Optimización con Geometría Elemental

Eje temático: Resolución de Problemas

Antonio Sángari   Cristina Egüez

Dpto. de Matemática, Fac. de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Salta

7^{as} Jornadas Nacionales de Matemática - UNLaR, 2012

Índice

Resumen

Nuestra propuesta

consiste en presentar diversas situaciones que conducen a su vez a nuevos planteos, cuya solución se busca mediante la geometría elemental.

Separaremos los problemas de optimización en dos clases,

la primera presenta planteos de posiciones óptimas que son resueltos con geometría elemental. La segunda clase muestra problemas clásicos del cálculo diferencial posibles de ser resueltos geométricamente.

Resumen

Nuestra propuesta

consiste en presentar diversas situaciones que conducen a su vez a nuevos planteos, cuya solución se busca mediante la geometría elemental.

Separaremos los problemas de optimización en dos clases,

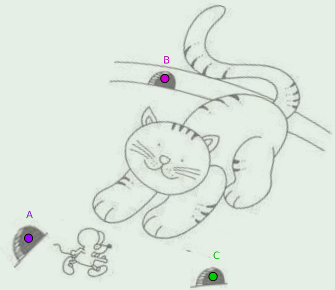
la primera presenta planteos de posiciones óptimas que son resueltos con geometría elemental. La segunda clase muestra problemas clásicos del cálculo diferencial posibles de ser resueltos geométricamente.

Índice

Planteo del Problema

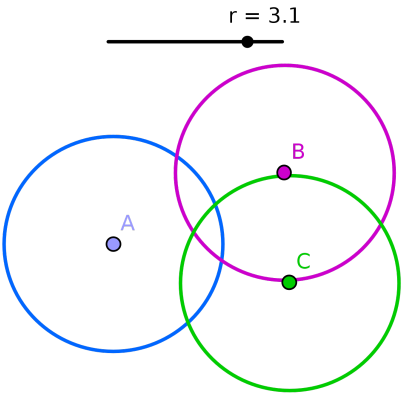
El ratoncito tiene tres salidas

de su ratonera situados en los puntos A, B y C que el gato conoce. ¿Dónde debe sentarse el gato para encontrar la menor distancia posible de la salida más lejana? [Vasiliev et al., 1980]

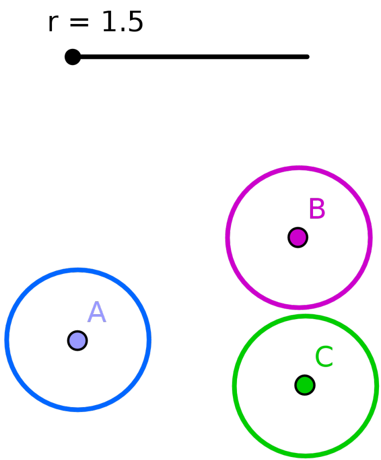


Preparación

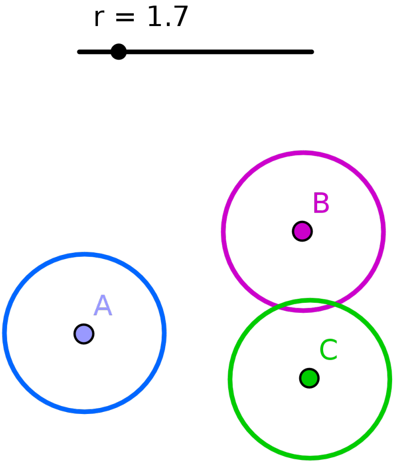
Antes de pensar en la solución, hacemos una exploración previa usando, por ejemplo, un programa como GeoGebra.



