Задача Коши для ОДУ

Модель Лотки – Вольтерры описывает межвидовую конкуренцию при помощи следующих уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= (\alpha - \beta y_2) y_1 \\ \dot{y_2} &= (-\gamma + \delta y_1) y_2, \end{cases} \tag{1}$$

где y_1 – популяция жертв, y_2 – популяция хищников; α – коэффициент рождаемости жертв, γ – коэффициент смертности хищников. При встрече хищников с жертвами, вероятность которой пропорциональна $y_1 \cdot y_2$, происходит убийство жертв с коэффициентом β и рождение новых хищников с коэффициентом δ.

Решением системы (1) являются коллебания популяций относительно стационарной точки $\bar{y_1} = \gamma/\delta$, $\bar{y_2} = \alpha/\beta$. Рассмотрим задачу Коши для данной системы с начальными данными $y_1(0) = 1$ и $y_2(0) = 0.05$ и зададим коэффициенты: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ и $\delta = 1.5$.

Для численного решения данной системы уравнений предлагается использовать методы Рунге-Кутты, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j), \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(t_n + a_2, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j2} \vec{k}_j), \\ &\dots \\ \vec{k}_S &= \vec{f}(t_n + a_S, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{jS} \vec{k}_j), \\ \vec{u}_{n+1} &= \vec{u}_n + \tau (\sum_{j=1}^{S} c_j \vec{k}_j); \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{f}$ – вектор функция правой части системы, a_i, b_{ij} и c_i - параметры метода, S – число стадий в методе.

Для явного метода, когда $b_{ij} = 0$ для всех $j \geq i$, вспомогательные векторы $\vec{k}_i$ вычисляются напрямую. В случае неявного метода, для вычисления векторов $\vec{k}_i$ предлагается использовать итерационный процесс:

$$\vec{k}_i^{n+1} = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j^n), \tag{3}$$

где n - номер итерации. В качестве начального приближения для итерационного процесса использовать вектора $\vec{k}_i$, посчитанные на предидущем шаге интегрирования по времени. Итерационный процесс завершается, когда $max_{i=1 \dots S}(|\vec{k}_i^{n+1} - \vec{k}_i^n|) \leq \varepsilon$

Написать программу, которая будет находить численное решение предложенной задачи Коши на интервале $t \in [0, 100]$ методом Рунге-Кутты. Метод задаётся в специальном файле следующего формата:

```
S
a1  b11  b12  ... b1S
a2  b21  b22  ... b2S
...
aS  bS1  bS2  ... bSS
0.0 c1   c2   ... cS
[tolerance]
```

Где `S` - количество стадий в методе, `a1-aS`, `b11-bSS` и `c1-cS` – таблица Бутчера. Если метод неявный, также задаётся толерантность (ε) итерационного метода для нахождения вспомогательных векторов $\vec{k}_i$.

Решение системы должно записываться в файл, который для каждого временного шага содержит строку формата:

```
t   f1   f2
```

где `t` – время, `f1` и `f2` – компоненты решения.

Для удобства, в архив также добавлены файлы с несколькими методами и программа, написанная на языке C++, которая может быть использована как пример реализации чтения входных данных и вывода результатов.