificado con el siguiente subconjunto del producto cartesiano $M' \times (P \times_G N)$:

$$\bigcup_{y \in M'} \big(\{y\} \times (P_{f(y)} \times_G N)\big). \tag{1.2.6}$$

Además se cumple que realizando esta identificación, la aplicación inclusión de $(f^*P) \times_G N$ en $M' \times (P \times_G N)$ es un embebimiento suave.

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial sobre una variedad suave $M$ con fibra típica $E_0$ y sea $f : M' \to M$ una función suave definida en una variedad suave $M'$. El *pull-back* de $E$ por $f$ es el conjunto $f^*E$ definido por:

$$f^*E = \bigcup_{y \in M'} \big(\{y\} \times E_{f(y)}\big).$$

Análogo al caso de fibrados principales, el conjunto $f^*E$ es un subconjunto del producto cartesiano $M' \times E$. La restricción a $f^*E$ de la proyección sobre la primera coordenada es una aplicación $\pi_1 : f^*E \to$

$M'$ y la restricción a $f^*E$ de la proyección en la segunda coordenada es una aplicación $\bar{f} : f^*E \to E$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} \tag{1.2.7}$$

Para cada $y \in M'$, la fibra $(f^*E)_y$ es igual a $\{y\} \times E_{f(y)}$; *la fibra $(f^*E)_y$ de $f^*E$ se identificará con la fibra $E_{f(y)}$ de $E$*. De este modo, cada fibra para $f^*E$ es dotada con una estructura de espacio vectorial real isomorfo a $E_0$. El conjunto $\mathrm{FR}_{E_0}(f^*E)$ puede ser naturalmente identificado con el pull-back $f^*\mathrm{FR}_{E_0}(E)$; tal identificación torna $\mathrm{FR}_{E_0}(f^*E)$ en un fibrado $\mathrm{GL}(E_0)$-principal y por tanto, $f^*E$ en un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$.

**Observación 1.2.3.** *Con la notación y terminología anterior tenemos las siguientes observaciones:*

1. *la aplicación $(\pi_1, \bar{f}) : f^*E \to M' \times E$ es un embebimiento suave, cuya imagen es el conjunto de pares $(y, e) \in M' \times E$ tales que $f(y) = \pi(e)$. En particular, $\bar{f} : f^*E \to E$ es una aplicación suave.*

2. *Bajo las condiciones del item anterior, dadas aplicaciones suaves $\phi_1 : X \to M'$, $\phi_2 : X \to E$ definidas en una variedad suave $X$ y tales que $\pi \circ \phi_2 = f \circ \phi_1$, existe una única aplicación suave $\phi : X \to f^*E$ tal que $\pi_1 \circ \phi = \phi_1$ y $\bar{f} \circ \phi = \phi_2$.*

**Definición 1.2.3.** *Por una* sección local para $E$ a lo largo de $f$ *se entiende una aplicación $\epsilon : U' \to E$ definida en una vecindad abierta $U'$ de $M'$ satisfaciendo la condición $\pi \circ \epsilon = f|_{U'}$. Por ejemplo, si $\epsilon : U \to E$ es un sección local para $E$, la composición $\epsilon \circ f : f^{-1}(U) \to E$ es una sección local para $E$ a lo largo de $f$.*

La composición a izquierda con la aplicación $\bar{f}$ induce una biyección entre el conjunto de secciones locales suaves para $f^*E$ y el conjunto de secciones locales suaves para $E$ a lo largo de $f$. A saber, dada una sección local $\epsilon : U' \to E$ para $E$ a lo largo de $f$ existe una única sección local $\bar{\epsilon} : U' \to f^*E$ para $f^*E$ tal que $\bar{f} \circ \bar{\epsilon} = \epsilon$. El siguiente diagrama conmutativo ilustra la situación:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\bar{f}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U' \arrow[u, "\bar{\epsilon}"] \arrow[ur, "\epsilon"'] \arrow[r, "f|_{U'}"'] & M \end{tikzcd} \tag{1.2.8}$$

**Ejemplo 1.2.1.** *Sean $M'$, $M$ variedades suaves y sea $f : M' \to M$ una función suave. Denote por $\pi : TM \to M$, $\pi' : TM' \to M$ las respectivas proyeciones. Con base en la Observación 1.2.3 con $X = TM'$, $\phi_1 = \pi'$, $\phi_2 = \mathrm{d}f : TM' \to TM$ y $E = TM$, obtenemos una aplicación suave $\overleftarrow{\mathrm{d}f} : TM' \to f^*TM$ tal que $\bar{f} \circ \overleftarrow{\mathrm{d}f} = \mathrm{d}f$ y $\pi_1 \circ \overleftarrow{\mathrm{d}f} = \pi'$. Claramente $\overleftarrow{\mathrm{d}f}$ es un morfismo de fibrados* *vectoriales, el cual bajo la correspondencia establecida entre el conjunto de secciones locales suaves para $f^*TM$ y el conjunto de secciones locales suaves para $TM$ a lo largo de $f$, el cual adaptado a este caso usualmente identificamos con $\mathrm{d}f : TM' \to TM$*

$$\begin{tikzcd}
TM' \arrow[dr, dotted, "\overleftarrow{\mathrm{d}f}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{d}f"] \arrow[ddr, bend right, "\pi'"'] & & \\
& f^*TM \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[d, "\pi_1"] & TM \arrow[d, "\pi"] \\
& M' \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd} \tag{1.2.9}$$

# 1.3. $G$-Estructuras

## 1.3.1. $G$-Estructuras en conjuntos

Sean $X_0$, $X$ conjuntos no vacíos de igual cardinalidad, se denota por $\mathrm{Bij}(X_0, X)$ al conjunto de todas las biyecciones de $X_0$ en $X$ y por $\mathrm{Bij}(X_0)$ el grupo de todas las biyecciones del conjunto $X_0$ sobre si mismo. El grupo $\mathrm{Bij}(X_0)$ actua de forma libre y transitiva a derecha sobre $\mathrm{Bij}(X_0, X)$ por composición. Dado un subgrupo $G \subset \mathrm{Bij}(X_0)$, por una *$G$-estructura en* el conjunto $X$ modelada sobre el conjunto $X_0$ es una $G$-órbita $P$ de $\mathrm{Bij}(X_0, X)$ obtenida por la acción antes descrita. Más explícitamente, una $G$-estructura sobre un conjunto $X$ es un subconjunto $P$ de $\mathrm{Bij}(X_0, X)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $p^{-1} \circ q : X_0 \to X_0$ está en $G$, para todo $p, q \in P$;

2. $p \circ g : X_0 \to X$ está en $P$, para todo $p \in P$ y para todo $g \in G$.

Un ejemplo que ilustra la situación es el siguiente: Dado un espacio vectorial de dimensión finita $V_0$, sea $\mathrm{GL}(V_0)$ el grupo constituido por todos los isomorfismos lineales de $V_0$. Dado otro espacio vectorial $V$ con el mismo campo escalar e igual dimensión que $V_0$; un isomorfismo lineal $p : V_0 \to V$ se denomina *$V_0$-referencial* en $V$. Obsérve que $\mathrm{GL}(V_0)$ es un subgrupo de $\mathrm{Bij}(V_0)$ y el conjunto $\mathrm{FR}_{V_0}(V)$ de todos los $V_0$-referenciales de $V$ es una $\mathrm{GL}(V_0)$-estructura sobre el conjunto $V$ modelado a través de $V_0$. Recíprocamente, si $V$ es un conjunto y es dada una $\mathrm{GL}(V_0)$-estructura $P$ sobre $V$ modelada en $V_0$, entonces existe una única estructura de espacio vectorial en $V$ tal que $P = \mathrm{FR}_{V_0}(V)$, a saber, es suficiente definir la estructura de espacio vectorial sobre el conjunto $V$ por:

$$v + w = p(p^{-1}(v) + p^{-1}(w)), \qquad t \cdot v = p(t \cdot p^{-1}(v)). \tag{1.3.1}$$

para cada $v, w \in V$ y para todo escalar $t$, donde $p \in P$ está fijo. Claramente la condición (1) de la definición de $G$-estructura implica que las operaciones definidas por (1.3.1) no depende de la elección de

$p \in P$. Es decir, dotar un conjunto $V$ de una $\mathrm{GL}(V_0)$-estructura es equivalente a dotarlo de una estructura de espacio vectorial.

Con la notación y la terminología anterior, observe que dados un subgrupo $H \subset G$ y una $G$-estructura $P$ sobre un conjunto $X$, entonces $P$ es unión de $H$-órbitas, y por lo tanto, cualquiera de estas $H$-órbitas constituye una $H$-estructura sobre $X$. Además, si $\mathcal{G} \subset \mathrm{Bij}(X_0)$ es un grupo el cual contiene a $G$ entonces existe una única $\mathcal{G}$-estructura $Q$ sobre $X$ que contiene a $P$, en este caso decimos que $P$ es un *refinamiento* para $Q$.

**Definición 1.3.1.** *Sean $V_0, V$ espacios vectoriales con el mismo campo escalar e igual dimensión. Dado un subgrupo $G$ de $\mathrm{GL}(V_0)$, por una $G$-estructura sobre un espacio vectorial $V$ se entiende cualquier refinamiento de la $\mathrm{GL}(V_0)$-estructura $\mathrm{FR}_{V_0}(V)$ en $V$. Es decir, si $G$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(V_0)$, una $G$-estructura $P$ en el espacio vectorial $V$ es una $G$-estructura en el conjunto $V$ tal que cada $p \in P$ es un isomorfismo lineal de $V_0$ en $V$.*

Considere dos espacios vectoriales $V_0, V$ con el mismo campo escalar e igual dimensión, dotados con los productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_0}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, respectivamente; se dice que un $V_0$-referencial $p : V_0 \to V$ es *ortonormal* si $p$ es una isometría lineal, es decir, si se vale:

$$\langle p(v), p(w) \rangle_V = \langle v, w \rangle_{V_0} \text{ para todo } v, w \in V_0. \tag{1.3.2}$$

Sea $\mathrm{O}(V_0; \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_0})$ el subgrupo de $\mathrm{GL}(V_0)$ constituido de todas las isometrías lineales $p : V_0 \to V_0$. El conjunto $\mathrm{FR}^{\circ}_{V_0}(V)$ de todos los $V_0$-referenciales ortonormales de $V$ es una $\mathrm{O}(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_0})$-estructura sobre $V$ modelado a través de $V_0$; claramente, éste es un refinamiento de la $\mathrm{GL}(V_0)$-estructura $\mathrm{FR}_{V_0}(V)$ de $V$. Recíprocamente, si $V$ es un espacio vectorial con el mismo campo escalar e igual dimensión que el espacio vetorial $(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_0})$ dotado de una $\mathrm{O}(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_0})$-estructura $P$, existe un único producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ en $V$ tal que $P = \mathrm{FR}^{\circ}_{V_0}(V)$, en efecto basta definir:

$$\langle v, w \rangle_V = \langle p^{-1}(v), p^{-1}(w) \rangle_{V_0}$$

para cada $v, w \in V$ y algún $p \in P$. Es decir, definir una $\mathrm{O}(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_0})$-estructura en un conjunto $V$ es equivalente a dotar este de un producto interno.

**Definición 1.3.2.** *Sean $X_0$ un conjunto y $G$ un subgrupo de $\mathrm{Bij}(X_0)$. Dados conjuntos $X, Y$ dotados con $G$-estructuras $P$ y $Q$, respectivamente. Se dice que una función $f : X \to Y$* preserva $G$-estructura *si $f \circ p$ está en $Q$ para todo $p \in P$.*

Si $f \circ p \in Q$ para algún $p \in P$, entonces $f$ preserva $G$-estructura. Pues cualesquier otro elemento en $P$ es de la forma $p \circ g$ para algún $g \in G$, luego $f \circ (p \circ g) = (f \circ p) \circ g$ es un elemento de $Q$. Es claro que la composición de funciones que preservan $G$-estructura de nuevo es una función que preserva $G$-estructura. Además, toda función que preserva $G$ estructura es biyectiva y su inversa de nuevo preserva $G$-estructura. En los ejemplos antes descritos, es claro que si $V_0, V, W$ son espacios vectoriales que tienen el mismo campo escalar e igual dimensión y los espacios $V, W$ están dotados con $\mathrm{GL}(V_0)$-estructuras $\mathrm{FR}_{V_0}(V), \mathrm{FR}_{V_0}(W)$ respectivamente, una función $f : V \to W$ preserva $\mathrm{GL}(V_0)$-estructura si y solo si, $f$ es un isomorfismo lineal. Más general, si $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_0}$ es un producto interno en $V_0$ y si $V, W$ son dotados respectivamente de $\mathrm{O}(V_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V_0})$-estructuras $P$ y $Q$ (o de forma equivalente con productos internos), entonces una función $f : V \to W$ preserva la $\mathrm{O}(V_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V_0})$-estructura si y solo si, $f$ es una isometría lineal, es decir, preserva los productos internos.

### 1.3.2. $G$-Estructuras en fibrados vectoriales

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$, sea $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ el fibrado $\mathrm{GL}(E_0)$-principal de referenciales para $E$.

**Definición 1.3.3.** *Dado un subgrupo de Lie $G \subset \mathrm{GL}(E_0)$, por una $G$-estructura sobre $E$ se entiende una subfibrado $G$-principal $P$ de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Un $E_0$-referencial $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ para $E$ con $s(U) \subset P$ se dice que es compatible con la $G$-estructura $P$.*

Observe que si $P$ es una $G$-estructura sobre $E$, para cada $x \in M$, $P_x$ es una $G$-estructura sobre el espacio vectorial $E_x$. Por lo tanto, se puede pensar intuitivamente una $G$-estructura $P$ sobre un fibrado vectorial $E$ como siendo una familia $(P_x)_{x\in M}$ de $G$-estructuras sobre las fibras $E_x$ de $E$ que varía suavemente con $x \in M$.

**Definición 1.3.4.** *Sea $E$, $F$ fibrados vectoriales sobre la misma variedad diferenciable $M$, con la misma fibra típica $E_0$. Sea $G$ un subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(E_0)$ y asuma que $E$ y $F$ están dotados con $G$-estructuras $P$ y $Q$, respectivamente. Un morfismo de fibrados vectoriales $L : E \to F$ se dice que preserva $G$-estructura si para cada $x \in M$, la función lineal $L_x : E_x \to F_x$ preserva $G$-estructura.*

Claramente cada morfismo de fibrados vectoriales que preserva $G$-estructura es un isomorfismo de fibrados vectoriales. Además, si $P \subset \mathrm{FR}_{E_0}(E)$, $Q \subset \mathrm{FR}_{E_0}(F)$ son $G$-estructuras en los fibrados vectoriales $E, F$, un isomorfismos $L : E \to F$ preserva $G$-estructura si y solo si, $L_*(P) \subset Q$. Donde $L_*$ es el morfismo de fibrados principales definido por:

$$L_* : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \ni p \longmapsto L \circ p \in \mathrm{FR}_{E_0}(F)$$

Por ejemplo si $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$. En efecto una estructura semi-riemanniana sobre $E$ es una sección suave $g$ del fibrado $\mathrm{Lin}_2^{sym}(E;\mathbb{R})$ tal que para todo $x \in M$, la aplicación $g_x : E_x \times E_x \to \mathbb{R}$ es una producto interno indefinido sobre $E_x$. Si $g$ es una estructura semi-riemanniana sobre $E$ y si el índice $n_-(g_x)$ es independiente de $x \in M$, entonces se denomina al índice $n_-(g_x)$ como el *índice* de la estructura semi-riemmaniana $g$ y se escribe $n_-(g) = n_-(g_x)$, para todo $x \in M$. Una estructura semi-riemmanniana sobre $E$ de índice $0$ se llama una *estructura riemanniana*. Si $g$ es una estructura semi-riemanniana en $E$ y si es dado un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ de índice $r$ fijo sobre la fibra típica $E_0$, el conjunto:

$$\mathrm{FR}^o_{E_0}(E) = \bigcup_{x\in M} \mathrm{FR}^o_{E_0}(E_x)$$

constituido por todos los referenciales ortonormales de $E$ es un subfibrado principal de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ con grupo estructural $\mathrm{O}(E_0)$. Por lo tanto, $\mathrm{FR}^o_{E_0}(E)$ es una $\mathrm{O}(E_0)$-estructura sobre el fibrado vectorial $E$.

**Definición 1.3.5.** *Sea $M$ una variedad diferenciable $n$-dimensional y sea $G$ un subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Por una $G$-estructura sobre $M$ se entiende una $G$-estructura $P \subset \mathrm{FR}(TM)$ sobre el fibrado tangente $TM$.*

Sean $G$ un subgrupo de Lie en $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, $M^{'}$ y $M$ variedades suaves $n$-dimensionales dotadas con $G$-estructuras $P'$ y $P$, respectivamente. Una función suave $f : M' \to M$ se dice que preserva $G$-estructura, si el morfismo de fibrados vectoriales $\overleftarrow{\mathrm{d}f} : TM' \to f^*TM$ preserva $G$-estructura, donde $f^*TM$ está dotado con la $G$-estructura $f^*P$. Claramente, si una función suave $f : M' \to M$ preserva $G$-estructura, entonces $f$ es un difeomorfismo local; además, dado un difeomorfismo local $f : M' \to M$, considerando la aplicación $(\mathrm{d}f)_* : \mathrm{FR}(TM') \to \mathrm{FR}(TM)$ definida por:

$$(\mathrm{d}f)_* : \mathrm{FR}(TM') \ni p \mapsto \mathrm{d}f \circ p \in \mathrm{FR}(TM); \tag{1.3.3}$$

se tiene que $f$ preserva $G$-estructura si y solo si, $(\mathrm{d}f)_*(P') \subset P$.

Es claro que la composición de funciones que preservan $G$-estructura, es nuevamente una función que preserva $G$-estructura. Si la función $f$ es un difeomorfismo que preserva $G$-estructura, entonces también $f^{-1}$ es un difeomorfismo que preserva $G$-estructura.

**Definición 1.3.6.** *Sea $M$ una variedad diferenciable. Por una métrica riemanniana (resp., métrica semi-riemanniana) sobre $M$ se entiende una estructura riemanniana (resp., estructura semi-riemanniana) $g$ sobre $TM$; el par $(M, g)$ es denominado variedad riemanniana (resp., variedad semi-riemanniana).*

## 1.4. Conexiones en fibrados

### 1.4.1. Concepto general de conexión

Sean $\mathcal{E}$, $M$ variedades diferenciables y $\pi : \mathcal{E} \to M$ una submersión suave. Dado $e \in \mathcal{E}$, el espacio $\ker(\mathrm{d}\pi(e))$ es denominado *subespacio vertical* de $T_e\mathcal{E}$ en el punto $e$ con respecto a la submersión $\pi$, asumiendo que la submersión $\pi$ es fija por el contexto, se denota el subespacio vertical por $\mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})$. Un subespacio $H$ de $T_e\mathcal{E}$ es llamado *horizontal* con respecto a $\pi$, si es el complemento de $\mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})$ en $T_e\mathcal{E}$, es decir si se tiene:

$$T_e\mathcal{E} = H \oplus \mathrm{Ver}_e(\mathcal{E}).$$

Una distribución $H$ sobre una variedad diferenciable $\mathcal{E}$ es denominada *horizontal*, con respecto a $\pi$ si $H_e$ es un subespacio horizontal de $T_e\mathcal{E}$, para cada $e \in \mathcal{E}$. Una distribución horizontal suave sobre $\mathcal{E}$, es conocida como una *conexión generalizada* sobre $\mathcal{E}$ (respecto a $\pi$).

Note que para todo $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad suave de $\mathcal{E}$ y para cada $e \in \pi^{-1}(x)$ se tiene:

$$\mathrm{Ver}_e(\mathcal{E}) = T_e(\pi^{-1}(x)).$$

Por lo tanto la colección:

$$\mathrm{Ver}(\mathcal{E}) = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \mathrm{Ver}_e(\mathcal{E}) \subset T\mathcal{E}.$$

define una distribución suave en $\mathcal{E}$, conocida como el fibrado vertical sobre $\mathcal{E}$ determinado por $\pi$. Note que el subespacio $H$ de $T_e\mathcal{E}$ es horizontal con respecto a $\pi$ si y solo si, la restricción de $\mathrm{d}\pi(e)$ a $H$ es un isomorfismo sobre $T_{\pi(e)}M$. Sea $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ una distribucción horizontal, entonces:

$$T_e\mathcal{E} = \mathrm{Hor}_e(\mathcal{E}) \oplus \mathrm{Ver}_e(\mathcal{E}). \tag{1.4.1}$$

para todo $e \in \mathcal{E}$. Denotamos por $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}} : T\mathcal{E} \to \mathrm{Ver}(\mathcal{E})$ (resp., $\mathfrak{p}_{\mathrm{hor}} : T\mathcal{E} \to \mathrm{Hor}(\mathcal{E})$), la función cuya restricción a $T_e\mathcal{E}$ es igual a la proyección sobre la segunda coordenada (resp., la primera coordenada) correspondiente a la descomposición en suma directa (1.4.1), para todo $e \in \mathcal{E}$. Se llama a $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}$ la *proyección vertical* (resp., $\mathfrak{p}_{\mathrm{hor}}$ proyección horizontal) determinada por la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$. Observe que si $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ es una distribución suave, las proyecciones $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}$ y $\mathfrak{p}_{\mathrm{hor}}$ son morfismos de fibrados vectoriales, en este caso, se dice que $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ es un *fibrado horizontal* de $\mathcal{E}$ respecto a la proyección $\pi$.

**Definición 1.4.1.** *Sea $\pi : \mathcal{E} \to M$ una submersión suave. Por una sección local de $\pi$ se entiende una función $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ definida sobre un subconjunto abierto $U$ de $M$, tal que $\pi \circ \epsilon$ es la función inclusión de $U$ en $M$. Sea $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ una conexión generalizada sobre $\mathcal{E}$. Si $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ es una sección local suave de $\pi$, dado $x \in U$, $v \in T_xM$ , la* derivada covariante *de $\epsilon$ en el punto $x$ en la dirección del vector $v$ con respecto a la conexión generalizada* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ *es denotada por $\nabla_v\epsilon$ y es definida por:*

$$\nabla_v\epsilon = \mathfrak{p}_{ver}(\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v) \in \mathrm{Ver}_{\epsilon(x)}(\mathcal{E}); \tag{1.4.2}$$

*se llama a $\nabla$ el* operador derivada covariante *asociado a la conexión generalizada* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$*. Dado $x \in U$, si $\nabla_v\epsilon = 0$ para todo $v \in T_xM$ entonces la sección local $\epsilon$ se dice que es* paralela en $x$*, con respecto a* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$*; si $\epsilon$ es paralelo en cada $x \in U$, se dice simplemente que $\epsilon$ es* paralelo *con respecto a* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$.

Claramente, la derivada covariante $\nabla_v\epsilon$ es lineal en $v$, además, la sección $\epsilon$ es paralela en $x$ con respecto a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ si y sólo si se tiene:

$$\mathrm{d}\epsilon_x(T_xM) = \mathrm{Hor}_{\epsilon(x)}\mathcal{E}.$$

**Definición 1.4.2.** *Sean $\pi : \mathcal{E} \to M$, $\pi' : \mathcal{E}' \to M$ submersiones suaves; una función $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$* preserva fibras *cuando $\pi' \circ \phi = \pi$.*

*Sean* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$, $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$ *conexiones generalizada sobre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ respectivamente. Una función suave $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ se dice que* preserva conexión *si ésta preserva fibras y además, se cumple:*

$$\mathrm{d}\phi_e(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})) = \mathrm{Hor}_{\phi(e)}\mathcal{E}, \tag{1.4.3}$$

*para todo $e \in \mathcal{E}$.*

Claramente, la composición de funciones que preservan fibras (resp., preservan conexiones) es nuevamente una función que preservan fibras (resp., preservan conexiones). Además, la inversa de un función biyectiva que preserva fibras (resp., un difeomorfismo que preserva conexión) es también una función que preserva fibras (resp., preserva conexión).

**Lema 1.4.1.** *Sean $\pi : \mathcal{E} \to M$, $\pi' : \mathcal{E}' \to M$ submersiones suaves y sea* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$, $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$ *conexiones generalizadas sobre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ respectivamente. Denote por $\nabla$ y $\nabla'$ respectivamente los operadores de derivada covariante correpondientes a* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ *y* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$*. Dada una función suave que preserva fibras $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, las siguientes condiciones son equivalentes;*

1. *$\phi$ preserva conexión;*

2. $\mathrm{d}\phi_e(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})) \subset \mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}')$, *para todo* $e \in \mathcal{E}$*;*

3. *para cualquier sección local suave* $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ *para* $\pi$*, se tiene*

$$\nabla'_v(\phi \circ \epsilon) = \mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}(\nabla_v \epsilon). \tag{1.4.4}$$

   *para todo* $x \in U$ *y todo* $v \in T_x M$*.*

*Demostración.* La equivalencia entre (1) y (2) es inmediata de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} T_e\mathcal{E} \arrow[rr, "\mathrm{d}\phi_e"] \arrow[dr, "\mathrm{d}\pi_e"'] & & T_{\phi(e)}\mathcal{E}' \arrow[dl, "\mathrm{d}\pi'_{\phi(e)}"] \\ & T_x M & \end{tikzcd} . \tag{1.4.5}$$

En particular

$$\mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})\big) \subset \mathrm{Ver}_{\phi(e)}(\mathcal{E}'). \tag{1.4.6}$$

Asumiendo (1) para probar (3). Si se denota por $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ las proyecciones verticales determinadas por $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ y por $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$, respectivamente. Se sigue de (1.4.3) y (1.4.6) que:

$$\mathfrak{p}'_{\mathrm{ver}}(\mathrm{d}\phi_e(\xi)) = \mathrm{d}\phi_e(\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}(\xi)),$$

para todo $e \in \mathcal{E}$ y todo $\xi \in T_e\mathcal{E}$. Por lo tanto, dada una sección local $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ para $\pi$, se tiene:

$$\nabla'_v(\phi \circ \epsilon) = \mathfrak{p}'_{\mathrm{ver}}[\mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}(\mathrm{d}\epsilon_x(v))] = \mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}[\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}(\mathrm{d}\epsilon_x(v))] = \mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}(\nabla_v \epsilon)$$

para todo $x \in U$ y todo $v \in T_x M$. Esto prueba (3). Recíprocamente, si se asume (3) sea $e \in \mathcal{E}$ fijo tal que $\pi(e) = x \in M$. Se selecciona una subvariedad arbitraria $S$ de $\mathcal{E}$ con $e \in S$ y $T_e S = \mathrm{Hor}_v(\mathcal{E})$. Por tanto $\mathrm{d}(\pi|_S)_e = \mathrm{d}\pi_e|_{T_e S} : T_e S \to T_x M$ es un isomorfismo, disminuyendo $s$, si es necesario, se puede asumir que $\pi|_S$ es un difeomorfismo suave sobre una vecindad abierta $U$ de $x$ en $M$. Luego

$$\epsilon = (\pi|_S)^{-1} : U \to \mathcal{E}$$

es una sección local suave de $\pi$, $\epsilon(x) = x$ y $\epsilon$ es paralelo en $x$ con respecto a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$. Ahora 1.4.4 implica que $\phi \circ \epsilon$ es paralelo en $x$ con respecto a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$ y por tanto:

$$\mathrm{d}\phi_v(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})) = (\mathrm{d}\phi_e \circ \mathrm{d}\epsilon_x)(T_x M) = \mathrm{d}(\phi \circ \epsilon)_x(T_x M) = \mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}').$$

□

Los resultados análogos a lo del lema 1.4.1 serán empleados más adelante en las situaciones particulares que nos interesan.

### 1.4.2. Conexiones en fibrados principales

Sea $\Pi : P \to M$ un fibrado $G$-principal sobre una variedad diferenciable $M$. Por una conexión principal sobre $P$ entendemos una conexión generalizada $\mathrm{Hor}(P)$ sobre $P$ que es $G$-invariante, i.e;

$$\mathrm{d}\gamma_g(\mathrm{Hor}_p(P)) = \mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P).$$

para todo $p \in P$, todo $g \in G$, donde $\gamma_g : P \to P$ es el difeomorfismo dado por la acción de $g$ sobre $P$.

Sea $\mathrm{Hor}(P)$ es una distribución horizontal sobre $P$. La existencia de un isomorfismo canónico entre el espacio vertical $\mathrm{Ver}_p(P)$ y el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo estructural $G$, permite asociar de forma canónica a la distribución $\mathrm{Hor}(P)$ una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada $\omega$ sobre $P$ tal que $\ker(\omega_p) = \mathrm{Hor}_p(P)$ , para todo $p \in P$, a saber definimos:

$$\omega_p(\xi) = \begin{cases} \mathrm{d}\beta_p(1)^{-1}(\xi) \in \mathfrak{g} & \text{si } \xi \in \mathrm{Ver}_p(P); \\ 0 \in \mathfrak{g} & \text{si } \xi \in \mathrm{Hor}_p(P). \end{cases} \tag{1.4.7}$$

para todo $p \in P$, donde $(\mathrm{d}\beta_p(1))^{-1} : \mathrm{Ver}_p(P) \to \mathfrak{g}$ es el inverso de $\mathrm{d}\beta_p(1) : \mathfrak{g} \to \mathrm{Ver}_p(P)$.