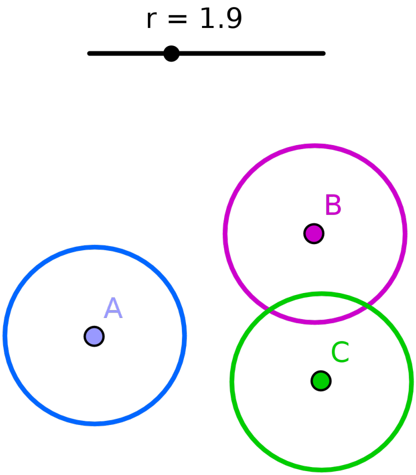
Preparación



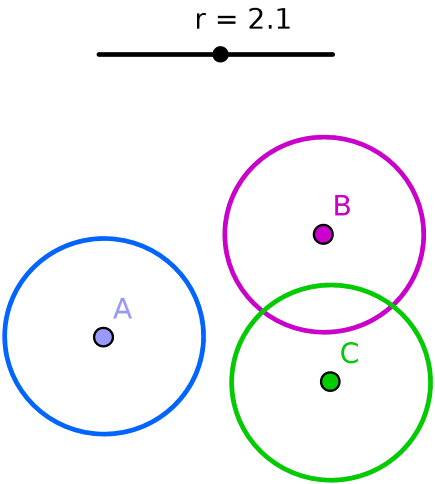
Preparación



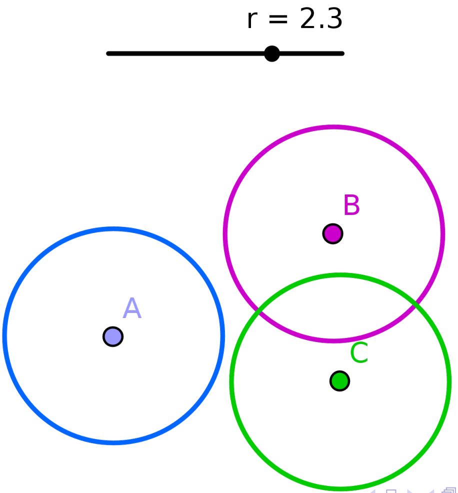
Preparación



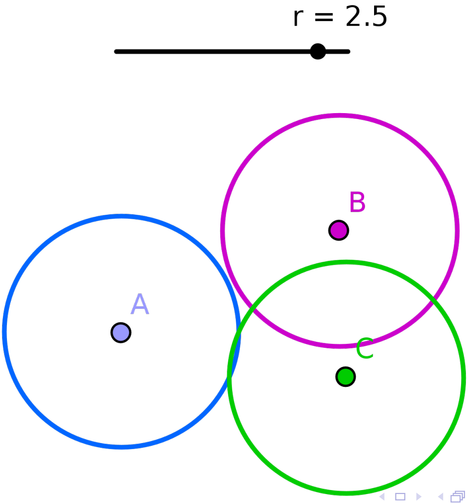
Preparación



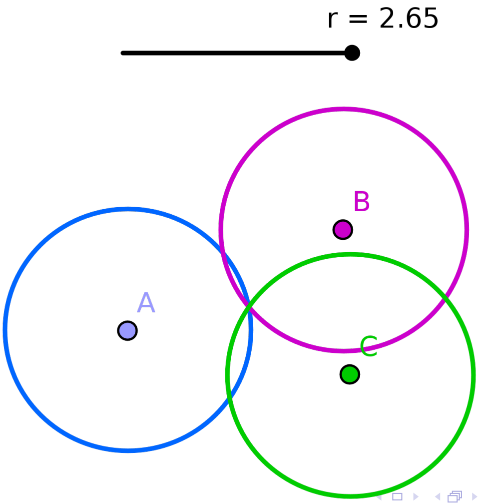
Preparación



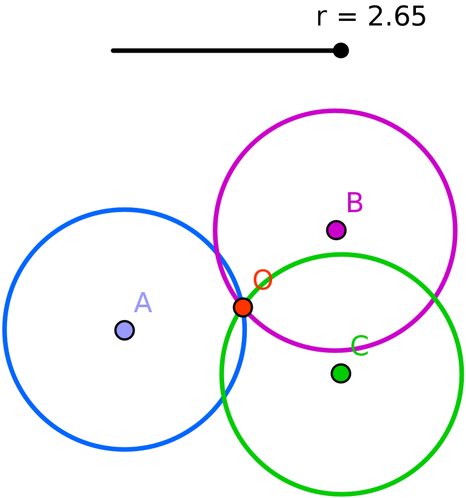
Preparación



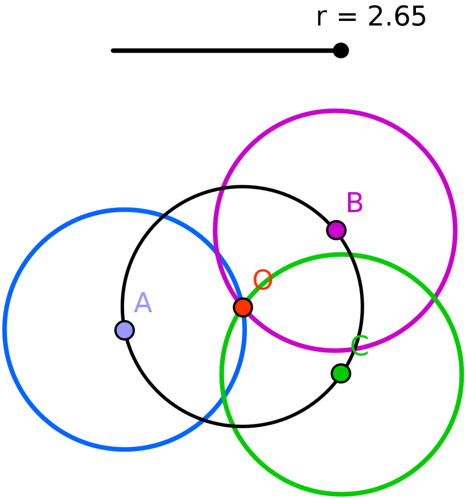
Preparación



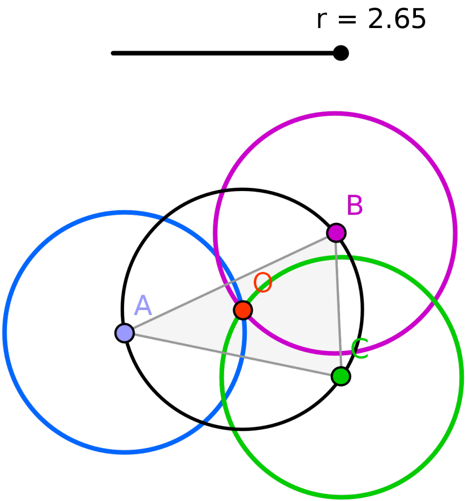
Caso 1. Triángulo acutángulo



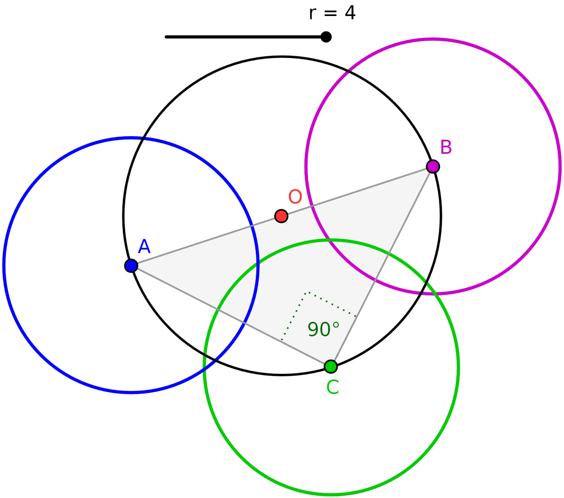
Caso 1. Triángulo acutángulo



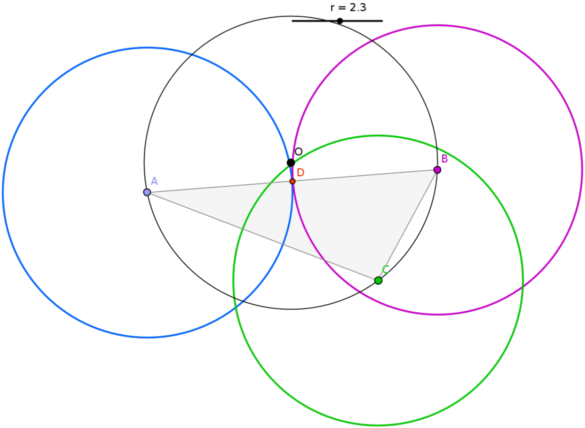
Caso 1. Triángulo acutángulo



Caso 2. Triángulo rectángulo



Caso 3. Triángulo obtusángulo



En Resumen

Si el triángulo es acutángulo

el gato debiera situarse en el circuncentro del triángulo.

Si el triángulo es rectángulo

el gato debiera situarse en el circuncentro del triángulo, es decir en el punto medio de la hipotenusa.

Si el triángulo es obtusángulo

el gato debiera situarse en el punto medio del lado mayor.

En Resumen

Si el triángulo es acutángulo

el gato debiera situarse en el circuncentro del triángulo.

Si el triángulo es rectángulo

el gato debiera situarse en el circuncentro del triángulo, es decir en el punto medio de la hipotenusa.

Si el triángulo es obtusángulo

el gato debiera situarse en el punto medio del lado mayor.

En Resumen

Si el triángulo es acutángulo

el gato debiera situarse en el circuncentro del triángulo.

Si el triángulo es rectángulo

el gato debiera situarse en el circuncentro del triángulo, es decir en el punto medio de la hipotenusa.

