Minimización de AFD

Minimización de AFD

El algoritmo de minimización de AFD incluye dos pasos:

1. La eliminación de los <u>estados inaccesibles</u> (si los hubiere).

2. La agrupación de todos los <u>estados equivalentes</u> en un solo estado.

A continuación se definen ambos conceptos y se proponen los algoritmos para su obtención.

Estados inaccesibles. Algoritmo.

Un estado q es inaccesible desde el estado inicial q_0 si no es posible encontrar una secuencia de transiciones que tenga como estado origen el estado inicial y como estado final el estado en cuestión. Es inmediato comprobar que si un AFD contiene estados inaccesibles y se eliminan, junto con todas las transiciones en que son origen o destino, el AFD resultante acepta el mismo lenguaje que el AFD de partida.

El siguiente algoritmo permite eliminar todos los estados inaccesibles de un AFD:

1. Marcar el estado inicial (q_0) como accesible.
2. Iterar desde $i=1$ hasta $|Q|-1$ y mientras se marque algún estado en la iteración:

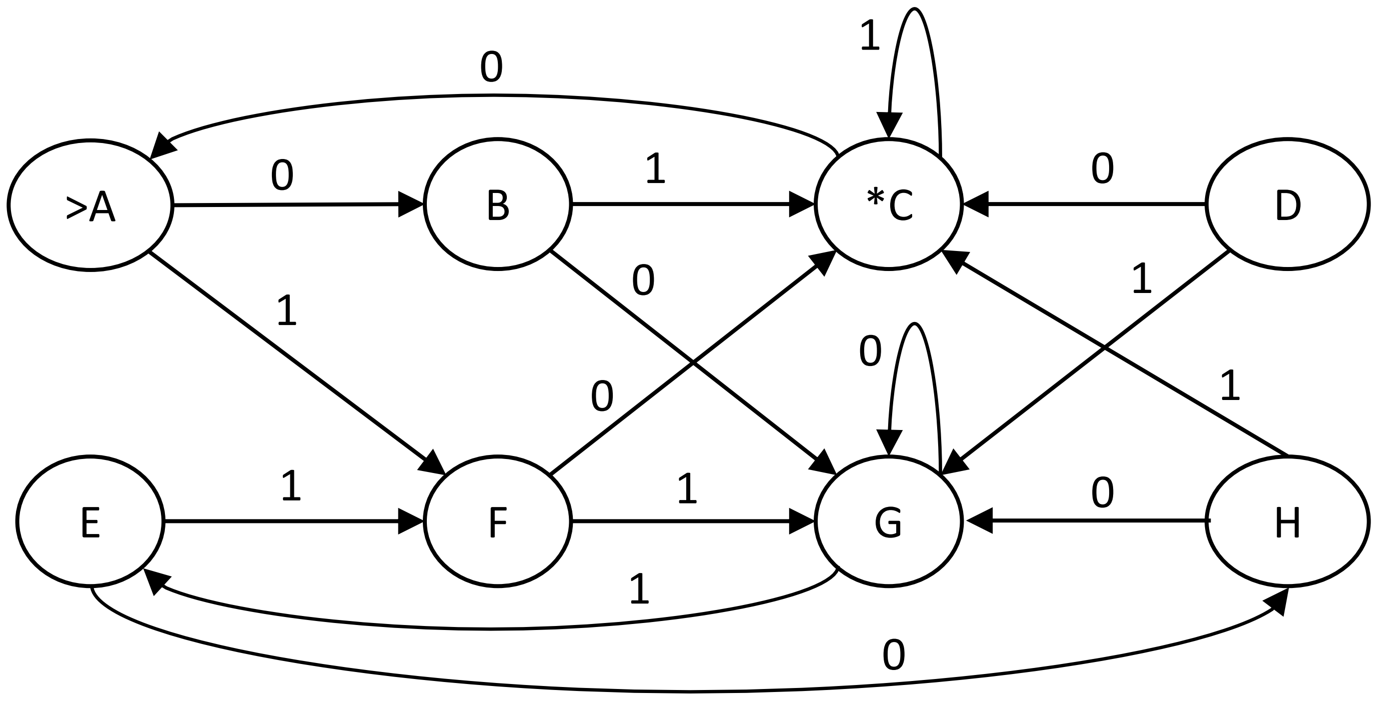
   Para cada estado (q) marcado como accesible (es suficiente con comprobar los nuevos, es decir, los marcados en la última iteración):

   a. Estudiar sus transiciones y formar el conjunto de estados $\{ \delta(q,a)\ \forall a \in \Sigma \}$.
   b. Marcar como accesibles todos los estados del conjunto anterior.

Los estados que queden sin marcar son inaccesibles y pueden ser eliminados ellos y todas las transiciones en las que aparecen.