Un resultado bien conocido es el siguiente:

**Lema 1.4.2.** *Si* $\mathrm{Hor}(P)$ *es una distribución horizontal sobre* $P$ *y si* $\omega$ *es la* 1*-forma definida por* (1.4.7), *entonces la distribución* $\mathrm{Hor}(P)$ *es suave si y solamente si* $\omega$ *es suave.*

*Demostración.* Considere la función $L_\omega : TP \to P \times \mathfrak{g}$ cuya restricción a $T_pP$ está dada por la función $\xi \mapsto (p, \omega_p(\xi))$, para todo $p \in P$. Si $\omega$ es suave, $L_\omega$ es suave y por tanto, es un morfismo de fibrados vectoriales del fibrado tangente $TP$ en el fibrado vectorial trivial $P \times \mathfrak{g}$. Como $L_\omega$ es sobreyectiva, se tiene $\ker(L_\omega) = \mathrm{Hor}(P)$ es un subfibrado vectorial de $TP$. Por lo tanto, $\mathrm{Hor}(P)$ define una distribucción suave sobre $P$. Por otro lado, asumiendo que $\mathrm{Hor}(P)$ es una distribución suave, y considerando la función $L_\beta : P \times \mathfrak{g} \to \mathrm{Ver}(P)$ definida por:

$$L_\beta(p, X) = \mathrm{d}\,\beta_p(1) \cdot X,$$

para todo $p \in P$ y todo $X \in \mathfrak{g}$ se tiene que $L_\beta$ es una función suave, pues es la restricción a $P \times \mathfrak{g} \subset TP \times TG$ de la diferencial de la acción a derecha $P \times G \to P$ de $G$ sobre $P$. Luego la función $L_\beta$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales. Luego $\mathrm{Hor}(P)$ es suave, la proyección vertical $\mathfrak{p}_{ver} : TP \to \mathrm{Ver}(P)$ es un morfismos de fibrados vectoriales y por lo tanto $L_\omega = L_\beta^{-1} \circ \mathfrak{p}_{ver} : Tp \to P \times \mathfrak{g}$ es también un morfismo de fibrados vectoriales. De esto se sigue que $\omega$ es suave. $\square$

Determinemos ahora condiciones para la 1-forma $\omega$ definida por (1.4.7) correspondientes a la $G$-invarianza de la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(P)$. Si $\mathrm{Hor}(P)$ es $G$-invariante, como consecuencia de la conmutatividad del diagrama (1.1.4), se sigue que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_pP \arrow[r, "\omega_p"] \arrow[d, "\mathrm{d}\gamma_g(p)"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\mathrm{Ad}_{g^{-1}}"] \\ T_{p\cdot g}P \arrow[r, "\omega_{p\cdot g}"'] & \mathfrak{g} \end{tikzcd} \tag{1.4.8}$$

conmuta para cada $p \in P$ y cada $g \in G$. La conmutatividad del diagrama (1.4.8) para cada $p \in P$, $g \in G$ es equivalente a la condición:

$$\gamma_g^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega, \tag{1.4.9}$$

para cada $g \in G$. La identidad (1.4.9) significa que $\omega$ es *pseudo $G$-invariante con respecto a la representación adjunta* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ del grupo de Lie $G$ en su álgebra de Lie. En esta situación nos referiremos simplemente por $\mathrm{Ad}$-pseudo $G$-invariante.

Un resultado bien conocido es el siguiente

**Lema 1.4.3.** *Si $\mathrm{Hor}(P)$ es una distribución horizontal sobre $P$ y si $\omega$ es la $1$-forma definida por* (1.4.7)*, entonces la distribución $\mathrm{Hor}(P)$ es $G$-invariante si y solamente si, $\omega$ es pseudo $G$-invariante con respecto a la representación $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ del grupo de Lie $G$.*

*Demostración.* Ya se probo que si $\mathrm{Hor}(P)$ es $G$-invariante, entonces $\omega$ es $\mathrm{Ad}$-pseudo $G$-invariante. Reciprocamente, si $\omega$ es $\mathrm{Ad}$-pseudo $G$-invariante, el diagrama 1.4.8 comuta para todo $p \in P$, todo $g \in G$ y luego:

$$\mathrm{d}\,\gamma_g(\mathrm{Hor}_p(P)) \subset \mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P), \tag{1.4.10}$$

para todo $p \in P$, $g \in G$. Remplazando $p$ con $p \cdot g$ y $g$ con $g^{-1}$ en (1.4.10) se obtiene la inclusión $\mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P) \subset \mathrm{d}\,\gamma_g(\mathrm{Hor}_p(P))$ y por lo tanto $\mathrm{Hor}(P)$ es $G$-invariante. ☐

**Definición 1.4.3.** *Sea $\Pi : P \to M$ un fibrado $G$-principal y para cada $p \in P$ sea $\big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1} : \mathrm{Ver}_p(P) \to \mathfrak{g}$ el inverso del isomorfismo canónico. Una $1$-forma suave definida en $P$ a valores en $\mathfrak{g}$ y $\mathrm{Ad}$-pseudo invariante satisfaciendo la condición:*

$$\omega_p|_{\mathrm{Ver}_p(P)} = \big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1} \tag{1.4.11}$$

*para cada $p \in P$ es llamada una* forma de conexión *en $P$.*

Si $\omega$ es una $1$-forma en $P$ a valores en $\mathfrak{g}$ satisfaciendo la condición (1.4.11) para cada $p \in P$, entonces la distribución $\mathrm{Hor}(P)$ definida por:

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \ker(\omega_p), \tag{1.4.12}$$

para cada $p \in P$ es horizontal. Si $\omega$ es una forma de conexión en $P$, los Lemas 1.4.2 y 1.4.3 implican que la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(P)$ definida por (1.4.12) es una conexión en $P$. Recíprocamente, si $\mathrm{Hor}(P)$ es una conexión en $P$, entonces la $1$-forma $\omega$ a valores en $\mathfrak{g}$ definida en $P$ por (1.4.7) es una forma de conexión en $P$. Es decir la igualdad (1.4.12) define una correspondencia uno a uno entre conexiones principales $\mathrm{Hor}(P)$ en $P$ y formas de conexión en $P$.

En el contexto de fibrados principales se tiene la siguiente noción de función preservando conexión:

**Lema 1.4.4.** *Sean $\Pi : P \to M$, $\Pi' : Q \to M$ fibrados principales con grupos estructurales $G$ y $H$, respectivamente; denote por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ las álgebras de Lie de $G$ y $H$ respectivamente. Sea $\phi : P \to Q$ un morfismo de fibrados principales con morfismo subyacente $\phi_0 : G \to H$; denote por $\bar{\phi}_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ la diferencial de $\phi_0$ en el elemento identidad. Sea $\mathrm{Hor}(P)$, una distribución horizontal $G$-invariante en $P$ y*

$\mathrm{Hor}(Q)$ *una distribución horizontal $H$-invariante en $Q$. Denote por $\omega^P$, $\omega^Q$ respectivamente las formas de conexión en $P$ y en $Q$ asociadas con $\mathrm{Hor}(P)$ y $\mathrm{Hor}(Q)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(a) para cada $x \in M$, existe un $p \in P_x$ tal que:*

$$\mathrm{d}\phi_p\big(\mathrm{Hor}_p(P)\big) \subset \mathrm{Hor}_{\phi(p)}(Q); \tag{1.4.13}$$

*(b) $\phi$ preserva conexión;*

*(c) $\phi^*\omega^Q = \bar{\phi}_0 \circ \omega^P$;*

*(d) cada punto en $M$ pertenece al dominio de una sección admisible $s : U \to P$ para $P$ tal que $(\phi \circ s)^*\omega^Q = \bar{\phi}_0 \circ (s^*\omega^P)$.*

*Demostración.* Asumiendo (a), dados $g \in G$, $h \in H$, denotamos por $\gamma_g^P : P \to P$ y $\gamma_h^Q : Q \to Q$ respectivamente los difeomorfismos dados por la acción de $g$ en $P$ y de $h$ en $Q$. Escribiendo $h = \phi_0(g)$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\gamma_g^P"'] & Q \arrow[d, "\gamma_h^Q"] \\ P \arrow[r, "\phi"'] & Q \end{tikzcd}$$

diferenciando, obtenemos otro diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T_pP \arrow[r, "\mathrm{d}\phi(p)"] \arrow[d, "\mathrm{d}\gamma_g^P(p)"'] & T_{\phi(p)}Q \arrow[d, "\mathrm{d}\gamma_h^Q(\phi(p))"] \\ T_{p\cdot g}P \arrow[r, "\mathrm{d}\phi(p\cdot g)"'] & T_{\phi(p\cdot g)}Q \end{tikzcd} \tag{1.4.14}$$

Como $\mathrm{d}\gamma_g^P(p)$ lleva el espacio $\mathrm{Hor}_p(P)$ en el espacio $\mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P)$ y $\mathrm{d}\gamma_h^Q\big(\phi(p)\big)$ lleva el espacio $\mathrm{Hor}_{\phi(p)}(Q)$ en el espacio $\mathrm{Hor}_{\phi(p\cdot g)}(Q)$, el diagrama conmutativo (1.4.14) y (1.4.13) implican que:

$$\mathrm{d}\phi_{p\cdot g}\big(\mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P)\big) \subset \mathrm{Hor}_{\phi(p\cdot g)}(Q),$$

para cada $g \in G$. De este modo se tiene que la igualdad (1.4.13) es válida para cada $p \in P$. Luego (b) es una consecuencia directa del Lema 1.4.1. Asumiendo (b), dado $p \in P$ la aplicación lineal $(\phi^*\omega^Q)_p = \omega^Q_{\phi(p)} \circ \mathrm{d}\phi_p$ y $\bar{\phi}_0 \circ \omega^P_p$ son ambas nulas en $\mathrm{Hor}_p(P)$ y coinciden en $\mathrm{Ver}_p(P)$. Para ver que (c) implica (d), simplemente observe que la igualdad en (d) es equivalente a:

$$s^*(\phi^*\omega^Q) = s^*(\bar{\phi}_0 \circ \omega^P). \tag{1.4.15}$$

Finalmente, asumiendo (d), sea $x \in M$ fijo y escoja una sección local suave $s : U \to P$ para $P$ con $x \in U$ tal que (1.4.15) se cumple. Sea $p = s(x)$ veamos que (1.4.13) es válida. La igualdad (1.4.15) implica que las aplicaciones lineales $(\phi^*\omega^Q)_p$ y $\bar{\phi}_0 \circ \omega_p^P$ coinciden en la imagen de $\mathrm{d}s_x$; consecuentemente también coinciden en $\mathrm{Ver}_p(P)$. Como $T_pP = \mathrm{d}s_x(T_xM) \oplus \mathrm{Ver}_p(P)$, se sigue que:

$$\omega^Q_{\phi(p)} \circ \mathrm{d}\phi_p = (\phi^*\omega^Q)_p = \bar{\phi}_0 \circ \omega_p^P.$$

De este modo $\mathrm{d}\phi_p$ mapea el kernel de $\omega_p^P$ en el kernel de $\omega^Q_{\phi(p)}$ esto muestra (1.4.13). □

**Formas de curvatura y torsión**

Sea $P$ un fibrado $G$-principal sobre una variedad suave $M$ dotado de una conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$. La *forma de curvatura* de la conexión $\mathrm{Hor}(P)$ es la 2-forma suave en $P$ a valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo $G$ definida por:

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}\,\omega \wedge \omega, \tag{1.4.16}$$

donde $\omega$ denota la forma de conexión en $P$ asociada con la conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$ y el producto $\wedge$ es considerado respecto al conmutador del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, i.e.,

$$\frac{1}{2}\,(\omega \wedge \omega)_p\,(\zeta_1, \zeta_2) = [\omega_p(\zeta_1), \omega_p(\zeta_2)]$$

para cada $p \in P$, cada $\zeta_1, \zeta_2 \in T_pP$

Si $M$ es una variedad suave de dimensión $n$, la *forma canónica* de $\mathrm{FR}(TM)$ es la 1-forma suave en $\mathrm{FR}(TM)$ a valores en $\mathbb{R}^n$ definida por:

$$\theta_p(v) = p^{-1}\left(\mathrm{d}\Pi_p(v)\right),$$

para cada $p \in \mathrm{FR}(TM)$, cada $v \in T_p\left(\mathrm{FR}(TM)\right)$. Si $\mathrm{Hor}$ es una conexión principal en $\mathrm{FR}(TM)$ con forma de conexión $\omega$, la *forma de torsión* de $\mathrm{FR}(TM)$ es la 2-forma suave en $\mathrm{FR}(TM)$ definida por:

$$\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta, \tag{1.4.17}$$

donde el producto $\wedge$ es considerado respecto al pareamiento natural entre $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$(\omega \wedge \theta)_p(\zeta_1, \zeta_2) = \omega_p(\zeta_1) \cdot \theta_p(\zeta_2) - \omega_p(\zeta_2) \cdot \theta_p(\zeta_1).$$

Más general, si $E$ es un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$ definido sobre una variedad suave $M$, dado un morfismo de fibrados vectoriales $\iota : TM \to E$, la forma *$\iota$-canónica* de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ es la 1-forma suave en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ a valores en $E_0$ definida por:

$$\theta^\iota_p(v) = p^{-1}\left(\iota_x \cdot \mathrm{d}\Pi_p(v)\right) \in E_0, \tag{1.4.18}$$

para cada $x \in M$, cada $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$, cada $v \in T_p\left(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\right)$; note que dado un referencial local suave $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ entonces:

$$(s^*\theta^\iota)_x = s(x)^{-1} \circ \iota_x : T_xM \to E_0, \tag{1.4.19}$$

para cada $x \in U$, pues $\mathrm{d}\Pi_{s(x)} \circ \mathrm{d}s(x)$ es la aplicación identidad en $T_xM$; en este caso, la forma de *$\iota$-torsión* en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ es la 2-forma en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ definida por:

$$\Theta^\iota = \mathrm{d}\theta^\iota + \omega \wedge \theta^\iota. \tag{1.4.20}$$

donde el producto $\wedge$ es considerado respecto al pareamiento natural entre $\mathfrak{gl}(E_0)$ y $E_0$.

### 1.4.3. Conexiones en fibrados asociados

Una conexión $\mathrm{Hor}(P)$ en un fibrado $G$-principal $P$ sobre una variedad suave $M$ induce de forma natural una conexión en cada fibrado asociado de $P$. Más precísamente, si $N$ es un $G$-espacio suave, consideramos el fibrado asociado $P \times_G N$ y lo dotamos de forma natural de una conexión, a saber, sea $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$ la función canónica definida en (1.1.5), de este modo haciendo:

$$\mathrm{Hor}_{[p,n]}(P \times_G N) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\mathrm{Hor}_p(P) \oplus \{0\}\big), \tag{1.4.21}$$

para cada $p \in P$, cada $n \in N$. Luego (1.4.21) define una única distribución $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ la cual es suave y horizontal con respecto a la proyección $\pi : P \times_G N \to M$. Es decir, $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ define una conexión generalizada en el fibrado asociado $P \times_G N$ la cual es llamada *conexión asociada* a la conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$ en el fibrado asociado $P \times_G N$.

Veamos como puede calcularse la derivada covariante de secciones locales para el fibrado $P \times_G N$. Para esto, con base en la notación y la terminología anterior sea $\omega$ la forma de conexión en $P$ asociada con la conexión generalizada $\mathrm{Hor}(P)$, sean $s : U \to P$, $\epsilon : U \to P \times_G N$ secciones locales suaves para $P$ y $P \times_G N$ respectivamente; denotamos por $\tilde{\epsilon}$ la representación de $\epsilon$ con respecto a $s$ y sea $\bar{\omega} = s^*\omega$. Dados $x \in U$, $v \in T_xM$ y haciendo $p = s(x)$, $n = \tilde{\epsilon}(x)$ entonces la derivada covariante $\nabla_v \epsilon$ es dada por:

$$\nabla_v \epsilon = \mathrm{d}\hat{p}_n\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \big(\bar{\omega}_x(v)\big)^N(n)\big] \in \mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N).$$

En efecto, $\epsilon = \mathfrak{q} \circ (s, \tilde{\epsilon})$, luego:

$$\mathrm{d}\epsilon_x(v) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\mathrm{d}s_x(v), \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v)\big);$$

escribiendo $\mathrm{d}s_x(v) = \zeta_{\mathrm{hor}} + \zeta_{\mathrm{ver}}$ con $\zeta_{\mathrm{hor}} \in \mathrm{Hor}_p(P)$ y $\zeta_{\mathrm{ver}} \in \mathrm{Ver}_p(P)$ entonces:

$$\mathrm{d}\epsilon_x(v) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}(\zeta_{\mathrm{hor}}, 0) + \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\zeta_{\mathrm{ver}}, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v)\big), \tag{1.4.22}$$

y $\mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}(\zeta_{\mathrm{hor}}, 0) \in \mathrm{Hor}_{[p,n]}(P \times_G N)$. La identidad (1.1.8) implica que el segundo termino del lado derecho de (1.4.22) es igual a $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}\big(\mathrm{d}\epsilon_x(v)\big)$ y además:

$$\mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\zeta_{\mathrm{ver}}, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v)\big) = \mathrm{d}\hat{p}_n\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + X^N(n)\big],$$

donde $X \in \mathfrak{g}$ satisface $\zeta_{\mathrm{ver}} = \mathrm{d}\beta_p(1) \cdot X$. Claramente, $X = \omega_p\big(\mathrm{d}s_x(v)\big) = \bar{\omega}_x(v)$.
En particular, si $P = \mathrm{FR}_{E_0}(E)$, $G = \mathrm{GL}(E_0)$, como $\mathrm{d}\hat{p}_n = \hat{p}$ se tiene:

$$\nabla_v \epsilon = \hat{p}\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v) \cdot \tilde{\epsilon}(x)\big] = [p, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v) \cdot \tilde{\epsilon}(x)]. \tag{1.4.23}$$

### 1.4.4. Conexiones en fibrados vectoriales

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$. Denotamos por $\mathbf{\Gamma}(E)$ el conjunto de todas la secciones suaves de $E$ y por $C^\infty(M)$ el conjunto de todas las funciones suaves real valuadas en $M$.

Dados un campo vectorial $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y una función $f \in C^\infty(M)$ (o, más general, $f$ puede ser una función suave en $M$ a valores en un espacio vectorial real finito dimensional). Denotamos por $X(f)$ la función definida por $X(f)(x) = \mathrm{d}f_x \cdot X(x)$, para cada $x \in M$. Una *conexión lineal* en el fibrado vectorial $E$ es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\nabla : \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(E) \ni (X, \epsilon) \longmapsto \nabla_X \epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$$

la cual es $C^\infty(M)$-lineal en $X$ y satisface la *regla de Leibnitz*:

$$\nabla_X(f\epsilon) = X(f)\epsilon + f\nabla_X\epsilon, \tag{1.4.24}$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ y cada $f \in C^\infty(M)$.

Dado un referencial local admisible $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$, se define de forma natural una conexión $\mathrm{dI}^s_v$ en $E|_U$, que corresponde via la trivilización de $E|_U$ definida por $s$ a la derivada estándar. Más explicitamente:

$$\mathrm{dI}^s_v\, \epsilon = s(x)(\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}_x(v)), \tag{1.4.25}$$

para todo $x \in U$, $v \in T_xM$ y todo $\epsilon \in \Gamma(E|_U)$, donde $\widetilde{\epsilon} : U \to E_0$ denota la representación de $\epsilon$ con respecto al referencial local $s$.

**Definición 1.4.4.** *Sea $\nabla$ una conexión lineal en un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ con fibra típica $E_0$ y sea $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ un referencial local admisible. El* Tensor de Chirstoffel *de la conexión $\nabla$ con respecto al referencial $s$ es la aplicación $C^\infty(M)$-bilineal*

$$\Gamma : \mathbf{\Gamma}(TM\mid_U) \times \mathbf{\Gamma}(E\mid_U) \to \mathbf{\Gamma}(E\mid_U)$$

*definida por* $\Gamma := \nabla - \mathrm{dI}^s$.

Sea $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ un referencial local admisible. Explícitamente el Tensor de Chirstoffel puede escribirse empleando su definición y la identidad (1.4.25) como sigue:

$$\nabla_v\epsilon = \mathrm{dI}^s_v\, \epsilon + \Gamma_x(v, \epsilon(x)), \tag{1.4.26}$$

para todo $x \in U$, $v \in T_xM$ y todo $\epsilon \in \Gamma(E|_U)$.

**Definición 1.4.5.** *Por una* conexión lineal, o simplemente por una conexión en una variedad suave $M$ *es entendida una conexión lineal en el fibrado tangente $TM$. Por una variedad afín entendemos un par $(M, \nabla)$ constituido de una variedad suave $M$ dotada de una conexión $\nabla$.*

El *tensor de curvatura* de una conexión lineal $\nabla$ en el fibrado vectorial $E$ se define como siendo la aplicación

$$R : \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(TM) \times \mathbf{\Gamma}(E) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}(E)$$

dada por:

$$R(X,Y)\epsilon = \nabla_X\nabla_Y\epsilon - \nabla_Y\nabla_X\epsilon - \nabla_{[X,Y]}\epsilon,$$

para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$, en donde $[X,Y] \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ denota el corchete de Lie de los campos $X, Y$. Es claro que $R$ es un tensor anti-simétrico respecto de sus dos primeras variables, además, $R$ es $C^\infty(M)$-trilineal.

Dada una conexión $\nabla$ en el fibrado tangente $TM$, el *tensor de torsión* de $\nabla$ es la aplicación $T:\mathbf{\Gamma}(TM)\times\mathbf{\Gamma}(TM)\to\mathbf{\Gamma}(TM)$ definida por:

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],$$

para cada $X,Y\in\mathbf{\Gamma}(TM)$. Más general, si $\nabla$ es una conexión en un fibrado vectorial arbitrario $\pi:E\to M$ y si $\iota:TM\to E$ es un morfismo de fibrados vectoriales, *la $\iota$-torsión* de $\nabla$ es la aplicación $T^\iota:\mathbf{\Gamma}(TM)\times\mathbf{\Gamma}(TM)\to\mathbf{\Gamma}(E)$ definida por:

$$T^\iota(X,Y)=\nabla_X\big(\iota(Y)\big)-\nabla_Y\big(\iota(X)\big)-\iota\big([X,Y]\big),$$

para cada $X,Y\in\mathbf{\Gamma}(TM)$.

**Definición 1.4.6.** *Una conexión en $TM$ cuyo tensor de torsión $T$ es idénticamente cero es llamada* simétrica. *Es claro que el tensor de torsión (resp. $\iota$-torsión) es anti-simétrico y $C^\infty(M)$-bilineal.*

### Relacionando conexiones principales y conexiones lineales

Sea $\pi:E\to M$ un fibrado vectorial sobre una variedad suave $M$ con fibra típica $E_0$ y sea $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ una conexión principal en el fibrado principal de los $E_0$-referenciales en $E$, $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Tal conexión induce una conexión asociada $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_G E_0\big)$ en el fibrado asociado $\mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_G E_0$ ($G=\mathrm{GL}(E_0)$). La aplicación

$$\mathcal{C}^E:\mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_G E_0\ni[p,e]\longmapsto p(e)\in E$$

mapea $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_G E_0\big)$ en una única distribución horizontal $\mathrm{Hor}(E)$ en $E$ de modo que $\mathcal{C}^E$ preserva conexión. Más explícitamente, $\mathrm{Hor}(E)$ es definida por:

$$\mathrm{Hor}_{p(e)}(E)=\mathrm{d}\mathcal{C}^E_{[p,e]}\big[\mathrm{Hor}_{[p,e]}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_G E_0\big)\big], \tag{1.4.27}$$

para cada $[p,e]\in\mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_G E_0$.

La distribución $\mathrm{Hor}(E)$ en el fibrado vectorial $E$ definida por la igualdad (1.4.27) se llama *conexión generalizada inducida* por $\mathrm{Hor}(\mathrm{FR}_{E_0}(E))$, ésta conexión generalizada define un operador de derivada covariante para secciones suaves (locales) del fibrado $E$, ver (1.4.2); esta operación se define como: dada $\epsilon:U\to E$ una sección local suave para $\pi$, para $x\in U$, $v\in T_xM$, la *derivada covariante* de $\epsilon$ en el punto $x$ en la dirección de $v$ con respecto a la distribución $\mathrm{Hor}(E)$ se define por:

$$\nabla_v\epsilon=\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}\big(\mathrm{d}\epsilon(x)\cdot v\big)\in\mathrm{Ver}_{\epsilon(x)}(E); \tag{1.4.28}$$

donde $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}$ denota la proyección en la componente vertical. El operador de derivada covariante $\nabla$ correspondiente a la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(E)$ es una conexión lineal en el fibrado vectorial $E$, llamada la *conexión asociada con la conexión principal* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. En efecto, emplearemos el mismo símbolo $\nabla$ para denotar indistintamente los operadores de derivada covariante inducidos por las conexiones generalizadas $\mathrm{Hor}(E)$, $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ respectivamente en el fibrado vectorial $E$ y en el fibrado asociado $\mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_G E_0$. Como $\mathcal{C}^E$ preserva conexión, empleando el Lemma 1.4.1 se tiene:

$$\nabla_v\epsilon=\mathrm{d}\mathcal{C}^E\big[\nabla_v\big((\mathcal{C}^E)^{-1}\circ\epsilon\big)\big],$$

para cada sección local $\epsilon : U \to E$ y para cada $v \in TM|_U$. Como $\mathcal{C}^E$ es una aplicación lineal en las fibras, su diferencial restricta a los espacios verticales es sólo la restricción de la aplicación $\mathcal{C}^E$ misma; por lo tanto:

$$\nabla_v \epsilon = \mathcal{C}^E\big[\nabla_v\big((\mathcal{C}^E)^{-1} \circ \epsilon\big)\big], \tag{1.4.29}$$

para cada $v \in TM|_U$ y todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E|_U)$.

Dado un $E_0$-referencial local $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ para $E$, sea $\tilde{\epsilon} : U \to E_0$ la representación la representación de la sección local $\epsilon : U \to E$ para $E$ con respecto a $s$; entonces:

$$(\mathcal{C}^E)^{-1} \circ \epsilon = \mathfrak{q} \circ (s, \tilde{\epsilon}),$$

donde $\mathfrak{q} : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0 \to \mathrm{FR}_{E_0}(E) \times_G E_0$ denota la aplicación cociente. La representación de $(\mathcal{C}^E)^{-1} \circ \epsilon$ con respecto a $s$ es tambien igual a $\tilde{\epsilon}$. Empleando la igualdad (1.4.23) se obtiene:

$$\nabla_v\big((\mathcal{C}^E)^{-1} \circ \epsilon\big) = [s(x), \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v) \cdot \tilde{\epsilon}(x)], \tag{1.4.30}$$

para cada $x \in U$ y cada $v \in T_xM$, donde $\bar{\omega} = s^*\omega$ denota el pull-back por $s$ de la forma de conexión $\omega$ asociada con $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$. Se sigue de las igualdades (1.4.29) y (1.4.30) que:

$$\nabla_v \epsilon = s(x)\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v) \cdot \tilde{\epsilon}(x)\big], \tag{1.4.31}$$

para cada $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E|_U)$, $x \in U$ y cada $v \in T_xM$. Haciendo:

$$\Gamma_x(v) = \mathcal{I}_{s(x)}\big(\bar{\omega}_x(v)\big) = s(x) \circ \bar{\omega}_x(v) \circ s(x)^{-1} \in \mathfrak{gl}(E_x), \tag{1.4.32}$$

para cada $x \in U$, $v \in T_xM$, la igualdad (1.4.31) se puede escribir como:

$$\nabla_v \epsilon = \mathrm{d}\mathrm{I}^s_v \epsilon + \Gamma_x(v) \cdot \epsilon(x).$$

Luego $\nabla$ es una conexión en el fibrado vectorial $E$ y que su tensor de Christoffel $\Gamma$ con respecto al $E_0$-referencial $s$ es dado por (1.4.32).

Recíprocamente, si es dada una conexión lineal $\nabla$ en el fibrado vectorial $E$, existe una única conexión principal $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ tal que $\nabla$ es el operador de derivada covariante de la conexión generalizada $\mathrm{Hor}(E)$ en $E$ inducida por $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$.

Lo tratado antes establece una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de las conexiones principales en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y el conjunto de las conexiones generalizadas en $E$ cuyos operadores de derivada covariante son conexiones lineales en $E$; en particular, hay una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de las conexiones principales en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y el conjunto de las conexiones lineales en $E$.

Con base en la correspondencia anterior, existe una relación entre la forma de curvatura asociada a la conexión principal $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ y el tensor de curvatura de la conexión lineal $\nabla$ en $E$ correspondiente. Tal relación se describe por la identidad:

$$p \circ \Omega_p(\zeta_1, \zeta_2) \circ p^{-1} = R_x\big(\mathrm{d}\Pi_p(\zeta_1), \mathrm{d}\Pi_p(\zeta_2)\big) \in \mathrm{Lin}(E_x), \tag{1.4.33}$$

para cada $x \in M$, $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$, $\zeta_1, \zeta_2 \in T_p\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Igualmente, si $\iota : TM \to E$ es un morfismo de fibrados vectoriales y $\Theta^\iota$ denota la forma de $\iota$-torsión en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$, entonces el tensor de torsión de la conexión $\nabla$ y la forma $\iota$-canónica de la conexión principal correspondiente son relacionados por la identidad:

$$p\big(\Theta^{\iota}_p(\zeta_1,\zeta_2)\big) = T_x\big(\mathrm{d}\Pi_p(\zeta_1), \mathrm{d}\Pi_p(\zeta_2)\big) \in E_x, \tag{1.4.34}$$

para cada $x \in M$, $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$, $\zeta_1, \zeta_2 \in T_p\mathrm{FR}_{E_0}(E)$.

Al establecer la correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de las conexiones principales en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y el conjunto de las conexiones generalizadas en $E$ cuyos operadores de derivada covariante son conexiones lineales en $E$ empleamos el hecho estipulado en el Lema (1.4.1) referente a los morfismo de fibrados vectoriales que preservan conexiones generalizadas y operadores de derivada covariante asociados a ésta; presentamos a seguir la versión de este resultado para conexiones lineales.

**Lema 1.4.5.** *Sean $E$, $E'$ fibrados vectoriales dotados de conexiones $\nabla$ y $\nabla'$, respectivamente. Sea $L : E \to E'$ un morfismo de fibrados vectoriales. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(a)* $L$ *preserva conexión;*

*(b)* $\nabla'_v(L \circ \epsilon) = L(\nabla_v \epsilon)$, *para cada* $v \in TM$ *y cada* $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$.

