OPTIMIZACIÓN CON GEOMETRÍA ELEMENTAL
EJE TEMÁTICO: CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

ANTONIO SÁNGARI, CRISTINA EGÜEZ

Facultad de Ciencias Exactas - Consejo de Investigación Universidad Nacional de Salta
Dirección: San Martin 80, El Carril – Salta CP. 4421, Tel 3875741002
asangari2000@gmail.com.

Palabras Claves: OPTIMIZACIÓN, RESOLUCIÓN GEOMÉTRICA, ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÌA.

Resumen. Nuestra propuesta consiste en presentar diversas situaciones que conducen a su vez a nuevos planteos, cuya solución se busca mediante la geometría elemental. Separaremos los problemas de optimización en dos clases: la primera que presenta resoluciones de posiciones óptimas que son resueltos con geometría elemental. La segunda clase es un tipo de problemas que suele resolverse usando el cálculo diferencial y que daremos una forma geométrica de resolución.

Introducción. Con poca exageración se puede afirmar que las matemáticas en general se desarrollaron para solucionar problemas de optimización [Boyer and Merzbach (2011)]. Además, sin necesidad de incurrir en el campo de las matemáticas, es usual preguntarse cual es el mejor uso que podemos dar a los recursos que poseemos para resolver un problema de la vida cotidiana.

Por otro lado, cuando hablamos de optimización, a la mayoría de nosotros, se nos imagina el uso del cálculo diferencial. Sin embargo, como mostraremos en próximas secciones de este trabajo, puede plantearse problemas clásicos del cálculo diferencial pero por métodos de geometría sintética elemental.

Debido a que los autores de este trabajo son principalmente docentes, entendemos que debemos organizar nuestros esfuerzos para que los estudiantes que tenemos asignados reciban una educación de la mejor calidad posible. El camino que nos pareció más recomendable es plantear problemas desde distintas perspectivas para sacar el máximo provecho posible. Nuestro objetivo es proponer estos problemas a los estudiantes del Profesorado en Matemática que se dicta en esta Facultad, a través de la cátedra Resolución de Problemas.

La mejor posición. En el texto [Vasiliev et al. (1980)] se plantea el siguiente problema "El ratoncito tiene tres salidas de su ratonera situados en los puntos A, B y C que el gato conoce. ¿Dónde debe sentarse el gato para encontrar la menor distancia posible de la salida más lejana?"

En el texto de Vasiliev se encuentra la resolución del problema. Sin embargo, actualmente tenemos posibilidad de explorar la solución usando recursos informáticos como por ejemplo el software libre Geogebra.

Una estrategia puede ser mostrar a nuestros estudiantes que el punto buscado se determina encontrando el radio menor para el cual en estos círculos aparece un punto común. En la figura 0.1 se dibuja un triángulo ABC y tres circunferencias congruentes, cuyos radios están controlados por un botón deslizante nombrado por a.

Al ser los puntos A, B y C arrastrables con el muose, se pueden estudiar diferentes configuraciones para el triángulo ABC.

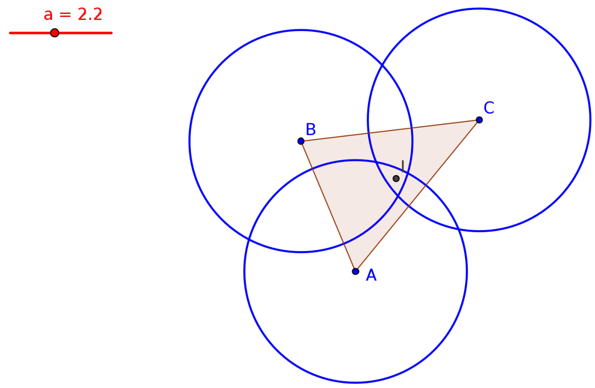

FIGURA 0.1. El punto de menor distancia al punto más lejano

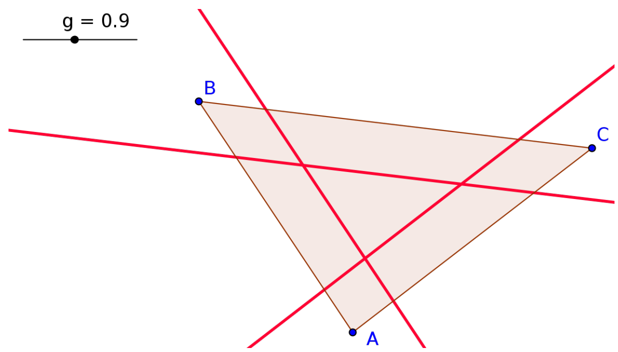

FIGURA 0.2. El punto de mayor distancia al lado más cercano

Con *asistencia* de Geogebra y con la *inducción* por parte del docente, los estudiantes deberían llegar a la conclusión de que si el triángulo es acutángulo el gato debiera situarse en el circuncentro del triángulo, de otro modo en el punto medio del lado mayor del ABC.