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

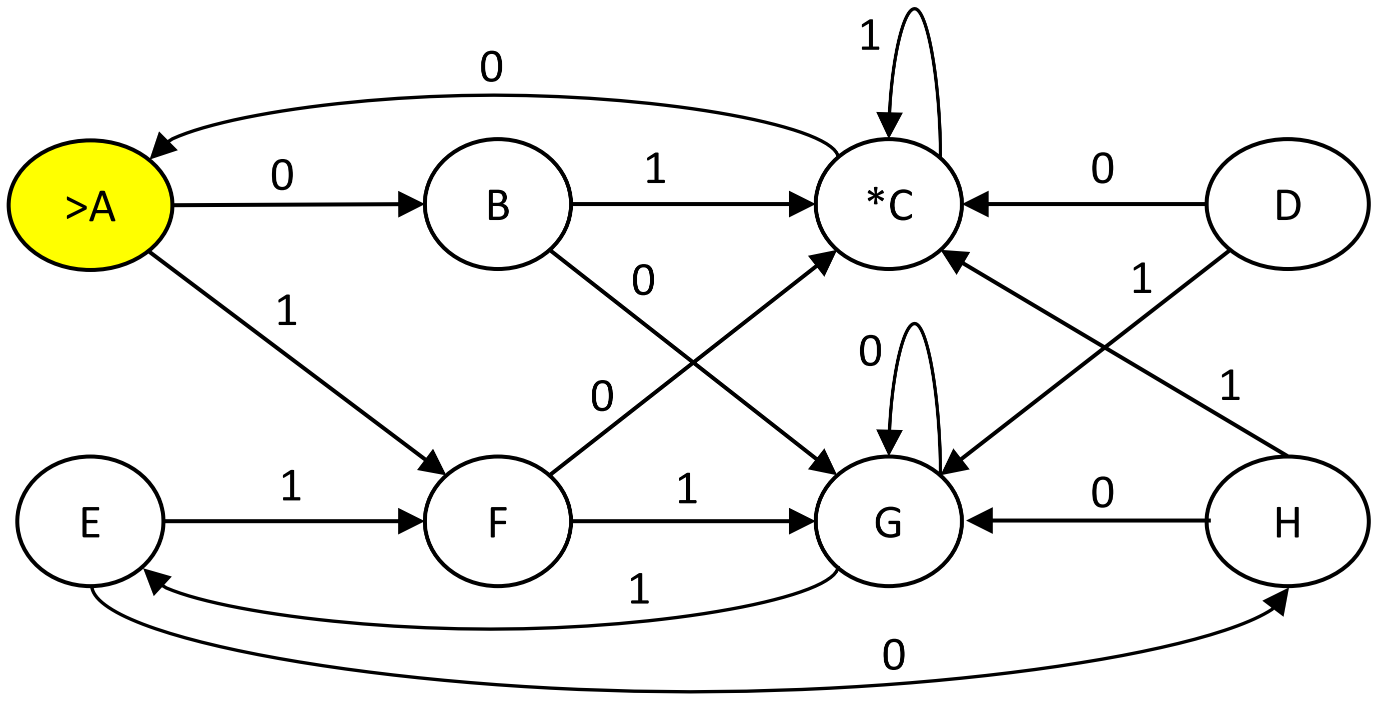
A = (Q={A,B,C,D,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

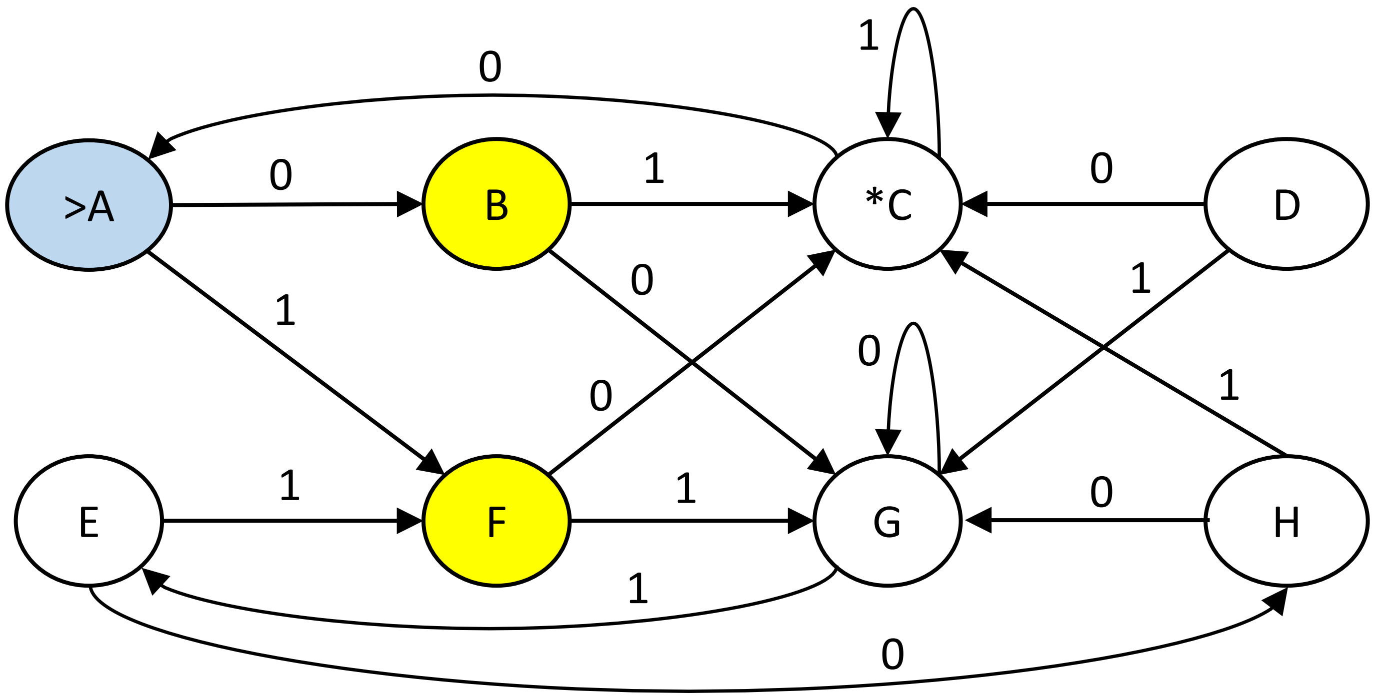
A = (Q={A,B,C,D,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