*Además, si $E$ y $E'$ la misma fibra típica $E_0$ y si $L$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales, (a), (b) son también equivalentes con:*

*(c) el morfismo de fibrados principales $L_* : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \to \mathrm{FR}_{E_0}(E')$ preserva conexión, donde $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y $\mathrm{FR}_{E_0}(E')$ están dotados con las únicas conexiones principales que inducen las conexiones lineales $\nabla$ y $\nabla'$, respectivamente.*

### 1.4.5. Pull-back de conexiones

Sean $\Pi : P \to M$ un fibrado $G$-principal sobre una variedad suave $M$ y sea $f : M' \to M$ una función suave definida en una variedad suave $M'$. Veamos que una conexión principal $\mathrm{Hor}(P)$ en $P$ induce una conexión principal en el pull-back $f^*P$. A saber, denote por $\bar{f} : f^*P \to P$ la aplicación canónica del pull-back $f^*P$. Si $\omega$ es una forma de conexión en $P$, observe que para cada $y \in M'$, la restricción de $\bar{f}$ a la fibra $(f^*P)_y = P_{f(y)}$ es sólo la aplicación identidad en $P_{f(y)}$. Luego para cada $p \in (f^*P)_y$ se tiene la igualdad $\mathrm{Ver}_p(f^*P) = \mathrm{Ver}_{\bar{f}(p)}(P) = \mathrm{Ver}_p(P)$. Tomando $\zeta \in \mathrm{Ver}_p(f^*P)$, se puede calcular: $(\bar{f}^*\omega)_p(\zeta) = \omega_{\bar{f}(p)}(\zeta) = \omega_p(\zeta)$; consecuentemente, la identidad (1.4.11) implica que:

$$(\bar{f}^*\omega)_p|_{\mathrm{Ver}_p(f^*P)} = \big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1}, \tag{1.4.35}$$

para cada $p \in f^*P$. Para cada $g \in G$, denote por $\gamma^P_g : P \to P$ y por $\gamma^{f^*P}_g : f^*P \to f^*P$ respectivamente las funciones dadas por la acción de $g$ en $P$ y por la acción de $g$ en $f^*P$. Claramente, $\gamma^P_g \circ \bar{f} = \bar{f} \circ \gamma^{f^*P}_g$, para cada $g \in G$. Calculando:

$$\begin{aligned}(\gamma^{f^*P}_g)^*(\bar{f}^*\omega) = \big(\bar{f} \circ \gamma^{f^*P}_g\big)^*\omega = (\gamma^P_g \circ \bar{f})^*\omega = \bar{f}^*\big((\gamma^P_g)^*\omega\big)\\ = \bar{f}^*(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ (\bar{f}^*\omega).\end{aligned}$$

El cálculo anterior en conjunción con la identidad (1.4.35) permiten concluir que la 1-forma $\bar{f}^*\omega$ es una forma de conexión en $f^*P$.

La correspondencia 1-1 entre formas de conexión y conexiones principales en fibrados principales, permite con base en la notación y terminología anterior, realizar la siguiente definición: Dada una conexión proncipal $\mathrm{Hor}(P)$ en el fibrado $P$, se define el *pull-back* de la conexión $\mathrm{Hor}(P)$ por $f$ como siendo la conexión $\mathrm{Hor}(f^*P)$ en $f^*P$ correspondiente a la forma de conexión $\bar{f}^*\omega$, en donde $\omega$ es la forma de conexión en $P$ correspondiente a $\mathrm{Hor}(P)$.

Análogo al caso de conexiones en fibrados principales, es posible realizar el pull-back de conexiones lineales en fibrados vectoriales. Dado un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ con fibra típica $E_0$, sea $f : M' \to M$ una aplicación suave definida en una variedad suave $M'$. Dada una conexión lineal $\nabla$ en $E$, el *pull-back* de $\nabla$ por $f$ es una conexión $f^*\nabla$ en el fibrado vectorial $f^*E$ definida como sigue: sea $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ la conexión principal en el fibrado de los $E_0$-referenciales de $E$ asociada con $\nabla$, considere el pull-back $\mathrm{Hor}\big(f^*\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ de la conexión $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ por $f$. Identificando los fibrados principales $f^*\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y $\mathrm{FR}_{E_0}(f^*E)$, se tiene que $\mathrm{Hor}\big(f^*\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ es una conexión principal en $\mathrm{FR}_{E_0}(f^*E)$; la conexión $f^*\nabla$ en $f^*E$ es la conexión asociada con $\mathrm{Hor}\big(f^*\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$. Esta definición muy poco dice sobre la caracterización computacional de la conexión $f^*\nabla$ en lo que sigue caracterizamos ésta desde un punto de vista más útil para nuestros cálculos.

La conexión lineal $f^*\nabla$ define una distribución horizontal $\mathrm{Hor}(f^*E)$ en $f^*E$. Las distribuciones horizontales $\mathrm{Hor}(f^*E)$ y $\mathrm{Hor}(E)$ se relacionan como sigue: Si $\bar{f} : f^*E \to E$ denota la aplicación canónica del pull-back entonces:

$$\mathrm{Hor}_e(f^*E) = \mathrm{d}\bar{f}_e^{-1}\big(\mathrm{Hor}_{\bar{f}(e)}(E)\big), \tag{1.4.36}$$

para cada $e \in f^*E$. Luego dada una sección local suave $\epsilon : U' \to E$ para $E$ a lo largo de $f$ definida en un subconjunto abierto $U'$ de $M'$, sea $\bar{\epsilon} : U' \to f^*E$ la sección local suave para $f^*E$ tal que $\epsilon = \bar{f} \circ \bar{\epsilon}$ (recuerde el diagrama (1.2.8)). Entonces, para cada $y \in U'$, $v \in T_yM'$, se tiene:

$$(f^*\nabla)_v\,\bar{\epsilon} = \mathfrak{p}_{ver}\big(\mathrm{d}\epsilon(y)\cdot v\big) \in E_{f(y)},$$

donde $\mathfrak{p}_{ver} : TE \to \mathrm{Ver}(E)$ denota la proyección vertical determinada por la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(E)$. En efecto, sea $\mathfrak{p}^f_{ver} : T(f^*E) \to \mathrm{Ver}(f^*E)$ la proyección vertical determinada por la distribución horizontal $\mathrm{Hor}(f^*E)$. Luego de la identidad (1.4.28) :

$$(f^*\nabla)_v\,\bar{\epsilon} = \mathfrak{p}^f_{ver}\big(\mathrm{d}\bar{\epsilon}(y)\cdot v\big).$$

la identidad (1.4.36) implica:

$$\mathrm{d}\bar{f} \circ \mathfrak{p}^f_{ver} = \mathfrak{p}_{ver} \circ \mathrm{d}\bar{f}.$$

La conclusión se sigue observando que para cada $e \in (f^*E)_y \cong E_{f(y)}$, la restricción al espacio $\mathrm{Ver}_e(f^*E) \cong E_{f(y)}$ de $\mathrm{d}\bar{f}_e$ es sólo la aplicación identidad de $E_{f(y)}$.

Motivados por lo anterior, dada una sección local suave $\epsilon : U' \to E$ para $E$ a lo largo de $f$ sobre un conjunto abierto $U'$ de $M'$, hacemos:

$$\nabla_v\epsilon = \mathfrak{p}_{ver}\big(\mathrm{d}\epsilon(y)\cdot v\big) \in E_{f(y)},$$

para cada $y \in U'$, $v \in T_yM'$, donde $\mathfrak{p}_{ver} : TE \to \mathrm{Ver}(E)$ denota la proyección vertical determinada por la distribución horizontal definida por $\nabla$. De este modo, si $\bar{\epsilon} : U' \to f^*E$ es una sección local suave para $f^*E$ tal que $\bar{f} \circ \bar{\epsilon} = \epsilon$ entonces:

$$\nabla_v \epsilon = (f^*\nabla)_v \, \bar{\epsilon}, \tag{1.4.37}$$

para cada $v \in TM'|_{U'}$.

Por otro lado, dada una sección local suave $\epsilon : U \to E$ para $E$ definida en un conjunto abierto $U$ de $M$, considerando la sección local suave $\epsilon \circ f : f^{-1}(U) \to E$ para $E$ a lo largo de $f$. Entonces para cada $y \in f^{-1}(U)$ y cada $v \in T_yM$, se tiene:

$$\nabla_v(\epsilon \circ f) = \nabla_{\mathrm{d}f_y(v)}\epsilon.$$

En efecto

$$\nabla_v(\epsilon \circ f) = \mathfrak{p}_{ver}\big(\mathrm{d}(\epsilon \circ f)(y) \cdot v\big) = \mathfrak{p}_{ver}\Big(\mathrm{d}\epsilon\big(f(y)\big) \cdot \big(\mathrm{d}f_y(v)\big)\Big) = \nabla_{\mathrm{d}f_y(v)}\epsilon.$$

Lo anterior significa que si $\epsilon : U \to E$ es una sección suave para $E$ y si $\bar{\epsilon} : f^{-1}(U) \to f^*E$ es la sección local suave para $f^*E$ tal que $\bar{f} \circ \bar{\epsilon} = \epsilon \circ f$ entonces:

$$(f^*\nabla)_v \, \bar{\epsilon} = \nabla_{\mathrm{d}f_y(v)}\epsilon,$$

para cada $y \in f^{-1}(U)$ y cada $v \in T_yM'$. Esta propiedad completa la caracterización de la conexión lineal $f^*\nabla$.

## 1.5. Torsión interna

Sean $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica $E_0$ dotado de una conexión lineal $\nabla$, $G$ un subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(E_0)$ y $P \subset \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ una $G$-estructura sobre $E$. Sea $\mathrm{Hor}$ la conexión principal en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ asociada con la conexión lineal $\nabla$. Puede suceder que la distribución $\mathrm{Hor}$ sea tangente al subfibrado principal $P$ en este caso y sólo en este caso su restricción a dicho fibrado produce una conexión principal en el mismo, y en este caso se dice que la conexión principal $\mathrm{Hor}$ es *compatible* con la $G$-estructura. Estudiemos el caso general, sea $\omega$ la forma de conexión asociada con $\mathrm{Hor}$. Para cada $x \in M$ y cada $p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$, la aplicación

$$(\mathrm{d}\Pi_p, \omega_p) : T_p\mathrm{FR}_{E_0}(E) \ni \zeta \xrightarrow{\cong} \big(\mathrm{d}\Pi_p(\zeta), \omega_p(\zeta)\big) \in T_xM \oplus \mathfrak{gl}(E_0) \tag{1.5.1}$$

es un isomorfimo; a saber tenemos una descomposición en suma directa

$$T_p\mathrm{FR}_{E_0}(E) = \mathrm{Hor}_p(\mathrm{FR}_{E_0}(E)) \oplus \mathrm{Ver}_p(\mathrm{FR}_{E_0}(E)).$$

La aplicación $\mathrm{d}\Pi_p$ mapea $\mathrm{Hor}_p(\mathrm{FR}_{E_0}(E))$ isomorficamente sobre $T_xM$ y la aplicación $\omega_p$ mapea el espacio $\mathrm{Ver}_p(\mathrm{FR}_{E_0}(E))$ isomorficamente sobre $\mathfrak{gl}(E_0)$. Si la conexión $\mathrm{Hor}$ es compatible con $P$ entonces, para cada $p \in P_x$, el espacio $T_pP$ corresponde via (1.5.1) al espacio $T_xM \oplus \mathfrak{g}$. En el caso general, debemos definir un campo tensorial llamado *torsión intena* el cual mide el grado de compatibilidad de la conexión $\mathrm{Hor}$ con $P$. La definición de tal tensor se justifica en el siguiente resultado cuya prueba sigue técnicas del álgebra lineal y puede ser consultada en [12].

**Lema 1.5.1.** *Con la notación y terminología anterior, dados $x \in M$, $p \in P_x$, existe una única aplicación lineal $L : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g}$ tal que la imagen del espacio $T_pP$ bajo el isomorfismo* (1.5.1) *es igual a:*

$$\big\{(v, X) \in T_xM \oplus \mathfrak{gl}(E_0) : L(v) = X + \mathfrak{g}\big\}.$$

*Ademas, si $s : U \to P$ es una sección local suave de $P$ con $s(x) = p$ y $\bar{\omega} = s^*\omega$ es la representación de la forma de conexión $\omega$ con respecto a $s$, entonces $L$ es dado por la composición de $\bar{\omega}_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_0)$ con la aplicación cociente canónica $\mathfrak{gl}(E_0) \to \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g}$.*

**Observación 1.5.1.** *Sigue del Lema 1.5.1 en particular que, a pesar de que la aplicación lineal $\bar{\omega}_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_0)$ depende de la elección de la sección $s$ para $Q$ con $s(x) = p$, la composición $T_xM \xrightarrow{\bar{\omega}_x} \mathfrak{gl}(E_0) \to \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g}$ sólo depende en la elección de $p \in P_x$.*

Para $p \in P_x$, la aplicación $\mathcal{I}_p : \mathrm{GL}(E_0) \to \mathrm{GL}(E_x)$ denota el isomorfismo de grupos de Lie definido por la conjugación con $p$. Más precisamente $\mathcal{I}_p(T) = p \circ T \circ p^{-1}$ para todo $T \in \mathrm{GL}(E_0)$; además $\mathrm{Ad}_p$ denota la diferencial de este isomorfismo de grupos en el elemento identidad, es decir, $\mathrm{Ad}_p := \mathrm{d}(\mathcal{I}_p)(1) : \mathfrak{gl}(E_0) \to \mathfrak{gl}(E_x)$. Además, para cualquier $x \in M$, $G_x$ denota el subgrupo de $\mathrm{GL}(E_x)$ que consiste de todas las funciones que preservan la $G$-estructura. Claramente, $G_x = \mathcal{I}_p(G)$, así que $G_x$ es un subgrupo de Lie $\mathrm{GL}(E_x)$. Note que $\mathrm{Ad}_p$ mapea $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}_x$, donde $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(E_0)$ y $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{gl}(E_x)$ denotan las álgebras de Lie de $G_x$ y $G$ respectivamente. Por lo tanto $\mathrm{Ad}_p$ induce un isomorfismos en el cociente $\overline{\mathrm{Ad}}_p : \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$.

Asumiendo que $s : U \subset M \to P$ es una sección admisible de $P$ alrededor del punto $x \in M$ y $s(x) = p$, se concluye [12] que la función:

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "\overline{\omega}_x"] \arrow[rrr, bend right, dotted, "\mathfrak{I}_x^P"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}) \arrow[r, "\mathfrak{q}"] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{n})/\mathfrak{g} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ad}}_p"] & \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x \end{tikzcd} \tag{1.5.2}$$

no depende de la sección local $s$. Donde $\omega$ denota la forma de conexión $\mathfrak{gl}(E_0)$-valuada sobre $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y $\overline{\omega} = s^*\omega$. La función lineal $\mathfrak{I}_x^P$ definida por (1.5.2) es llamada la *torsión interna* de la $G$-estructura $P$ en el punto $x \in M$ con respecto a la conexión $\mathrm{Hor}$. Como se puede observar en (1.5.1) la composición $\bar{\omega}_x$ con la aplicación cociente $\mathfrak{gl}(E_0) \to \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g}$ depende sólo de $p$; en particular, $\mathfrak{I}_x^P$ depende sólo de $p$. Sean $p, p' \in P_x$ puntos fijos tales que $p' = p \cdot g$, con $g \in G$. Denote por $\gamma_g$ el difeomorfismo dado por la acción de $g$ en $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ y considere la sección local $s' = \gamma_g \circ s : U \to P$ para $P$; obviamente, $s'(x) = p'$. Haciendo $\bar{\omega}' = s'^*\omega$ entonces sigue de (1.4.9) que $\bar{\omega}' = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \bar{\omega}$. Además se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{gl}(E_0) \arrow[r, "\text{cociente}"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_{g^{-1}}"] & \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \arrow[d, "\overline{\mathrm{Ad}}_{g^{-1}}"] \\ T_xM \arrow[ur, "\bar{\omega}_x"] \arrow[dr, "\bar{\omega}'_x"'] & & \\ & \mathfrak{gl}(E_0) \arrow[r, "\text{cociente}"'] & \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

Esto muestra la independencia en el punto $p$ en la definición de la aplicación dada por (1.5.2).

**Observación 1.5.2.** *Se sigue del Lemma 1.5.1 y de la definición de $\mathfrak{I}_x^P$ que la imagen de $T_pP$ bajo el isomorfismo* (1.5.1) *es el subespacio de $T_xM \oplus \mathfrak{gl}(E_0)$ dado por:*

$$\big\{(v, X) \in T_xM \oplus \mathfrak{gl}(E_0) : \big((\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}_x^Q\big)(v) = X + \mathfrak{g}\big\}.$$

Sea ahora $E$ un fibrado vectorial sobre $M$ con fibra típica $\mathbb{R}^k$. Sea $g$ una métrica semi-riemanniana sobre $E$ de índice $r$; denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$, el producto estándar de Minkowski de índice $r$ en $\mathbb{R}^k$. Entonces $P = \mathrm{FR}^o(E)$ es una $G$-estructura sobre $E$, donde $G$ es el subgrupo de Lie $\mathrm{O}_r(k)$ consistente de todas las isométrias del espacio $(\mathbb{R}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle_r)$. Sea $x \in M$ fijo, entonces $G_x = \mathrm{O}(g_x)$ es el grupo lineal de isométrias de $(E_x, g_x)$ y $\mathfrak{g}_x$ es el álgebra de Lie de endomorfismos lineales $g_x$-antisimétricos $T$ de $E_x$. Se identifica el cociente $\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$ con $E_x$ via la función:

$$\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x \ni T + \mathfrak{g}_x \longmapsto \frac{1}{2}(T + T^*) \in \mathrm{Sym}(E_x),$$

Así que $\mathfrak{I}_x^P$ es identificado con la función lineal de $T_xM$ a valores en $\mathrm{Sym}(E_x)$. Sea $s : U \to P$ una sección local con $x \in U$ y sean $e, e' \in E_x$ fijos. Considere las secciones $\eta, \eta' : U \to E$ definidas por:

$$\eta(y) = (s(y) \circ s(x)^{-1}) \cdot e,$$

$$\eta'(y) = (s(y) \circ s(x)^{-1}) \cdot e',$$

para todo $y \in U$, donde $s$ es una sección local. Entonces, para todo $v \in E_x$, $\mathrm{dI}_v^s\, \eta = 0$ y $\mathrm{dI}_v^s\, \eta' = 0$, con lo cual se sigue de (1.4.26):

$$\nabla_v \eta = \Gamma_x(v) \cdot \eta(x),$$

$$\nabla_v \eta' = \Gamma_x(v) \cdot \eta'(x).$$

Dado que para todo $y \in U$ el referencial $s(y) : (\mathbb{R}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle_r) \to (E_y, g_y)$ es una isometría lineal, se tiene que:

$$g_y\left(\eta(y), \eta'(y)\right) = \langle s(x)^{-1} \cdot e, s(x)^{-1} \cdot e'\rangle_r,$$

con lo cual se muestra que $g(\eta, \eta')$ es una función constante. Por lo tanto, para todo $v \in E_x$ :

$$\begin{aligned} 0 = v(g(\eta, \eta')) &= (\nabla_v g)(e, e') + g_x(\nabla_v \eta, e') + g_x(e, \nabla_v \eta') \\ &= (\nabla_v g)(e, e') + g_x(\Gamma_x(v) \cdot e, e') + g_x(e, \Gamma_x(v) \cdot e') \end{aligned}$$

Luego,

$$g_x[(\Gamma_x(v) + \Gamma_x(v)^*) \cdot e, e'] = -(\nabla_v g)(e, e'),$$

donde $\Gamma_x(v)^*$ es el adjunto con respecto a $g_x$ y por lo tanto

$$g_x(\mathfrak{I}_x^P(v), \cdot) = \frac{1}{2}{}_x[(\Gamma_x(v) + \Gamma_x(v)^*)\cdot, \cdot] = -\frac{1}{2}\nabla_v g,$$

para cada $x \in M, v \in T_xM$. Así, identificando $\nabla_v g : E_x \times E_x \to \mathbb{R}$ con un endomorfismo de $E_x$, se obtiene:

$$\mathfrak{I}_x^P(v) = -\frac{1}{2}\nabla_v g.$$

Es decir, la torsión interna de $P$ es esencialmente la derivada covariante de la métrica semi-riemanniana $g$. En particular, $\mathfrak{I}_x^P = 0$ si y solo si, $\nabla g = 0$, es decir si la conexión lineal $\nabla$ es compatible con la métrica semi-riemanniana $g$.

Más ejemplos para el cálculo de la torsión interna en situaciones más generales aparecen en [12]. Siempre que se tenga una variedad riemanniana $(M, g)$, esta puede ser dotada de una única conexión lineal $\nabla$, la cual es compatible con la métrica riemanniana $g$ y cuyo tensor de torsión es nulo. Tal conexión es llamada la *conexión de Levi- Civita*.

**Observación 1.5.3.** *Sea $M$ una variedad suave $n$-dimensional dotada de una conexión lineal $\nabla$, sea $G$ un subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ y sea $P \subset \mathrm{FR}(TM)$ una $G$-estructura en $TM$. Sea $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}(TM)\big)$ la conexión en $\mathrm{FR}(TM)$ asociada con $\nabla$ y sea $\omega$ la correspondiente 1-forma de conexión. Dados $x \in M$, $p \in P_x$, tenemos un isomorfismo lineal*

$$(\mathrm{d}\Pi_p, \omega_p) : T_p\mathrm{FR}(TM) \longrightarrow T_xM \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n) \tag{1.5.3}$$

*como en* (1.5.1). *En la observación 1.5.2 se vio que la imagen de $T_pP$ bajo el isomorfismo* (1.5.3) *es igual a:*

$$\big\{(v, X) \in T_xM \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n) : \big((\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}_x^P\big)(v) = X + \mathfrak{g}\big\}.$$

*Como $p$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $T_xM$, componiendo* (1.5.3) *con $p^{-1} \oplus \mathrm{Id}$ se obtiene otro isomorfismo lineal:*

$$(\theta_p, \omega_p) : T_p\mathrm{FR}(TM) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n). \tag{1.5.4}$$

*La imagen de $T_pP$ bajo* (1.5.4) *es obviamente igual a*

$$\big\{(u, X) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n) : \big((\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}_x^P \circ p\big)(u) = X + \mathfrak{g}\big\}.$$

# Capítulo 2

# Teoremas sobre inmersiones

Este capítulo se estudia la existencia de inmersiones afines preservando $G$-estructuras entre variedades afines, haciendo énfasis en el caso de inmersiones de la geometría riemanniana y semi-riemanniana, es bien sabido que dada una inmersión las ecuaciones clásicas de Gauss, Codazzi y Ricci relacionan el tensor de curvatura de la variedad ambiente con el tensor de curvatura de la subvariedad y el tensor de curvatura del fibrado normal con la segunda forma fundamental de la inmersión. Un resultado bien conocido afirma que tales ecuaciones son condiciones necesarias para la existencia de una inmersión isométrica, cabe observar que, a menos que la inmersión isométrica sea dada, las ecuaciones no pueden en general escribirse. Sin embargo cuando la variedad ambiente es *suficientemente homogénea* (o, más precisamente, infinitesimalmente homogénea en el sentido que se definirá a continuación), las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci tienen sentido a priori y se tornan en condiciones necesarias para la existencia de una inmersión isométrica. Las condiciones suficientes para la existencia de una inmersión isométrica se basan en supuestos adicionales dependiendo del contexto. El punto de partida del teorema que mostramos en este capítulo es precisamente la interpretación de tales hipótesis adicionales en términos de $G$-estructuras y su correspondiente torsión interna, conceptos que han sido presentados en el capítulo anterior.

## 2.1. Teorema de Frobenius

Sean $M$ una variedad suave y $\mathcal{D} \subset TM$ una distribución suave en $M$. Por una *subvariedad integral* para $\mathcal{D}$ se entiende por una subvariedad inmersa $S \subset M$ para la cual $T_xS = \mathcal{D}_x$, para cada $x \in S$. Decimos que $\mathcal{D}$ es *integrable* si dado $x \in M$, existe una subvariedad integral $S$ para $\mathcal{D}$ con $x \in S$. La distribución $\mathcal{D} \subset TM$ es llamada *involutiva* si para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{D})$ se tiene $[X, Y] \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{D})$. El siguiente resulta es se demuestra en [14].

**Teorema 2.1.1** (Frobenius)**.** *Sea $M$ una variedad suave. Una distribución suave $\mathcal{D} \subset TM$ en $M$ es involutiva si, y solamente si, es integrable.*

El Teorema de Frobenius garantiza la existencia de soluciones para cierta clase de ecuaciones diferenciales de primer orden, informalmente hablando, ecuaciones de la forma $\mathrm{d}f_x = F\big(x, f(x)\big)$. La correspondencia entre las soluciones de este tipo de ecuaciones y los elementos que aparecen en el enunciado del teorema se establece de la siguiente forma: Si $f$ es una solución para una ecuación del tipo $\mathrm{d}f_x = F\big(x, f(x)\big)$ su gráfico es una subvariedad integral de una distribución apropiada.

El caso que nos interesa es cuando se tiene dos variedades suaves $M$, $N$ y un espacio vectorial $V$ real finito-dimensional $V$. Suponga que se tienen 1-formas $\lambda^M$, $\lambda^N$ en $M$ y en $N$ respectivamente con valores en $V$; además suponga que para cada $y \in N$ la aplicación $\lambda^N_y : T_yN \to V$ es un isomorfismo. Estamos interesados en encontrar una aplicación suave $f : U \to N$ definida en un conjunto abierto $U \subset M$ tal que

$$f^*\lambda^N = \lambda^M|_U. \tag{2.1.1}$$

Note que (2.1.1) es equivalente a:

$$\mathrm{d}f(x) = \tau_{xf(x)}, \quad x \in U,$$

donde, para $x \in M$, $y \in N$, $\tau_{xy} : T_xM \to T_yN$ denota la aplicación lineal definida por:

$$\tau_{xy} = (\lambda^N_y)^{-1} \circ \lambda^M_x. \tag{2.1.2}$$

Considere la distribución suave $\mathcal{D}$ en $M \times N$ definida por:

$$\mathcal{D}_{(x,y)} = \mathrm{Gr}(\tau_{xy}) \subset T_xM \oplus T_yN \cong T_{(x,y)}(M \times N), \tag{2.1.3}$$

para cada $x \in M$, $y \in N$. Donde $\mathrm{Gr}(\tau_{xy})$ es el gráfico de $\tau_{xy}$. Es claro que una función suave $f : U \to N$ definida en un subconjunto abierto $U$ de $M$ satisface (2.1.1) si, y solamente si, el gráfico de $f$ es una subvariedad integral para $\mathcal{D}$. Por lo tanto, la existencia de la aplicación $f$ satisfaciendo (2.1.1) puede ser obtenida como una aplicación del Teorema de Frobenius. Más específicamente, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.1.2.** *Sean $M$, $N$ variedades suaves y sea $V$ un espacio vectorial real finito-dimensional. Suponga que se tienen 1-formas suaves $\lambda^M$, $\lambda^N$ en $M$ y $N$ respectivamente a valores en $V$; tales que $\lambda^N_y : T_yN \to V$ es un isomorfismo, para cada $y \in N$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(a) para cada $x \in M$, $y \in N$ existe una aplicación suave $f : U \to N$ definida en una vecindad abierta $U$ de $x$ en $M$ con $f(x) = y$ tal que* (2.1.1) *se cumple;*

*(b) para cada $x \in M$, $y \in N$, $\tau^*_{xy}\mathrm{d}\lambda^N_y = \mathrm{d}\lambda^M_x$, donde $\tau_{xy} : T_xM \to T_yN$ es la aplicación lineal definida en* (2.1.2)*.*

*Demostración.* Considerando la diferencial exterior en ambos lados de la igualdad (2.1.1) se obtiene que (a) implica (b). Suponiendo (b), considere la 1-forma suave $\theta$ en $M \times N$ definida por:

$$\theta = \mathrm{pr}_2^*\lambda^N - \mathrm{pr}_1^*\lambda^M,$$

donde $\mathrm{pr}_1$, $\mathrm{pr}_2$ denotan las proyecciones del producto cartesiano $M \times N$. Claramente, para cada $(x, y) \in M \times N$, $\theta_{(x,y)} : T_xM \oplus T_yN \to V$ es una aplicación sobreyectiva y su kernel es precisamente (2.1.3).

Se sigue a partir de la fórmula de Cartan para derivada exterior que la distribución $\mathcal{D}$ es involutiva si, y solamente si, $\mathrm{d}\theta_{(x,y)}$ es cero en $\mathcal{D}_{(x,y)} \times \mathcal{D}_{(x,y)}$, para cada $(x, y) \in M \times N$; pero es claro que esta condición es equivalente a (b). Para concluir la prueba, sean $x \in M$, $y \in N$ fijos y sea $S \subset M \times N$ una subvariedad integral para $\mathcal{D}$ con $(x, y) \in S$. Dado que la primera proyección $T_xM \oplus T_yN \to T_xM$ mapea $\mathcal{D}_{(x,y)}$ isomorficamente sobre $T_xM$, tomando $S$ lo suficientemente pequeño, es posible asumir que la función $\mathrm{pr}_1|_S : S \to M$ es un difeomorfismo suave sobre un conjunto abierto $U$ de $x$ en $M$. La aplicación $f : U \to N$ definida por:

$$f = \mathrm{pr}_2 \circ (\mathrm{pr}_1|_S)^{-1} \tag{2.1.4}$$

es por lo tanto suave y su gráfico es igual a $S$. De este modo, $f$ satisface (2.1.1). □

**Observación 2.1.1.** *Un caso particularmente interesante del teorema anterior sucede cuando se tiene que $N$ es un grupo de Lie y $\lambda^N$ denota la forma de Maurer-Cartan para $N$. En este caso, si $\lambda^M$ es una $1$-foma suave definida en una variedad suave $M$ con valores en el álgebra de Lie del grupo $N$. La condición $(b)$ del enunciado equivale a decir que $\lambda^M$ satisface la ecuación de Maurer-Cartan; más específicamente* $\mathrm{d}\lambda^M = -\frac{1}{2}\lambda^M \wedge \lambda^M$.