Una construcción interactiva se encuentra en
http://www.unsa.edu.ar/∼asangari/ProGato.html

Un segundo ejemplo que se puede mencionar se enuncia de la siguiente manera: "En una parte del bosque, limitada por tres ferrocarriles rectos, vive un oso. ¿En qué punto debe hacerse la guarida para encontrarse a mayor distancia del ferrocarril más cercano?".

Este problema, en ves de ser un problema de minimización como es el problema anterior, es un problema de maximización.

Primeramente, veamos que los puntos que se encuentran a la misma distancia positiva de una recta forman un par de rectas paralelas. En la figura 0.2 se ha dibujado un triángulo ABC y tres rectas paralelas a los correspondientes lados. Las rectas paralelas distan de los lados una distancia controlada por un botón deslizante g.

El estudiante debe ser guiado a concluir que en cada posición de las rectas paralelas, el punto buscado para la guarida del osos se debe encontrarse dentro del triángulo determinado por las rectas paralelas. Es natural conjeturar, y los estudiantes deberían ser guiados a concluir que el punto será el límite cuando dicho triángulo degenera en un punto. La pregunta que se puede plantear es: este punto ¿es alguno de los puntos ya conocidos?. La respuesta puede ser obtenida de dos maneras distintas. La primera puede ser advirtiendo que este punto se encuentra a igual distancia de los lados del triángulo. Es decir, se trataría de un punto centro de una circunferencia inscrita en el triángulo. La segunda manera es notando que las paralelas a los lados con los lados determinan un rombo. En este caso, se nota que la bisectriz de un ángulo pasa por los vértices correspondientes de los triángulos considerados. Por lo tanto, el punto buscado sería la intersección de las bisectrices del triángulo. En otras palabras el punto buscado es el incentro de ambos triángulos considerados.

El punto de Fermat. Una formulación de este interesante problema podría ser "Dado un triángulo acutángulo, encontrar un punto tal que la *suma* de las distancias a los vértices sea la menor"

Este tipo de problema se puede atacar desde el punto de vista analítico como lo hace por ejemplo [Pastor et al. (1985)] que es el tipo de resolución clásica. Desde otra perspectiva [Coxeter and Greitzer (1996)] o en [Coxeter (1971)] se llega a la solución geométrica. Por último, si se dispone de programas capaces de dibujar curvas de nivel se puede encontrar "gráficamente" el punto solución. Esto último se detalla en [Sángari (2012)]

Vale indicar en este momento que puede causar una cierta angustia en los estudiantes cuando un problema se lo saca del contexto tradicional y se trata de enfocarlo desde otra perspectiva. Sin embargo, los autores de este trabajo consideran que esto, lejos de ser perjudicial, permite movilizar estructuras mentales más abarcativas y sofisticadas; pues queda la actitud que un problema, es un problema y no un ejemplo de un dado tema.

Bosquejemos rápidamente el método analítico:

Sean $A\,(0,0)$, $B\,(a,0)$ y $C\,(b,c)$ puntos fijos. Sea $D\,(x,y)$ un punto variable. La función que tenemos que minimizar es

$$f\,(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{d_1} + \underbrace{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}_{d_2} + \underbrace{\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}_{d_3} \tag{0.1}$$

Del análisis de la forma del gradiente de f se llegan a consecuencias interesantes, por ejemplo:

Si el mínimo *estuviera* en el interior del triángulo, el ángulo con vértice en este punto que subtiende a los lados del triángulo sería de 120°.

Y entonces, recíprocamente, si el triángulo no tiene ningún ángulo mayor que 120° el mínimo se encontrará en un punto que subtienda los lados con un ángulo de 120°, y por tanto en su interior. También podemos observar, que si el triángulo tiene un ángulo mayor o igual que 120° entonces el mínimo debe estar en alguno de los puntos A, B o C. Recordando el muy conocido resultado de geometría elemental de "A ángulos mayores se le oponen lados mayores" se concluye que el mínimo debe estar en el vértice correspondiente al ángulo agudo. En síntesis, sea cual sea el triángulo, o el mínimo se encuentra en el interior del triángulo o en los vértices (donde la función no es diferenciable).