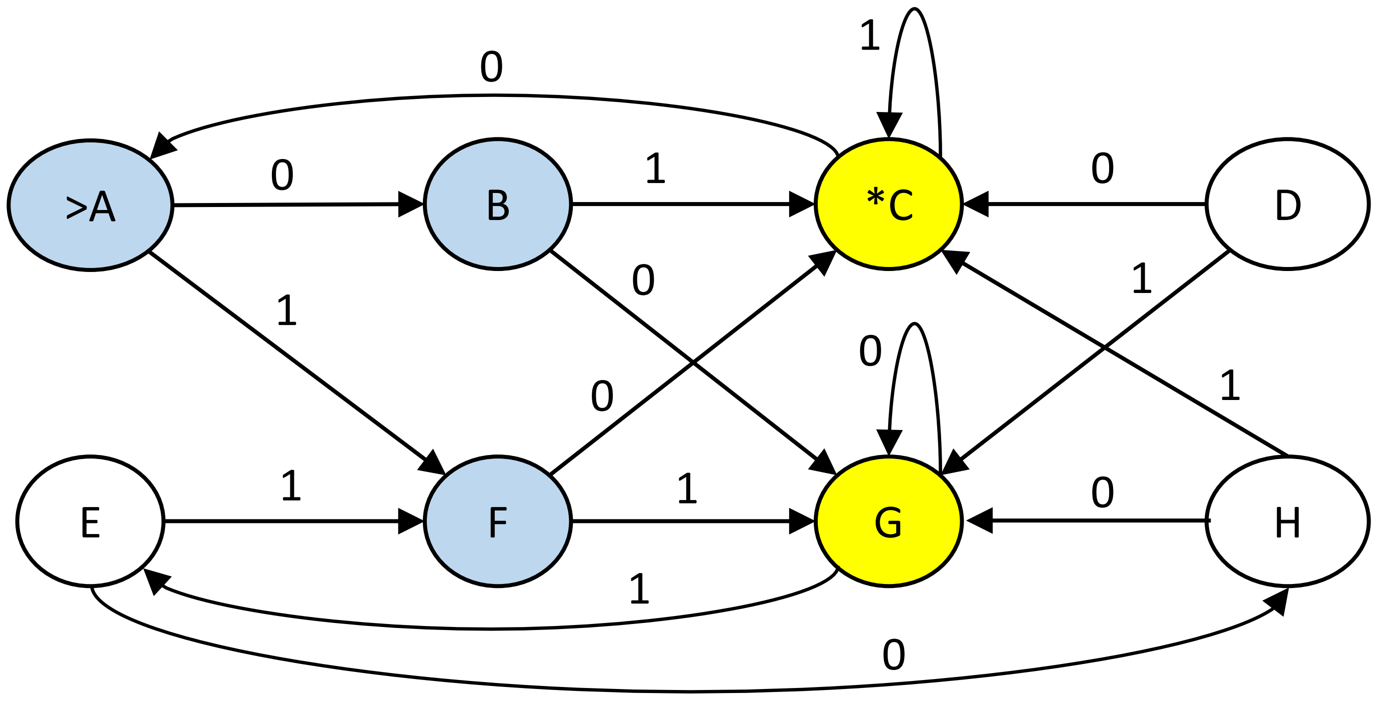
A = (Q={A,B,C,D,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