## 2.2. Inmersiones afines

### 2.2.1. Componentes de una conexión lineal

La siguiente construcción general nos brinda un lenguaje conveniente para el estudio de las inmersiones afines. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial sobre una variedad suave $M$, sean $E^1$, $E^2$ subfibrados vectoriales de $E$ tales que $E = E^1 \oplus E^2$; denotemos por $\mathrm{pr}_1 : E \to E^1$, $\mathrm{pr}_2 : E \to E^2$ las correspondientes proyecciones. Dada una conexión $\nabla$ en $E$, hacemos:

$$\begin{aligned} \nabla^1_X e_1 &= \mathrm{pr}_1 \circ \nabla_X e_1 \in \mathbf{\Gamma}(E^1), \\ \nabla^2_X e_2 &= \mathrm{pr}_2 \circ \nabla_X e_2 \in \mathbf{\Gamma}(E^2), \\ \alpha^1(X, e_2) &= \mathrm{pr}_1 \circ \nabla_X e_2 \in \mathbf{\Gamma}(E^1), \\ \alpha^2(X, e_1) &= \mathrm{pr}_2 \circ \nabla_X e_1 \in \mathbf{\Gamma}(E^2), \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, y cada $e_1 \in \mathbf{\Gamma}(E^1)$, $e_2 \in \mathbf{\Gamma}(E^2)$. Claramente $\nabla^1$ y $\nabla^2$ definen conexiones lineales en los fibrados vectoriales $E^1$, $E^2$, respectivamente. Además, $\alpha^1$, $\alpha^2$ son aplicaciones $C^\infty(M)$-bilineales, luego, pueden ser identificadas con secciones suaves:

$$\alpha^1 \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}(TM, E^2; E^1)\big), \quad \alpha^2 \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}(TM, E^1; E^2)\big).$$

Las aplicaciones $\nabla^1$, $\nabla^2$, $\alpha^1$, $\alpha^2$ definidas en (2.2.1) son llamadas colectivamente las *componentes* de la conexión $\nabla$ relativas a la descomposición en suma directa $E = E^1 \oplus E^2$. Recíprocamente, dadas conexiones $\nabla^1$, $\nabla^2$ en $E^1$ y $E^2$ respectivamente y dadas secciones suaves $\alpha^1 \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}(TM, E^2; E^1)\big)$, $\alpha^2 \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}(TM, E^1; E^2)\big)$ entonces hacemos:

$$\nabla_X \epsilon = \nabla^1_X(\mathrm{pr}_1(\epsilon)) + \alpha^1(X, (\mathrm{pr}_2(\epsilon))) + \nabla^2_X(\mathrm{pr}_2(\epsilon)) + \alpha^2(X, (\mathrm{pr}_1(\epsilon))), \tag{2.2.2}$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y cada $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$. Claramente $\nabla$ define una única conexión en $E$ cuyas componentes son $\nabla^1$, $\nabla^2$, $\alpha^1$ y $\alpha^2$.

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial dotado de una estructura semi-riemanniana $g \in \mathbf{\Gamma}\big(\mathrm{Lin}_2^{\mathrm{sym}}(E;\mathbb{R})\big)$. Una conexión $\nabla$ en $E$ es llamada *compatible* con $g$ cuando $\nabla g = 0$. Esta condición equivale a la siguiente identidad

$$X\big(g(e_1,e_2)\big) = g(\nabla_X e_1, e_2) + g(e_1, \nabla_X e_2), \tag{2.2.3}$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y cada $e_1, e_2 \in \mathbf{\Gamma}(E)$. Luego si $g$ es una estructura Riemanniana en $E$ y se tiene una descomposición en suma directa $g$-ortogonal $E = E^1 \oplus E^2$, entonces para cada $i = 1, 2$, la restricción de $g$ al fibrado vectorial $E^i$ induce una estructura riemanniana en el fibrado $E^i$. Además, si $\nabla$ es una conexión lineal en $E$ y $\nabla^1$, $\nabla^2$, $\alpha^1$ y $\alpha^2$ denotan sus componentes relativas a la descomposición $g$-ortogonal $E = E^1 \oplus E^2$, entonces $\nabla$ es compatible con $g$ si, y solamente si, la conexión $\nabla^i$ es compatible con la métrica $g^i = g\,|_{E^i \times E^i}$, para $i = 1, 2$; las aplicaciones $\alpha^1, \alpha^2$ son relacionadas por la identidad:

$$g_x\big(\alpha_x^2(v, e_1), e_2\big) + g_x\big(e_1, \alpha_x^1(v, e_2)\big) = 0, \tag{2.2.4}$$

para cada $x \in M$, $v \in T_xM$, $e_1 \in E_x^1$, $e_2 \in E_x^2$. La condición (2.2.4) permite escribir de manera única la aplicación $\alpha^1$ en términos de la aplicación $\alpha^2$ y del tensor métrico $g$; por lo tanto, si $E = E^1 \oplus E^2$ es una descomposición en suma directa $g$-ortogonal, para describir las componentes de una conexión lineal $\nabla$ en $E$ compatible con $g$, sólo es necesario especificar conexiones $\nabla^1$, $\nabla^2$ en $E^1$, $E^2$ respectívamente que sean compatibles con $g^1$, $g^2$ y una sección suave $\alpha$ del fibrado vectorial $\mathrm{Lin}(TM, E^1; E^2)$.

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial sobre una variedad suave $M$ dotado de una conexión $\nabla$, y sean $E^1$, $E^2$ subfibrados vectoriales de $E$ tales que $E = E^1 \oplus E^2$; además $\nabla^1$, $\nabla^2$, $\alpha^1$, $\alpha^2$ las componentes de $\nabla$ respecto a la descomposición $E = E^1 \oplus E^2$. Si $R$, $R^1$, $R^2$ denotan los tensores de curvatura de $\nabla$, $\nabla^1$ y $\nabla^2$ respectivamente. Un cálculo directo muestra que

$$\mathrm{pr}_1\big(R_x(v,w)e_1\big) = R_x^1(v,w)e_1 + \alpha_x^1\big(v, \alpha_x^2(w,e_1)\big) - \alpha_x^1\big(w, \alpha_x^2(v,e_1)\big), \tag{2.2.5}$$
$$\mathrm{pr}_2\big(R_x(v,w)e_2\big) = R_x^2(v,w)e_2 + \alpha_x^2\big(v, \alpha_x^1(w,e_2)\big) - \alpha_x^2\big(w, \alpha_x^1(v,e_2)\big), \tag{2.2.6}$$

para cada $x \in M$, $e_1 \in E_x^1$, $e_2 \in E_x^2$ y cada $v, w \in T_xM$. Además, dada una conexión $\nabla^M$ en $TM$ con torsión $T$ y denotando por $\nabla^{\otimes}$ la conexión inducida en $\mathrm{Lin}(TM, E^1; E^2)$ y en $\mathrm{Lin}(TM, E^2; E^1)$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_2\big(R_x(v,w)e_1\big) = (\nabla^{\otimes}\alpha^2)_x(v,w,e_1) &- (\nabla^{\otimes}\alpha^2)_x(w,v,e_1)\\ &+ \alpha_x^2\big(\mathrm{T}_x(v,w), e_1\big),\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_1\big(R_x(v,w)e_2\big) = (\nabla^{\otimes}\alpha^1)_x(v,w,e_2) &- (\nabla^{\otimes}\alpha^1)_x(w,v,e_2)\\ &+ \alpha_x^1\big(\mathrm{T}_x(v,w), e_2\big),\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

para cada $x \in M$, $e_1 \in E_x^1$, $e_2 \in E_x^2$ y cada $v, w \in T_xM$. Por otro lado, si $\iota = (\iota^1, \iota^2) : TM \to E = E^1 \oplus E^2$ es un morfismo de fibrados vectoriales, la $\iota$-torsión $T^\iota$ de $\nabla$ satisface las siguientes identidades:

$$\mathrm{pr}_1\big(T_x^\iota(v,w)\big) = T_x^{\iota^1}(v,w) + \alpha_x^1\big(v, \iota^2(w)\big) - \alpha_x^1\big(w, \iota^2(v)\big), \tag{2.2.9}$$
$$\mathrm{pr}_2\big(T_x^\iota(v,w)\big) = T_x^{\iota^2}(v,w) + \alpha_x^2\big(v, \iota^1(w)\big) - \alpha_x^2\big(w, \iota^1(v)\big), \tag{2.2.10}$$

para cada $x \in M$, $v, w \in T_xM$, donde $T^{\iota^1}$, $T^{\iota^2}$ denotan respectivamente la $\iota^1$-torsión de $\nabla^1$ y la $\iota^2$-torsión de $\nabla^2$.

### 2.2.2. Inmersiones afines y sus invariantes

Sean $(M, \nabla)$, $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ variedades afines y sea $f : M \to \overline{M}$ una inmersión suave. Identificamos la diferencial $\mathrm{d}f : TM \to T\overline{M}$ con el morfismo inyectivo de fibrados vectoriales $\overleftarrow{\mathrm{d}f} : TM \to f^*T\overline{M}$ correspondiente (recuerde el Ejemplo 1.2.1). Un subfibrado vectorial $E$ de $f^*T\overline{M}$ con $f^*T\overline{M} = \mathrm{d}f(TM) \oplus E$ es llamado *fibrado normal* para $f$. Sea $E$ un fibrado normal para $f$ fijo; denotado por $\pi^E : f^*T\overline{M} \to E$ la proyección sobre $E$ correspondiente a la descomposición $f^*T\overline{M} = \mathrm{d}f(TM) \oplus E$ y por $\pi^{TM} : f^*T\overline{M} \to TM$ la composición de la proyección sobre $\mathrm{d}f(TM)$ con el isomorfismo $\mathrm{d}f^{-1} : \mathrm{d}f(TM) \to TM$. Vamos a considerar las componentes de la conexión $f^*\overline{\nabla}$ respecto a la descomposición $f^*T\overline{M} = \mathrm{d}f(TM) \oplus E$[1]. A saber, dados $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, hacemos $\alpha(X, Y) = \pi^E\big(\overline{\nabla}_X \mathrm{d}f(Y)\big) \in \mathbf{\Gamma}(E)$, de este modo $\alpha$ es identificada con una sección suave del fibrado $\mathrm{Lin}_2(TM; E)$. Llamamos a $\alpha$ la *segunda forma fundamental* de la inmersión $f$ con respecto al fibrado normal $E$. La *conexión normal* $\nabla^\perp$ de la inmersión $f$ correspondiente al fibrado normal $E$ se define haciendo: $\nabla^\perp_X \epsilon = \pi^E(\overline{\nabla}_X \epsilon)$, para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y cada $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$. Finalmente hacemos $A(X, \epsilon) = \pi^{TM}(\overline{\nabla}_X \epsilon)$, para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ y cada $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$[2]; claramente $A$ es identificado con una sección suave del fibrado $\mathrm{Lin}(TM, E; TM)$. Llamamos $A$ la *forma de Weingarten* de la inmersión $f$ relativa a $E$ y para cada $x \in M$ y cada $e \in E_x$, el endomorfismo lineal $A(e) = A_x(\cdot, e) : T_xM \to T_xM$ es llamado el *operador de Weingarten* en la dirección de $e$.

**Observación 2.2.1.** *Note que en el caso riemanniano (o semi-riemanniano), una inmersión $f$ posee un fibrado normal canónico (el complemento ortogonal de $\mathrm{d}f(TM)$ respecto a la métrica), luego hay también una noción canónica de segunda forma fundamental. Además, si $(M, g)$, $(\overline{M}, \bar{g})$ son variedades semi-riemannianas, $\nabla$ y $\overline{\nabla}$ denotan las correspondientes conexiones de Levi-Civita, $f$ es una inmersión isométrica y $E$ es el complemento ortogonal de $\mathrm{d}f(TM)$ en $f^*T\overline{M}$ respecto a $\bar{g}$ entonces*

$$\overline{\nabla}_X \mathrm{d}f(Y) = \mathrm{d}f(\nabla_X Y) + \alpha(X, Y), \tag{2.2.11}$$

*para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$. En el caso semi-riemanniano, $\alpha$ y $\nabla^\perp$ son los únicos invariantes asociados a una inmersión isométrica, pues se sigue de* (2.2.4) *que en este caso, $\alpha$ y $A$ están relacionados por la igualdad*

$$\bar{g}_x\big(\alpha_x(v, w), e\big) = -\bar{g}_x\big(A(e) \cdot v, w\big), \quad x \in M,\ v, w \in T_xM,\ e \in E_x.$$

*Luego $A$ es determinado por $\alpha$.*

Note que la igualdad (2.2.11) tiene sentido en el caso general. Por tanto decimos que $f$ es una *inmersión afín con respecto al fibrado vectorial* $E$ si la igualdad (2.2.11) se verifica para cada $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$.

[1]Dados $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, se tiene $\overleftarrow{\mathrm{d}f}(Y) \in \mathbf{\Gamma}(f^*T\overline{M})$, luego empleando (1.4.37) se tiene $\big(f^*\overline{\nabla}\big)_X \overleftarrow{\mathrm{d}f}(Y) = \overline{\nabla}_X \mathrm{d}f(Y)$; además, si $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$, se tiene $\big(f^*\overline{\nabla}\big)_X \epsilon = \overline{\nabla}_X \epsilon$

[2]Note que con base a la descomposición $f^*T\overline{M} = \mathrm{d}f(TM) \oplus E$, se tiene que $A(X, \epsilon) = \pi^{TM}(\overline{\nabla}_X \epsilon)$ es simplemente dado por la composición $\overleftarrow{\mathrm{d}f}^{-1} \circ \pi^{\mathrm{d}f(TM)}$.

Con base en esto, diremos simplemente que una inmersión $f$ es una *inmersión afín* si existe un fibrado normal $E$ para $f$ tal que $f$ es una inmersión afín respecto a $E$. En el caso general se tienen invariantes adicionales asociados a la inmersión, los cuales presentaremos más adelante.

Deseamos estudiar la existencia de inmersiones afines con invariantes prescritos $\nabla^\perp$, $\alpha$ y $A$. Más precisamente, dadas variedades afines $(M,\nabla)$, $(\overline{M},\overline{\nabla})$, un fibrado vectorial $E^0$ sobre $M$, una conexión $\nabla^0$ en $E^0$ y $\alpha^0$, $A^0$ secciones suaves de $\mathrm{Lin}_2(TM;E^0)$ y $\mathrm{Lin}(TM,E^0;TM)$ respectivamente, estamos interesados en construir una inmersión afín $f:M\to\overline{M}$, un fibrado normal $E$ para $f$ y un isomorfismo de fibrados vectoriales que preserva conexión $S:(E^0,\nabla^0)\to(E,\nabla^\perp)$ tal que $S\big(\alpha^0(\cdot,\cdot)\big)=\alpha$ y $A(\cdot,S\cdot)=A^0$. El par $(f,S)$ será llamado *solución para el problema de inmersión afín con datos iniciales $\nabla^0$, $\alpha^0$ y $A^0$*. Más general, si $f:U\to\overline{M}$ es una inmersión afín definida en un subconjunto abierto $U$ de $M$ y $S:E^0|_U\to E|_U$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales que preserva conexión de modo que: $S\big(\alpha^0(\cdot,\cdot)\big)=\alpha$ y $A(\cdot,S\cdot)=A^0$ entonces el par $(f,S)$ será llamado *solución local para el problema de inmersión afín con datos iniciales $\nabla^0$, $\alpha^0$, $A^0$ con dominio $U$.*

**Observación 2.2.2.** *Una situación especial compete al caso de inmersiones isométricas. Asumiendo que $(M,g)$, $(\overline{M},\bar g)$ son variedades semi-riemannianas, $E^0$ es un fibrado vectorial sobre $M$ dotado de una estructura semi-riemanniana $g^0$ la cual es $\nabla^0$-paralela (i.e., $\nabla^0$ es compatible con $g^0$) y $\alpha^0$ es una sección suave del fibrado $\mathrm{Lin}_2(TM;E^0)$, por una* solución para el problema de inmersión isométrica con datos iniciales $\nabla^0$, $\alpha^0$, $g^0$ *se entiende un par $(f,S)$ donde $f:M\to\overline{M}$ es una inmersión isométrica, $S:(E^0,\nabla^0,g^0)\to(E,\nabla^\perp,g^\perp)$ un morfismo de fibrados vectoriales que preserva conexión, el cual es una isometría en cada fibra tal que $S\big(\alpha^0(\cdot,\cdot)\big)=\alpha$, donde $E$ denota el complemento ortogonal para $\mathrm{d}f(TM)$ en $f^*T\overline{M}$ respecto a $\bar g$, y $g^\perp$ denota la restricción de $\bar g$ a $E$. Como en el caso afín, se define el concepto de* solución local *para el problema de la inmersión isométrica reemplazando $M$ por un conjunto abierto $U$ de $M$.*

*Note que si $(f,S)$ es una solución (local) del problema de inmersión isométrica, las variedades riemannianas $(M,g)$ y $(\overline{M},\bar g)$ son dotadas con sus respectivas conexiones de Levi-Civita $\nabla$, $\overline{\nabla}$ y la sección suave $A^0$ se definida por*

$$g^0_x\big(\alpha^0_x(v,w),e\big)=-g_x\big(A^0_x(e)\cdot v,w\big),\ \text{con } x\in M,\ v,w\in T_xM,\ e\in E^0_x, \tag{2.2.12}$$

*entonces $(f,S)$ también es una solución (local) del problema de inmersión afín con datos iniciales $\nabla^0$, $\alpha^0$ y $A^0$.*

Examinaremos la ecuaciones (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9) y (2.2.10) en el contexto de las inmersiones afines. Sea $f:(M,\nabla)\to(\overline{M},\overline{\nabla})$ una inmersión afín, y sea $E$ un fibrado normal para $f$. Denotemos por $\nabla^\perp$, $\alpha$ y $A$ respectivamente la conexión normal, la segunda forma fundamental y la forma de Weingarten. Dado que $\nabla$, $\nabla^\perp$, $\alpha$ y $A$ son (salvo identificación de $TM$ con $\mathrm{d}f(TM)$) las componentes de $f^*\overline{\nabla}$ respecto a la descomposición $f^*T\overline{M}=\mathrm{d}f(TM)\oplus E$, la ecuación (2.2.5), con $A$ en lugar de $\alpha^1$, $\alpha$ en lugar de $\alpha^2$ resulta:

$$\pi^{TM}\left[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v),\mathrm{d}f_x(w)\big)\mathrm{d}f_x(u)\right]=R_x(v,w)u+A_x\big(v,\alpha_x(w,u)\big)-A_x\big(w,\alpha_x(v,u)\big), \tag{2.2.13}$$

para cada $x \in M$ y cada $v, w, u \in T_xM$, donde $R$ y $\overline{R}$ denotan los tensores de curvatura de $\nabla$ y $\overline{\nabla}$ respectivamente. La igualdad (2.2.13) es llamada la *ecuación de Gauss* para la inmersión afín $f$ con respecto a $E$.

Del mismo modo la ecuación (2.2.6), con $A$ en lugar de $\alpha^1$ y $\alpha$ en lugar de $\alpha^2$ resulta:

$$\pi^E\big[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)\big)e\big] \;=\; R_x^{\perp}(v,w)e \;+\; \alpha_x\big(v, A_x(w,e)\big) \;-\; \alpha_x\big(w, A_x(v,e)\big), \quad (2.2.14)$$

para cada $x \in M$, $v, w \in T_xM$ y cada $e \in E_x$, donde $R^{\perp}$ denota el tensor de curvatura de la conexión normal $\nabla^{\perp}$. La igualdad (2.2.14) es llamada la *ecuación de Ricci* de la inmersión afín $f$ respecto a $E$.

Análogamente, las ecuaciones (2.2.7) y (2.2.8) resultan:

$$\pi^E\big[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)\big)u\big] = (\nabla^{\otimes}\alpha)_x(v,w,u) - (\nabla^{\otimes}\alpha)_x(w,v,u) \quad +\alpha_x\big(\mathrm{T}_x(v,w), u\big), \quad (2.2.15)$$

$$\pi^{TM}\big[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)\big)e\big] = (\nabla^{\otimes}A)_x(v,w,e) - (\nabla^{\otimes}A)_x(w,v,e) \quad +A_x\big(\mathrm{T}_x(v,w), e\big), \quad (2.2.16)$$

para cada $x \in M$, $v, w, u \in T_xM$ y cada $e \in E_x$, donde $\mathrm{T}$ denota el tensor de torsión de $\nabla$. Las igualdades (2.2.15) y (2.2.16) son llamadas las *ecuaciones de Codazzi* de la inmersión afine $f$ respecto a $E$.

Si $\iota = (\iota_1, \iota_2) : TM \to f^*T\overline{M} = \mathrm{d}f(TM) \oplus E$ es la aplicación dada por $\iota^1 = \mathrm{d}f : TM \to \mathrm{d}f(TM)$, $\iota^2 = 0$, las ecuaciones (2.2.9) y (2.2.10) resultan:

$$\pi^{TM}\big[\overline{\mathrm{T}}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)\big)\big] = \mathrm{T}_x(v,w), \quad (2.2.17)$$

$$\pi^{E}\big[\overline{\mathrm{T}}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)\big)\big] = \alpha_x(v,w) - \alpha_x(w,v), \quad (2.2.18)$$

para cada $x \in M$, $v, w \in T_xM$, donde $\overline{\mathrm{T}}$ denota el tensor de torsión de la conexión $\overline{\nabla}$. Las igualdades (2.2.17) y (2.2.18) son llamadas *ecuaciones de torsión* de la inmersión afín $f$ respecto a $E$.

**Observación 2.2.3.** *Veamos las siguientes observaciones:*

1. *Sean $(M, \nabla)$ y $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ variedades afines. Si es dada una solución local $(f, S)$ para el problema de inmersiones afines con datos iniciales $\nabla^0$, $\alpha^0$, $A^0$ definida en un subconjunto abierto $U \subset M$ y con fibrado normal $E$. Es claro que las igualdades* (2.2.13), (2.2.14), (2.2.15), (2.2.16), (2.2.17) *y* (2.2.18) *implican las igualdades:*

$$\begin{aligned}
\pi^{TM}\big[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v),\mathrm{d}f_x(w)\big)\mathrm{d}f_x(u)\big] &= R_x(v,w)u + A^0_x\big(v,\alpha^0_x(w,u)\big) && (2.2.19)\\
&\quad -A^0_x\big(w,\alpha^0_x(v,u)\big),\\
\pi^{E}\big[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v),\mathrm{d}f_x(w)\big)S_x(e)\big] &= S_x\big[R^0_x(v,w) + \alpha^0_x\big(v,A^0_x(w,e)\big) && (2.2.20)\\
&\quad -\alpha^0_x\big(w,A^0_x(v,e)\big)\big],\\
\pi^{E}\big[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v),\mathrm{d}f_x(w)\big)\mathrm{d}f_x(u)\big] &= S_x\big[(\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u) && (2.2.21)\\
&\quad -(\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w,v,u)\\
&\quad +\alpha^0_x\big(\mathrm{T}_x(v,w),u\big)\big],\\
\pi^{TM}\big[\overline{R}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v),\mathrm{d}f_x(w)\big)S_x(e)\big] &= (\nabla^{\otimes}A^0)_x(v,w,e) && (2.2.22)\\
&\quad -(\nabla^{\otimes}A^0)_x(w,v,e)\\
&\quad +A^0_x\big(\mathrm{T}_x(v,w),e\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi^{TM}\big[\overline{\mathrm{T}}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v),\mathrm{d}f_x(w)\big)\big] &= \mathrm{T}_x(v,w), && (2.2.23)\\
\pi^{E}\big[\overline{\mathrm{T}}_{f(x)}\big(\mathrm{d}f_x(v),\mathrm{d}f_x(w)\big)\big] &= S_x\big(\alpha^0_x(v,w)-\alpha^0_x(w,v)\big), && (2.2.24)
\end{aligned}$$

*para cada $x \in U$, $v, w, u \in T_xM$ y cada $e \in E^0_x$, donde $R^0$ denota el tensor de curvatura de $\nabla^0$.*

2. *En el caso riemanniano, la ecuación de torsión* (2.2.23) *es trivial y* (2.2.24) *implica que $\alpha^0$ es simétrico; además,* (2.2.12)*, muestra que las ecuaciones de Codazzi* (2.2.22) *y* (2.2.23) *son equivalentes entre sí.*

## 2.3. Inmersiones afines en espacios homogéneos

Conforme estudiamos en la sección anterior, es posible pensar que las ecuaciones de Gauss, Ricci, Codazzi y las ecuaciones de torsión son condiciones necesarias para la existencia de una solución $(f, S)$ para el problema de la existencia de una inmersión afín, aunque tal afirmación es no tiene sentido puesto que no se dan de antemano las igualdades, es decir, no se pueden escribir las ecuaciones (2.2.20), (2.2.21), (2.2.22), (2.2.23), (2.2.23) y (2.2.24) si no han sido dadas $f$ y $S$. Como se ha notado a lo largo del texto, un caso interesante sucede cuando $(\overline{M}, \bar{g})$ es una variedad semi-riemanniana con curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$ y $(f, S)$ es una solución para el problema de la existencia de una inmersión isométrica. En este casos el lado izquierdo de (2.2.20), (2.2.21), (2.2.22) y (2.2.23) se pueden escribir en términos de $c$ y $g$ solamente, i.e., sin necesidad de conocer $f$ y $S$; a saber, el lado izquierdo de (2.2.20) es $c\big(g_x(w,u)v - g_x(v,u)w\big)$, mientras que para (2.2.21), (2.2.22) y (2.2.23) es nulo. La posibilidad de realizar esto depende del hecho que el tensor de curvatura $\overline{R}$ es *constante en referenciales ortonormales*. Luego en este caso, las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi son condiciones necesarias para la existencia de una solución al problema de existencia de una inmersión isométrica. El conocido *Teorema de inmersiones isométricas en formas espaciales* [4], muestra que las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi son también condiciones suficientes para la existencia de una solución al problema de existencia de una inmersión isométrica. Con base en la noción de *variedad infinitesimalmente homogénea* *con $G$-estructura*, la cual introduciremos más adelante, describiremos una situación más general en la cual el lado izquierdo de las ecuaciones (2.2.20), (2.2.21), (2.2.22), (2.2.23), (2.2.23) y (2.2.24) puede ser descrito sin especificar $f$ y $S$.

Sean $(M, \nabla)$ una variedad afín $n$-dimensional, $G$ un subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ y suponga que $M$ está dotada una $G$-estructura $P \subset \mathrm{FR}(TM)$. La terna $(M, \nabla, P)$ es llamada *variedad afín con $G$-estructura.* Dada una variedad afín con $G$-estructura $(M, \nabla, P)$, para cada $x \in M$, denotamos por $G_x$ el subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(T_xM)$ consiste de los endomorfismos que preservan la $G$-estructura en $T_xM$, por $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{gl}(T_xM)$ denotamos el álgebra de Lie de $G_x$ y por $\mathfrak{I}_x^P : T_xM \to \mathfrak{gl}(T_xM)/\mathfrak{g}_x$ la torsión interna de la $G$-estructura $P$ en el punto $x$. Dados los puntos $x, y \in M$ y una función que preserva $G$-estructura $\sigma : T_xM \to T_yM$, entonces el isomorfismo de grupos de Lie $\mathcal{I}_\sigma : \mathrm{GL}(T_xM) \to \mathrm{GL}(T_yM)$ definido por:

$$\mathcal{I}_\sigma : \mathrm{GL}(T_xM) \ni T \longmapsto \sigma \circ T \circ \sigma^{-1} \in \mathrm{GL}(T_yM)$$

envía $G_x$ en $G_y$. Su diferencial en el elemento identidad $\mathrm{Ad}_\sigma : \mathfrak{gl}(T_xM) \to \mathfrak{gl}(T_yM)$ envía a $\mathfrak{g}_x$ en $\mathfrak{g}_y$ y por lo tanto induce un isomorfimos lineal en el cociente:

$$\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma : \mathfrak{gl}(T_xM)/\mathfrak{g}_x \longrightarrow \mathfrak{gl}(T_yM)/\mathfrak{g}_y.$$

**Definición 2.3.1.** *Sean $V, V'$ espacios vectoriales reales y sea $\sigma : V \to V'$ un isomorfismo lineal. Dada una función multilineal $B' \in \mathrm{Lin}_k(V'; V')$ entonces el pull-back de $B'$ por $\sigma$ es la función multilineal $\sigma^* B \in \mathrm{Lin}_k(V; V)$ definida por*

$$(\sigma^* B)(v_1, ..., v_k) = \sigma^{-1}[B'(\sigma(v_1), ..., \sigma(v_k))],$$

*para todo $v_1, ..., v_k \in V$. Dadas aplicaciones multilineales $B \in \mathrm{Lin}_k(V; V)$, $B^{'} \in Lin_k(V'; V')$ y una función lineal $\sigma : V \to V^{'}$ (no necesariamente invertible) entonces $B$ se dice que es $\sigma$-relacionado con $B'$ si*

$$B'(\sigma(v_1), ..., \sigma(v_k)) = \sigma(B(v_1, ..., v_k)), \tag{2.3.1}$$

*para todo $v_1, ..., v_k \in V$. Generalmente, si $V_1, ..., V_k$ son subespacios de $V$, $B \in \mathrm{Lin}(V_1, ..., V_k; V)$ y $B' \in \mathrm{Lin}_k(V'; V')$ son aplicaciones multilineales, decimos que $B$ está $\sigma$-relacionado con $B'$ si* (2.3.1) *se cumple para todo $v_1 \in V, ..., v_k \in V_k$.*

Claramente, si $\sigma : V \to V'$ es un isomorfimos lineal y $B' \in \mathrm{Lin}_k(V', V')$ entonces $\sigma^* B'$ es la única aplicación multilineal $B$ en $\mathrm{Lin}_k(V, V)$ que está $\sigma$-relacionada con $B'$.