Aunque un estudiante promedio puede seguir, con una guía adecuada del docente, sin problema este razonamiento, nunca está de más el apoyo de la visualización. Para este fin son autoexplicativas las siguientes figuras:

La figura 0.3 muestra cómo las curvas de nivel indican la posición del mínimo. La figura 0.4 amplia más la curva de nivel, dando una visión aproximada del mínimo que según nuestros cálculos son: el mínimo es 5,55485... y se encuentra en el punto (2,8179048..., 1,0050136...).

Para la exposición geométrica de este problema consideremos la figura 0.5:

Tomemos un punto F cualquiera en el interior del triángulo. Tracemos los triángulos equiláteros AFF_C, BFF_A, CFF_B, ABC', CAB' y BCA'. Como por construcción, los ángulos F_CAF y $C'AB$ son congruentes, entonces los ángulos BAF y $C'AF_C$ son congruentes. Entonces los triángulos BAF y $C'AF_C$ son congruentes, por el criterio lado-ángulo-lado. Entonces los segmentos BF y $C'F_C$ son congruentes. Entonces la poligonal $C'F_CFC$ tiene la misma longitud que la suma de las distancias de F a los vértices A, B y C. Si consideramos el punto F móvil, entonces cuando F esté alineado con

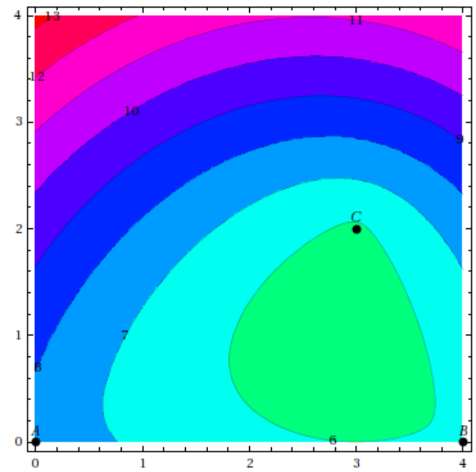

FIGURA 0.3. Curva de nivel donde se dibuja los vértices del triángulo

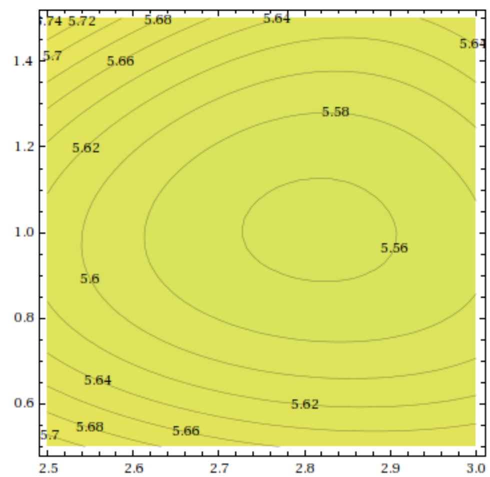

FIGURA 0.4. Curva de nivel más especializada

C, F_C y C', la poligonal $C'F_CFC$ tendrá la menor longitud. Pero cuando esto suceda, $\widehat{AFC} = 180°$ como esperábamos.

Problemas de optimización de áreas y volúmenes. Un problema que usualmente, pero no siempre por ejemplo [Vasiliev et al. (1980)], se resuelve con el auxilio del cálculo diferencial usando el método de los multilpicadores de Lagrange, es el siguiente:

Sea A un punto del primer cuadrante. Entre todos los triángulos que tienen al punto A en uno de sus lados, y los lados restantes sobre los ejes de coordenadas, encontrar el de menor área.

Una explicación breve puede ser la siguiente: Considere la figura 0.6

Tomemos un punto A de coordenadas (a, b) como en la figura 0.6. Sea el triángulo OED de tal modo que el segmento AE sea mayor que el segmento AD. Sea D' el simétrico de D con respecto al punto A y B el punto de intersección de la abscisa con su perpendicular desde D. Sea C la intersección de la recta AB con la ordenada. Notemos que los triángulos ACD y ABD' son congruentes y por tanto OBC es menor en área que OED. Naturalmente, si el segmento AE es menor que el segmento AD, la situación sería análoga. De esto se sigue que de todos los triángulos que pasan por el punto A