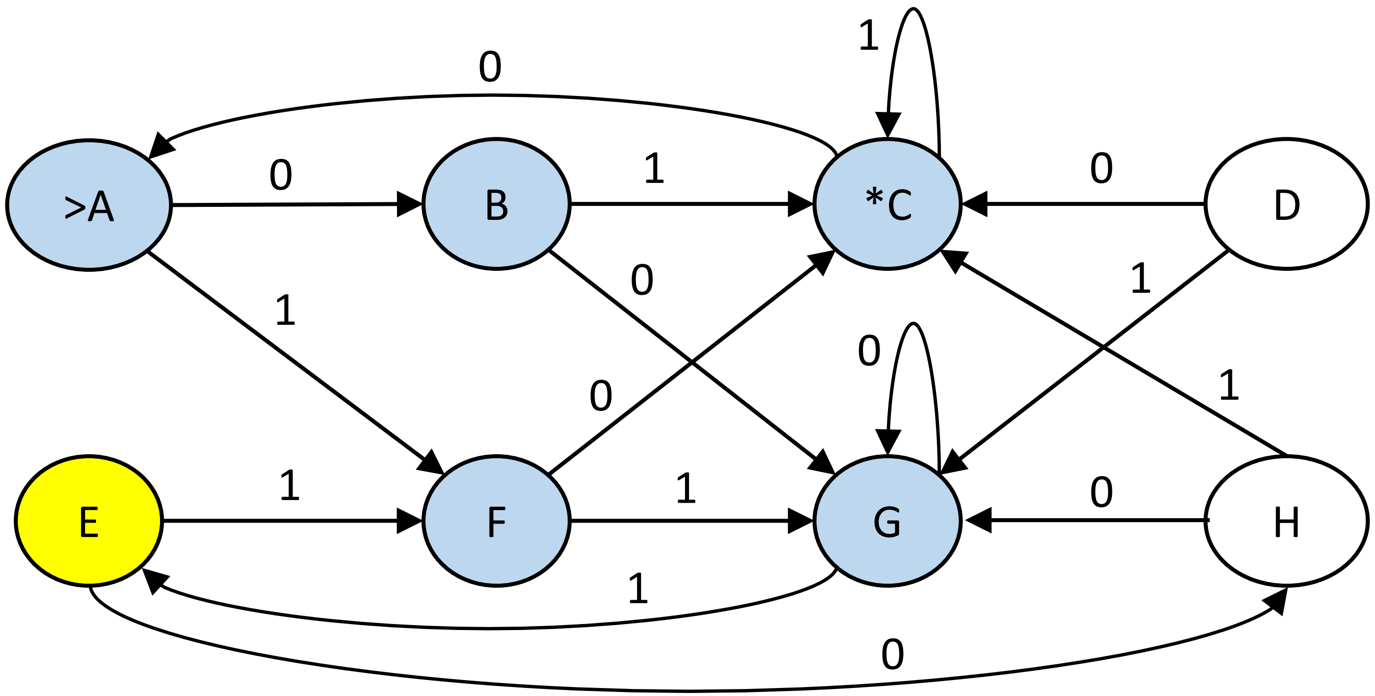
$A = (\ Q=\{A,B,C,D,E,F,G,H\},\ \Sigma=\{0,1\},\ \delta,\ q_0=A,\ F=\{C\}\ )$



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

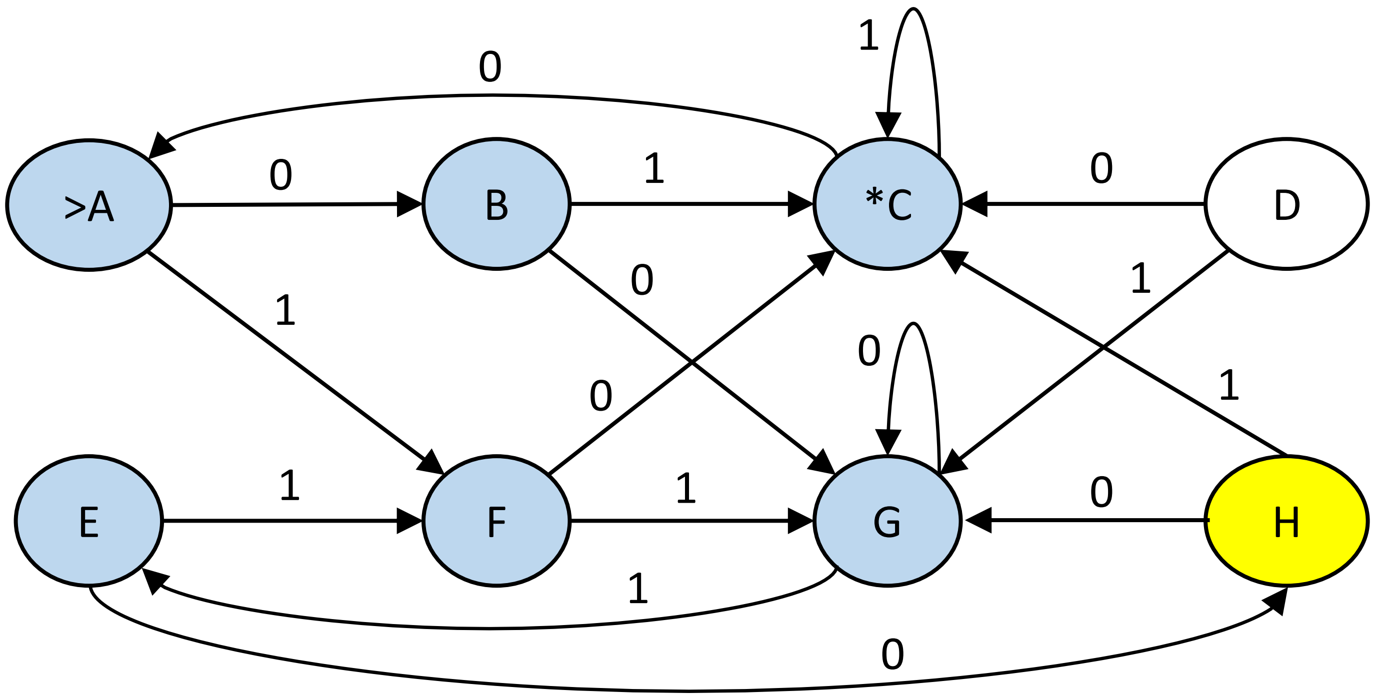
A = (Q={A,B,C,D,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