La geometría de una variedad afín con $G$-estructura $(M, \nabla, P)$ está descrita por tres tensores, a saber los tensores de curvatura y torsión de la conexión lineal $\nabla$, así como el tensor de torsión interna. Nuestro interés está en las variedades afines con $G$-estructura $(M, \nabla, P)$ para las cuales estos tensores son $G$-constantes, es decir, admiten una representación constante en los referenciales pertenecientes a la $G$-estructura. Más específicamente tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.3.2.** *Una variedad afín con $G$-estructura $(M, \nabla, P)$ se dice ser una* variedad afín infinitesimalmente homogénea con $G$-estructura *ó simplemente* infinitesimalmente homogénea, *si para cada par de puntos $x, y \in M$ y cada función $\sigma : T_xM \to T_yM$ que preserva la $G$-estructura, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$T_x$ es $\sigma$-relacionado con $T_y$;*
2. *$R_x$ es $\sigma$-relacionado con $R_y$;*
3. *$\mathfrak{I}^P_y \circ \sigma = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^P_x$.*

La condición de homogeneidad infinitesimal significa que los tensores $T$, $R$ y $\mathfrak{I}^P$ son *constantes* cuando ellos son escritos en los referenciales de la $G$-estructura $P$. Más explícitamente, existen aplicaciones multilineales $\mathrm{T_o} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $R_\mathrm{o} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y una aplicación lineal $\mathfrak{I}_\mathrm{o} : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{g}$, tal que para cada $x \in M$, cada referencial $p \in P_x$ relaciona $\mathrm{T_o}$ con $\mathrm{T}_x$, $R_\mathrm{o}$ con $R_x$ y también $\mathfrak{I}_\mathrm{o}$ con $\mathfrak{I}^P_x$ como en la definición 2.3.2. Es decir, $(M, \nabla, P)$ es infinitesimalmente homogénea si y solo si existen funciones multilineales $R_0 \in \mathrm{Lin}_3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $T_0 \in \mathrm{Lin}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y una función lineal $\mathfrak{I}_0 : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{g}$ tales que:

$$p^* R_x = R_\mathrm{o}, \; p^* T_x = \mathrm{T_o}, \tag{2.3.2}$$

$$\overline{\mathrm{Ad}}_p \circ \mathfrak{I}_\mathrm{o} = \mathfrak{I}^P_x \circ p, \tag{2.3.3}$$

para todo $x \in M$ y todo $p \in P_x$. Los tensores $\mathrm{T_o}$, $R_\mathrm{o}$ y $\mathfrak{I}_\mathrm{o}$ colectivamente son denominados como los *tensores característicos* de la variedad infinitesimalmente homogénea $(M, \nabla, P)$.

La motivación principal para el estudio de las variedades infinitesimalmente homogéneas, es que el papel de la noción de homogeneidad infinitesimal es igual en el estudio de las variedades afines con $G$-estructura al papel de las variedades semi-riemannianas de curvatura seccional constante en geometría riemanniana. A saber, las variedades riemannianas con curvatura seccional constante son precisamente las variedades infinitesimalmente homogéneas para las cuales el grupo estructural $G$ es el grupo $\mathrm{O}_r(\mathbb{R}^n)$.

**Ejemplo 2.3.1.** *Sea $(M, g)$ una variedad semi-riemanniana de índice $r$, dimensión $n$ y con* curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$. *Esto es:*

$$g_x\big(R_x(v, w)v, w\big) = c\big(g_x(v, w)^2 - g_x(v, v) g_x(w, w)\big),$$

*para cada $x \in M$ y cada $v, w \in T_xM$, donde $R$ denota el tensor de curvatura de la conexión de Levi-Civita $\nabla$ para $(M, g)$. Un resultado bien conocido es que si $(M, g)$ tiene curvatura seccional constante $c$, el tensor de curvatura $R$ está dado*

$$R_x(v, w)u = c\big(g_x(w, u)v - g_x(v, u)w\big), \tag{2.3.4}$$

*para cada $x \in M$ y cada $v, w, u \in T_xM$.*

*Si $P = \mathrm{FR^o}(TM)$ denota la $\mathrm{O}_r(\mathbb{R}^n)$-estructura en $M$ constituida de todos los referenciales ortogonales, la terna $(M, \nabla, P)$ es infinitesimalmente homogénea. En efecto, $\mathfrak{I}^P = 0$, $T = 0$ y la fórmula* (2.3.4) *significa que el tensor de curvatura $R$ es constante en referenciales que pertenecen a la $G$-estructura. En este caso, las aplicaciones multilineales $R_\mathrm{o}$, $\mathrm{T_o}$, $\mathfrak{I}_\mathrm{o}$ son dados por $\mathrm{T_o} = 0$, $\mathfrak{I}_\mathrm{o} = 0$ y*

$$R_\mathrm{o} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (v, w, u) \longmapsto \langle w, u \rangle v - \langle v, u \rangle w \in \mathbb{R}^n,$$

*donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la forma bilineal de Minkowski de índice $r$ en $\mathbb{R}^n$.*

**Definición 2.3.3.** *Una variedad afín con* $G$*-estructura* $(M, \nabla, P)$ *se dice ser una* localmente homogénea *si para* $x, y \in M$ *y cada aplicación* $\sigma : T_xM \to T_yM$ *que preserva* $G$*-estructura, existen vecindades abiertas* $U, V \subset M$ *en* $x$*,* $y$ *respectivamente y un difeomorfismo afín* $f : U \to V$ *que preserva* $G$*-estructura tal que* $f(x) = y$ *y* $\mathrm{d}f_x = \sigma$*. Si para cada* $x, y \in M$ *y cada aplicación* $\sigma : T_xM \to T_yM$ *que preserve* $G$*-estructura, existe un difeomorfismo afín que preserve* $G$*-estructura* $f : M \to M$ *con* $f(x) = y$ *y* $\mathrm{d}f_x = \sigma$ *se dice que la terna* $(M, \nabla, P)$ *es* (globalmente) homogénea.

Es claro que cada variedad afín con $G$-estructura (localmente) homogénea es también infinitesimalmente homogénea. Una afirmación recíproca que aparece en [13] es la siguiente:

**Proposición 2.3.1.** *Sea* $(M, \nabla, P)$ *una variedad afín con* $G$*-estructura, la cual es infinitesimalmente homogénea. Entonces* $(M, \nabla, P)$ *es localmente homogénea. Si, además suponemos que* $(M, \nabla)$ *es geodésicamente completa y* $M$ *es (conexa y) simplemente-conexa entonces* $(M, \nabla, P)$ *es globalmente homogénea.*

### 2.3.1. Existencia de inmersiones afines preservando $G$-Estructura

Consideremos fijos los siguientes datos. Dos variedades afines $(M, \nabla)$, $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ de dimensiones $n$ y $\bar{n}$ respectivamente. Un fibrado vectorial $E^0$ sobre $M$ con fibra típica isomorfa a $\mathbb{R}^k$ y dotado de una conexión lineal $\nabla^0$. Dos secciones $\alpha^0 \in \mathbf{\Gamma}\left(\mathrm{Lin}_2(TM; E^0)\right)$, $A^0 \in \mathbf{\Gamma}\left(\mathrm{Lin}_2(TM, E^0; TM)\right)$. Se denotar por $R, T$, $\overline{T} y \overline{R}$) los tensores de torsión y curvatura de las conexiónes $\nabla$ y $\overline{\nabla}$, respectivamente. Por $R^0$ el tensor de curvatura de la conexión $\nabla^0$ y por $\nabla^{\otimes}$ la conexión lineal inducida por $\nabla, \nabla^0$ en los fibrados $\mathrm{Lin}_2(TM; E^0)$, $\mathrm{Lin}_2(TM, E^0; TM)$. Vamos a determinar condiciones bajo las cuales exista una solución $(f, S)$ para el problema de inmersión afín con datos iniciales $\nabla^0, \alpha^0, A^0$ satisfaciendo alguna condición inicial; i.e., $f(x_0), \mathrm{d}f(x_0)$ y $S_{x_0}$ sean prescritos para algún punto $x_0 \in M$.

suponiendo que $\bar{n} = n+k$, consideramos el fibrado vectorial $\widehat{E} = TM \oplus E^0$ sobre $M$ cuya fibra típica es $\mathbb{R}^{\bar{n}}$. Denotamos por $\pi^{TM} : \widehat{E} \to TM$, $\pi^{E^0} : \widehat{E} \to E^0$ las respectivas proyecciones. Sea $\widehat{\nabla}$ la conexión lineal en $\widehat{E}$ cuyas componentes son $\nabla$, $\nabla^0$, $\alpha^0$ y $A^0$ (ver identidad (2.2.2)). Si $(f, S)$ es una solución al problema de existencia de una inmersión afín con datos iniciales $\nabla^0, \alpha^0, A^0$, definimos el isomorfismo de fibrados vectoriales $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ por las condiciones

$$L|_{TM} = \mathrm{d}f : TM \to f^*T\overline{M}, \quad L|_{E^0} = S : E^0 \to f^*T\overline{M}.^3 \tag{2.3.5}$$

Es claro que $L$ preserva conexión. En efecto, sea $E$ el fibrado normal para $f$, y sean $\alpha, \nabla^{\perp}$ y $A$ respectivamente la segunda forma fundamental, la conexión normal y la forma de Weingarten para $f$. Por definición el isomorfismo de fibrados $S : (E^0, \nabla^0) \to (E, \nabla^{\perp})$ preserva conexión, es decir,

$$S(\nabla^0_X \epsilon^2) = \nabla^{\perp}_X (S \circ \epsilon^2),$$

para cada $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, $\epsilon^2 \in \mathbf{\Gamma}(E^0)$; además, son válidas las identidades

$$S\left(\alpha^0(\cdot, \cdot)\right) = \alpha, \qquad A\left(\cdot, S(\cdot)\right) = A^0.$$

[3] Recuerde la identificación de $\overleftarrow{\mathrm{d}f}$ con $\mathrm{d}f$.

Sean $\epsilon = (\epsilon^1, \epsilon^2) \in \mathbf{\Gamma}(\widehat{E})$, $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$. Con el fin de obtener la afirmación debemos mostrar que

$$L(\widehat{\nabla}_X \epsilon) = (f^*\overline{\nabla})_X(L \circ \epsilon) = \overline{\nabla}_X(L \circ \epsilon).$$

Empleando la identidad (2.2.2) se tiene

$$\widehat{\nabla}_X \epsilon = \underbrace{\nabla_X \epsilon^1 + A^0(X, \epsilon^2)}_{\in \mathbf{\Gamma}(TM)} + \underbrace{\alpha^0(X, \epsilon^1) + \nabla^0_X \epsilon^2}_{\in \mathbf{\Gamma}(E^0)}.$$

De este modo aplicando $L$, se define:

$$L(\widehat{\nabla}_X \epsilon) = \mathrm{d}f(\nabla_X \epsilon^1) + \mathrm{d}f\left(A^0(X, \epsilon^2)\right) + S\left(\alpha^0(X, \epsilon^1)\right) + S(\nabla^0_X \epsilon^2). \tag{2.3.6}$$

Por otro lado, $L \circ \epsilon = (\mathrm{d}f\epsilon^1, S \circ \epsilon^2)$. Luego empleando de nuevo (2.2.2) y con las convenciones de las secciones anteriores se obtiene que

$$\left(f^*\overline{\nabla}\right)_X (L \circ \epsilon) = \overline{\nabla}_X \mathrm{d}f\epsilon^1 + \nabla^{\perp}_X (S \circ \epsilon^2) + \mathrm{d}f\left(A(X, S \circ \epsilon^2)\right). \tag{2.3.7}$$

Puesto que $f$ es una inmersión afín, se sigue a partir de la identidad (2.2.11) que $\overline{\nabla}_X \mathrm{d}f\epsilon^1 = \mathrm{d}f(\nabla_X \epsilon^1) + \alpha(X, \epsilon^1)$. Reemplazando este valor en la ecuación (2.3.7) y teniendo en consideración que $S$ preserva conexión y segunda forma fundamentel resulta

$$\left(f^*\overline{\nabla}\right)_X (L \circ \epsilon) = \mathrm{d}f(\nabla_X \epsilon^1) + \alpha(X, \epsilon^1) + S(\nabla^0_X \epsilon^2) + \mathrm{d}f\left(A^0(X, \epsilon^2)\right); \tag{2.3.8}$$

Las identidades (2.3.6), (2.3.8) demuestran la afirmación.

Recíprocamente si $f : M \to \overline{M}$ es una aplicación suave y $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ es un isomorfismo de fibrados que preserva la conexión $L\mid_{TM} = \mathrm{d}f$, entonces. definiendo $S = L\mid_{E^0}$, se obtiene una solución $(f, S)$ al problema de existencia de una inmersión afín con condiciones iniciales $\nabla^0, \alpha^0$ y $A^0$.

Basados en las observaciones anteriores, presentamos una redefinición del concepto de inmersión afín, la cual, desde luego, es equivalente a la presentada anteriormente.

**Definición 2.3.4.** *Sean $M$, $\overline{M}$ variedades suaves de dimensión $n$, $\bar{n}$ respectivamente. Sea $E$ un fibrado vectorial sobre $M$ con fibra típica $\mathbb{R}^k$, donde $\bar{n} = n + k$. Defina $\widehat{E} = TM \oplus E$; observe que $\widehat{E}$ es un fibrado vectorial sobre $M$ con fibra típica $\mathbb{R}^{\bar{n}}$. Sean $\widehat{\nabla}$, $\overline{\nabla}$ conexiones sobre $\widehat{E}$ y $T\overline{M}$ respectivamente. Por una* inmersión afín *de $(M, E, \widehat{\nabla})$ en la variedad afín $(\overline{M}, \overline{\nabla})$, se entenderá un par $(f, L)$, donde $f : M \to \overline{M}$ es una función suave y $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales que preserva conexión con la propiedad*

$$L_x|_{T_xM} = df_x, \tag{2.3.9}$$

*para todo $x \in M$, donde $f^*T\overline{M}$ está dotado de la conexión $f^*\overline{\nabla}$. Por una* inmersión afín local *de $(M, E, \widehat{\nabla})$ en $(\overline{M}, \overline{\nabla})$, se entiende una inmersión afín $(f, L)$ de $(U, E|_U, \widehat{\nabla})$ en $(\overline{M}, \overline{\nabla})$, donde $U$ es un conjunto abierto de $M$, el conjunto $U$ se denomina dominio de la inmersión afín local $(f, L)$.*

Observe que si $(f, L)$ es una inmersión afín (local), la condición (2.3.9) implica que $f$ es una inmersión. Usando nuestra terminología,

**Definición 2.3.5.** *Dadas variedades afines* $(M,\nabla)$, $(\overline{M},\overline{\nabla})$, *una función suave* $f : M \to \overline{M}$ *se dice que es una inmersión de* $(M,\nabla)$ *en* $(\overline{M},\overline{\nabla})$ *si existen un fibrado vectorial* $\pi : E \to M$, *una conexión* $\widehat{\nabla}$ *sobre* $\widehat{E} = TM \oplus E$ *y un isomorfismos de fibrados vectoriales* $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ *tal que* $(f,L)$ *es una inmersión afín de* $(M,E,\widehat{\nabla})$ *en* $(M,\bar{\nabla})$ *y tal que* $\nabla$ *es la componente de* $\widehat{\nabla}$ *con respecto a la descomposición* $\widehat{E} = TM \oplus E$*; esto es:*

$$\nabla_X Y = \mathrm{pr}_1(\widehat{\nabla}_X Y), \tag{2.3.10}$$

*para todo* $X,Y \in \Gamma(TM)$, *donde* $\mathrm{pr}_1 : \widehat{E} \to TM$ *denota la primera proyección.*

**Lema 2.3.1.** *Fijando objetos* $M,\overline{M},E,\widehat{E},\widehat{\nabla}$ *y* $\overline{\nabla}$ *como en la definición 2.3.4. Sean* $\mathfrak{s} : U \to \mathrm{FR}(\widehat{E})$ *un referencial suave de* $\widehat{E}$, $f : U \to \overline{M}$ *una función suave y* $L : \widehat{E}|_U \to f^*T\overline{M}$ *una función lineal biyectiva. Sea* $F : U \to \mathrm{FR}(T\overline{M})$ *definida por:*

$$F(x) = L_x \circ \mathfrak{s}(x) \in \mathrm{FR}(T_{f(x)}\overline{M}), \tag{2.3.11}$$

*para todo* $x \in U$. *Denotemos por* $\omega^{\overline{M}}$ *la forma de conexión sobre* $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ *correspondiente a la conexión principal* $\mathrm{Hor}(\mathrm{FR}(T\overline{M}))$ *asociada a* $\overline{\nabla}$ *y por* $\omega^M$ *la forma de conexión sobre* $\mathrm{FR}(\widehat{E})$ *correspondiente a la conexión principal* $\mathrm{Hor}(\mathrm{FR}(\widehat{E}))$ *asociada a* $\widehat{\nabla}$. *Si* $\theta^{\overline{M}}$ *denota la forma canónica de* $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ *y* $\theta^M$ *denota la forma* $i$*-canónica de* $\mathrm{FR}(\widehat{E})$, *donde* $i : TM \to \widehat{E}$ *es la función inclusión, entonces* $(f,L)$ *es una inmersión local afín con dominio* $U$ *si y solo si, la función* $F$ *es suave y además*

$$F^*\theta^{\overline{M}} = \mathfrak{s}^*\theta^M, \tag{2.3.12}$$

$$F^*\omega^{\overline{M}} = \mathfrak{s}^*\omega^M. \tag{2.3.13}$$

*Demostración.* Sea $L_* : \mathrm{FR}(\widehat{E}) \to \mathrm{FR}(f^*T\overline{M}) = f^*\mathrm{FR}(T\overline{M})$ la aplicación de fibrados principales inducida por $L$ la cual se tiene definida por $L_*(p) = L \circ p$, para cada $p \in \mathrm{FR}(\widehat{E})$. Sea también $\bar{f} : f^*\mathrm{FR}(T\overline{M}) \to \mathrm{FR}(T\overline{M})$ la aplicación canónica del pull-back $f^*\mathrm{FR}(T\overline{M}) \subset TM\mid_U \times \mathrm{FR}(T\overline{M})$ la cual es simplemente la restricción a este conjunto de la proyección en la segunda coordenada del producto $TM\mid_U \times \mathrm{FR}(T\overline{M})$. Es claro que

$$F = \bar{f} \circ L_* \circ \mathfrak{s}. \tag{2.3.14}$$

Afirmamos que la aplicación $F$ es suave si, y solamente si, ambas $f$ y $L$ son suaves. En efecto, si ambas $f$ y $L$ son aplicaciones suaves, la igualdad (2.3.14) implica que la aplicación $F$ es suave. Recíprocamente si $F$ es suave, $f$ también lo es, dado que $f = \overline{\Pi} \circ F$, donde $\overline{\Pi} : \mathrm{FR}(T\overline{M}) \to \overline{M}$ denota la proyeción. Además, $F$ es una sección local de $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ a lo largo de $f$, luego la sección local correspondiente para $f^*\mathrm{FR}(T\overline{M})$

$$L_* \circ \mathfrak{s} = \overline{F},$$

es suave; como $\mathfrak{s}$ es una sección local arbitraria del atlas de secciones locales del fibrado principal $\mathrm{FR}(\widehat{E})|_U$, se tiene que $L_* : \mathrm{FR}(\widehat{E})|_U \to \mathrm{FR}(f^*T\overline{M})$ es un isomorfismo suave de fibrados principales cuyo morfismo subyacente de grupos estructurales es la aplicación identidad de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$. Esto muestra que la aplicación $L$ es suave.

Suponga ahora que $F$, $f$ y $L$ son aplicaciones suaves y veamos que $L$ preserva conexión si, y solamente si, (2.3.13) es satisfecha. En efecto, $L$ preserva conexión si, y solamente si, la aplicación inducida $L_*$ :

$\mathrm{FR}(\widehat{E}) \to \mathrm{FR}(f^*T\overline{M})$ preserva conexión. Se puede probar que la forma de conexión del pull-back $\mathrm{FR}(f^*T\overline{M}) = f^*\mathrm{FR}(T\overline{M})$ es igual a $\bar{f}^*\overline{\omega}$; luego, $L_*$ preserva conexión si, y solamente si

$$(L_* \circ \mathfrak{s})^*(\bar{f}^*\overline{\omega}) = s^*\omega^M. \tag{2.3.15}$$

Pero (2.3.15) es obviamente lo mismo que (2.3.13), en virtud de (2.3.14). Finalmente, probemos que $L_x|_{T_xM} = \mathrm{d}f_x$ para cada $x \in U$ si, y solamente si, la igualdad (2.3.12) es satisfecha. Usando (1.4.18), se tiene que, dado $x \in U$,

$$\mathfrak{s}^*\theta^M_x = \mathfrak{s}(x)^{-1} \circ \iota_x, \ F^*\overline{\theta}_x = \overline{\theta}_{F(x)}\,(\mathrm{d}F_x) = F(x)^{-1} \circ \mathrm{d}\overline{\Pi}_{F(x)} \circ \mathrm{d}F_x$$

donde $\iota : TM \to \widehat{E}$ denota la aplicación inclusión. Vemos entonces que la igualdad (2.3.12) se cumple si, y solamente si

$$F(x)^{-1} \circ \mathrm{d}\overline{\Pi}_{F(x)} \circ \mathrm{d}F_x = \mathfrak{s}(x)^{-1} \circ \iota_x, \tag{2.3.16}$$

para cada $x \in U$. Como $\overline{\Pi} \circ F = f$, se tiene que (2.3.16) se cumple si, y solamente si

$$F(x)^{-1} \circ \mathrm{d}f_x = \mathfrak{s}(x)^{-1}\,|_{T_xM}, \tag{2.3.17}$$

para cada $x \in U$. Finalmente, dado que $F(x) = L_x \circ \mathfrak{s}(x)$, es claro que (2.3.17) se cumple si, y solamente si: $L_x\,|_{T_xM} = \mathrm{d}f_x$. Esto concluye la prueba. □

Con la notación y la terminología del Lema anterior, suponiendo que la función $f : U \to \overline{M}$ es suave y que $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales, se tiene lo siguiente: la aplicación $F : U \to \mathrm{FR}(T\overline{M})$ es suave y además,

$$\begin{aligned} F^*\theta^{\overline{M}} = \mathfrak{s}^*\theta^M \quad &\Longleftrightarrow \quad L|_{TM} = \mathrm{d}f, \\ F^*\omega^{\overline{M}} = \mathfrak{s}^*\omega^M \quad &\Longleftrightarrow \quad L \text{ preserva conexión.} \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Las condiciones $F^*\theta^{\overline{M}} = \mathfrak{s}^*\theta^M$ y $F^*\omega^{\overline{M}} = \mathfrak{s}^*\omega^M$ se pueden resumir escribiendo simplemente

$$F^*\lambda^{\bar{M}} = \lambda^M, \tag{2.3.19}$$

donde

$$\lambda^{\bar{M}} = (\theta^{\bar{M}}, \omega^{\bar{M}}), \qquad \lambda^M = s^*(\theta^M, \omega^M). \tag{2.3.20}$$

Por lo tanto si $(f, S)$ es una solución para el problema de inmersion afín con datos iniciales $\nabla^0$, $\alpha^0$ y $A^0$, y si $L$ y $F$ son definidos como en (2.3.5) y (2.3.11) entonces, por (2.3.18), la igualdad (2.3.19) se cumple. Observe también que, inversamente, si se da una función suave $F : V \to f^*T\bar{M}$, entonces se puede obtener una función $f : V \to \bar{M}$ y un isomorfismo de fibrados vectoriales $L : \widehat{E}|_V \to f^*T\bar{M}$ definido por

$$f = \bar{\Pi} \circ F, \qquad L_x = F(x) \circ s(x)^{-1} \tag{2.3.21}$$

para todo $x \in V$, donde $\bar{\Pi} : \mathrm{FR}(T\bar{M}) \to \bar{M}$ denota la proyección. En particular si $F$ satisface (2.3.19) entonces se obtiene una solución local $(f, S)$ para el problema de inmersión afín con datos iniciales $\nabla^0$, $\alpha^0$ y $A^0$ donde $S = L|_{E^0}$.

El siguiente resultado establece la unicidad de la inmersión afín $(f, S)$.

**Corolario 2.3.1.** *(Unicidad de la inmersión con datos iniciales.) Sean $M, \overline{M}, \pi : E \to M, \widehat{E}, \widehat{\nabla}$ y $\overline{\nabla}$ como en la definición* (2.3.4)*, y suponga que $M$ es conexa. Si $(f^1, L^1)$, $(f^2, L^2)$ son ambas inmersiones afines de $(M, E, \widehat{\nabla})$ en $(\overline{M}, \widehat{\nabla})$ y si existe $x_0 \in M$ con:*

$$f^1(x_0) = f^2(x_0), \;\; L^1_{x_0} = L^2_{x_0}, \tag{2.3.22}$$

*entonces* $(f^1, L^1) = (f^2, L^2)$.

*Demostración.* Se denota por $\overline{f}^i : (f^i)^* T\overline{M} \to T\overline{M}$ la función canónica del pull-back $(f^i)^* T\overline{M}$, $i = 1, 2$. Claramente $(f^1, L) = (f^2, L^2)$ si y solo si las funciones

$$\overline{f}^1 \circ L^1 : M \to T\overline{M}, \;\; \overline{f}^2 \circ L^2 : M \to T\overline{M} \tag{2.3.23}$$

son iguales. El conjunto de puntos $M$ donde las funciones (2.3.23) coinciden es cerrado, y por hipótesis es no vacío. Veamos ahora que tal conjunto también es abierto. Sea $x \in M$ un punto en el cual las funciones (2.3.23) coinciden. Sea $\mathfrak{s} : U \to \mathrm{FR}(\widehat{E})$ un referencial admisible de $\widehat{E}$ donde $U$ es una vecindad conexa y abierta de $x$ en $M$. Para $i = 1, 2$, se define $F^i : U \to \mathrm{FR}(T\overline{M})$ haciendo $F^i(y) = L^i_y \circ \mathfrak{s}(y)$ para todo $y \in U$. Entonces $F^1(x) = F^2(x)$ y el Lema 2.3.1 garantiza que $F^i$ es una función suave que satisface:

$$(F^i)^*(\theta^{\overline{M}}, \omega^{\overline{M}}) = (\mathfrak{s}^* \theta^M, \mathfrak{s}^* \omega^M), \tag{2.3.24}$$

para $i = 1, 2$. Como para cada $p \in \mathrm{FR}(T\overline{M})$, la función lineal

$$(\theta^{\overline{M}}_p, \omega^{\overline{M}}_p) : T_p\mathrm{FR}(T\overline{M}) \to \mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}}) \tag{2.3.25}$$

es un isomorfismo, se sigue del Teorema 2.1.2 que $F^1 = F^2$. Se concluye que las funciones en (2.3.23) coincide en $U$. ☐

**Definición 2.3.6.** *Fijando los objetos $M, \overline{M}, \pi : E \to M, \widehat{E}, \widehat{\nabla}$ y $\overline{\nabla}$ como en la definición 2.3.4. Sea $G$ una subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$ y suponiendo que $\widehat{E}$ y $T\overline{M}$ son dotados con $G$-estructuras $\widehat{P}$ y $\overline{P}$, respectivamente. Una inmersión afín (local) $(f, L)$ de $(M, E, \widehat{\nabla})$ en $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ se dice que* preserva la $G$-estructura *si $L$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales que preserva $G$-estructura donde $f^*(T\overline{M})$ está dotado de la $G$-estructura $f^*\overline{P}$.*

Si $(\bar{M}, \bar{\nabla}, \bar{P})$ es infinitesimalmente homogénea cada espacio vectorial real $\bar{n}$-dimensional $Z$, dotado con una $G$-estructura, hereda versiones $\bar{T}_Z : Z \times Z \to Z$, $\bar{R}_Z : Z \times Z \to \mathfrak{gl}(Z)$ y $\bar{\mathfrak{I}}_Z : Z \to \mathfrak{gl}(Z)/\mathfrak{g}_Z$ de los tensores característicos $\bar{T}_0 : \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \to \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $\bar{R}_0 : \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$ y $\bar{\mathfrak{I}}_0 : \mathbb{R}^{\bar{n}} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})/\mathfrak{g}$ de $(\bar{M}, \bar{\nabla}, \bar{P})$.

En [13] se prueba en detalle el teorema que presentaremos a continuación. De la aplicación directa de este teorema se obtienen los resultados del capítulo 4.

**Teorema 2.3.1.** *Suponga que* $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ *es infinitesimalmente homogéneo con tensores característicos* $\overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{o}}$, $\overline{R}_{\mathrm{o}}$ *y* $\overline{\mathfrak{I}}_{\mathrm{o}}$ *y que las igualdades*

$$\begin{aligned}
\pi^{TM}\big(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)u\big) &= R_x(v,w)u + A_x^0\big(v, \alpha_x^0(w,u)\big) - A_x^0\big(w, \alpha_x^0(v,u)\big), && (2.3.26)\\
\pi^{E^0}\big(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)e\big) &= R_x^0(v,w) + \alpha_x^0\big(v, A_x^0(w,e)\big) - \alpha_x^0\big(w, A_x^0(v,e)\big), && (2.3.27)\\
\pi^{E^0}\big(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)u\big) &= (\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u) - (\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w,v,u) + \alpha_x^0\big(\mathrm{T}_x(v,w),u\big), && (2.3.28)\\
\pi^{TM}\big(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)e\big) &= (\nabla^{\otimes}A^0)_x(v,w,e) - (\nabla^{\otimes}A^0)_x(w,v,e) + A_x^0\big(\mathrm{T}_x(v,w),e\big), && (2.3.29)\\
\pi^{TM}\big(\overline{\mathrm{T}}_{\widehat{E}_x}(v,w)\big) &= \mathrm{T}_x(v,w), && (2.3.30)\\
\pi^{E^0}\big(\overline{\mathrm{T}}_{\widehat{E}_x}(v,w)\big) &= \alpha_x^0(v,w) - \alpha_x^0(w,v), && (2.3.31)\\
\overline{\mathfrak{I}}_{\widehat{E}_x}(v) &= \mathfrak{I}_x^{\widehat{P}}(v), && (2.3.32)
\end{aligned}$$

*se cumplen para todo* $x \in M$, $v, w, u \in T_xM$ *y todo* $e \in E_x^0$. *Entonces, para cada* $x_0 \in M$, *cada* $y_0 \in \overline{M}$ *y cada función lineal* $\sigma_0 : \widehat{E}_{x_0} \to T_{y_0}\overline{M}$ *que preserva G-estructura, existe una solución local* $(f, S)$ *que preserva la G-estructura para la inmersión afín con condiciones iniciales* $\nabla^0$, $\alpha^0$ *y* $A^0$, *cuyo dominio es una vecindad abierta* $U$ *de* $x_0$ *en* $M$, $f(x_0) = y_0$ *y* $\sigma_0 = L_{x_0}$, *donde* $L$ *viene dado por la expresión*(2.3.5)*. Por otra parte, si* $M$ *es (conexo y) simplemente conexo y* $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ *es geodésicamente completa, entonces existe una única solución* $(f, S)$ *para el problema de inmersión afín con condiciones iniciales* $\nabla^0$, $\alpha^0$ *y* $A^0$ *tal que* $f(x_0) = y_0$ *y* $\sigma_0 = L_{x_0}$.