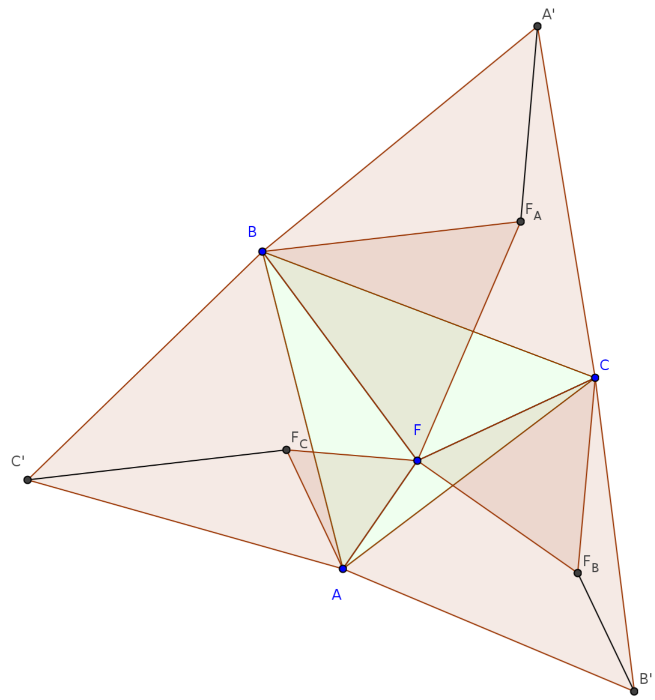

FIGURA 0.5. Resolución geométrica

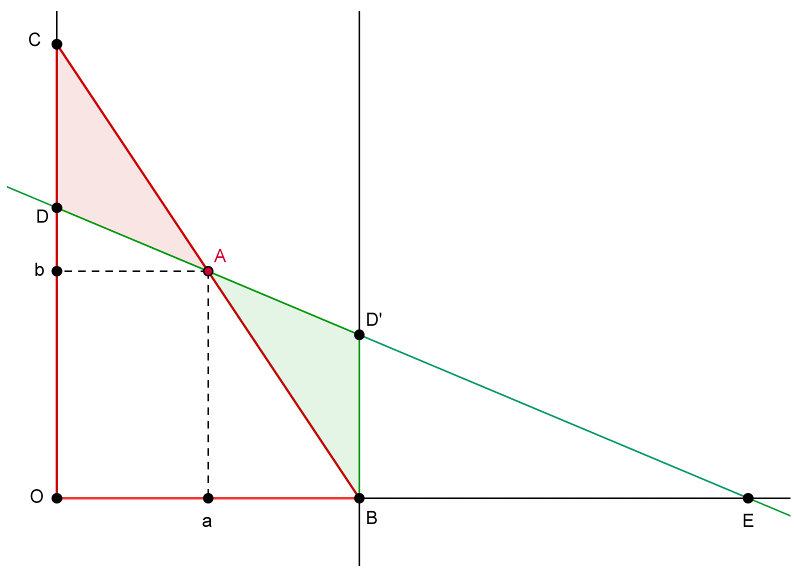

FIGURA 0.6. Área mínima

y tienen los otros lados sobre los ejes coordenados el de menor área es el que tiene a A como punto medio.

Es notable que como corolario de este resultado se resuelve geométricamente el siguiente problema:

Sea A un punto del primer octante. Entre todos los tetraedros que tienen al punto A en una de sus caras, y los caras restantes sobre los plano coordenados, encontrar el de menor área.

Una solución detallada se encuentra en [Egüez (2012)], pero se basa en aplicar la resolución del problema anterior varias veces. Es sorprendente encontrar que el tetraedro que minimiza el volumen es aquel que tiene al punto A como *baricentro* de una de sus caras.

Palabras Finales. La optimización con métodos de geometría elemental sintética tiene por si el valor de la economía de recursos. Además, es común que en el medio de una resolución algebraica o analítica es común perderse del centro del problema en la maraña de cálculos. Por otro lado, con los recursos gráficos y con la posibilidad de explorar una determinada situación geométrica con soft educativo y libre, la enseñanza se vuelve cualitativamente superior a la que se impartía en otras épocas. Estas son las razones que impulsaron a los autores de este trabajo a presentar este material

Referencias

Boyer, C. and Merzbach, U. (2011). *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons.

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de geometría.* Matemáticas. Geometria. Limusa.

Coxeter, H. and Greitzer, S. (1996). *Geometry Revisited.* Number v. 19 in New Mathematical Library. Mathematical Association of America.

Egüez, C. Sángari, A. (2012). Optimización sin cálculo diferencial.

Pastor, J., Trejo, C., and Calleja, P. (1985). *Análisis matemático.* Number v. 2. Kapelusz.

Sángari, A Egüez, C. (2012). Una síntesis del cálculo y la geometría: Localización del punto de fermat. *Revista de Educación Matemática*, 27.

Vasiliev, N., Gutenmájer, V., and Gómez, M. (1980). *Rectas y Curvas.* Mir.