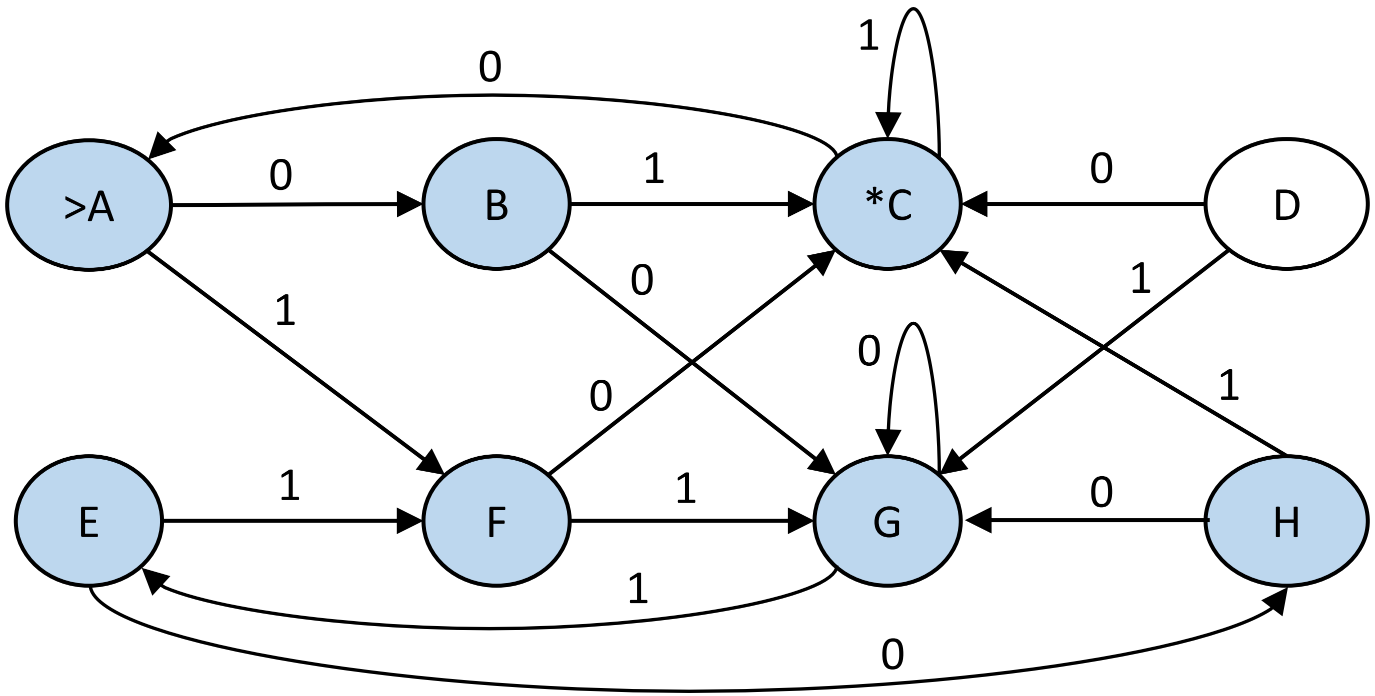
A = (Q={A,B,C,D,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

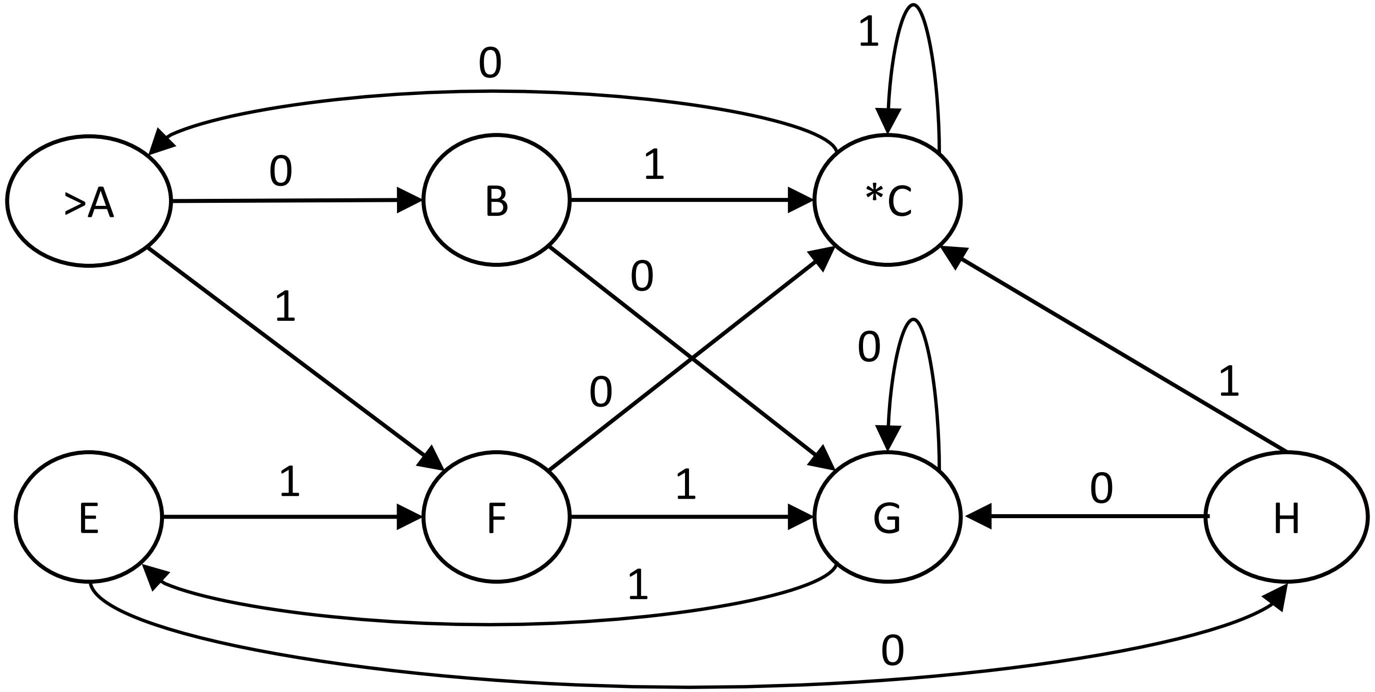
A = (Q={A,B,C,D,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Eliminación de estados inaccesibles. Ejemplo.