Si el triángulo es obtusángulo

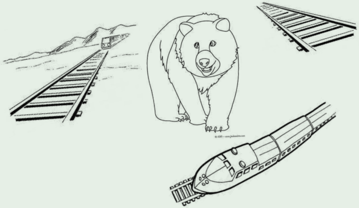
el gato debiera situarse en el punto medio del lado mayor.

Índice

Planteo del Problema

En una parte del bosque,

limitada por tres ferrocarriles rectos, vive un oso. ¿En qué punto debe hacerse la guarida para encontrarse a mayor distancia del ferrocarril más cercano? [Vasiliev et al., 1980]



Preparación

Este problema,

a diferencia del anterior, es de maximización.

Preparación

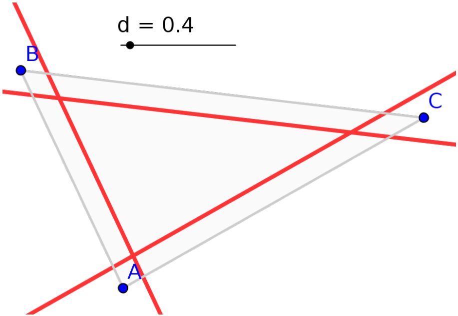
En este caso, debemos advertir que el lugar geométrico

de los puntos que equidistan de una recta dada están sobre un par de rectas paralelas.

Preparación

Se induce al estudiante

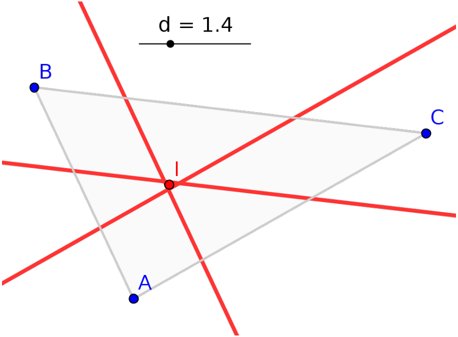
para concluir que en cada posición de las rectas paralelas, el punto buscado para la guarida del oso debe encontrarse dentro del triángulo determinado por las rectas paralelas.



Exploración

Se guía al estudiante

para que concluya que el punto buscado es el límite cuando dicho triángulo degenera en un punto.



Exploración

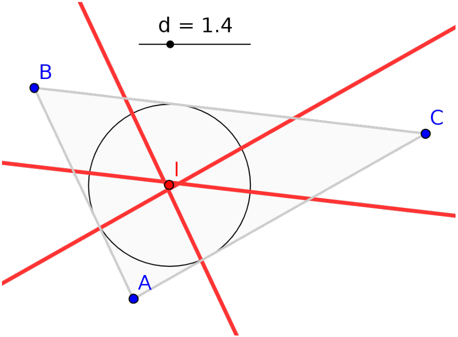
La pregunta que se puede plantear es:

Este punto, ¿es un punto característico?

Solución

Este punto se encuentra

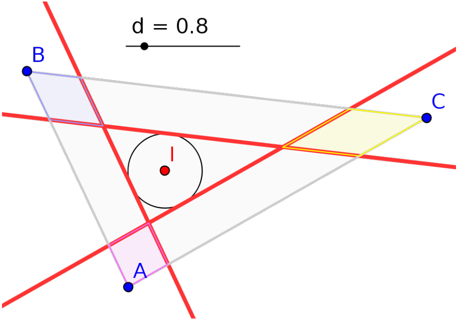
a igual distancia de los lados del triángulo. Es decir, se trata del centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Solución

Otra manera es notar que

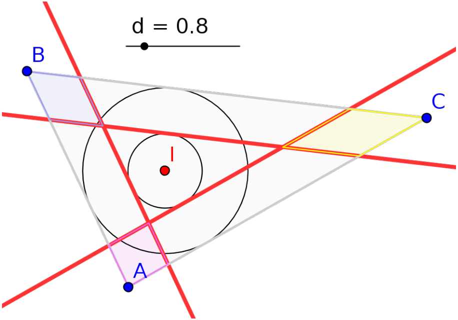
los lados con sus paralelas determinan un rombo. Se observa que la bisectriz de un ángulo de ABC pasa por el vértice opuesto del rombo correspondiente, y por tanto contiene a la bisectriz del triángulo interior.