*Demostración.* Sea $\mathfrak{s} : V \to \widehat{P}$ un sección local definida en una vecindad abierta $V$ de $x_0$ en $M$ y considere las 1-formas $\lambda^M$ y $\lambda^{\bar{M}}$ definidas en (2.3.20). Debemos buscar una función suave $F : U \to \widehat{P} \subset \mathrm{FR}(T\bar{M})$ tal que $F^*\lambda^{\bar{M}} = \lambda^M|_U$ y $F(x_0) = \sigma_0 \circ \mathfrak{s}(x_0)$, donde $U$ es una vecindad abierta de $x_0$ en $V$. Una vez encontrada la función $F$, definimos $f : U \to \bar{M}$ y $L : \widehat{E}|_U \to f^*T\bar{M}$ como en (2.3.21) y $S = L|_{E_0}$. A continuación de (2.3.18) se tiene que $(f, S)$ es una solución local para el problema de inmersiones afines con datos iniciales $\nabla^0, \alpha^0$ y $A^0$; además, como $\mathfrak{s}$ toma valores en $\widehat{P}$ y $F$ toma valores en $\bar{P}$, entonces $L$ preserva $G$-estructura.

Con el fin de encontrar la función $F$, emplearemos la versión del teorema de Frobenius establecida en el Teorema 2.1.2. Se tiene que para cada $y \in \bar{M}$ y cada $\bar{p} \in \bar{P}_y$, la función lineal $\lambda_{\bar{p}}^{\bar{M}} : T_{\bar{p}}\bar{P} \to \mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$ es un isomorfismo sobre el espacio

$$Z = \{(u, X) \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}}) : \bar{\mathfrak{I}}_0(u) = X + \mathfrak{g}\}.$$

En efecto, $(\theta_{\bar{p}}^{\bar{M}}, \omega_{\bar{p}}^{\bar{M}}) = (\bar{p}^{-1} \oplus \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{d}\bar{\Pi}_{\bar{p}}, \omega_{\bar{p}}^{\bar{M}})$ y el isomorfismo $(\mathrm{d}\bar{\Pi}_{\bar{p}}, \omega_{\bar{p}}^{\bar{M}})$ transforma el espacio $T_{\bar{p}}\bar{P}$ en el espacio

$$\mathcal{V}_{\bar{p}} = \{(v, X) \in T_y\bar{M} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n) : \bar{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}}^{-1}(\mathfrak{I}_y^{\bar{P}}(v)) = X + \mathfrak{g}\},$$

y $\bar{\mathfrak{I}}_0 = \bar{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}}^{-1} \circ \mathfrak{I}_y^{\bar{P}} \circ \bar{p}$. Ahora tenemos que para todo $x \in V$, la función lineal $\lambda_x^M : T_xM \to \mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$ toma valores en $Z$. Para todo $\widehat{p} \in \widehat{P}_x$, la función lineal $(\theta_{\widehat{p}}^M, \omega_{\widehat{p}}^M) = ((\widehat{p}^{-1} \circ \iota_x) \circ \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{d}\widehat{\Pi}_{\widehat{p}}, \omega_{\widehat{p}}^M)$ : $T_{\widehat{p}}\mathrm{FR}(\widehat{E}) \to \mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$ transforma a $T_{\widehat{p}}(\widehat{P})$ en el espacio:

$$\{(u,X)\in\mathbb{R}^{\bar{n}}\oplus\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}}):\widehat{p}(u)\in T_xM,\bar{\mathrm{Ad}}_{\widehat{p}}^{-1}[\mathfrak{I}_x^{\widehat{P}}(\widehat{p}(u))]=X+\mathfrak{g}\},\tag{2.3.33}$$

donde $\hat{\Pi}:\mathrm{FR}((\hat{E}))\to M$ denota la proyección. Suponiendo (2.3.32) se puede remplazar $\mathfrak{I}_x^{\widehat{P}}$ por $\bar{\mathfrak{I}}_{\widehat{E}_x}$ en (2.3.33) y, por tanto $\bar{\mathrm{Ad}}_{\hat{p}}^{-1}\circ\bar{\mathfrak{I}}_{\widehat{E}_x}\circ\widehat{p}=\bar{I}_0$. Concluimos que $(\theta_{\hat{p}}^M,\omega_{\hat{p}}^M)(T_{\hat{p}}\hat{P})\subset Z$. Para completar la prueba sea $\hat{p}=\mathfrak{s}(x)$ y por verificar que $\lambda_x^M(T_xM)$ está contenido en $(\theta_{\hat{p}}^M,\omega_{\hat{p}}^M)(T_{\hat{p}}(\hat{P})$. Ahora debemos comprobar la validez de la hipótesis del teorema 2.1.2. Verifiquemos que la condición (b) del teorema se cumple para nuestro caso y con esto obtendremos la función deseada $F:U\to\bar{P}$ con $F^*\lambda^{\bar{M}}=\lambda^M|_U$ y $F(x_0)=\sigma_0\circ s(x_0)$. Sea $x\in V,y\in M,\bar{p}\in\bar{P}_y$ fijos y sea $\tau=(\lambda_{\bar{p}}^{\bar{M}})^{-1}\circ\lambda_x^M:T_xM\to T_{\bar{p}}\bar{P}$. Debemos probar que

$$\tau^*\Theta_{\bar{p}}^{\bar{M}}=\mathfrak{s}^*(\Theta^M)_x,\qquad\tau^*\Omega_{\bar{p}}^{\bar{M}}=(\mathfrak{s}^*\Omega^M)_x;\tag{2.3.34}$$

de donde $\tau^*\lambda_{\bar{p}}^{\bar{M}}=\lambda_x^M$, es decir, $\tau^*\theta_{\bar{p}}^{\bar{M}}=\mathfrak{s}^*\theta_x^M$ y $\tau^*\omega_{\bar{p}}^{\bar{M}}=\mathfrak{s}^*\omega_x^M$. Las igualdades (1.4.16) y (1.4.20) implican que (2.3.34) es equivalente a

$$\tau^*\Theta_{\bar{p}}^{\bar{M}}=(\mathfrak{s}^*\Theta^M)_x,\qquad\tau^*\Omega_{\bar{p}}^{\bar{M}}=(\mathfrak{s}^*\Omega^M)_x,\tag{2.3.35}$$

donde $\Omega^M,\Omega^{\bar{M}},\Theta^M,\Theta^{\bar{M}}$ denotan respectivamente las formas de curvatura de $\hat{\nabla}$ en $\mathrm{FR}(\hat{E})$ y de $\bar{\nabla}$ en $\mathrm{FR}(T\bar{M})$, la forma de $\iota$-torsión de $\hat{\nabla}$ en $\mathrm{FR}(\hat{E})$ y la forma de curvatura de $\bar{\nabla}$ en $\mathrm{FR}(T\bar{M})$. Es fácil ver que $\mathrm{d}\bar{\Pi}_{\bar{p}}\circ\tau=\bar{p}\circ\mathfrak{s}(x)^{-1}|_{T_xM}$; usando está igualdad, y las igualdades (1.4.33) y (1.4.34), se tiene que (2.3.35) es equivalente a

$$\bar{p}^{-1}\left(\bar{T}_y\left[\bar{p}\left(\mathfrak{s}(x)^{-1}(v),\mathfrak{s}(x)^{-1}(w)\right)\right]\right)=\mathfrak{s}(x)^{-1}(\hat{T}_x^\iota(v,w)),\tag{2.3.36}$$

$$\bar{p}^{-1}\circ\bar{R}_y\left[\bar{p}\left(\mathfrak{s}(x)^{-1}(v),\mathfrak{s}(x)^{-1}(w)\right)\right]\circ\bar{p}=\mathfrak{s}(x)^{-1}\circ\hat{R}_x(v,w)\circ\mathfrak{s}(x),\tag{2.3.37}$$

para todo $v,w\in T_xM$, donde $\hat{T}^\iota$ y $\hat{R}$ denotan respectivamente el tensor de $\iota$-torsión y el tensor de curvatura de $\hat{\nabla}$. Claramente (2.3.36) y (2.3.37) son equivalentes a

$$\bar{T}_0(\mathfrak{s}(x)^{-1}(v),\mathfrak{s}(x)^{-1}(w))=\mathfrak{s}(x)^{-1}(\hat{T}_x^\iota(v,w)),\tag{2.3.38}$$

$$\bar{R}_0(\mathfrak{s}(x)^{-1}(v),\mathfrak{s}(x)^{-1}(w))=\mathfrak{s}(x)^{-1}\circ\hat{R}_x(v,w)\circ\mathfrak{s}(x).\tag{2.3.39}$$

Finalmente, (2.3.38) es equivalente a (2.3.30) y (2.3.30) (recodar que (2.2.9) y (2.2.10)), mientras (2.3.39) es equivalente a las ecuaciones (2.3.26), (2.3.27), (2.3.28) y (2.3.29) (recuerden (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) y (2.2.8)). Esto concluye la prueba de la existencia de una solución local para el problema de la inmersión afin. $\square$

El siguiente Teorema es el resultado principal presentado [12].

**Teorema 2.3.2.** *Fijando los objetos $M, \overline{M}, \pi : E \to M, \widehat{E}, \widehat{\nabla}$, $\overline{\nabla}$, $G$, $\widehat{P}$ y $\overline{P}$ como en la definición* (2.3.6)*. Se denota por $\widehat{T}, \widehat{R}$, respectivamente los tensores de $i$-torsión y curvatura de la conexión $\widehat{\nabla}$, por $\overline{T}, \overline{R}$, respectivamente los tensores de torsión y de curvatura de la conexión $\overline{\nabla}$, donde $i : TM \to \widehat{E}$ designa la función inclusión. Suponga que $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ es una variedad infinitesimalmente homogénea y que por todo $x \in M$, $y \in \overline{M}$ y cada aplicación que preserve G-estructura $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x = \mathfrak{I}^{\overline{P}}_y \circ \sigma|_{T_xM}$
2. $\widehat{T}_x : T_xM \times T_xM \to \widehat{E}_x$ *está $\sigma$-relacionado con* $\overline{T}_y : T_y\overline{M} \times T_y\overline{M} \to T_y\overline{M}$*;*
3. $\widehat{R}_x : T_xM \times T_xM \times \widehat{E}_x \to \widehat{E}_x$ *está $\sigma$-relacionado con* $\overline{R}_y : T_y\overline{M} \times T_y\overline{M} \times T_y\overline{M} \to T_y\overline{M}$.

*Entonces, para todo $x_0 \in M$, para todo $y_0 \in \overline{M}$ y para cada aplicación que preserva G-estructura $\sigma_0 : \widehat{E}_{x_0} \to T_{y_0}\overline{M}$, existe una inmersión (local) afín, que preserva la G-estructura $(f, L)$ de $(M, E, \widehat{\nabla})$ en $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ cuyo dominio es una vecindad abierta $U$ de $x_0$ en $M$ y tal que: $f(x_0) = y_0$, $L_{x_0} = \sigma_0$.*

*Demostración.* Denotemos por $\omega^{\overline{M}}$ la forma de conexión sobre $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ correspondiente a la conexión $\mathrm{Hor}(\mathrm{FR}(T\overline{M}))$ asociada a la conexión lineal $\overline{\nabla}$ y por $\omega^M$ la forma de conexión sobre $\mathrm{FR}(\widehat{E})$ correspondiente a la conexión $\mathrm{Hor}(\mathrm{FR}(\widehat{E}))$ asociada a la conexión lineal $\widehat{\nabla}$. Denotemos también por $\theta^{\overline{M}}$ la forma canónica de $\mathrm{FR}(T\overline{M})$ y por $\theta^M$ y la forma $i$-canónica de $\mathrm{FR}(\widehat{E})$, donde $i : TM \to \widehat{E}$ designa la función inclusión. Sea $\mathfrak{s} : V \to \widehat{P}$ una sección local suave con $x_0 \in V$. Denotemos por $\lambda^{\overline{P}}$ la 1-forma sobre $\overline{P}$ obtenida por la restricción de la 1-forma $(\theta^{\overline{M}}, \omega^{\overline{M}})$ a valores en $\mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$, y denotemos por $\lambda^V$ la 1-forma $\mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$-valuada sobre $V$ definida por:

$$\lambda^V = \mathfrak{s}^*(\theta^M, \omega^M) = (\mathfrak{s}^*\theta^M, \mathfrak{s}^*\omega^M).$$

Si $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ es infinitesimalmente homogénea, existe una aplicación lineal $\mathfrak{I}_{\mathrm{o}} : \mathbb{R}^{\bar{n}} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})/\mathfrak{g}$ tal que:

$$\overline{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}} \circ \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}^{\overline{P}}_y \circ \bar{p}, \tag{2.3.40}$$

para todo $y \in \overline{M}$ y todo $\bar{p} \in \overline{P}_y$. Mostremos ahora que para todo $x \in M$ y todo $p \in P_x$ se tiene:

$$(\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x = \mathfrak{I}_{\mathrm{o}} \circ p^{-1}|_{T_xM}. \tag{2.3.41}$$

En efecto, tomando $y \in \overline{M}$, $\bar{p} \in \overline{P}_y$, sea $\sigma = \bar{p} \circ p^{-1}$. Entonces $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$ es una aplicación que preserva $G$-estructura (note que $\bar{p} = \sigma \circ p$) y por lo tanto

$$\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x = \mathfrak{I}^{\overline{P}}_y \circ \sigma\ |_{T_xM} = \mathfrak{I}^{\overline{P}}_y \circ \bar{p} \circ p^{-1}\ |_{T_xM} = \overline{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}} \circ \mathfrak{I}_{\mathrm{o}} \circ p^{-1}\ |_{T_xM},$$

y:

$$\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x = \overline{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}} \circ (\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x,$$

se sigue que

$$\overline{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}} \circ (\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x = \overline{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}} \circ \mathfrak{I}_{\mathrm{o}} \circ p^{-1}|_{T_xM},$$

lo cual muestra (2.3.41). El resto de la prueba de teorema se realizará en algunos pasos.

**Paso 1**. La tesis del teorema se obtiene si se logra mostrar la existencia de una función suave $F : U \to \overline{P}$ definida en una vecindad abierta $U$ de $x_0$ en $V$ tal que $F^*\lambda^{\overline{P}} = \lambda^V|_U$ y $F(x_0) = \sigma_0 \circ \mathfrak{s}(x_0)$.

Asuma que se da una función $F : U \to \overline{P}$ definida en una vecindad abierta $U$ de $x_0$ en $V$ tal que $F^*\lambda^{\overline{P}} = \lambda^V|_U$ y $F(x_0) = \sigma_0 \circ \mathfrak{s}(x_0)$. Sea $f = \overline{\Pi} \circ F : U \to \overline{M}$, donde $\overline{\Pi}$ denota la proyección del fibrado principal $\overline{P}$. Definimos una la función lineal en las fibras $L : \widehat{E}|_U \to f^*T\overline{M}$ por:

$$L_x = F(x) \circ \mathfrak{s}(x)^{-1} : \widehat{E}_x \to T_{f(x)}\overline{M} = (f^*T\overline{M})_x,$$

para todo $x \in U$, por lo tanto la identidad (2.3.11) se verifica. Claramente $f(x_0) = y_0$ y $L_{x_0} = \sigma_0$. Como $F$ es suave y:

$$F^*(\theta^{\overline{M}}, \omega^{\overline{M}}) = \lambda^V|_U = ((\mathfrak{s}|_U)^*\theta^M, (\mathfrak{s}|_U)^*\omega^M),$$

El Lema (2.3.1) implica que el par $(f, L)$ es un inmersión local afín de $(M, E, \widehat{\nabla})$ en $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ con dominio $U$. Como para todo $x \in U$, $\mathfrak{s}(x)$ está en $\widehat{P}_x$ y $F(x)$ está en $\overline{P}_{f(x)}$, la igualdad (2.3.11) implica que $L$ preserva $G$-estructura (ver comentario posterior a la Definición (1.3.2))

**Paso 2**. Para todo $p \in \overline{P}$, la función lineal $\lambda_p^{\overline{P}}$ envía $T_p\overline{P}$ isomorficamente en el espacio:

$$\{(u, X) \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \oplus \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}}) : \mathfrak{I}_{\mathrm{o}}(u) = X + \mathfrak{g}\}. \tag{2.3.42}$$

Esto se sigue directamente de la observación (1.5.3) y de la igualdad (2.3.40).

**Paso 3**. La 1-forma $\lambda^V$ toma valores en el espacio (2.3.42).

Sean $x \in V$ y $v \in T_xM$ fijos. Se tiene que para ver esto,

$$\lambda_x^V(v) = \big((\mathfrak{s}^*\theta^M)_x(v), (\mathfrak{s}^*\omega^M)_x(v)\big) = (\mathfrak{s}(x)^{-1} \cdot v, (\mathfrak{s}^*\omega^M)_x(v)). \tag{2.3.43}$$

Debemos verificar que

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{o}}(\mathfrak{s}(x)^{-1} \cdot v) = (\mathfrak{s}^*\omega^M)_x(v) + \mathfrak{g}. \tag{2.3.44}$$

De la definición de $\mathfrak{I}_x^{\widehat{P}}$, se tiene,

$$(\overline{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{s}(x)})^{-1}(\mathfrak{I}_x^{\widehat{P}}(v)) = (\mathfrak{s}^*\omega^M)_x(v) + \mathfrak{g}. \tag{2.3.45}$$

A partir de la identidad: (2.3.41) con $p = \mathfrak{s}(x)$ se sigue que:

$$(\overline{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{s}(x)})^{-1}(\mathfrak{I}_x^{\widehat{P}}(v)) = \mathfrak{I}_{\mathrm{o}}(\mathfrak{s}(x)^{-1} \cdot v). \tag{2.3.46}$$

**Paso 4**. Existe una función suave $F : U \to \overline{P}$ como en el paso 1.

Aplicando la Proposición 2.1.2. Puesto que $\sigma_0$ preserva $G$-estructura y $\mathfrak{s}(x_0) \in \widehat{P}$, se tiene $\sigma_0 \circ \mathfrak{s}(x_0) \in \overline{P}$; por lo tanto, una de las hipótesis de la Proposición 2.1.2 se cumple, y su tesis nos dará la función $F : U \to \overline{P}$ definida en una vecindad abierta $U$ de $x_0$ en $V$ con $F(x_0) = \sigma_0 \circ \mathfrak{s}(x_0)$ y $F^*\lambda^{\overline{P}} = \lambda^V|_U$. Sean $x \in V$, $y \in \overline{M}$, $\bar{p} \in \overline{P}y$ fijos. Por el paso 3, la función lineal $\lambda_x^V$ envía $T_xM$ en (2.3.42) y por el paso 2 la función lineal $\lambda_{\bar{p}}^{\overline{P}}$ envía $T_{\bar{p}}\overline{P}$ isomorficamente sobre (2.3.42); por lo tanto, se tiene la siguiente función lineal:

$$\tau = (\lambda_{\bar{p}}^{\overline{P}})^{-1} \circ \lambda_x^V : T_xM \to T_{\bar{p}}\overline{P}. \tag{2.3.47}$$

Para aplicar la Proposición 2.1.2 se necesita probar que:

$$\tau^* \,\mathrm{d}\,\lambda_{\bar{p}}^{\overline{P}} = \mathrm{d}\,\lambda_x^V. \tag{2.3.48}$$

Obviamente (2.3.48) es lo mismo que

$$\tau^* \,\mathrm{d}\,\theta_{\bar{p}}^{\overline{M}} = (\mathfrak{s}^* \,\mathrm{d}\,\theta^M)_x,\; \tau^* \,\mathrm{d}\,\omega_{\bar{p}}^{\overline{M}} = (\mathfrak{s}^* \,\mathrm{d}\,\omega^M)_x. \tag{2.3.49}$$

Claramente

$$\tau^* \theta_{\bar{p}}^{\overline{M}} = (\mathfrak{s}^* \theta^M)_x,\; \tau^* \omega_{\bar{p}}^{\overline{M}} = (\mathfrak{s}^* \omega^M)_x,$$

así que (2.3.49) es equivalente a

$$\tau^*(\mathrm{d}\,\theta^{\overline{M}} + \omega^{\overline{M}} \wedge \theta^{\overline{M}})_{\bar{p}} = (\mathfrak{s}^*(\mathrm{d}\,\theta^M + \omega^M \wedge \theta^M))_x, \tag{2.3.50}$$

$$\tau^*(\mathrm{d}\,\omega^{\overline{M}} + \frac{1}{2}\omega^{\overline{M}} \wedge \omega^{\overline{M}})_{\bar{p}} = (\mathfrak{s}^*(\mathrm{d}\,\omega^M + \frac{1}{2}\omega^M \wedge \omega^M))_x. \tag{2.3.51}$$

Pero, por (1.4.16) y (1.4.20) las identidades (2.3.50), (2.3.51) coinciden respectivamente con

$$\tau^* \Theta_{\bar{p}}^{\overline{M}} = (\mathfrak{s}^* \Theta^M)_x,\; \tau^* \Theta_{\bar{p}}^{\overline{M}} = (\mathfrak{s}^* \Omega^M)_x, \tag{2.3.52}$$

donde $\Theta^{\overline{M}}$ denota la forma de torsión de $\mathrm{FR}(TM)$, $\Omega^{\overline{M}}$ denota la forma de curvatrura de la conexión de $\mathrm{FR}(TM)$, $\Theta^M$ denota la forma de $i$-torsión en $\mathrm{FR}(\widehat{E})$ y $\Omega^M$ denota la forma de curvatura de la conexión de $\mathrm{FR}(\widehat{E})$. Las igualdades en (2.3.52) se cumplen si y solamente si:

$$\Theta_{\bar{p}}^{\overline{M}}\left(\tau(v), \tau(\omega)\right) = \Theta_{\mathfrak{s}(x)}^M(\mathrm{d}\mathfrak{s}_x(v), \mathrm{d}\mathfrak{s}_x(w)), \tag{2.3.53}$$

$$\Omega_{\bar{p}}^{\overline{M}}\left(\tau(v), \tau(\omega)\right) = \Omega_{\mathfrak{s}(x)}^M(\mathrm{d}\mathfrak{s}_x(v), \mathrm{d}\mathfrak{s}_x(w)), \tag{2.3.54}$$

para todo $v, w \in T_xM$. Sea $\widehat{\Pi}_{\mathrm{FR}}(\widehat{E}) \to M$ la proyección canónica; usando las identidades (1.4.34), (1.4.33) y teniendo en cuenta que $\mathrm{d}\widehat{\Pi}_{\mathfrak{s}(x)} \circ \mathrm{d}\mathfrak{s}_x$ es la aplicación identidad en $T_xM$, se obtiene que las identidades (2.3.53), (2.3.54) son equivalentes a las identidades:

$$\bar{p}^{-1}(\overline{T}_y(\mathrm{d}\,\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(v)], \mathrm{d}\,\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(w)])) = \mathfrak{s}(x)^{-1}(\widehat{T}(v, w)), \tag{2.3.55}$$

$$\bar{p}^{-1} \circ \overline{R}_y(\mathrm{d}\,\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(v)], \mathrm{d}\,\overline{\Pi}_{\bar{p}}[\tau(w)]) \circ \bar{p} = \mathfrak{s}(x)^{-1} \circ \widehat{R}_x(v, w) \circ \mathfrak{s}(x). \tag{2.3.56}$$

Computemos $\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}} \circ \tau : T_xM \to T_y\overline{M}$. Dado $u \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $X \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$ con $(u, X)$ en (2.3.42), se tiene que $(\lambda_{\bar{p}}^{\overline{P}})^{-1}(u, X) = \xi$, donde $\xi \in T_{\bar{p}}\overline{P}$ satisface

$$\theta_{\bar{p}}\overline{M}(\xi) = \bar{p}^{-1}(\mathrm{d}\,\overline{\Pi}(\xi)) = u,$$

por lo tanto:

$$(\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}} \circ (\lambda_{\bar{p}}^{\overline{P}})^{-1})(u, X) = \bar{p}(u).$$

Dando $v \in T_xM$ entonces, usando la identidad (1.4.19) se tiene que la primera componente de $\lambda_x^V(v)$ es $\mathfrak{s}(x)^{-1} \cdot v$; por consiguiente,

$$(\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}} \circ \tau)(v) = \left(\mathrm{d}\overline{\Pi}_{\bar{p}} \circ (\lambda_{\bar{p}}^{\overline{P}})^{-1} \circ \lambda_x^V\right)(v) = (\bar{p} \circ \mathfrak{s}(x)^{-1})(v).$$

Siendo $\sigma = \bar{p} \circ \mathfrak{s}(x)^{-1} : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$ entonces las identidades en (2.3.55), (2.3.56) son equivalentes a las identidades:

$$\bar{p}^{-1}\left(\overline{T}_y(\sigma(v),\sigma(w))\right) = \mathfrak{s}(x)^{-1}\left(\overline{T}_x(v,w)\right),$$

$$\bar{p}^{-1} \circ \overline{R}_y\left(\sigma(v),\sigma(w)\right) \circ \bar{p} = \mathfrak{s}(x)^{-1} \circ \widehat{R}_x(v,w) \circ s(x),$$

respectivamente. Pero estas identidades son iguales a,

$$\overline{T}_y\left(\sigma(v),\sigma(w)\right) = \sigma(\widehat{T}_x(v,w)), \tag{2.3.57}$$

$$\overline{R}_y\left(\sigma(v),\sigma(w)\right) = \sigma \circ \widehat{R}_x(v,w) \circ \sigma^{-1}. \tag{2.3.58}$$

Finalmente, dado que $\sigma$ preserva $G$-estructura, nuestra hipótesis nos dice que $\sigma^*\overline{T}_y = \widehat{T}_x$ y $\sigma^*\overline{R}_y = \widehat{R}_x$, es decir, en nuestro caso las identidades (2.3.57), (2.3.58) se cumplen. Esto concluye la prueba. $\square$

# Capítulo 3

# Variedades sub-riemannianas

## 3.1. Variedades sub-riemannianas y conexiones adaptadas

Una *variedad sub-riemanniana* es una terna $(M, \mathcal{D}, g)$, donde $M$ es una variedad suave, $\mathcal{D}$ es una distribución suave en $M$ y $g$ es una métrica riemanniana sobre el fibrado vectorial $\mathcal{D}$, la cual es denominada *la métrica sub-riemanniana*. Las secciones de $\mathcal{D}$ son nombradas *campos vectoriales horizontales.* La *forma de Levi* de la distribución $\mathcal{D}$ en un punto $x \in M$ es la aplicación bilineal:

$$\mathcal{L}_x^{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \longrightarrow T_xM/\mathcal{D}_x,$$

definida por:

$$\mathcal{L}_x^{\mathcal{D}}\left(X(x), Y(x)\right) = [X, Y](x) + \mathcal{D}_x.$$

para cada par de campos horizontales suaves $X, Y$, definidos en una vecindad abierta de $x$. Esta definición no depende de la selección de $X$ y $Y$. Si $\theta$ es una 1-forma suave sobre $M$ tal que $\theta(\mathcal{D}) = 0$, entonces:

$$\mathrm{d}\theta\mid_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x} = -\theta\left([\cdot, \cdot]\right) = -\overline{\theta}_x \circ \mathcal{L}_x^{\mathcal{D}}, \tag{3.1.1}$$

donde $\overline{\theta}_x : T_xM/\mathcal{D}_x \to \mathbb{R}$ denota la función obtenida de $\theta$ en el cociente. La distribución $\mathcal{D}$ es denominada *distribución de contacto* si su codimensión es $1$ y si la forma Levi es no-degenerada, es decir; si $\mathcal{L}_x^{\mathcal{D}}(v, w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{D}_x$ implica $v = 0$. En este caso, la forma Levi es una forma simplética sobre $\mathcal{D}$, identificando a $T_xM/\mathcal{D}_x$ con $\mathbb{R}$, por lo tanto $\dim(\mathcal{D}_x)$ es par. Se sigue de (3.1.1) que si $\theta$ es una 1-forma suave en $M$ la cual anula $\mathcal{D}$, la forma de Levi $\mathcal{L}_x^{\mathcal{D}}$ es identificada por el isomorfismo $\overline{\theta} : T_xM/\mathcal{D}_x \to \mathbb{R}$ con $\omega_x = -\mathrm{d}\theta\mid_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x}$. En particular, $\omega_x$ es una forma simplética sobre $\mathcal{D}_x$, siendo $\dim(M) = 2n + 1$. La $n$-potencia exterior $\omega_x^n$ es una forma de volumen sobre $\mathcal{D}_x$.