A = (Q={A,B,C,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Estados equivalentes. Algoritmo.

Dos estados ***p*** y ***q*** de un autómata finito ***A*** son equivalentes (o indistinguibles) si, ante todas las posibles cadenas del alfabeto de entrada, son simultáneamente de aceptación.

Formalmente, dado un autómata $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

$$\forall p, q \in Q, p\ \mathbf{E}\ q \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*, \delta(p,w) \in F \Leftrightarrow \delta(q,w) \in F$$

La relación ***E*** definida anteriormente es una relación de equivalencia.

- Reflexividad: resulta claro que $\forall p \in Q, p\ \mathbf{E}\ p$ ya que todo estado es indistinguible de si mismo.
- Simetría: resulta claro que $\forall p, q \in Q, p\ \mathbf{E}\ q \Rightarrow q\ \mathbf{E}\ p$ ya que si *p* es indistinguible de *q*, entonces *q* es indistinguible de *p*.
- Transitividad: resulta claro que $\forall p, q, r \in Q, p\ \mathbf{E}\ q \wedge q\ \mathbf{E}\ r \Rightarrow p\ \mathbf{E}\ r$ ya que si *p* y *q* son indistinguibles y también lo son *q* y *r*, inevitablemente también lo son *p* y *r*.
- Nota: indistinguible = simultáneamente de aceptación

Estados equivalentes. Algoritmo.

Dos estados ***p*** y ***q*** de un autómata finito ***A*** son **distinguibles** si no son indistinguibles, es decir, si existe alguna cadena del lenguaje para la que uno de ellos es de aceptación y el otro no.

Formalmente, dado un autómata $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

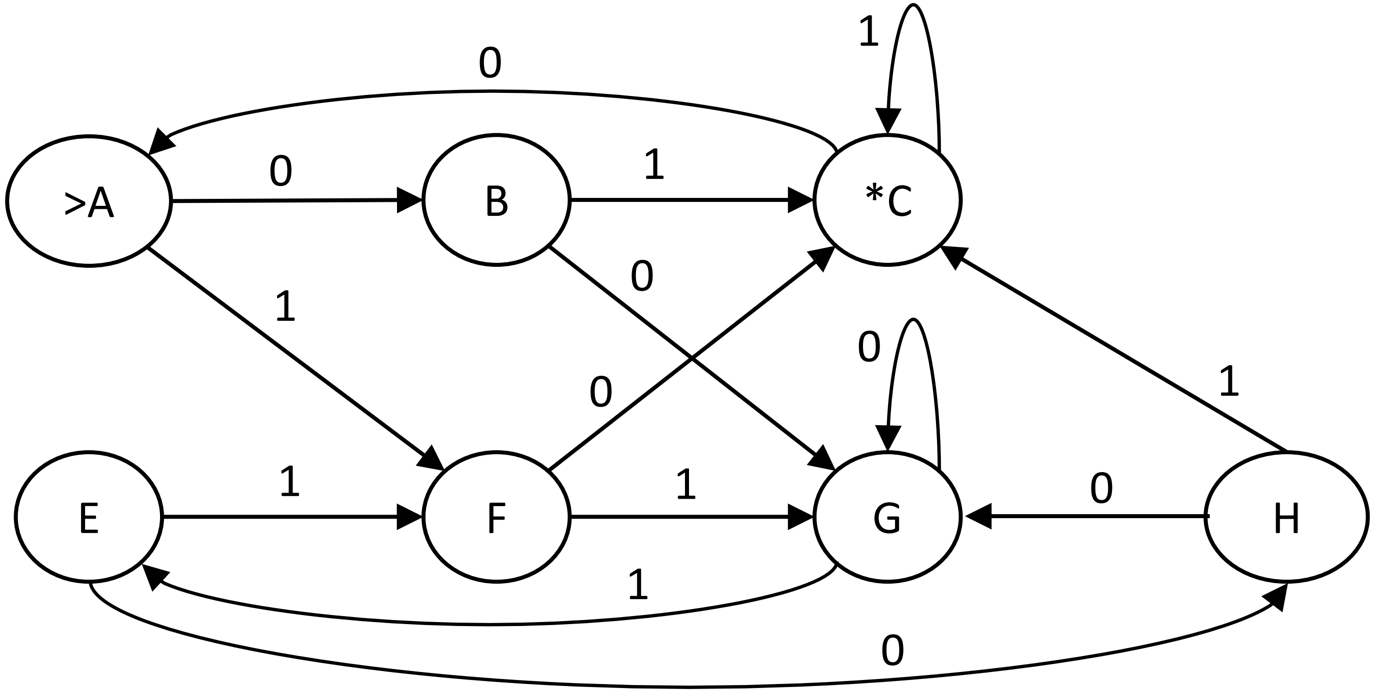
$$\forall p, q \in Q,\ p\ \boldsymbol{!E}\ q \iff \exists\, w \in \Sigma^* / (\delta(p,w) \in F \wedge \delta(q,w) \notin F) \vee (\delta(p,w) \notin F \wedge \delta(q,w) \in F)$$