En Resumen

Por lo tanto, el punto buscado sería

la intersección de las bisectrices del triángulo. Es decir, el punto buscado es el incentro de ambos triángulos considerados.



Índice

Planteo del Problema

Dado un triángulo,

encontrar un punto tal que la *suma* de las distancias a los vértices sea la menor

Modos de Encarar el Problema

Este tipo de problema se puede atacar

desde el punto de vista analítico como lo hace por ejemplo [Pastor et al., 1985] que es el tipo de resolución clásica.

Desde otra perspectiva

[Coxeter and Greitzer, 1996] o en [Coxeter, 1971] se llega a la solución geométrica.

Por último, si se dispone de programas

capaces de dibujar curvas de nivel se puede encontrar "gráficamente" el punto solución. Esto último se detalla en [Sángari, 2012]

Modos de Encarar el Problema

Este tipo de problema se puede atacar

desde el punto de vista analítico como lo hace por ejemplo [Pastor et al., 1985] que es el tipo de resolución clásica.

Desde otra perspectiva

[Coxeter and Greitzer, 1996] o en [Coxeter, 1971] se llega a la solución geométrica.

Por último, si se dispone de programas

capaces de dibujar curvas de nivel se puede encontrar "gráficamente" el punto solución. Esto último se detalla en [Sángari, 2012]

Modos de Encarar el Problema

Este tipo de problema se puede atacar

desde el punto de vista analítico como lo hace por ejemplo [Pastor et al., 1985] que es el tipo de resolución clásica.

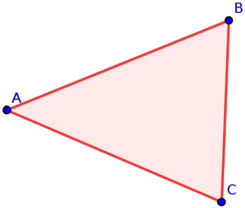
Desde otra perspectiva

[Coxeter and Greitzer, 1996] o en [Coxeter, 1971] se llega a la solución geométrica.

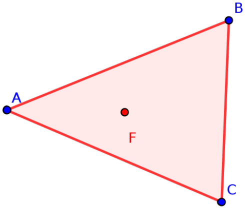
Por último, si se dispone de programas

capaces de dibujar curvas de nivel se puede encontrar "gráficamente" el punto solución. Esto último se detalla en [Sángari, 2012]