En este trabajo sólo serán consideradas variedades sub-riemannianas $(M, \mathcal{D}, g)$ para las cuales $\mathcal{D}$ es una distribución de contacto; estas son llamadas *variedades sub-riemannianas de contacto*. Una 1-forma suave $\theta$ sobre $M$ será denominada *forma característica para* $(M, \mathcal{D}, g)$ si $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(\theta)$ y si $\omega_x^n = c\mathcal{V}_x$ para todo $x \in M$ y alguna constante $c > 0$, donde $\omega_x = -\mathrm{d}\theta\mid_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x}$, $\dim(M) = 2n + 1$ y donde $\mathcal{V}_x$ es la forma de volumen sobre $\mathcal{D}_x$ definida por el producto interno $g_x$ y por la orientation inducida por $\omega_x^n$.

Sea supone que el anulador de $\mathcal{D} \subset TM^*$ es orientable, así, que se puede escribir $\mathcal{D}$ como el kernel de la 1-forma definida globalmente . Bajo está hipótesis, existe una única 1-forma características $\theta$. Si se asume que la 1-forma $\theta$ ha sido seleccionada, existe una única sección $\xi \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ tal que $\mathrm{d}\theta(\xi, \cdot) = 0$ y $\theta(\xi) = 1$; si $\theta(\xi) = 1$, la condición $\mathrm{d}\theta(\xi, \cdot) = 0$ es equivalente a cero en la derivada de Lie $\mathrm{L}_\xi \theta$. Se denomina a $\xi$ como *el campo característico* de $(M, \mathcal{D}, g)$ correspondiente a $\theta$. Usando el campo característico, se puede obtener una extensión de $g$ para una métrica Riemanniana sobre $M$ (también denotada por $g$) haciendo $g(\xi, \xi) = 1$ y $g(\xi, \mathcal{D}) = 0$.

Como $\omega_x = -\theta \mid_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x}$ es una forma simpletica sobre $\mathcal{D}_x$, existe una única estructura compleja $J_x$ sobre $\mathcal{D}_x$ que es ortogonal con respecto a el producto interno $g_x$, y tal que $\omega_x(\cdot, J_x \cdot)$ es un producto interno definido positivo. Se denomina $J$ *la estructura compleja característica* de $(M, \mathcal{D}, g)$.

**Observación 3.1.1.** *En general no es verdad que $g(J\cdot, \cdot)$ es un multiplo escalar de $\mathrm{d}\theta \mid_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}$, pero es cierto para los modelos que se estudiarán en la sección 3.2. Específicamente, cuando el modelo cumple las siguientes igualdades:*

$$\mathrm{d}\theta \mid_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}} = -2g(J\cdot, \cdot). \tag{3.1.2}$$

Sea $G$ el subgrupo de Lie $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2n+1})$ definido por:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : T \in \mathrm{U}(\mathbb{R}^n) \right\} \tag{3.1.3}$$

donde $\mathrm{U}(\mathbb{R}^n)$ denota el grupo de Lie isométrico $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ que conmuta con la estructura compleja canónica $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ definida por:

$$J(x, y) = (-y, x), \;\; x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.4}$$

Se tiene así una $G$-estructura $P$ en $(M, \mathcal{D}, g)$ que consiste de los isomorfismo lineales $p : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $p$ transforma el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2n+1}$ en la métrica riemanniana de $M$;
2. $p$ se transforma en el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ en $\xi(x)$;
3. la restricción de $p$ a el subespacio generado por los primeros $2n$ vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ transforma la estructura compleja (3.1.4) a la estructura característica compleja de $(M, \mathcal{D}, g)$.

Se denomina $P$ *la $G$-estructura característica* de $(M, \mathcal{D}, g)$. Lo siguientes resultados se demuestran en [7]:

**Teorema 3.1.1.** *Dada una variedad sub-riemanniana de contacto $(M, \mathcal{D}, g)$ con 1-forma característica $\theta$ y campo característicos $\xi$, existe una única conexión $\nabla$ sobre $TM$ tal que:*

*(a) $\mathcal{D}$ es $\nabla$-paralelo, es decir, la derivada covariante del campo vectorial horizontal (a través de cualquier campo vectorial sobre $M$) es horizontal; así $\nabla$ se restringe a una conexión en el fibrado vectorial $\mathcal{D}$;*

*(b) el campo vectorial característico $\xi$ y la métrica sub-riemanniana $g$ son paralelos;*

*(c) $T(X,Y) = \mathrm{d}\theta(X,Y)\xi$, para $X, Y \in \mathcal{D}$, donde $T$ denota la torsión de $\nabla$;*

*(d) el endomorfismo $T(\xi,\cdot)$ de $TM$ preserva $\mathcal{D}$ y su restricción a $\mathcal{D}$ es $g$-simétrico.*

La conexión dada por el teorema 3.1.1 es denominada *la conexión adaptada* de la variedad sub-riemanniana $(M,\mathcal{D},g)$ y no depende de la selección de la 1-forma característica $\theta$. El endomorfismo $g$-simétrico $T(\xi,\cdot)$ se denomina *sub-torsión* de $(M,\mathcal{D},g)$ y es denotado por $\tau$; note que, como $T(\xi,\xi)=0$, el endomorfismo $T(\xi,\cdot)$ de $TM$ es simétrico con respecto a la métrica riemanniana $g$.Además como $\mathcal{D}$, $\xi$ y la métrica sub-riemanniana $g$ son $\nabla$-paralelo, la métrica riemanniana $g$ es $\nabla$-paralela. Si $\nabla^{\mathrm{LC}}$ denota conexión Levi-Civita de la métrica Riemanniana $g$, se establece en [7] que el tensor $\tau$ está relacionado con la derivada de Lie de $g$ por

$$g\left(\tau(X),Y\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{L}_\xi g)(X,Y), \text{ para } X,Y \in \mathcal{D}. \tag{3.1.5}$$

$$\nabla_X Y = \pi^{\mathcal{D}}\left(\nabla_X^{\mathrm{LC}}\right), \tag{3.1.6}$$

donde $X, Y$ son campos vectoriales horizontal y $\pi^{\mathcal{D}}$ denota la proyección ortogonal sobre $\mathcal{D}$ además,

$$\nabla_\xi X = [\xi, X] + \tau(X),$$

donde $X$ es una campo vectorial horizontal.

## 3.2. Modelos con curvatura seccional constante

Se presenta a continuación tres ejemplos de variedades de contacto sub-riemannianas $(M,\mathcal{D},g)$ cuya sub-torsión $\tau$ es nula y cuya *curvatura seccional holomorfa* es constante; es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$g\left(R_x(X,J(X))X,J(X)\right) = -cg(X,X)^2, \tag{3.2.1}$$

para cualquier $x \in M$, y cualquier $X \in \mathcal{D}_x$, donde $R$ denota el tensor de curvatura de la conexión adaptada seleccionada. Cualquier variedad sub-riemanniana con sub-torsión nula y curvatura holomorfa constante es localmente equivalente a alguna de las variedades sub-riemannianas presentadas a continuación (ver [7]).

### 3.2.1. La curvatura modelo cero: el grupo sub-riemanniano de Heisenberg.

Sea $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ una forma simplectica canónica de $\mathbb{R}^{2n}$ definida por

$$\omega\left((x,y),(x',y')\right) = \langle x, y'\rangle - \langle x', y\rangle,$$

para todo $x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto euclidiano canónico de $\mathbb{R}^n$. El *$n$-ésimo grupo de Heisenberg* es el grupo de Lie $H^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ dotado con el producto

$$(z, t) \times (z', t') = (z + z', t + t'\omega(z, z')), \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n}, t, t' \in \mathbb{R}.$$

Su álgebra de Lie es $\mathfrak{h}^n = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ dotado con el corchete de Lie;

$$[(Z, T), (Z', T')] = 2\,(0, \omega(Z, Z')), \quad Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n}, T, T' \in \mathbb{R}.$$

Considerando la distribucción invariante a izquierda $\mathcal{D}$ sobre $H^{2n+1}$ que satisface

$$\mathcal{D}_{(0,0)} = \mathbb{R}^{2n} \times \{0\},$$

dotada con la métrica sub-riemanniana invariante a izquierda $g$ tal que $g_{(0,0)}$ es el producto euclidiano interno de $\mathcal{D}_{(0,0)} \cong \mathbb{R}^{2n}$. Seleccionado la 1-forma característica $\theta$ para que sea invariante a izquierda sobre $H^{2n+1}$ y tal que

$$\theta_{(0,0)}\,(Z, T) = T, \quad Z \in \mathbb{R}^{2n}, T \in \mathbb{R};$$

la 2-forma $\mathrm{d}\theta$ es la 2-forma invariante a izquierda sobre $H^{2n+1}$ tal que

$$\mathrm{d}\theta_{(0,0)}\,((Z, T), (Z', T')) = -2\omega(Z, Z'), \quad Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n}, T, T' \in \mathbb{R},$$

y el campo vectorial característico $\xi$ es invariante a izquierda sobre $H^{2n+1}$ y es tal que

$$\xi_{(0,0)} = (0, 1).$$

La estructura compleja característica de $H^{2n+1}$ es el endomorfismo invariante a izquierda de $\mathcal{D}$ donde el valor en $(0, 0)$ es identificado con la estructura compleja canónica de $\mathbb{R}^{2n}$ (ver (3.1.4)). En este caso, la conexión adaptada $\nabla$ de $H^{2n+1}$ es simplemente la conexión canónica invariante a izquierda, es decir, la conexión para la cual los campos vectoriales invariantes a izquierda son paralelos. La sub-torsión $\tau$ es cero y el tensor curvatura $R$ de $\nabla$ es cero.

Hay que probar que $H^{2n+1}$ dotado con la conexión adaptada y con la $G$-estructura característica es *homogénea*. Observe que las translaciones a izquierda de $H^{2n+1}$ son difeomorfismos afines que preservan la $G$-estructura. En este sentido para obtener la homogeneidad solo se tiene que probar que los difeomorfismos afines que preserva la $G$-estructura actúan transitivamente sobre los $G$-referenciales en la identidad $(0, 0)$. Es fácil ver que el grupo $G$ en si mismo (ver (3.1.3)) consiste de los difeomorfismos afines que preservan la $G$-structura. El grupo $G$ claramente actúa transitivamente sobre los $G$-referenciales en la identidad. Los tensores característicos de $H^{2n+1}$ están dados por

$$\mathbb{R}_{\mathrm{o}} = 0, \qquad \mathfrak{I}_{\mathrm{o}} = 0, \qquad T_{\mathrm{o}}\,((z, t), (z'.t')) = -2\langle J(z), z' \rangle (0, 1), \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n}, t, t' \in \mathbb{R},$$

donde $J$ es la estructura canónica compleja de $\mathbb{R}^{2n}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto euclidiano interno de $\mathbb{R}^{2n}$.

### 3.2.2. El modelo de curvatura positiva: esfera sub-riemanniana.

La esfera unitaria de $\mathbb{R}^{2n+2}$ está definida por:

$$\mathrm{S}^{2n+1} = \{z \in \mathbb{R}^{2n+2} : \langle z, z\rangle = 1\}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto euclidiano canónico interno de $\mathbb{R}^{2n+2}$. Sea $J : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ la estructura compleja canónica de $\mathbb{R}^{2n+2}$ (ver (3.1.4)). Considerando la distribución $\mathcal{D}$ sobre $\mathrm{S}^{2n+1}$ definida por

$$\mathcal{D}_z = T_z\mathrm{S}^{2n+1} \cap J\left(T_z\mathrm{S}^{2n+1}\right) = \{z, J(z)\}^{\perp},\ z \in \mathrm{S}^{2n+1},$$

donde el complemento ortogonal es tomado con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La métrica sub-riemanniana $g$ viene dada por la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathcal{D}$. La 1-forma característica $\theta$ sobre $\mathrm{S}^{2n+1}$ se selecciona de tal forma que;

$$\theta_z(v) = \langle J(z), v\rangle,\ z \in \mathrm{S}^{2n+1}, v \in T_z\mathrm{S}^{2n+1} = z^{\perp},$$

y su diferencial exterior es dada por

$$\mathrm{d}\theta_z(v,w) = 2\langle J(v), w\rangle,\ z \in \mathrm{S}^{2n+1}, v, w \in T_z\mathrm{S}^{2n+1},$$

y el campo vectorial característico $\xi$ es

$$\xi(z) = J(z),\ z \in \mathrm{S}^{2n+1}.$$

La estructura compleja característica de $\mathrm{S}^{2n+1}$ es la restricción de $-J$ a $S^{2n+1}$. La extensión riemanniana de la métrica sub-riemanniana $g$ es simplemente la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si se denota por $\nabla^{\mathrm{LC}}$ su conexión Levi-Civita, la conexión adaptada $\nabla$ puede ser escrita como

$$\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}} + \mathfrak{t}$$

donde $\mathfrak{t}$ denota el tensor dado por

$$\mathfrak{t}(X,Y) = \langle J(X), Y\rangle\xi,\ \mathfrak{t}(\xi, X) = -J(X),\ \mathfrak{t}(\xi,\xi) = 0,$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}$. La sub-torsión $\tau$ es nula. El tensor de curvatura $R$ de $\nabla$ es dado por:

$$\mathfrak{t}(X,Y) = \langle J(X), Y\rangle\xi,\ \mathfrak{t}(\xi, X) = -J(X),\ \mathfrak{t}(\xi,\xi) = 0,$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}$. La sub-torsión $\tau$ nula. El tensor de curvatura $R$ de $\nabla$ es dado por

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - 2g\left(J(X), Y\right)J(Z) \\ &\quad + g\left(J(Y), Z\right)J(X) - g\left(J(X), Z\right)J(Y), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{D}$. Además:

$$R(\xi,\cdot) = 0,\ R(\cdot,\cdot)\xi = 0.$$

Observe que (3.2.1) se cumple con $c = 2$.

La esfera $\mathrm{S}^{2n+1}$ dotada con la conexión adaptada y la $G$-estructura característica es homogénea por que el grupo $\mathrm{U}(n+1)$ de isometrías lineales de $\mathbb{R}^{2n+2}$, que conmutan con la estructura compleja canónica actuando sobre $\mathrm{S}^{2n+1}$ por difeomorfismo afines, que preservan la $G$-estructura transitivamente sobre los referenciales de la $G$-estructura. Los tensores característicos de $\mathrm{S}^{2n+1}$ están dador por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{\mathrm{o}} &= 0 \\ R_{\mathrm{o}}\left((z_1,t_1)(z_2,t_2)\right)(z_3,t_3) &= \langle z_2,z_3\rangle(z_1,0)\langle z_1,z_3\rangle(z_2,0) - 2\langle J(z_1),z_2\rangle(J(z_3),0) \\ &\quad +\langle J(z_2),z_3\rangle(J(z_1),0) - \langle J(z_1),z_3\rangle(J(z_2),0), \\ T_{\mathrm{o}}\left((z,t)(z',t')\right) &= -2\langle J(z),z'\rangle(0,1), \end{aligned}$$

para todo $z, z_1, z_2, z_3, z' \in \mathbb{R}^{2n}, t, t', t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.

### 3.2.3. El modelo de curvatura negativa: sub-riemannianiano Anti de Sitter.

Aquí, se denotará por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^{2n+2}$ definida por

$$\langle z, z'\rangle = -z_1 z_1' - z_{n+2}z_{n+2}' + \sum_{i=2}^{n+1}(z_i z_i' + z_{n+1+i}z_{n+1+i}'), \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n+2}.$$

La restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a la variedad lorentziana conocida como el espacio-tiempo *Anti de Sitter :*

$$\mathrm{C}^{2n+1} = \{z \in \mathbb{R}^{2n+2} : \langle z, z\rangle = -1\}.$$

Note que $\mathrm{C}^{2n+1}$ no es simplemente conexa y es difeomorfa a $\mathbb{R}^{2n} \times \mathrm{S}^1$.

Sea $J : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ la estructura compleja de $\mathbb{R}^{2n+2}$ definida en (3.1.4). Observe que $J$ es antisimétrica y ortogonal con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se considera la distribucción $\mathcal{D}$ sobre $\mathrm{C}^{2n+1}$ definida por

$$\mathcal{D}_z = T_z\mathrm{C}^{2n+1} \cap J\left(\mathrm{C}^{2n+1}\right) = \{z, J(z)\}^{\perp}, \ \ z \in \mathrm{C}^{2n+1},$$

donde el complemento ortogonal es tomado con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La métrica sub-riemanniana $g$ es dada por la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathcal{D}$. En general, si se aplica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $z$ y $J(z)$ es negativo para $z \in \mathrm{C}^{2n+1}$ y , la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\{z, J(z)\}^{\perp}$ es definida positiva. La 1-forma característica $\theta$ sobre $\mathrm{C}^{2n+1}$ es definida por

$$\theta_z(v) = \langle J(z), v\rangle, \ \ z \in \mathrm{C}^{2n+1}, v \in T_z\mathrm{C}^{2n+1} = z^{\perp},$$

su diferencial exterior está dada por;

$$\mathrm{d}\theta_z(v,w) = 2\langle J(v), w\rangle, \ \ z \in \mathrm{C}^{2n+1}, v, w \in T_z\mathrm{C}^{2n+1},$$

y el campo vectorial característico $\xi$ es:

$$\xi(z) = -J(z), \ \ z \in \mathrm{C}^{2n+1}.$$

La estructura característica compleja de $\mathrm{C}^{2n+1}$ es igual a la restricción de $-J$. La extensión lorentziana de la métrica sub-riemanniana $g$ es simplemente la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Denotado por $\nabla^{\mathrm{LC}}$ la conexión Levi-Civita de la *extensión lorentziana*, la conexión adaptada $\nabla$ puede ser escrita como

$$\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}} + \mathfrak{t}$$

donde el tensor $\mathfrak{t}$ es dado por

$$\mathfrak{t}(X,Y) = \langle J(X), Y\rangle \xi, \;\; \mathfrak{t}(X,\xi) = \mathfrak{t}(\xi, X) = J(X), \;\; \mathfrak{t}(\xi,\xi) = 0,$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}$. La sub-torsión es nula. El tensor de curvatura $R$ de $\nabla$ viene dado por:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z \;\; &= \;\; g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + 2g\left(J(X),Y\right)J(Z) - g\left(J(Y),Z\right)J(X) \\ &\quad\; + g\left(J(X),Z\right)J(Y), \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}$. Además:

$$R(\xi,\cdot) = 0, \;\; R(\cdot,\cdot)\xi = 0.$$

Note que (3.2.1) se cumple con $c = -2$. El espacio $\mathrm{C}^{2n+1}$ dotado con la conexión adaptada y la $G$-estructura característica es homogénea, por que el grupo $\mathrm{U}(n+1)$ de las isometrias lineales de $\mathbb{R}^{2n+2}$, conmuta con la estructura compleja actuando sobre $\mathrm{C}^{2n+1}$ por difeomorfismos afines que preserva la $G$-estructura y su acción es transitiva sobre los referenciales de la $G$-estructura. Los tensores característicos de $\mathrm{C}^{2n+1}$ están dados por

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{\mathrm{o}} \;\; &= \;\; 0 && (3.2.3) \\ R_{\mathrm{o}}\left((z_1,t_1)(z_2,t_2)\right)(z_3,t_3) \;\; &= \;\; \langle z_1, z_3\rangle(z_2,0) - \langle z_2, z_3\rangle(z_1,0) && (3.2.4) \\ &\quad\; + 2\langle J(z_1), z_2\rangle(J(z_3),0) && (3.2.5) \\ &\quad\; - \langle J(z_2), z_3\rangle(J(z_1),0) + \langle J(z_1), z_3\rangle(J(z_2),0), && (3.2.6) \\ T_{\mathrm{o}}\left((z,t)(z',t')\right) \;\; &= \;\; -2\langle J(z), z'\rangle(0,1) && (3.2.7) \end{aligned}$$

para todo $z, z_1, z_2, z_3, z' \in \mathbb{R}^{2n}, t, t', t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.

# Capítulo 4

# El problema de inmersiones sub-riemannianas

En este capítulo se estudiará el problema de inmersiones isométricas de variedades riemanianas en variedades sub-riemanianas.

## 4.1. Inmersiones isométricas de variedades riemannianas

Sean $(M^0, g^0)$ una variedad riemanniana y $(M, \mathcal{D}, g)$ una variedad sub-riemanniana. Por una *inmersión isométrica* de $(M^0, g^0)$ en $(M, \mathcal{D}, g)$ se entenderá por una aplicación suave $f : M^0 \to M$ tal que para todo $x \in M^0$, la imagen de $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}M$ está contenida en $\mathcal{D}_{f(x)}$ y

$$g_{f(x)}\big(\mathrm{d}f(x) \cdot v, \mathrm{d}f(x) \cdot w\big) = g_x^0(v, w) \tag{4.1.1}$$

para todo $v, w \in T_xM^0$. Se asume que $(M, \mathcal{D}, g)$ es una variedad de contacto sub-riemanniana dotada con una conexión adaptada como se vio en 3.1.1 y con una extensión riemanniana de $g$ como las presentadas en la sección 3.2. Se define el *fibrado normal* $f^\perp \to M^0$ para una inmersión isométrica $f$ por

$$f_x^\perp = \mathrm{d}f(x)(T_xM^0)^\perp \subset T_{f(x)}M$$

para todo $x \in M^0$, donde el complemento ortogonal de $\mathrm{d}f(x)(T_xM^0)$ es tomado con respecto a la extensión riemanniana de $g$. Además, *la segunda forma fundamental para la inmersión isométrica* $f$ *es*:

$$\alpha_x^f : T_xM^0 \times T_xM^0 \to f_x^\perp, \quad x \in M^0, \tag{4.1.2}$$

donde $\alpha^f(X,Y)$ se calcula como la proyección ortogonal de la derivada covariante[1] $\nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big)$ sobre $f^\perp$, donde $X,Y$ son campos vectoriales suaves sobre $M^0$. Como $\mathcal{D}$ es $\nabla$-paralelo y $\mathrm{d}f(TM^0)\subset\mathcal{D}$ se tiene

$$\alpha_x^f(T_xM^0\times T_xM^0)\subset\mathcal{D}_{f(x)}=\xi\big(f(x)\big)^\perp, \tag{4.1.3}$$

donde $\xi$ denota el campo vectorial característico de $(M,\mathcal{D},g)$. Además, si denotamos por $\theta$ la 1-forma característica de $(M,\mathcal{D},g)$ se tiene que $f^*\theta=0$ y por lo tanto

$$f^*\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}(f^*\theta)=0, \tag{4.1.4}$$

de donde se deduce que $\mathrm{d}f_x(T_xM^0)$ es un subespacio isotrópico para la forma simpletica $\mathrm{d}\theta_x\mid_{\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_x}$ y su dimensión es mayor que la dimensión de $\mathcal{D}_x$.

**Corolario 4.1.1.** *Si existe una inmersión isométrica de una variedad riemanniana $(M^0,g^0)$ en una variedad de contacto sub-riemanniana $(M,\mathcal{D},g)$, entonces*

$$\dim(M^0)\leq\frac{1}{2}\big(\dim(M)-1\big). \tag{4.1.5}$$

Observe que si $\alpha^f$ no es la segunda forma fundamental de la inmersión isométrica $f$ de $(M^0,f^0)$ en $(M,\mathcal{D},g)$, entonces $\nabla$ no es la conexión Levi-Civita de la extesión riemanniana de $g$. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado

**Lema 4.1.1.** *Si $f:M^0\to M$ es una inmersión isométrica de una variedad riemanniana $(M^0,g^0)$ en una variedad de contacto sub-riemanniana $(M,\mathcal{D},g)$ entonces la segunda forma fundamental $\alpha^f$ es simétrica. Además, denotando por $\nabla^0$ la conexión Levi-Civita de $(M^0,g^0)$, se tiene que para cualquier par de campos vectoriales suaves $X,Y$ en $M^0$, la proyección ortogonal de $\nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big)$ sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$ es igual a $\mathrm{d}f\big(\nabla_X^0Y\big)$.*

*Demostración.* De la parte (c) del teorema 3.1.1 y de la igualdad (4.1.4), se concluye que la torsión $T$ de la conexión adaptada se anula sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$. Así, para cada par de campos vectoriales $X,Y$ sobre $M^0$ se tiene

$$\nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big)-\nabla_Y\big(\mathrm{d}f(X)\big)=\mathrm{d}f\big([X,Y]\big)\in\mathrm{d}f(TM) \tag{4.1.6}$$

y por lo tanto $\alpha^f(X,Y)-\alpha^f(Y,X)=0$. Finalmente, $g$ es paralelo con respecto a $\nabla$, $T$ se anula sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$, la conexión sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$ dada por la proyección ortogonal $\nabla$ es $g^0$-paralelo y tiene torsión nula. Por lo tanto, esta es la conexión Levi-Civita de $g^0$. $\square$

**Observación 4.1.1.** *Dada una inmersión isométrica $f$ de $(M^0,g^0)$ en una variedad de contacto sub-riemanniana $(M,\mathcal{D},g)$, la* conexión normal *de $f$ es la conexión $\nabla^\perp$ sobre el fibrado normal $f^\perp\to$*

[1] Aquí, se usa el simbolo $\nabla$ para denotar la conexión inducida por $\nabla$ sobre el fibrado vectorial $f^*TM$ y los campos vectoriales a través de $f$ se identifican como secciones este fibrado vectorial.

*$M^0$ obtenido de tomar la proyección ortogonal de la conexión adaptada $\nabla$; esto es, si $X$ es un campo vectorial suave sobre $N$ y $\eta : M^0 \to f^\perp$ es una sección suave del fibrado normal entonces $\nabla^\perp_X \eta$ es la proyección ortogonal de $\nabla_X \eta$ sobre $f^\perp$. Además, la estructura riemanniana sobre $f^\perp$ obtenida de tomar la restricción de $g$ es paralelo con respecto a la conexión normal $\nabla^\perp$ y el campo vectorial característico $\xi$ de $(M, \mathcal{D}, g)$ también es $\nabla^\perp$-paralela.*

## 4.2. El Problema de inmersiones isométricas de variedades riemannianas en variedades sub-Riemannianas

A continuación, se describirá la configuración básica para el problema que consiste en encontrar una inmersión isométrica entre una variedad de Riemann (con segunda forma fundamental, con conexión normal, con campo característico y con estructura compleja fijas) en una variedad sub-riemannian de contacto. Se denota por el símbolo $Q_c^{2n+1}$ a cualquiera de los tres modelos de variedades de contacto sub-riemannianas con sub-torsion nula y curvatura holomorfa constante $c$, presentadas en la sección 3.2. También denotaremos por $\mathcal{D}$ la distribución de contacto de $Q_c^{2n+1}$, por $\nabla$ la conexión adaptada de $Q_c^{2n+1}$ y por $J$ la estructura característica de $Q_c^{2n+1}$.
Considerando los siguientes objetos:

1. Una variedad riemanniana $k$-dimensional $(M^0, g^0)$, con conexión Levi-Civita $\nabla^0$ $(k \leq n)$;
2. un fibrado vectorial $(E, g^E)$ sobre $M^0$ de rango $2n + 1 - k$;
3. una conexión $\nabla^E$ sobre $E$ para el cual $g^E$ es paralelo;
4. una sección suave $\nabla^E$-paralela $\xi^0$ de $E$ con $g^E(\xi^0, \xi^0) = 1$;
5. un tensor suave $\alpha^0$ tal que para todo $x \in M^0$, $\alpha^0_x : T_xM^0 \times T_xM^0 \to \big(\xi^0(x)\big)^\perp \subset E_x$ es una función simétrica bilineal;
6. un endomorfismo suave $J^0$ del fibrado vectorial $\mathcal{D}^0 = TM^0 \oplus (\xi^0)^\perp$ tal que para todo $x \in M^0$, $J^0_x$ es una estructura compleja sobre $\mathcal{D}^0_x$ ortogonal con respecto a $g^0_x \oplus g^E_x$.

Se entenderá por una *solución para el problema de inmersiones isométricas riemannianas/sub-riemannianas $Q_c^{2n+1}$ con los datos iniciales (1)-(6)*, a un par $(f, L)$, donde $f : M^0 \to Q_c^{2n+1}$ es una inmersión isométrica y $L : E \to f^\perp$ es un fibrado vectorial isométrico que satisface las siguientes condiciones:

(a) $L$ transforma a $\nabla^E$ en $\nabla^\perp$;

(b) para todo $x \in M^0$, $L_x\big(\xi^0(x)\big) = \xi\big(f(x)\big)$;

(c) para todo $x \in M^0$, $L_x \circ \alpha^0_x = \alpha^f_x$;

(d) la restricción de $\mathrm{d}f(x) \oplus L_x : T_xM^0 \oplus E_x \to T_{f(x)}Q_c^{2n+1}$ a $\mathcal{D}^0_x$ transforma a $J^0_x$ en $J_{f(x)}$.

Del resultado del lema 4.1.1, de la ecuación (4.1.3) y de la Observación 4.1.1, se sigue, que la hipótesis que $g^E$ y $\xi^0$ $\nabla^E$-paralelos y la hipótesis que $\alpha^0$ es simétrica y $(\xi^0)^\perp$-valuada son necesarias para la existencia de una solución para el problema de inmersiones isométricas riemanninas/sub-riemannianas. También, la hipótesis de $k \leq n$ es necesaria por corolario 4.1.1. Otra condición que es necesaria para la existencia de una solución para el problema de inmersiones isométricas riemannianas/sub-riemannianas es

$$J_x^0(T_xM^0) \subset \big(\xi^0(x)\big)^\perp \subset E_x, \quad x \in M^0. \tag{4.2.1}$$

Observe que $g(J\cdot,\cdot)$ es un mútiplo escalar de $\mathrm{d}\theta \mid_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}$ y se deduce a partir de (4.1.4) que $g(J\cdot,\cdot)$ se anula sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$, es decir, para todo $x \in M^0$ se tiene $J_x\big(\mathrm{d}f(T_xM^0)\big)$ ortogonal a $\mathrm{d}f(T_xM^0)$. Y en virtud de (4.2.1), se puede descomponer el endomorfismo $J^0 : TM^0 \oplus (\xi^0)^\perp \to TM^0 \oplus (\xi^0)^\perp$ como sigue:

$$J^0 \cong \begin{pmatrix} 0 & -J_1^t \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.2}$$

donde $J_1 : TM^0 \to (\xi^0)^\perp$ es un morfismo de fibrados vectoriales, $J_1^t : (\xi^0)^\perp \to TM^0$ es la transpuesta de $J_1$ y $J_2 : (\xi^0)^\perp \to (\xi^0)^\perp$ es un morfismo de fibrados vectoriales anti-simétricos. La condición que $J^0$ sea una estructura compleja es equivalente a:

1. $J_1$ es una isometría sobre un subfibrado $J_1(TM^0)$ de $(\xi^0)^\perp$;

2. $J_2$ se anula sobre $J_1(TM^0)$;

3. la restrición de $J_2$ a $\big(J_1(TM^0)\big)^\perp$ es una estructura compleja.