El siguiente <u>algoritmo</u> construye incrementalmente el conjunto cociente de esta relación de equivalencia $Q/\boldsymbol{E}$ de un AFD:

1. Se construye $Q/\boldsymbol{E_0}$ con dos clases de equivalencia: la clase de estados finales y la clase de estados no finales. *(como resultado de procesar la cadena de entrada λ)*
2. Se construye $Q/\boldsymbol{E_{i+1}}$ estudiando todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de $Q/\boldsymbol{E_i}$, para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles. *(como resultado de procesar un símbolo más de la cadena de entrada)*
3. Se termina cuando $Q/\boldsymbol{E_{i+1}} = Q/\boldsymbol{E_i} = Q/\boldsymbol{E}$ (en el peor de los casos cuando $i=|Q|-2$).

Minimización de AFD. Ejemplo.

A = (Q={A,B,C,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, F={C})



δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

Q/E_0 = (c_0={A,B,C,E,F,G,H}, c_1={C})

Se tiene que C es el único estado final y, por tanto, distinguible de todos los demás estados.

	A	B	C	E	F	G
B						
C	X	X				
E			X			
F			X			
G			X			
H			X			

Nótese que al tratarse de una relación de equivalencia, se puede trabajar con la mitad inferior de la matriz de estados, excluyendo la diagonal (que representa la reflexividad). La otra mitad es simétrica.

Nótese que los estados que se van marcando son los estados que ya se sabe distinguibles.

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

Q/E_0 = (c_0={A,B,E,F,G,H}, c_1={C})

Para calcular Q/E_{i+1} , se deben estudiar todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de Q/E_i , para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles:

	A	B	C	E	F	G
B	X					
C	X	X				
E			X			
F	X		X			
G			X			
H	X		X			

A,B => distinguibles (marcar X)

A,E => indistinguibles (c_0={A,E})

A,F => distinguibles (marcar X)

A,G => indistinguibles (c_0={A,E,G})

A,H => distinguibles (marcar X)

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

Q/E_0 = (c_0={A,B,E,F,G,H}, c_1={C})

Para calcular Q/E_{i+1} , se deben estudiar todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de Q/E_i , para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles:

B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X			
G		X	X			
H	X		X			
	A	B	C	E	F	G

B,E => distinguibles (marcar X)

B,F => distinguibles (marcar X)

B,G => distinguibles (marcar X)

B,H => indistinguibles (c_1={B,H})

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

$Q/E_0 = (c_0=\{A,B,E,F,G,H\}, c_1=\{C\})$

Para calcular Q/E_{i+1}, se deben estudiar todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de Q/E_i, para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles:

	A	B	C	E	F	G
B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G		X	X			
H	X		X	X		

E,F => distinguibles (marcar X)

E,G => indistinguibles ($c_0=\{A,E,G\}$)

E,H => distinguibles (marcar X)

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

$Q/E_0 = (c_0=\{A,B,E,F,G,H\}, c_1=\{C\})$

Para calcular Q/E_{i+1}, se deben estudiar todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de Q/E_i, para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles:

B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G		X	X		X	
H	X		X	X	X	
	A	B	C	E	F	G

F,G => distinguibles (marcar X)

F,H => distinguibles (marcar X)

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

Q/E_0 = (c_0={A,B,E,F,G,H}, c_1={C})

Para calcular Q/E_{i+1} , se deben estudiar todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de Q/E_i , para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles:

G,H => distinguibles (marcar X)

	A	B	C	E	F	G
B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G		X	X		X	
H	X		X	X	X	X

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

Q/E_0 = (c_0={A,B,E,F,G,H}, c_1={C})

Q/E_1 = (c_0={A,E,G}, c_1={B,H}, c_2={F}, c_3={C})

B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G		X	X		X	
H	X		X	X	X	X
	A	B	C	E	F	G

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

$Q/E_1 = (c_0=\{A,E,G\}, c_1=\{B,H\}, c_2=\{F\}, c_3=\{C\})$

Para calcular Q/E_{i+1}, se deben estudiar todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de Q/E_i, para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles:

B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G	X	X	X	X	X	
H	X		X	X	X	X
	A	B	C	E	F	G