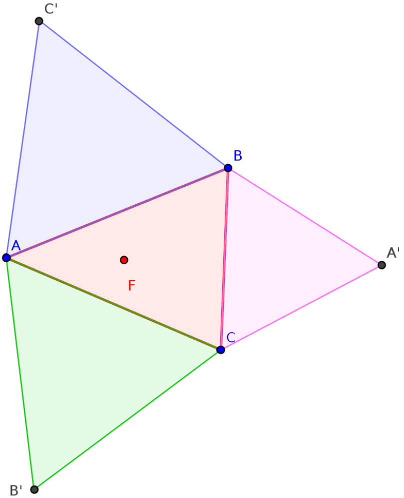
Resolución Geométrica



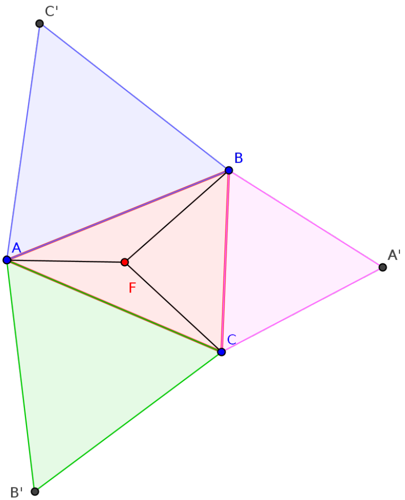
Resolución Geométrica



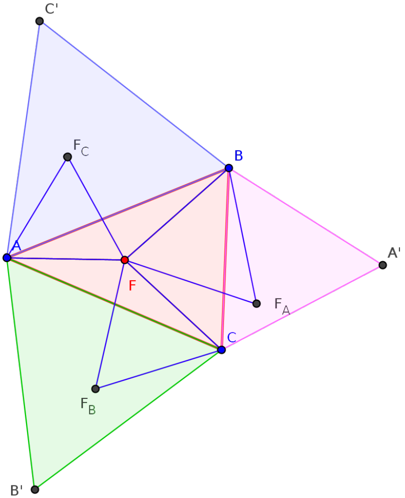
Resolución Geométrica



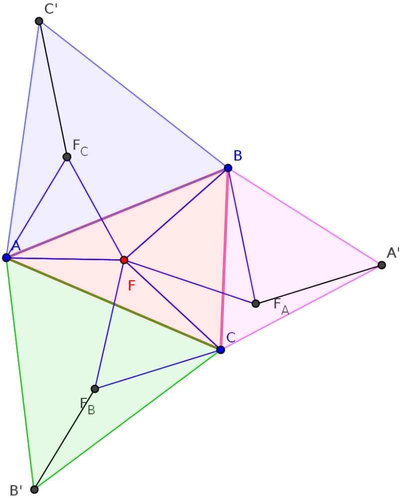
Resolución Geométrica



Resolución Geométrica

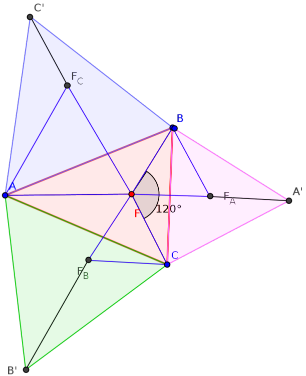


Resolución Geométrica



Resolución Geométrica

El mínimo F en un triángulo acutángulo es tal que el ángulo con vértice en este punto que subtiende a los lados del triángulo es de 120°.



Respuesta

Si el triángulo tiene todos sus ángulos menores que 120° entonces el mínimo debe estar en el interior del triángulo ABC.

El mínimo es tal que el ángulo con vértice en este punto que subtiende a los lados del triángulo es de 120°

Respuesta

Si el triángulo tiene todos sus ángulos menores que 120° entonces el mínimo debe estar en el interior del triángulo ABC.

El mínimo es tal que el ángulo con vértice en este punto que subtiende a los lados del triángulo es de 120°

Respuesta

Si el triángulo tiene todos sus ángulos menores que 120° entonces el mínimo debe estar en el interior del triángulo ABC.

El mínimo es tal que el ángulo con vértice en este punto que subtiende a los lados del triángulo es de 120°

Respuesta

Si el triángulo tiene un ángulo mayor o igual que 120° entonces el mínimo debe estar en alguno de los puntos A, B o C

El mínimo debe estar en el vértice correspondiente al ángulo agudo

Respuesta

Si el triángulo tiene un ángulo mayor o igual que 120° entonces el mínimo debe estar en alguno de los puntos A, B o C

El mínimo debe estar en el vértice correspondiente al ángulo agudo

Respuesta

Si el triángulo tiene un ángulo mayor o igual que 120° entonces el mínimo debe estar en alguno de los puntos A, B o C

El mínimo debe estar en el vértice correspondiente al ángulo agudo

Índice

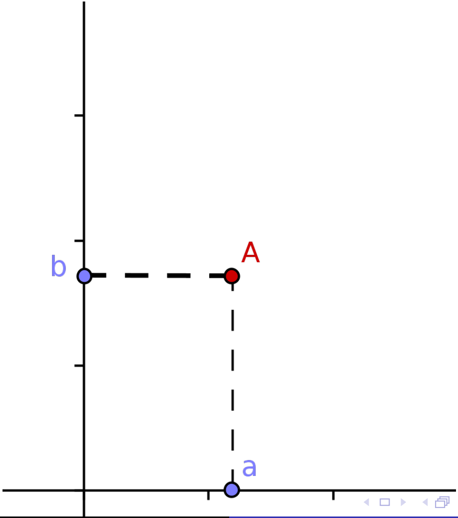
El Triángulo "Menor"

Sea A un punto del primer cuadrante.

Entre todos los triángulos que tienen al punto A en uno de sus lados, y los lados restantes sobre los ejes de coordenadas, encontrar el de menor área.