## 4.3. Existencia de soluciones para el problema de inmersiones isométricas riemannianas/sub-riemannianas

En el siguiente teorema se presentan las condiciones necesarias y suficientes para las existencias de una solución para el problema de inmersiones isométricas Riemannianas/Sub-riemannianas.

**Teorema 4.3.1.** *Suponga los datos (1) - (6) para el problema de inmersiones isométricas de variedades riemmanianas a variedades sub-riemannianas, y suponga que $J^0$ es descompuesto como en* (4.2.2) *y $M^0$*

*simplemente conexo. Entonces existe una solución $(f, L)$ si y sólo si se cumple las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} g_x^E\big(R_x^0(u,v)w,z\big) &= g_x^E\big(\alpha_x^0(v,w),\alpha_x^0(z,u)\big) - g_x^E\big(\alpha_x^0(u,w),\alpha_x^0(v,z)\big) \\ &\quad +c\big[g_x^0(v,w)g_x^0(u,z) - g_x^0(u,w)g_x^0(v,z)\big]; \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

$$\big(\nabla^{\otimes}\alpha^0\big)_x(u,v,w) = \big(\nabla^{\otimes}\alpha^0\big)_x(v,u,w); \tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned} g_x^E\big(R_x^E(u,v)\epsilon,\eta\big) &= g_x^0\big(A_x^0(v,\epsilon),A_x^0(u,\eta)\big) - g_x^0\big(A_x^0(u,\epsilon),A_x^0(v,\eta)\big) \\ &\quad +c\big[g_x^E\big(J_1(v),\epsilon\big)g_x^E\big(J_1(u),\eta\big) \\ &\quad -g_x^E\big(J_1(u),\epsilon\big)g_x^E\big(J_1(v),\eta\big)\big]; \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

$$g_x^E\big(\alpha_x^0(u,v),J_1(w)\big) = g_x^E\big(\alpha_x^0(u,w),J_1(v)\big); \tag{4.3.4}$$

$$\big(\nabla^{0E}J_1\big)(u,v) = J_2\big(\alpha_x^0(u,v)\big); \tag{4.3.5}$$

$$0 = g_x^E\Big(\big(\nabla^E J_2\big)\left(u,J_1(v)\right),J_1(w)\Big); \tag{4.3.6}$$

$$\Big(\nabla^E J_2\Big)\big(u,J_1(v)\big) - \alpha_x^0(u,v) \in J_1(T_xN); \tag{4.3.7}$$

*para todo $x \in M^0$, $u,v,w,z \in T_xM^0$, $\epsilon,\eta \in E_x$. Aquí $R^0$ denota el tensor de curvatura de $\nabla^0$, $R^E$ denota el tensor de curvatura de $\nabla^E$, $A_x^0 : T_xM^0 \times E_x \to T_xM^0$ denota la función bilineal definida por*

$$g_x^E\big(\alpha_x^0(u,v),\epsilon\big) = -g_x^0\big(A_x^0(u,\epsilon),v\big), \quad u,v \in T_xM^0, \epsilon \in E_x,$$

*$\nabla^{\otimes}$ denota la conexión sobre el fibrado vectorial $(TM^0)^* \otimes (TM^0)^* \otimes E$ inducida por las conexiones $\nabla^0$ y $\nabla^E$, y $\nabla^{0E}$ denota la conexión sobre el fibrado vectorial $(TM^0)^* \otimes E$ inducida por $\nabla^0$ y $\nabla^E$.*

*Demostración.* Este resultado es una aplicación del teorema 2.3.1. Considere el fibrado vectorial $\widehat{E} = TM^0 \oplus E$ sobre $M^0$ dotado con la conexión $\widehat{\nabla}$ que hace $g^0 \oplus g^E$ paralelo y tiene componentes $\nabla^0, \nabla^E$ y $\alpha^0$. Sea $G$ el grupo de Lie definido en (3.1.3). Recuerde que las variedades de contacto $Q_c^{2n+1}$ están dotados con la $G$-estructura característica $P$ y que la tripleta $(Q_c^{2n+1}, \nabla, P)$ es homogénea. Ll fibrado vectorial $\widehat{E}$ se puede dotar de la $G$-estructura que consiste de los isomorfismos lineales $p : R^{2n+1} \to \widehat{E}_x$, $x \in M^0$ tal que:

- $p$ transforma el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2n+1}$ en $g_x^0 \oplus g_x^E$;
- $p$ transforma el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ en $\xi^0(x)$;
- la restricción de $p$ sobre el espacio generado por los primeros $2n$ vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ transforma la estructura compleja (3.1.4) en $J_x^0$.

En virtud del Teorema 2.3.1, se establece que la existencia de una solución $(f, L)$ para el problema de inmersiones isométricas de variedades riemannianas en variedades sub-riemannianas es equivalente a las ecuaciones (2.3.26)–(2.3.32). Por un cálculo sencillo demuestra que la ecuación (2.3.26) es equivalente a (4.3.1), la ecuación (2.3.27) es equivalente a (4.3.3) y las ecuaciones (2.3.28), (2.3.29) son equivalentes a (4.3.2). La ecuación (2.3.30) es automáticamente satisfecha, porque la torsion de $\widehat{\nabla}$ no tiene componente en $TM^0$ y $\nabla^0$ no tiene torsión. Además, sigue de (4.2.1) que el lado izquierdo de (2.3.31) se anula y de la simetría de $\alpha^0$ el lado derecho también sea anula. Finalmente, la ecuación (2.3.32) es equivalente a las siguientes condiciones:

(a) La estructura riemanniana $g^0 \oplus g^E$ es $\widehat{\nabla}$-paralelo;

(b) $\xi^0$ es $\widehat{\nabla}$-paralelo;

(c) $J^0$ is $\widehat{\nabla}$-paralelo.

La condición $(a)$ está garantizada por la construcción de $\widehat{\nabla}$. La condición $(b)$ se sigue del hecho que $\xi^0$ es $\nabla^E$-paralelo y que $\alpha^0$ toma valores en el complemento ortogonal de $\xi^0$. La condicion $(c)$ es equivalente a las ecuaciones (4.3.4)–(4.3.7). ☐

## 4.4. Inmersiones de variedades sub-riemanninas en variedades sub-riemanianas

Sean $(M, \mathcal{D}, g)$, $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ variedades sub-riemannianas. Una función suave $f : M^0 \to M$ es una *inmersión isométrica de* $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ en $(M, \mathcal{D}, g)$ si para todo $x \in M^0$, $u, v \in \mathcal{D}^0_x$ se cumple:

$$\mathrm{d}f(x)\left(\mathcal{D}^0_x\right) = \mathcal{D}_{f(x)} \cap \mathrm{d}f(x)\left(T_xM^0\right), \qquad g_{f(x)}\left(\mathrm{d}f(x)\cdot u, \mathrm{d}f(x)\cdot v\right) = g^0_x(u, v). \tag{4.4.1}$$

Suponiendo que $(M, \mathcal{D}, g)$ es una variedad de contacto sub-riemanniana dotada una conexión adaptada $\nabla$ y con una extensión riemanniana de $g$. Si se define el *fibrado normal* $f^\perp \to M^0$ por:

$$f^\perp_x = \mathrm{d}f(x)\left(T_xM^0\right)^\perp \subset T_{f(x)}M \tag{4.4.2}$$

para todo $x \in M^0$, donde el complemento ortogonal de $\mathrm{d}f(x)(T_xM^0)$ es tomado con respecto a la extensión riemanniana de $g$. La *segunda forma fundamental* para la inmersión isométrica $f$ es definida por:

$$\alpha^f_x : T_xM^0 \times T_xM^0 \to f^\perp_x, \quad x \in M^0, \tag{4.4.3}$$

donde $\alpha^f(X, Y)$ es la proyección ortogonal sobre $f^\perp$ de la derivada covariante $\nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big)$, con $X, Y$ campos vectoriales suaves sobre $M^0$. Se denota por $\pi^f$ a la proyección ortogonal sobre $f^\perp$. Como $\mathcal{D}$ es $\nabla$-paralelo y $\mathrm{d}f(\mathcal{D}^0) \subset \mathcal{D}$ se sigue que:

$$\alpha^f_x(\mathcal{D}^0_x \times \mathcal{D}^0_x) \subset \mathcal{D}_{f(x)} = \xi\left(f(x)\right)^\perp, \tag{4.4.4}$$

donde $\xi$ denota el campo característico de $(M, \mathcal{D}, g)$. Suponga que $(M, \mathcal{D}, g)$, $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ son variedades de contacto sub-riemannianas y que la inmersion isométrica $f : M^0 \to M$ para todo $x \in M^0$ satisface:

$$\mathrm{d}f(x)\left(\xi^0(x)\right) = \xi\left(f(x)\right), \tag{4.4.5}$$

donde $\xi^0$ denota el campo característico de $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$. En este caso se dice que $f$ es una *inmersión isométrica de variedades de contacto sub-riemannianas.* De la ecuación (4.4.5), se sigue que $f$ es una inmersión isométrica de variedades riemannianas obtenida al considerar la extensión riemmaniana de $g^0$ y $g$. El fibrado normal de $f^\perp$ es simplemente el fibrado normal de la inmersión isométrica riemanniana, pero observe que la segunda forma fundamental $\alpha^f$ *no coincide* con la segunda forma fundamental de la inmersión isométrica riemanniana, pues su definición usa la conexión adaptada de $M$ y no la conexión de Levi-Civita.

**Observación 4.4.1.** *Como $\xi$ es $\nabla$-paralelo, y a partir de* (4.4.5) *se sigue que* $\alpha^f(\cdot, \xi^0) = 0$.

**Lema 4.4.1.** *Si $f : M^0 \to M$ es una inmersión isométrica de variedades de contacto sub-riemannianas entonces:*

*(a)* *$f^*\theta = \theta^0$, donde $\theta^0$ y $\theta$ denotan las $1$-formas características de $M^0, M$, respectivamente;*

*(b)* *la restricción de la segunda forma fundamental $\alpha^f$ a $\mathcal{D}^0$ es simétrica,y si la subtorsión $\tau$ de $M$ es nula entonces $\alpha^f$ es simétrica;*

*(c)* *para cualquier par de campos suaves $X, Y$ sobre $M^0$, se tiene que $\mathrm{d}f\left(\nabla^0_X Y\right) = \nabla_X\left(\mathrm{d}f(Y)\right)$, donde $\nabla^0$ y $\nabla$ denotan las conexiones adaptadas de $M^0$ y $M$, respectivamente;*

*(d)* *para cualquier $X$ en $\mathcal{D}^0$, $\mathrm{d}f\left(\tau^0(X)\right)$ es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{d}f\left(TM^0\right)$ de $\tau\left(\mathrm{d}f(X)\right)$, donde $\tau^0$ y $\tau$ denotan, respectivamente, las sub-torsiones de $M^0$ y $M$.*

*Demostración.* De la ecuación (4.4.1), se sabe que $\ker(f^*\theta) = \mathcal{D}^0$ y de la ecuación (4.4.5) se sabe que $(f^*\theta)(\xi^0) \equiv 1$, así que $f^*\theta = \theta^0$. Si $X, Y$ son campos suaves en $M^0$ entonces

$$\nabla_X\left(\mathrm{d}f(Y)\right) - \nabla_Y\left(\mathrm{d}f(X)\right) = \mathrm{d}f\left([X,Y]\right) + T\left(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\right), \tag{4.4.6}$$

donde $T$ denota la torsión de $\nabla$. Por tanto

$$\alpha^f(X,Y) - \alpha^f(Y,X) = \pi^{f^\perp}\left(T\left(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\right)\right). \tag{4.4.7}$$

Luego si $X, Y$ son secciones de $\mathcal{D}^0$, $T\left(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\right)$ es paralelo a $\xi = \mathrm{d}f(\xi^0)$, así, el lado derecho de la ecuación (4.4.7) se anula. Cuando $X = \xi^0$ y la sub-torsión $\tau$ es nula, entonces otra vez el lado derecho de (4.4.7) se anula. Sea $\nabla^*$ la conexión sobre $TM^0$ que corresponde vía el isomorfismos de fibrados vectoriales $\mathrm{d}f : TM^0 \to \mathrm{d}f(TM^0)$, a la conexión sobre $\mathrm{d}f(TM^0) \subset f^*(TM)$ obtenida al tomar la proyección ortogonal de $f^*\nabla$ sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$. Es suficiente con probar que $\nabla^*$ es igual a $\nabla^0$, esto es, $\nabla^*$ satisface las condiciones que caracterizan la conexión adaptada. En efecto, $g$ es paralelo con respecto a $\nabla$ y $\mathrm{d}f : TM^0 \to \mathrm{d}f(TM^0)$ transforma $g^0$ en la restricción de $g$, esto implica que $g^0$ es $\nabla^*$-paralelo. También, como se tiene que $\xi$ es paralelo con respecto a $\nabla$ y en virtud de (4.4.5), $\xi^0$ son $\nabla^*$-paralelo, luego $\mathcal{D}^0$ y la métrica sub-riemanniana $g^0$ es $\nabla^*$-paralelo. Finalmente, computando el tensor de torsión mediante la expresión

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f\left(T^*(X,Y)\right) &= \pi^f\left[\nabla_X\left(\mathrm{d}f(Y)\right) - \nabla_Y\left(\mathrm{d}f(X)\right) - \mathrm{d}f\left([X,Y]\right)\right] \\
&= \pi^f\left[T\left(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\right)\right],
\end{aligned}$$

donde $X, Y$ son campos suaves en $M^0$ y $\pi^f$ denota la proyección ortogonal sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$, se sigue fácilmente de (4.4.5) y de la parte (a) que $T^*(X,Y) = \mathrm{d}\theta^0(X,Y)\xi^0$ para $X, Y \in \mathcal{D}^0$. Además, si se identifica $\mathcal{D}^0$ con $\mathrm{d}f(\mathcal{D}^0)$, la función $T^*(\xi^0,\cdot)\mid_{\mathcal{D}^0}$ queda identificada con la composición de $T(\xi,\cdot)\mid_{\mathcal{D}^0}= \tau\mid_{\mathcal{D}^0}$ y la proyección ortogonal sobre $\mathcal{D}^0$. Esto prueba que $T^*(\xi^0,\cdot)\mid_{\mathcal{D}^0}$ es un endomorfismo lineal $g^0$-simétrico de $\mathcal{D}^0$, concluyendo la prueba. □

Dada una inmersión isométrica $f$ de una variedad sub-riemanniana $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ en una variedad sub-riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$, entonces la *conexión normal* de $f$ es la conexión $\nabla^\perp$ en el fibrado normal $f^\perp \to M^0$ obtenida de tomar la proyección ortogonal de la conexión adaptada.

**Observación 4.4.2.** *Note que la estructura riemanniana en $f^\perp$ obtenida por tomar la restricción de $g$ es paralela con respecto a la conexión normal $\nabla^\perp$.*

## 4.5. El problema de inmersiones isométricas sub-riemannianas/sub-riemannianas.

En esta sección se presenta el problema inmersiones isométricas de variedades sub-riemannianas de contacto en variedades de contacto sub-riemannianas con segunda forma fundamental, con conexión normal, con campo vectorial característico y estructura compleja característica fijos.

A lo largo de esta sección los simbolos $Q_c^{2n+1}$, $\mathcal{D}$, $g$, $\xi$ y $J$ tendrá el mismo significado que en la sección 4.2. La configuración básica del problema consta de los siguientes objetos:

1. Una variedad sub-riemanniana de contacto $2k+1$-dimensional $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ con campo vectorial característico $\xi^0$, con conexión adaptada $\nabla^0$ y con subtorsión nula $(k \leq n)$;
2. Un fibrado vectorial riemanniano $(E, g^E)$ sobre $M^0$ de rango $2(n-k)$;
3. Una conexión $\nabla^E$ en $E$ para el cual $g^E$ es paralelo;
4. Un tensor suave $\alpha^0$ tal que para todo $x \in M^0$, $\alpha^0_x : T_xM^0 \times T_xM^0 \to E_x$ es una función bilineal simétrica cuyo kernel contiene a $\xi^0(x)$;
5. Un endomorfismo suave $J^0$ del fibrado vectorial $\mathcal{D}^0 \oplus E$ tal que para todo $x \in M^0$, $J^0_x$ es una estructura compleja sobre $\mathcal{D}^0_x \oplus E_x$ ortogonal con respecto a $g^0_x \oplus g^E_x$.

Una *solución para el problema de inmersiones isométricas sub-riemannianas/sub-riemannianas $Q_c^{2n+1}$ con los datos (1) - (5)* es un par $(f, L)$, donde $f : M^0 \to Q_c^{2n+1}$ es una inmersión isométrica de variedades de contacto sub-riemannianas y, $L : E \to f^\perp$ es una fibrado vectorial isométrico tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $L$ transforma $\nabla^E$ en $\nabla^\perp$;

(b) para todo $x \in M^0$, $L_x \circ \alpha^0_x = \alpha^f_x$;

(c) la restricción de $\mathrm{d}f(x) \oplus L_x : T_x M^0 \oplus E_x \to T_{f(x)} Q_c^{2n+1}$ a $\mathcal{D}_x 0 \oplus E_x$ transforma $J_x^0$ en $J_{f(x)}$.

Note que la hipótesis de que $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ tiene sub-torsión nula, que $g^E$ es $\nabla^E$-paralelo y la hipótesis de que $\alpha^0$ es simétrica son necesarias para la existencia de una solución para el problema de inmersiones isométricas sub-riemanniana/sub-riemannianas (ver parte (d) del lema 4.4.1, observación 4.4.2 y parte (b) del Lema 4.4.1).

Si $\theta^0$ es una 1-forma característica de $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$, se sigue de la parte (a) del Lema 4.4.1 que si $(f, L)$ es una solución para el problema de inmersiones isométricas sub-riemannianas/sub-riemannianas, entonces $f^*\theta = \theta^0$ y $f^*\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta^0$. Dado que $\mathrm{d}f(x) \oplus L_x : T_x M^0 \oplus E_x \to T_{f(x)} Q_c^{2n+1}$ transforma $g_x^0 \oplus g_x^E$ en $g_{f(x)}$ y $J_x^0$ en $J_{f(x)}$, de la ecuación (3.1.2) se sigue para todo $x \in M^0$ que

$$\mathrm{d}\theta_x^0 \mid_{\mathcal{D}_x^0 \times \mathcal{D}_x^0} = -2 \left(g_x^0 \oplus g_x^E\right) (J_x^0 \cdot, \cdot) \mid_{\mathcal{D}_x^0 \times \mathcal{D}_x^0}, \tag{4.5.1}$$

Denotando por $H^0$ el endomorfismo antisimétrico lineal de $\mathcal{D}^0$ definido por

$$-\mathrm{d}\theta_x^0 \mid_{\mathcal{D}_x^0 \times \mathcal{D}_x^0} = g^0(H^0 \cdot, \cdot),$$

se obtiene a partir de la ecuación (4.5.1) que $J^0 : \mathcal{D}^0 \oplus E \to \mathcal{D}^0 \oplus E$ puede ser descompuesto como:

$$J^0 \cong \begin{pmatrix} \frac{1}{2} H^0 & -J_1^t \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{4.5.2}$$

donde $J_1 : \mathcal{D}^0 \to E$ es un morfismos de fibrados vectoriales, $J_1^t : E \to \mathcal{D}^0$ denota la transpuesta de $J_1$ y $J_2 : E \to E$ es un morfismos fibrados vectoriales antisimétricos.

## 4.6. Existencia de soluciones para el problema de inmersiones isométricas sub-riemannianas/sub-riemannianas

En el siguiente teorema es presentan las condiciones necesarias y suficientes para las existencia de una solución para el problema de inmersiones isométricas sub-riemannianas/sub-riemannianas.

**Teorema 4.6.1.** *Suponinedo el conjunto de datos* $(1) - (5)$ *para el problema de inmersiones isométricas sub-riemannianas/sub-riemannianas, con* $J^0$ *descompuesto como en la ecuación* (4.5.2) *y* $M^0$ *simplemente conexo. Entonces existe una solución* $(f, L)$ *para el problema de inmersiones isométricas* *sub-riemannianas/sub-riemannianas si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$
\begin{aligned}
g_x^0\big(R_x^0(u,v)w,z\big) &= g_x^E\big(\alpha_x^0(v,w),\alpha_x^0(z,u)\big) && (4.6.1)\\
&\quad -g_x^E\big(\alpha_x^0(u,w),\alpha_x^0(v,z)\big)\\
&\quad +c\big[g_x^0(v,w)g_x^0(u,z)-g_x^0(u,w)g_x^0(v,z)\big]\\
&\quad -\frac{1}{2}\,g_x^0\left(H_x^0(u),v\right)g_x^0\left(H_x^0(w),z\right)\\
&\quad +\frac{1}{4}\,g_x^0\left(H_x^0(v),w\right)g_x^0\left(H_x^0(u),z\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}\,g_x^0\left(H_x^0(u),w\right)g_x^0\left(H_x^0(v),z\right);\\
R^0\left(\xi^0(x),u\right)v &= 0; && (4.6.2)\\
\left(\nabla^{\otimes}\alpha^0\right)_x(u,v,w)-\left(\nabla^{\otimes}\alpha^0\right)_x(v,u,w) &= c\big[-g_x^0\left(H_x^0(u),v\right)J_1(w) && (4.6.3)\\
&\quad +\frac{1}{2}\,g_x^0\left(H_x^0(v),w\right)J_1(u)\\
&\quad -\frac{1}{2}\,g_x^0\left(H_x^0(u),w\right)J_1(v)\big];\\
\left(\nabla^{\otimes}\alpha^0\right)_x(\xi^0(x),u,v) &= 0; && (4.6.4)\\
g_x^E\big(R_x^E(u,v)\epsilon,\eta\big) &= g_x^0\big(A_x^0(v,\epsilon),A_x^0(u,\eta)\big)\\
&\quad -g_x^0\big(A_x^0(u,\epsilon),A_x^0(v,\eta)\big)\\
&\quad +c\big[-g_x^0\left(H_x^0(u),v\right)g_x^E\left(J_2(\epsilon),\eta\right)\\
&\quad +g_x^E\left(J_1(v),\epsilon\right)g_x^E\left(J_1(u),\eta\right)\\
&\quad -g_x^E\left(J_1(u),\epsilon\right)g_x^E\left(J_1(v),\eta\right)\big];\\
R_x^E\left(\xi^0(x),u\right)\epsilon &= 0; && (4.6.5)\\
\frac{1}{2}\,g_x^0\left((\nabla^0H^0)_x(u,v),w\right) &= g_x^E\big(\alpha_x^0(u,w),J_1(v)\big) && (4.6.6)\\
&\quad -g_x^E\big(\alpha_x^0(u,v),J_1(w)\big);\\
(\nabla^0H^0)_x(\xi^0(x),u) &= 0; && (4.6.7)\\
\frac{1}{2}\,\alpha_x^0\left(u,H_x^0(v)\right)+\left(\nabla^{0E}J_1\right)(u,v) &= J_2\big(\alpha_x^0(u,v)\big); && (4.6.8)\\
\left(\nabla^{0E}J_1\right)\left(\xi^0(x),u\right) &= 0; && (4.6.9)\\
g_x^E\Big(\left(\nabla^EJ_2\right)(u,\epsilon),\eta\Big) &= g_x^E\Big(\alpha_x^0\left(u,J_1^t(\epsilon)\right),\eta\Big) && (4.6.10)\\
&\quad -g_x^E\Big(\alpha_x^0\left(u,J_1^t(\eta)\right),\epsilon\Big); && (4.6.11)
\end{aligned}
$$

$$
\Big(\nabla^EJ_2\Big)\big(\xi^0(x),\epsilon\big) = 0. \qquad (4.6.12)
$$

*para todo* $x\in M^0$*,* $u,v,w,z\in\mathcal{D}_x^0$*,* $\epsilon,\eta\in E_x$*. Aquí,* $R^0$ *denota el tensor de curvatura de* $\nabla^0$*,* $R^E$ *denota el tensor de curvatura de* $\nabla^E$*,* $A_x^0:T_xM^0\times E_x\to T_xM^0$ *denota la función bilineal definida por*

$$
g_x^E\big(\alpha_x^0(u,v),\epsilon\big)=-g_x^0\big(A_x^0(u,\epsilon),v\big),\quad u,v\in T_xM^0,\epsilon\in E_x,
$$

$\nabla^{\oplus}$ *denota la conexión del fibrado vectorial* $(TM^0)^* \otimes (TM^0)^* \otimes E$ *inducida por* $\nabla^0$ *y* $\nabla^E$*, y* $\nabla^{0E}$ *denota la conexión del fibrado vectorial* $(\mathcal{D}^0)^* \otimes E$ *inducida por* $\nabla^0$ *y* $\nabla^E$.

*Demostración.* Esto es una aplicación directa del Teorema 2.3.1. Considere el fibrado vectorial $\widehat{E} = TM^0 \oplus E$ sobre $M^0$ dotado con la conexión $\widehat{\nabla}$ que hace a $g^0 \oplus g^E$ paralelo y tiene componentes $\nabla^0, \nabla^E$ y $\alpha^0$. Sea $G$ el grupo de Lie definido por la ecuación (3.1.3). Hay que recordar que la variedad sub-riemanniana de contacto $Q_c^{2n+1}$ esta dotada con la $G$-estructura característica $P$ y que la tripleta $(Q_c^{2n+1}, \nabla, P)$ es homogénea. El fibrado vectorial $\widehat{E}$ se puede dotar de la $G$-estructura que consiste de los isomorfismos lineales $p : R^{2n+1} \to \widehat{E}_x$, $x \in M^0$, tales que:

- $p$ transforma el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2n+1}$ en $g_x^0 \oplus g_x^E$;
- $p$ transforma el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ en $\xi^0(x)$;
- la restricción de $p$ en el espacio generado por los primeros $2n$ vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ transforma la estructura compleja (3.1.4) en $J_x^0$.

El Teorema 2.3.1 establece la existencia de una solución $(f, L)$ para el problema de inmersiones isométricas sub-riemannianas/sub-riemannianas es equivalente a las ecuaciones (2.3.26)–(2.3.32). Un cálculo sencillo permite comprobar que la ecuación (2.3.26) es equivalente[2] a (4.6.2) y (4.6.2), la ecuación (2.3.27) es equivalente a (4.6.4) y (4.6.5), las ecuaciones (2.3.28), (2.3.29) son equivalentes de (4.6.3), la (4.6.4). La ecuación (2.3.30) se satisface automáticamente por que la $\mathcal{D}^0$– componente de $J^0$ ha sido seleccionada para ser igual a $\frac{1}{2}\, H^0$ y por que la sub-torsion de $M^0$ es nula. La ecuación (2.3.31) se cumple por la simetría de $\alpha^0$. Finalmente, la ecuación (2.3.32) es equivalente a las siguientes condiciones:

(a) La estructura Riemanniana $g^0 \oplus g^E$ es $\widehat{\nabla}$-paralelo;

(b) $\xi^0$ es $\widehat{\nabla}$-paralelo;

(c) $J^0$ es $\widehat{\nabla}$-paralelo.

La condición (a) se garantizada por la construcción de $\widehat{\nabla}$. La condición (b) se sigue del hecho que $\xi^0$ es $\nabla^E$-paralelo y $\xi^0$ está en el kernel de $\alpha^0$. La condición (c) es equivalente a las ecuaciones (4.6.7)–(4.6.12). □

[2]Hay que tener en cuenta que, si $\xi^0$ es $\nabla^0$-paralelo, se tiene que $R^0(\cdot,\cdot)\xi^0 = 0$.

# Bibliografía


[1] Barbero S,. *An isometric immersion theorem in* $\mathrm{Sol}^3$, Mat. Contemp. **30** (2006), pgs 109—123.

[2] Barbero S,. Manfio F., *Isometric immersion into a homogeneous Lorentzian Heisemberg group and rigidity*, Math. Proc, Cam. Phil. Soc. **147**, n.1 (2009), pgs 185—204.

[3] Barbero S,. Piccione P., *Associated family of $G$-structure preserving minimal immersions in semi-Riemannian manifolds*, Results in Mat. **60** (2011), pgs 453—473.

[4] Dajczer M., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series, Publish or Perish, 1990.

[5] Daniel B., *Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, Trans. Am. Math. Soc. **361**, n.12 (2009), pgs 6255—6282.

[6] Daniel B., *Isometric immersions into $3$-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv. **82**, n.1 (2007), pgs 87—131.

[7] Fabel E., Gorodski C., *On Contact sub-Riemannian symetric spaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **28** (1995), n.5, pgs. 571—589.

[8] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of differential geometry. Vol I*, Interscience Publishers, New York-London, 1963.

[9] Lira J., Tojeiro R., Vitório F., *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms*, Archiv der Mathematik. **95** (2010), pgs 469—479. I

[10] Marín C., *An algebraic characterization of affine manifolds with $G$-structure satisfying a homogeneity condition*, Rev. Col. de Mat. **44**, n.2 (2010), pgs 149—165.

[11] Marín C., *Inmersiones isométricas en variedades riemannianas*, Rev. Int. Mat. **29**, n.1 (2011), pgs 31—54.

[12] Piccione P., Tausk D., *The theory of connections and G-structures. Applications to affine and isometric immersions*, IMPA, Rio de janeiro (2006).

[13] Piccione P., Tausk D., *An existence theorem for $G$-structure preserving affine immersions*, Indiana Univ. Math. J. **57**, n.3 (2008), pgs. 1431—1465.

[14] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Glenview, Scott, (1971).

# Lista de símbolos

# Índice remisivo