A,E => indistinguibles ($c_0=\{A,E\}$)

A,G => distinguibles (marcar X)

E,G => distinguibles (marcar X)

B,H => indistinguibles ($c_1=\{B,H\}$)

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

$Q/E_0 = (c_0=\{A,B,E,F,G,H\}, c_1=\{C\})$

$Q/E_1 = (c_0=\{A,E,G\}, c_1=\{B,H\}, c_2=\{F\}, c_3=\{C\})$

$Q/E_2 = (c_0=\{A,E\}, c_1=\{B,H\}, c_2=\{F\}, c_3=\{G\}, c_4=\{C\})$

B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G	X	X	X	X	X	
H	X		X	X	X	X
	A	B	C	E	F	G

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

Q/E_2 = (c_0={A,E}, c_1={B,H}, c_2={F}, c_3={G}, c_4={C})

Para calcular Q/E_{i+1} , se deben estudiar todas las transiciones para cada símbolo del alfabeto de todas las parejas de cada clase de equivalencia de Q/E_i , para comprobar si siguen o no perteneciendo a la misma clase, es decir, si siguen siendo o no indistinguibles:

B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G	X	X	X	X	X	
H	X		X	X	X	X
	A	B	C	E	F	G

A,E => indistinguibles (c_0={A,E})

B,H => indistinguibles (c_1={B,H})

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

$Q/E_0 = (c_0=\{A,B,E,F,G,H\}, c_1=\{C\})$

$Q/E_1 = (c_0=\{A,E,G\}, c_1=\{B,H\}, c_2=\{F\}, c_3=\{C\})$

$Q/E_2 = (c_0=\{A,E\}, c_1=\{B,H\}, c_2=\{F\}, c_3=\{G\}, c_4=\{C\})$

$Q/E_3 = (c_0=\{A,E\}, c_1=\{B,H\}, c_2=\{F\}, c_3=\{G\}, c_4=\{C\})$

	A	B	C	E	F	G
B	X					
C	X	X				
E		X	X			
F	X	X	X	X		
G	X	X	X	X	X	
H	X		X	X	X	X

$Q/E_3 = Q/E_2 = Q/E$

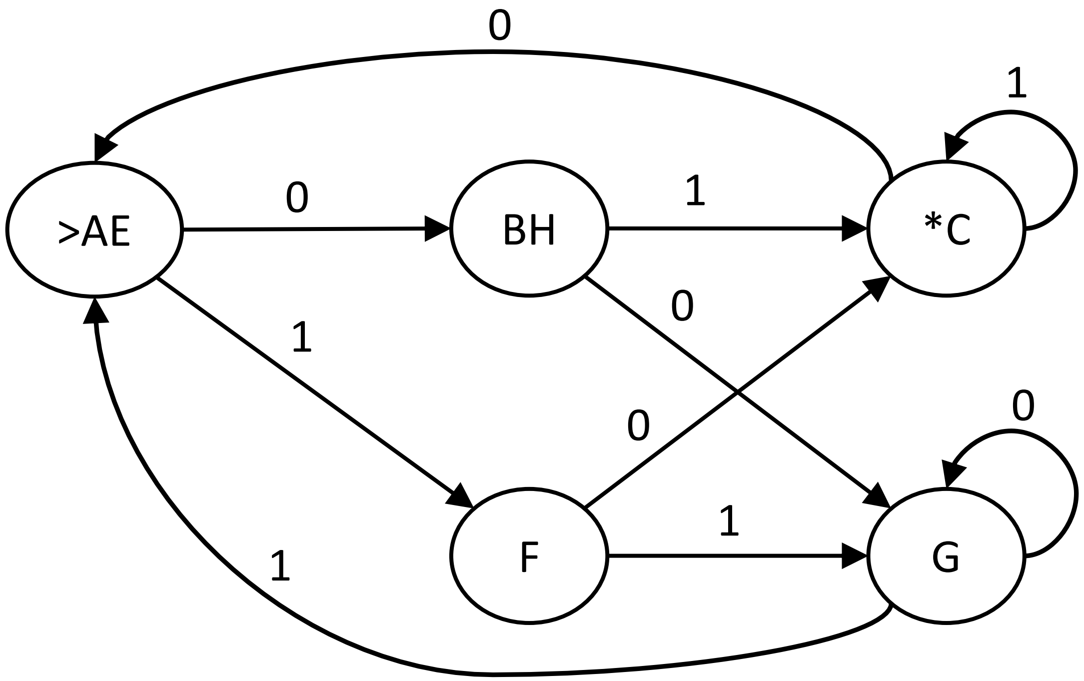
Como $Q/E_3 = Q/E_2$, se ha encontrado el conjunto cociente final Q/E, que representa el AFD mínimo del AFD de partida, y que pasamos a representar.

δ	0	1
>A	B	F
B	G	C
*C	A	C
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

Minimización de AFD. Ejemplo.

Q/E = (c_0={A,E}, c_1={B,H}, c_2={F}, c_3={G}, c_4={C})

A_M = (Q={AE, BH, F, G, C}, Σ={0, 1}, δ, q_0=AE, F={C})



δ	0	1
>AE	BH	F
BH	G	C
F	C	G
G	G	AE
*C	AE	C

Minimización de AFD. Ejercicio.