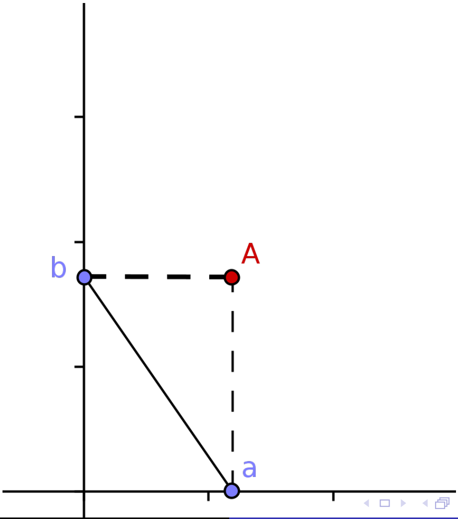
Resolución

Construimos de un triángulo con A punto medio del lado opuesto al origen



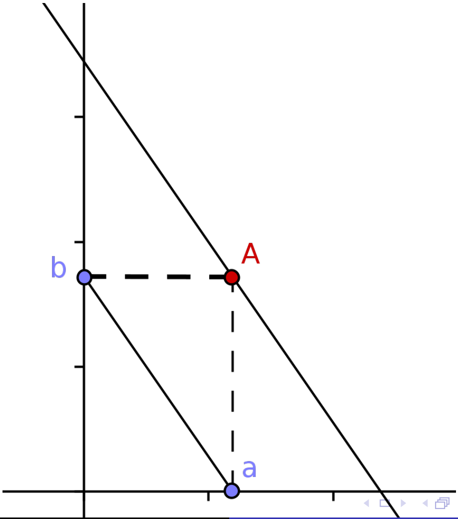
Resolución

Construimos de un triángulo con A punto medio del lado opuesto al origen



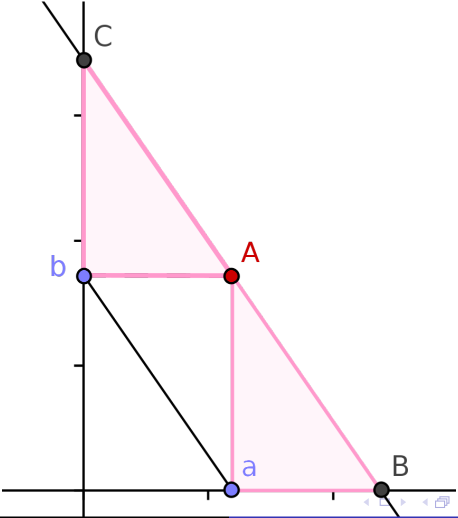
Resolución

Construimos de un triángulo con A punto medio del lado opuesto al origen



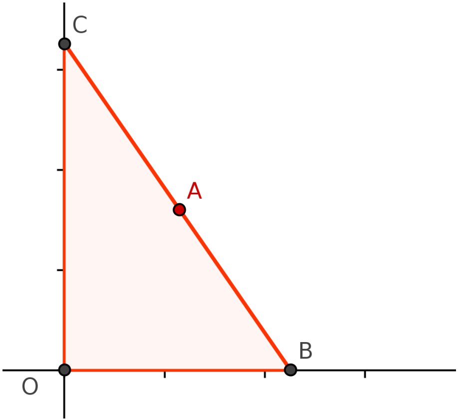
Resolución

Construimos de un triángulo con A punto medio del lado opuesto al origen



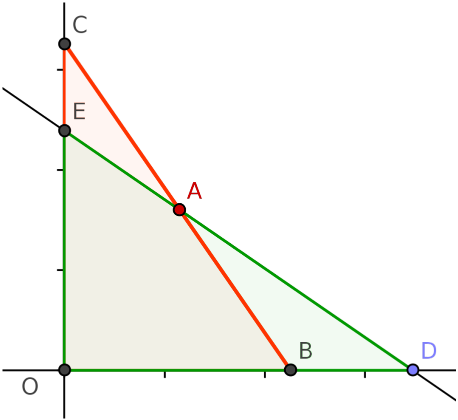
Resolución

Construimos de un triángulo con A punto medio del lado opuesto al origen



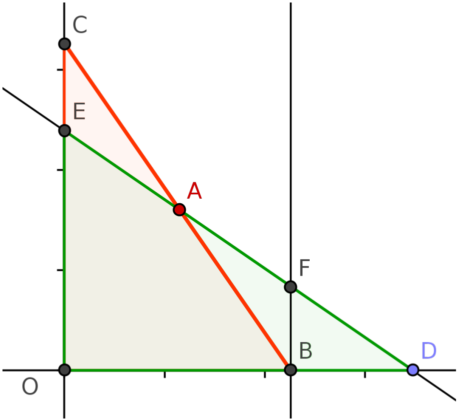
Resolución

Contruimos un triángulo tal que A está en el lado opuesto al origen pero no es punto medio



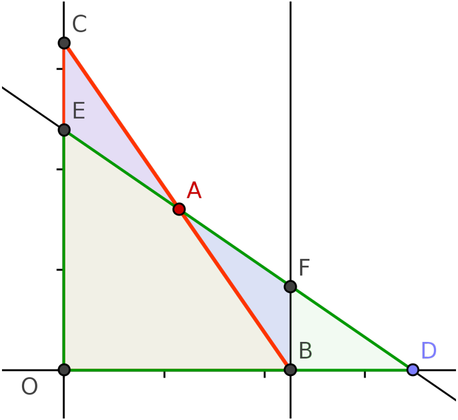
Resolución

Comparamos los triángulos



Resolución

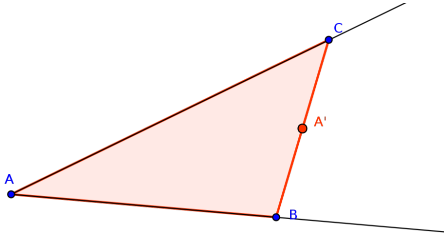
El triángulo de menor área es el que tiene a A como punto medio de la hipotenusa



Consecuencia

Teorema

Sea un ángulo A y un punto A' en el interior de A. De todos los triángulos tales que comparten el ángulo A y el lado opuesto BC contiene a A', el de menor área es el que tiene a A' como punto medio de BC.



Índice

El Tetraedro "Menor"

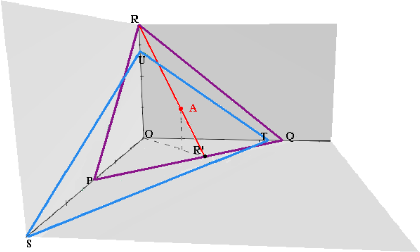
Sea A un punto del primer octante.

Entre todos los tetraedros que tienen al punto A en una de sus caras, y las caras restantes sobre los plano coordenados, encontrar el de menor volumen.

Resultado General

Teorema

Sea un ángulo triedro A de vértice O y un punto A' en el interior de A. De todos los tetraedros tales que comparten el ángulo A, y la cara opuesta a O contiene a A', el de menor volumen es el que tiene a A' como baricentro de dicha cara.



Lo que estamos haciendo

Estamos compilando

problemas de este tipo. Resolviendo algunos y tratando de resolver otros

Preparando un curso de extensión

para gente interesada en este tipo de actividad

Lo que estamos haciendo

Estamos compilando

problemas de este tipo. Resolviendo algunos y tratando de resolver otros

Preparando un curso de extensión

para gente interesada en este tipo de actividad

Lo que queremos hacer

En nuestro medio

se está planificando un nuevo plan para la carrera Profesorado en Matemática. Esperamos hacer nuestra contribución en este proyecto, particularmente en el tema de Geometría Sintética.

Por otro lado

esperamos presentar un libro que sea un compendio de problemas interesantes como estos.

Lo que queremos hacer

En nuestro medio

se está planificando un nuevo plan para la carrera Profesorado en Matemática. Esperamos hacer nuestra contribución en este proyecto, particularmente en el tema de Geometría Sintética.

Por otro lado

esperamos presentar un libro que sea un compendio de problemas interesantes como estos.

Bibliografía

Coxeter, H. (1971).
Fundamentos de geometría.
Matemáticas. Geometria. Limusa.

Coxeter, H. and Greitzer, S. (1996).
Geometry Revisited.
Number v. 19 in New Mathematical Library. Mathematical Association of America.

Pastor, J., Trejo, C., and Calleja, P. (1985).
Análisis matemático.
Number v. 2. Kapelusz.

Sángari, A. y Egüez, C. (2012).
Una síntesis del cálculo y la geometría: Localización del punto de fermat.
Revista de Educación Matemática, 27.